EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **11**, Núm. 3, 457 – 465 (1996)

Théorème de Cohen-Hewitt dans une Algèbre de Jordan-Fréchet

Mustapha Laayouni

Département de Mathématiques, Fac. des Sciences et Techniques, Université My Ismail, Errachidia, Maroc

(Research paper presented by A. Rodríguez Palacios)

AMS *Subject Class.* (1991): 46Hxx, 17Axx *Received February* 29, 1996

Introduction

Il est connu, sous le nom du théorème de Cohen-Hewitt, que si A est une algèbre de Fréchet (associative) ayant une unité approchée uniformément bornée alors tout élément z se factorise sous la forme $z = ay$ (voir [2], p. 174). Dans [1] on montre que si A est une algèbre de Jordan-Banach ayant une unité approchée bornée alors tout élément z de A peut s'écrire

$$z = U_a(y) := 2a(ay) - a^2y \tag{1}$$

Dans ce qui suit on se propose de généraliser le théorème de Chen-Hewitt aux algèbres de Jordan-Fréchet. Pour cela on intridu it la notion d'unité approchée dans une algèbre de Jordan A munie d'une topologie de Fréchet, appelée algèbre de Jordan-Fréchet, et on montre qu'une telle algèbre vérifie encore la factorisation (1). Dans le cas où A est associative (1) se réduit à $z = aya$.

1. Préliminaires

Définition 1.1. Soit A une algèbre sur le corps de nombres complexes. On dit que A est de Jordan si le produit vérifie les deux identités suivantes:

(C) $xy = yx$.

(J) $(x^2y)x = x^2(yx)$.

Exemple 1.2. Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre associative. On note A^+ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel A muni du produit de Jordan symétrique $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$. On vérifie que A^+ est une algèbre de Jordan. Toute algèbre de Jordan isomorphe à une sous algèbre de A^+ est appelée algèbre de Jordan spéciale. Une algèbre de Jordan non spéciale est dite exceptionnelle (voir [3]).

Dans toute la suite, A désigne une algèbre de Jordan sur le corp des nombres complexes. A' est l'algèbre obtenue à partir de A par adjonction d'une unité: $A' = A \oplus \mathbb{C}$.

DÉFINITION 1.3. On appelle semi-norme sur A une application p de A dans $\mathbb{R}^+$ telle que:

(i) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.

(ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

Si de plus $p(xy) \leq p(x)p(y)$ on dit que p est sous-multiplicative.

Soient p une semi-norme sous-multiplicative de A et $\ker(p)$ le noyau de p: $\ker(p) = \{x \in A \colon p(x) = 0\}$. Alors $\ker(p)$ est un idéal de A et $A_p = A/\ker(p)$ est une algèbre normée pour la topologie quotient définie par la norme:

$$\bar{p}(x + \ker(p)) := \inf\{p(x+u) \colon u \in \ker(p)\} = p(x).$$

Notons par $\bar{A}_p$ l'algèbre de Jordan-Banach obtenue à partir de A_p par complétion. Soit π_p la composée de la surjection canonique de A sur A_p et de l'injection canonique de A_p dans $\bar{A}_p$.

Toute semi-norme p de A détermine une semi-norme p' sur A' par $p'(x + a) = p(x) + |a|$. p et p' ont le même noyau.

DÉFINITION 1.4. On dit que A est une algèbre de Jordan-Fréchet si A est munie d'une topologie complète définie par une suite de semi-normes $(\|\cdot\|_n)_{n\geq 1}$ sous-multiplicatives telles que:

(i) $\|x\|_n \leq \|x\|_{n+1}$, $\forall x \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\cap_{n\geq 1} \ker(\|\cdot\|_n) = \{0\}$.

A' est munie de la topologie de Jordan-Fréchet engendrée par la suite de semi-normes déterminées par: $\|x + \alpha\|_n = \|x\|_n + |\alpha|$ pour tout $n \geq 1$, $x \in A$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Les spaces de Fréchet vérifient plusieurs théorèmes fleurissants de l'analyse fonctionnelle tels que par example les théorèmes du graphe fermé et de l'image ouverte (voir [4] et [5]). Dans la suite on utilisera la proposition suivante:

PROPOSITION 1.5. *Soit A une algèbre de Jordan-Fréchet munie d'une topologie définie par une suite de semi-normes $(\|\cdot\|_n)_{n\geq 1}$. Alors, un élément x est inversible dans A' si et seulement si, $\forall n \geq 1$, $\pi_n(x)$ est inversible dans $\overline{A'}_n$. Une condition sufficient pour que x soit inversible est que $\|1-x\|_n < 1$, $\forall n \geq 1$.*

Preuve. Si on note $\mathrm{Inv}\,(A')$ l'ensemble des éléments inversibles de A' alors $x \in \mathrm{Inv}\,(A')$ si et seulement si $\pi_n(x) \in \mathrm{Inv}\,(\overline{A'}_n)$, $\forall n \geq 1$ (voir [4]). Or pour tout $n \geq 1$, $\overline{A'}_n$ est une algèbre de Jordan-Banach, donc si $\|1-x\|_n < 1$ alors la série $\sum_{k\geq 0}(1-\pi_n(x))^k$ est convergente et on montre que sa limite est l'inverse de $\pi_n(x)$. ∎

Soit B une partie de A. B est bornée si $\forall p \geq 1$, $\sup_{b\in B}\|b\|_p$ est fini. B est uniformément bornée s'il existe une constante réelle R telle que $\sup_{p\geq 1, b\in B}\|b\|_p \leq R$.

DÉFINITION 1.6. Soient A une algèbre de Jordan-Fréchet munie d'une topologie définie par une suite de semi-normes $(\|\cdot\|_n)_{n\geq 1}$ et $F = \{e_i : i \in I\}$ une partie bornée de A. On dit que F est une unité approchée bornée de A si les conditions suivantes sont satisfaites:

1) I est filtrant à droite (c'est-à-dire, I est munie d'un préordre tel que $\forall \alpha, \beta \in I$, $\exists \delta \in I$ avec $\alpha \leq \delta$ et $\beta \leq \delta$).
2) $\forall p \geq 1$, $\forall x \in A$, $\lim_i \|e_i x - x\|_p = 0$.
3) $\forall p \geq 1$, $\forall x \in A$, $\lim_i \|U_{e_i}(x) - x\|_p = 0$.

Si A est une algèbre de Fréchet associative ayant une unité approchée bornée à gauche et à droite $F = \{e_i : i \in I\}$. Alors F est une unité approchée bornée de l'algèbre de Jordan-Fréchet A^+.

2. THÉORÈME DE FACTORISATION

En utilisant la définition 1.6 et des propriétés de l'opérateur U_α, on montre le lemme suivant:

LEMME 2.1. *Soient A une algèbre de Jordan-Fréchet munie d'une topologie définie par une suite de semi-normes $(\|\cdot\|_p)_{p\geq 1}$, $F = \{e_i : i \in I\}$ une unité approchée uniformément bornée par K de A, e un élément de F et c un réel positif tel que $c < \frac{1}{K+1}$. Alors les propriétés suivantes sont satisfaites:*

1) $U_{1-c+ce}(x) = x + c^2(U_e(x) - x) + 2c(1-c)(e-1)x;\ \forall x \in A'$.

2) U_{1-c+ce} *est un opérateur inversible de* A'.

3) $\forall x \in A$, $\forall p \geq 1$, $\lim_i \|U_{1-c+ce_i}(x) - x\|_p = 0$.

4) $\{U^{-1}_{1-c+ce_i} : i \in I\}$ *est uniformément bornée par un nombre réel positif* R.

5) $\forall x \in A$, $\forall p \geq 1$, $\lim_i \left\|U^{-1}_{1-c+ce_i}(x) - x\right\|_p = 0$.

Preuve. 1)

$$\begin{aligned}
U_{1-c+ce_i}(x) &= U_1(x) + U_{-c+ce_i}(x) + 2c(e-1)x \\
&= x + c^2 U_{1-c}(x) + 2c(e-1)x \\
&= x + c^2[2(1-c)(1-e)x - (1-e)^2 x] + 2c(e-1)x \\
&= x + c^2(U_e(x) - x) + 2c(c-1)(1-e)x.
\end{aligned}$$

2) Puisque A est une algèbre de Jordan unitaire, on a

$$U_{1-c+ce} \in \operatorname{Inv}(L(A')) \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - c + ce \in \operatorname{Inv}(A')$$

où $L(A')$ est l'algèbre des opérateurs de A'. Ce qui est équivalent à:

$$\forall n \geq 1,\ \pi_n(1 - c + ce) \in \operatorname{Inv}(\overline{A'}/\ker \|\cdot\|_n).$$

Or, pour tout $n \geq 1$, $\overline{A'}_n$ est une algèbre de Jordan-Banach, donc une condition suffisante pour que $1 - c + ce$ soit inversible est que $\|\pi_n(1-c+ce) - 1\|_n < 1$. Ce qui est vraie si $c < \frac{1}{1+K}$, car $\|\pi_n(1-c+ce) - 1\|_n = \|1 - c + ce - 1\|_n \leq c(1+K) < 1$.

3) Soient $x \in A$, $p \geq 1$. On a:

$$\begin{aligned}
\|U_{1-c+ce_i} - x\|_p &= \|c^2(U_{e_i}(x) - x) + 2c(c-1)(1-e_i)x\|_p \\
&\leq c^2\|U_{e_i}(x) - x\|_p + 2c(1-c)\|e_i x - x\|_p \longrightarrow_I 0.
\end{aligned}$$

4) $\forall p \geq 1$, $\forall i \in I$,

$$\begin{aligned}
\|U^{-1}_{1-c+ce_i}\|_p &= \|U_{(1-c+ce_i)^{-1}}\|_p \\
&= \|U_{\pi_p(1-c+ce_i)^{-1}}\|_p \\
&\leq 3\|\pi_p(1-c+ce_i)\|_p^2
\end{aligned}$$

Dans l'algèbre de Jordan-Banach $\overline{A'}_p$ on a:

$$(1 - c + c\pi_p(e_i))^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} c^k(1 - \pi_p(e_i))^k,$$

donc:

$$\begin{aligned}\|U^{-1}_{1-c+ce_i}\|_p &\leq 3\left\|\sum_{k=0}^{+\infty} c^k(1-\pi_p(e_i))^k\right\|_p^2 \\ &= 3\left[\sum_{k=0}^{+\infty} c^k(1+K)^k\right]^2 = R\in\mathbb{R},\end{aligned}$$

puisque $c(1+K)<1$.

5) $\forall p\geq 1$, $\forall x\in A$,

$$\begin{aligned}\|U^{-1}_{1-c+ce_i}(x)-x\|_p &= \|U^{-1}_{1-c+ce_i}(x)-U^{-1}_{1-c+ce_i}U_{1-c+ce_i}x\|_p \\ &\leq R\|x-U_{1-c+ce_i}(x)\|_p \longrightarrow_I 0,\end{aligned}$$

d'après 3). ∎

THÉORÈME 2.2. *Soit A une algèbre de Jordan-Fréchet ayant une unité approchée uniformément bornée (i.e., $\sup_{i\in I,p\geq 1}\|e_i\|_p\leq K$, $K\in\mathbb{R}$). Alors, pour tout z dans A, pour tout $j_0=1,2,3,\ldots$ et pour tout voisinage V de zéro dans A, il existe une constante réelle $M(K)$ et deux élements a et y de A qui vérifient les conditions suivantes:*

1) $z=U_a(y)$.
2) $y-z\in V$.
3) $y\in\overline{U_{A'}(z)}$.
4) $\sup_{p\leq j_0}\|a\|_p\leq M(K)$.

Preuve. Fixons $z\in A$, $j_0\geq 1$ et c un réel strictement positif tel que $c<\frac{1}{1+K}$. Puisque $V_i=\{x\in A\colon \|x\|_p<i^{-1}\}$, $i=1,2,\ldots$, est un système fondamentale de voisinages de zèro il existe $i_0\geq j_0$ tel que $V_{i_0}\subset V$. Soit $\delta\in\mathbb{R}$ tel que $0<\delta<i_0^{-1}$.

On pose $a_0=1$. Soient $e_i\in F$ et $a_1=U_{1-c+ce_1}(a_0)$. Par induction on construit une suite $(e_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de F. On suppose que $e_1,\ldots,e_n$ sont choisis et on considère $e_{n+1}\in F$ tel que les conditions (C_1), (C_2) et (C_3) suivantes soient satisfaites:

Par récurrence on construit une suite $(a_n)_{n\geq 0}\subset A'$ telle que $a_{n+1}=U_{1-c+ce_{n+1}}(a_n)$. Montrons que $\forall n\geq 0$, $\exists d_n\in A\,/\,a_n=(1-c)^{2n}+a'_n$:

$a_0 = 1 = (1-c)^0 + 0$. Supposons que la propriété est vraie pour $n \geq 0$; alors

$$a_{n+1} = U_{1-c+ce_{n+1}}((1-c)^{2n} + a'_n) = (1-c)^{2(n+1)} + c^2(1-c)^{2n}e_{n+1} + U_{1-c+ce_{n+1}}(a'_n) + 2c(1-c)^{2n}e_{n+1},$$

de sorte que $a_{n+1} = (1-c)^{2(n+1)} + a'_{n+1}$ avec $a'_{n+1} \in A$ puisque A est un idéal de A'. Par ailleurs

$$\begin{aligned} \|a_{n+1} - a_n\|_p &= \|(1-c)^{2n}[(1-c)^2 + 2c(1-c)e_{n+1} + c^2e^2_{n+1}] \\ &\quad + U_{1-c+ce_{n+1}}(a'_n) - (1-c)^{2n} - a'_n\|_p \\ &\leq (1-c)^{2n}\|(1-c)^2 + 2c(1-c)e_{n+1} + c^2e_{n+1} - 1\|_p \\ &\quad + \|U_{1-c+ce_{n+1}}(a'_n) - a'_n\|_p \\ &\leq (1-c)^{2n}\left(1 + (1+c)^2 + 2c(1+c)K + c^2K^2\right) \\ &\quad + \|U_{1-c+ce_{n+1}}(a'_n) - a'_n\|_p; \end{aligned}$$

on impose à e_{n+1} la première condition suivante:

$$(C_1) \qquad \|U_{1-c+ce_{n+1}}(a'_n) - a'_n\|_{i_0+n} \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Puisque $c \in]0,1[$, si e_{n+1} vérifie (C_1), la série $\sum_{n\geq 0} \|a_{n+1} - a_n\|_p$ est convergente et la suite $(a_n)_n$ est de Cauchy dans l'algèbre de Jordan-Fréchet A'.

Soit a sa limite dans A'. Puisque A est une sous-algèbre fermée de A' et que $a_n = (1-c)^{2n} + a'_n$ avec $a'_n \in A'$ pour tout $n \geq 1$, on a $a = \lim_{n\to\infty} a'_n \in A$.

Pour tout $n \geq 1$, $y_n = U^{-1}_{a_n}(z) \in A$. On choisit e_{n+1} tel que la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ soit de Cauchy dans A par les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - y_n\|_p &= \|U^{-1}_{a_{n+1}}(z) - U^{-1}_{a_n}(z)\|_p \\ &= \|U^{-1}_{1-c+ce_{n+1}(a_n)}(z) - U^{-1}_{a_n}(z)\|_p \\ &= \|U^{-1}_{1-c+ce_{n+1}}U^{-1}_{a_n}U^{-1}_{1-c+ce_{n+1}}(z) - U^{-1}_{a_n}(z)\|_p \\ &\leq \|U^{-1}_{1-c+ce_{n+1}}U^{-1}_{a_n}U^{-1}_{1-c+ce_{n+1}}(z) - U^{-1}_{1-c+ce_{n+1}}U^{-1}_{a_n}(z)\|_p \\ &\quad + \|U^{-1}_{1-c+ce_{n+1}}U^{-1}_{a_n}(z) - U^{-1}_{a_n}(z)\|_p \\ &\leq \|U^{-1}_{1-c+ce_{n+1}}\|_p\|U^{-1}_{a_n}\|_p\|U^{-1}_{1-c+ce_{n+1}}(z) - z\|_p \\ &\quad + \|U^{-1}_{1-c+ce_{n+1}}(Z) - Z\|_p, \end{aligned}$$

où $Z = U^{-1}_{a_n}(z) \in A$ et Z ne dépend pas de e_{n+1}. On choisit e_{n+1} dans F de sorte que les conditions suivantes soient accomplies:

$$(C_2) \qquad \|U^{-1}_{1-c+ce_{n+1}}(z) - z\|_{i_0+n} \leq \frac{2^{-(n+2)}\delta}{R\|U^{-1}_{a_n}\|_{i_0+n}},$$

où R est donné par 4) du lemme 2.1,

$$(C_3) \qquad \|U^{-1}_{1-c+ce_{n+1}}(z) - z\|_{i_0+n} \leq \frac{\delta}{2^{n+2}}.$$

Pour tout $p \geq 1$ on a:

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0, n\geq p-i_0} \|y_{n+1} - y_n\|_p &\leq \sum_{n\geq 0, n\geq p-i_0} \|y_{n+1} - y_n\|_{i_0+n} \\ &\leq \sum_{n\geq 0, n\geq p-i_0} \frac{\delta}{2^{n+1}} \\ &\leq \sum_{n\geq 0} \frac{\delta}{2^{n+1}} = \delta.\end{aligned}$$

Donc la série $\sum_{n\geq 0} \|y_{n+1} - y_n\|_p$ est convergente. D'où $(y_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy pour la semi-norme $\|\cdot\|_p$ et ce-ci pour tout $p \geq 1$. Soit alors $y \in A$ tel que $y = \lim_{n\to\infty} y_n$.

Du faite que $z = U_{a_n}(y_n)$, pour tout $n \geq 0$, et que l'application $(u, v) \longrightarrow U_u(v)$ est continue, on déduit que $y = U_{A'}(z)$.

$$y = \lim_n U^{-1}_{a_n}(z) \quad \Longrightarrow \quad y \in \overline{U_{A'}(z)}.$$

Puisque $y_0 = z$,

$$\begin{aligned}\|y - z\|_{i_0} &= \lim_n \|y_n - z\|_{i_0} \\ &\leq \lim_n \left(\|y_n - y_{n-1}\|_{i_0} + \|y_{n-1} - y_{n-2}\|_{i_0} + \cdots + \|y_1 - y_0\|_{i_0}\right) \\ &\leq \sum_{n\geq 0} \|y_{n+1} - y_n\|_{i_0+n} \\ &\leq \sum_{n\geq 0} \frac{\delta}{2^{n+1}} \\ &\leq \delta \leq i_0^{-1}.\end{aligned}$$

Donc $y - z \in V_{i_0} \subset V$.

$$\begin{aligned}\|a\|_{i_0} &= \lim_n \|(a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1}) + \cdots + (a_1 - a_0) + a_0\|_{i_0} \\ &\leq 1 + \sum_{n\geq 0} \|a_{n+1} - a_n\|_{i_0+n}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 1+\sum_{n\geq 0}\left[(1-c)^{2n}(1+(1+c)^2+2c(1+c)K+c^2K^2)\right.\\
&\quad\left. +\ \|U_{1-c+ce_{n+1}}(a'_n)-a'_n\|_{i_0+n}\right]\\
&\leq 1+\sum_{n\geq 0}\left[(1-c)^{2n}(1+(1+c)^2+2c(1+c)K+c^2K^2)+\frac{1}{2^{n+1}}\right]\\
&\leq M(K).
\end{aligned}
$$

Dans la preuve précédente, toutes les convergences ponctuelles utilisées pour un élément z seront uniformes sur toute partie compacte Z de A, donc on peut démontrer aisément le thérorème de la factorisation multiple suivant:

THÉORÈME 2.3. *Sous les hypothèses du théorème2.2, pour tout compact Z de A, il existe une constante réelle $M(K)$ et is existe $a \in A$ et $Y \subset A$ tels que:*

1) $\forall z \in Z,\ \exists y_z \in Y \ /\ z = U_a(y)$.
2) $\forall z \in Z,\ y_z - z \in V$.
3) $y_z \in \overline{U_{A'}(z)}$.
4) $\sup_{p\leq j_0} \|a\|_p \leq M(K)$.

Un cas particulier du théorème 2.3 est obtenu en prenant pour le compact Z l'ensemble $Z = \{z_n\colon n \geq 1\} \cup \{z\}$ où $(z_n)_{n\geq 1}$ est une suite qui converge vers z dans A. Alors il existe $a, y \in A$ et $(y_n)_{n\geq 1} \subset A$ tels que $y = \lim_n y_n$ et $z_n = U_a(y_n)$ pour tout $n \geq 1$.

Cette situation se présente lorsque par example l'algèbre A admet une unité approchée uniformément bornée qui est dénombrable $F = \{e_n\colon n \geq 1\}$. On prendra $z_n = \frac{e_n}{n}$, $n \geq 1$, qui converge dans A vers zéro. Donc il existe $a \in A$ et $(y_n)_{n\geq 1} \subset A$ tels que $\frac{e_n}{n} = U_a(y_n)$. Alors $A = \overline{U_a(A)}$. En effet: $\overline{U_a(A)} \subset A$ et, pour tout $z \in A$,

$$
\begin{aligned}
z = \lim_n U_{e_n}(z) &= \lim_n U_{e_n/n}(n^2 z) = \lim_n U_{U_a(y_n)}(n^2 z)\\
&= \lim_n U_a U_{y_n} U_a(n^2 z) \in \overline{U_a(A)}.
\end{aligned}
$$

Remarque 2.4. Soit A une algèbre de Jordan-Banach (i.e., A est munie d'une topologie d'algèbre normée complète) ayant une unité approchée bornée. A est une algèbre de Fréchet munie d'une seule semi-norme qui est dans ce cas une norme. Alors A vérifie un théorème de type 2.2.

3. Cas Associatif

Soit A une algèbre de Fréchet (associative) ayant une unité approchée à gauche et à droite F, uniformément bornée. Notons $J := A^+$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel A muni du produit symmétrique de Jordan $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$. Pour les semi-normes définissant la toplogie de A, J est une algèbre de Jordan-Fréchet et F est une unité approchée uniformément bornée pour J selon la définition 1.6. Du théorème 2.2 on déduit la factorisation suivante:

Théorème 3.1. *Soit A une algèbre de Fréchet (associative) ayant une unité approchée uniformément bornée à gauche et à droite. Soit $z \in A$. Alors pour tout $j_0 = 1, 2, \ldots$ et pour tout voisinage V de zéro dans A on a:*

1) $z = aya$.
2) $\sup_{p \le j_0} \|a\|_p \le K$ *et si* $K = 1$, $\sup_p \|a\|_p \le 1$.
3) $y \in \overline{A'zA'}$, *où* $A'zA' = \{azb \colon a, b \in A'\}$.
4) $y - z \in V$.

Remarque 3.2. Dans la preuve du théorème 2.2 l'hypothèse que l'unité approchée soit uniformément bornée est indispensable afin que les opérateurs U_{1-c+ce_i}, $i \in I$, soient inversibles. Ainsi une question naturelle se pose: Est-ce que le théorème de Cohem-Hewitt pour une algèbre de Jordan-Fréchet reste vraie si on suppose que l'unité approchée soit seulement bornée?

Références

[1] Akkar, M. et Laayouni, M., Théorème de factorisation pour les algèbres de Jordan-Banach, a apparaître dans *Collectanea Mathematicae.*

[2] Doran, S. and Wichman, J., "Approximate Identities and Factorization in Banach Modules", Lecture Notes in Math., Vol. 768, Springer-Verlag, 1979.

[3] Jacobson, N., "Structure and Representations of Jordan Algebras", Amer. Math. Soc. Colloq. Pub. 39, Providence, 1978.

[4] Michael, E.A., "Locally Multiplicatively-Convex Topological Algebras", Mem. Amer. Math. Soc. 11, 1952.

[5] Robertson, A.P. and Robertson, W., "Topological Vector Spaces", Cambridge at the University Press, London, 1979.