EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **10**, Núm. 2, 168 – 178 (1995)

Genres Multiplicatifs et Opérations de Steenrod

A. Kheldouni et F. Lamrini

Dépt. de Mathematiques, Fac. des Sciences, Univ. Mohamed Benabdallah,
B.P.1796 *Fès-Atlas, Maroc*

(Presented by A. Cegarra)

AMS *Subject Class.* (1991): 55N22 *Received May* 30, 1995

Introduction

Dans [1], Adams a établi le lien entre le caractère de Chern et les opérations cohomologiques, ce qui a permi par la suite de comprendre la relation entre la classe de Wu et les polynômes de Todd. En effet, Atiyah et Hirzebruch ont donné dans [2], l'expression de l'automorphisme de cohomologie de Steenrod $\mathcal{P} = \sum \mathcal{P}^i$ en fonction des polynômes de Todd réduit modulo un nombre premier q. Par ailleurs, cette relation a été trés utile pour exprimer le caractère de Todd modulo q, en termes d'opérations de Steenrod (voir [8, Proposition 3.2]).

La lecture de [2] suggère la question suivante: étant donné un anneau sans torsion R et μ une classe exponentielle de $\mathrm{H}^*(-;\mathbb{Z}_q \otimes R)$ avec q un nombre premier non inversible dans R, peut-on trouver un automorphisme de cohomologie λ pour la théorie $\mathrm{H}^*(-;\mathbb{Z}_q \otimes R)$, dont la classe de Wu correspondante soit égale à μ. On sera alors en mesure de donner des relations analogues à celles des polynômes de Todd, dans le cas des polynômes elliptiques $E_n(p_1, \dots, p_n)$ associés au genre elliptique. On pose $f = q^{\frac{1}{q-1}}$, $g(X)$ le logarithme d'un genre $\varphi : MU \to R$, et $\tilde{g}(X) = (1/f^k)g(f^k X)$. Nous démontrons alors le résultat suivant:

Théorème. *Si la réduction modulo q de la série $\tilde{g}(X)$ est de la forme $\sum_{i\geq 0} a_i X^{q^i}$ avec $a_i \in \mathbb{Z}_q \otimes R$ (i.e., elle est q-typique relativement au groupe formel additif), alors il éxiste un automorphisme de cohomologie λ pour $\mathrm{H}^{**}(-;\mathbb{Z}_q \otimes R)$, tel que* $\mathrm{Wu}(\lambda) \equiv \sum_{n\geq 0} f^{kn} K_n^{\varphi}(p_1, \dots, p_n) \mod (q)$.

Ce résultat s'applique au cas où $g(X)$ est le logarithme du genre universel $id_{MU} : MU* \to MU*$; de plus par fonctorialité nous retrouvons les résultats de [3] dans le cas du genre de Todd, et nous donnons des résultats analogues dans le cas du genre elliptique.

Comme application, nous démontrons un résultat d'intégralité des polynômes de Hirzebruch universels et du même coup des résultats similaires dans le cas des polynômes de Todd et des polynômes elliptiques.

1. Preliminaire

Nous commençons par rappeler quelques définitions et préciser quelques notations de [2]. Dans ce qui suit, q désignera un nombre premier, et les fibrés vectoriels réels considérés seront supposés orientés dans le cas $q \neq 2$.

Définition 1.1. Un automorphisme de cohomologie est un homomorphisme d'anneaux, $\lambda = \sum_{i\geq 0} \lambda_i : \mathrm{H}^{**}(X;\mathbb{Z}_q) \to \mathrm{H}^{**}(X;\mathbb{Z}_q)$, naturel, stable, qui commute avec l'opérateur cobord et tel que $\lambda = id$ si $X = S^1$.

λ_i est la $i^{\text{ème}}$ composante de λ, $\lambda_0 = 1$. Il n'est pas difficile de voir que $\lambda_{2i+1} = 0$ pour $q \neq 2$. Par ailleurs, chaque automorphisme de cohomologie λ est caractérisé par une série formelle q-typique relativement au groupe formel additif, $\varphi_\lambda(X) = \sum_{i\geq 0} a_i X^{q^i} \in \mathbb{Z}_q[[X]]$, définie par $\varphi_\lambda(u) = \lambda(u)$, pour toute classe de cohomologie u de degré 1 ou 2, selon que q est pair ou impair. La série $\varphi_\lambda(X)$ posséde les propiétés suivantes:

(i) $\varphi_{\lambda\circ\lambda'} = \varphi_{\lambda'}\circ\varphi_\lambda$,

(ii) $\varphi_1(X) = X$.

D'autre part, un automorphisme de cohomologie λ donne lieu à une classe exponentielle $\underline{\lambda}(\xi) \in \mathrm{H}^{**}(B_\xi;\mathbb{Z}_q)$, définie pour tout fibré vectoriel réel ξ de base B_ξ par

$$\underline{\lambda}(\xi) = \phi_\xi^{*-1}\circ\lambda\circ\phi_\xi^*(1)$$

où $\phi_\xi^* : \mathrm{H}^*(B_\xi;\mathbb{Z}_q) \to \tilde{\mathrm{H}}^*(T\xi;\mathbb{Z}_q)$ est l'isomorphisme de Thom. La classe $\underline{\lambda}(\xi)$ vérifie $\underline{\lambda}(\xi \oplus \eta) = \underline{\lambda}(\xi)\underline{\lambda}(\eta)$ et $\underline{\lambda}(1) = 1$.

Notons que si $\mu(\xi)$ est une classe exponentielle, on sait lui associer une suite multiplicative (appelée aussi m-suite) de Hirzebruch (voir [3]), $K = \{K_i\}$ telle que: $\mu(\xi) = \sum K_i(w_1(\xi), \dots, w_i(\xi))$ si $q = 2$ et $\mu(\xi) = \sum K_i(p_1(\xi), \dots, p_i(\xi))$ si $q \neq 2$, où $(w_i(\xi))$ sont les classes de Stiefel-Whitney de ξ et $(p_i(\xi))$ celles de Pontrjaguin. En fait c'est la m-suite défine par la série caractéristique $\mathcal{Q}_\mu(X) \in \mathbb{Z}_q[[X]]$ donnée par: $\mathcal{Q}_\mu(w_1(\ell)) = \mu(\ell)$ ou $\mathcal{Q}_\mu(p_1(\mathfrak{p})) = \mu(\mathfrak{p})$ selon que

$q = 2$ ou non, avec ℓ un fibré vectoriel en droites réelles et $\mathfrak{p}$ un fibré vectoriel orienté en plans réels.

Si maintenant λ est un automorphisme de cohomologie, la série associée $\varphi_\lambda(X)$ est liée à la série caractéristique $\mathcal{Q}_{\underline{\lambda}}(X)$ par les formules suivantes [2]:

$$\mathcal{Q}_{\underline{\lambda}}(X) = \frac{\varphi_\lambda(X)}{X} \quad \text{si } q = 2\,, \qquad \mathcal{Q}_{\underline{\lambda}}(X^2) = \frac{\varphi_\lambda(X)}{X} \quad \text{si } q \neq 2\,. \tag{1}$$

PROPOSITION 1.2. *Soit λ un automorphisme de cohomologie et μ une classe exponentielle alors, $\lambda\circ\mu$ est une classe exponentielle de série caractéristique*: $\mathcal{Q}_{\lambda\circ\mu}(X) = \mathcal{Q}_\mu(\varphi_\lambda(X))$ *si* $q = 2$, $\mathcal{Q}_{\lambda\circ\mu}(X^2) = \mathcal{Q}_\mu(\varphi_\lambda(X)^2)$ *si* $q \neq 2$.

Démonstration. Si $q = 2$, on considére un fibré vectoriel réel ℓ de rang 1, nous avons: $\mathcal{Q}_{\lambda\circ\mu}(w_1(\ell)) = \lambda\circ\mu(\ell) = \lambda(\mathcal{Q}_\mu(w_1(\ell))) = \mathcal{Q}_\mu(\varphi_\lambda(w_1(\ell)))$.

Si $q \neq 2$, soient $\mathfrak{p}$ un fibré vectoriel réel de rang 2, p_1 sa première classe de Pontryagin et e sa classe d'Euler. Nous avons: $\mathcal{Q}_{\lambda\circ\mu}(e^2) = \mathcal{Q}_{\lambda\circ\mu}(p_1) = \lambda\circ\mu(\mathfrak{p})$ $= \lambda(\mathcal{Q}_\mu(p_1)) = \mathcal{Q}_\mu(\lambda(p_1)) = \mathcal{Q}_\mu(\lambda(e^2)) = \mathcal{Q}_\mu(\lambda(e)^2) = \mathcal{Q}_\mu(\varphi_\lambda(e)^2)$. ∎

En particulier, si on prend pour μ la classe exponentielle $\underline{\lambda}$ associée à l'automorphisme de cohomologie λ, on déinit la classe de Wu de λ par $Wu(\lambda) = \lambda^{-1}\circ\underline{\lambda}$ et nous avons, grâce à la proposition 1.2 et à (1):

$$\mathcal{Q}_{Wu(\lambda)}(X) = \frac{X}{\varphi_\lambda^{-1}(X)} \quad \text{si } q = 2\,, \qquad \mathcal{Q}_{Wu(\lambda)}(X^2) = \frac{X}{\varphi_\lambda^{-1}(X)} \quad \text{si } q \neq 2\,.$$

2. GENRE ET AUTOMORPHISME DE COHOMOLOGIE

Soit MU_* l'anneau de bordisme complexe, R un anneau unitaire sans torsion et $\varphi : MU_* \to R$ un genre (i.e., un homomorphisme d'anneau). Rappelons que $MU_* \otimes \mathbb{Q} \approx \mathbb{Q}[[\mathbb{C}P^1], [\mathbb{C}P^2], \dots]$; ainsi, la donnée d'un genre φ est équivalente à celle d'une série formelle $g_\varphi(X) = \sum_{n\geq 0} \frac{\varphi([\mathbb{C}P^n])}{n+1} X^{n+1}$ appelée logarithme du genre φ. D'autre part, tout genre φ s'écrit (cf [3]) $\varphi([M]) = \langle K\varphi(TM); \sigma_M\rangle$ où $K\varphi = \{K_i^\varphi\}$ est la m-suite caractérisée par la série formelle $P_\varphi(X) = K\varphi(1+X)$ et σ_M la classe fondamentale de M. Les formules d'inversion de Lagrange permettent de lier $g_\varphi(X)$ à la série $P_\varphi(X)$, caractéristique du genre φ par: $P_\varphi(X) = \frac{X}{g_\varphi^{-1}(X)}$.

Remarque 2.1. Si μ est une classe exponentielle à valeurs dans une $\mathbb{Q}$-algèbre, à la m-suite $K = \{K_i\}$ de μ correspond un genre φ, dont la série caractéristique $P_\varphi(X)$ n'est rien d'autre que $\mathcal{Q}_\mu(X)$; nous avons donc: $\mathcal{Q}_\mu(X) = \frac{X}{g_\varphi^{-1}(X)}$.

Soit q un nombre premier, $f = q^{1/(q-1)}$ et R un anneau sans torsion dans lequel q n'est pas inversible. Soit $g(X) \in R \otimes \mathbb{Q}[[X]]$ avec $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$, et telle que la série formelle $\tilde{g}(X) = \frac{1}{f^k} g(f^k X)$ appartient à $R \otimes \mathbb{Z}_{(q)}[f][[X]]$ pour un entier naturel k. Soit $K = \{K_n\}$ la m-suite de série caractéristique $X/g^{-1}(X)$. Nous avons alors le résultat suivant:

THÉORÈME 2.2. *Si la réduction modulo q de $\tilde{g}(X)$ est de la forme $\sum_{i\geq 0} a_i X^{q^i}$ avec $a_i \in \mathbb{Z}_q \otimes R$ (i.e., elle est q-typique relativement au groupe formel additif) alors il existe un automorphisme de cohomologie λ pour $\mathrm{H}^{**}(\,-\,; \mathbb{Z}_q \otimes R)$, tel que $Wu(\lambda) \equiv \sum_{n\geq 0} f^{kn} K_n(p_1, \ldots, p_n)$ modulo q.*

Démonstration. Pour q impair. Notons d'abord qu'un automorphisme de cohomologie λ de $\mathrm{H}^{**}(\,-\,; \mathbb{Z}_q \otimes R)$, peut-être vu comme un élément de $A^{**}(q) = \mathrm{Hom}\,(A_*(q); \mathbb{Z}_q)$ où $A_*(q)$ est le dual de l'algèbre de Steenrod $A^*(q)$. D'après [7], $A_*(q)$ est le produit tensoriel d'une algèbre de Grasmann $\mathbb{Z}_q[\tau_0, \tau_1, \ldots]$ et d'une algèbre polynômiale $\mathbb{Z}_q[\xi_1, \xi_2, \ldots]$ avec $\tau_i \in A_{2q^i-1}(q)$ et $\xi_i \in A_{2q^i-2}(q)$, de plus, $A_*(q)$ est un $\mathbb{Z}_q$-module libre de base $\{\tau^E \xi^R\}$, où $E = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$, $\varepsilon_i = 0$ ou 1, et $R = \{r_1, r_2, \ldots\}$, $r_i \geq 0$, sont deux multi-indices à support fini, avec $\tau^E = \Pi \tau_i^{\varepsilon_i}$ et $\xi^R = \Pi \xi_i^{r_i}$. $\{\rho(E, R)\}$ étant le système dual de $\{\tau^E \xi^R\}$, on pose $\rho(0, R) = \mathcal{P}^R$; notons que si $R = \{r, 0, 0, \ldots\}$, $\mathcal{P}^R = \mathcal{P}^r$ est la $r^{\text{ème}}$ puissance de Steenrod. D'après [2] nous avons $\langle \lambda, \tau_i \rangle = 0$, $i \geq 0$ et $\varphi_\lambda(X) = \sum_{i\geq 0} \langle \lambda, \xi_i \rangle X^{q^i}$. Supposons maintenant que $\varphi(X) = \sum_{i\geq 0} a_i X^{q^i}$ avec $a_i \in \mathbb{Z}_q \otimes R$, et considérons $\lambda = \sum a_R \otimes \mathcal{P}^R$ élément de $A^{**}(q) \otimes R$, où la somme a lieu sur les multi-indices $R = \{r_1, r_2, \ldots\}$, et où $a_R = \Pi a_i^{r_i}$. Alors $\lambda : \mathrm{H}^{**}(\,-\,; \mathbb{Z}_q \otimes R) \to \mathrm{H}^{**}(\,-\,; \mathbb{Z}_q \otimes R)$ est un automorphisme de cohomologie. De plus on a $Wu(\lambda) \equiv \sum f^{nk} K_n(p_1, p_2, \ldots) \bmod (p)$ car d'après (2) ces deux classes exponentielles possèdent la même série caractéristique. ∎

Remarque 2.3. Le cas $q = 2$ est vrai aussi, en vertu de [7, appendix 1].

Nous allons maintenant voir que le théorème 2.2 s'applique au logarithme d'un genre φ. Pour cela on va le montrer pour le genre universel; la fonctorielité assurera la généralisation.

Soit φ_U le genre universel, son logarithme est donné par

$$g_U(X) = \sum_{i\geq 0} \frac{[\mathbb{C}P^i]}{i+1} X^{i+1} \in MU_* \otimes \mathbb{Q}[[X]].$$

Considérons la série formelle $\widetilde{g_U}(X) = (1/f) g_U(fX)$ nous avons:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{g_U}(X) &= \sum_{n\geq 0}[\mathbb{C}P^n]f^n\frac{X^{n+1}}{n+1} = \sum_{k\geq 0}\sum_{r=1}^{q-1}[\mathbb{C}P^{k(q-1)+r-1}]f^{r-1}q^k\frac{X^{k(q-1)+r}}{k(q-1)+r}\\
&= X + \sum_{r=2}^{q-1} f^{r-1}[\mathbb{C}P^{r-1}]\frac{X^r}{r} + [\mathbb{C}P^{q-1}]X^q + \sum_{r=2}^{q-1}[\mathbb{C}P^{q+r-2}]f^{r-1}q\frac{X^{q-1+r}}{q-1+r}\\
&+ \sum_{k\geq 2}\sum_{r=1}^{q-1}[\mathbb{C}P^{k(q-1)+r-1}]f^{r-1}q^k\frac{X^{k(q-1)+r}}{k(q-1)+r}\,.
\end{aligned}
$$

Il est bien évident que pour $k \geq 2$, la plus grande puissance de q qui divise $k(q-1)+r$ est strictement inférieure à k. Donc la réduction modulo q de $\widetilde{g_U}(X)$ est égale à $(X + [\mathbb{C}P^{q-1}]X^q)$. Ainsi, en vertu du théorème 2.2, il existe un automorphisme de cohomologie $\lambda_U = \sum_{R=(r_1,r_2,\dots)} a_R \otimes \mathcal{P}^R$ avec $a_R = \Pi_{r_i\in R} a_i^{r_i}$; or ici $a_1 = [\mathbb{C}P^{q-1}]$ et $a_i = 0$ pour tout $i > 1$ donc $a_{(r,0,\dots)} = (a_1)^r = [\mathbb{C}P^{q-1}]^r$ et $a_R = 0$ si $R \neq (r, 0, \dots)$, d'où:

$$\lambda_U = \sum_{r\geq 0}[\mathbb{C}P^{q-1}]^r \otimes \mathcal{P}^r \tag{3}$$

$$Wu(\lambda_U) \equiv \sum_{n\geq 0} f^n U_n(c_1,\dots,c_n) \bmod (q) \tag{4}$$

$U = \{U_n\}$ est la m-suite de Hirzebruch de série caractéristique:

$$\frac{X}{g_U^{-1}(X)} = 1 + \frac{[\mathbb{C}P^1]}{2}X - \frac{3[\mathbb{C}P^1]^2 - 4[\mathbb{C}P^2]}{12}X^2 + \dots .$$

En affectant à chaque c_i le poids i alors $U_n(c_1,\dots,c_n)$ est un polynôme en (c_i) de poids n à coefficients dans $MU_* \otimes \mathbb{Q}$. Les premiers termes de $U = \{U_n\}$ sont donnés par:

$$
\begin{aligned}
U_1(c_1) &= \frac{[\mathbb{C}P^1]}{2}c_1\,,\\
U_2(c_1,c_2) &= \left(\frac{[\mathbb{C}P^2]}{3} - \frac{[\mathbb{C}P^1]^2}{4}\right)c_1^2 - \left(\frac{3[\mathbb{C}P^1]^2}{4} - \frac{2[\mathbb{C}P^2]}{3}\right)c_2\,,\\
U_2(c_1,c_2,c_3) &= \left(\frac{[\mathbb{C}P^1]^3}{4} - \frac{[\mathbb{C}P^1][\mathbb{C}P^2]}{2} + \frac{[\mathbb{C}P^3]}{4}\right)c_1^3\\
&+ \left(\frac{-7[\mathbb{C}P^1]^3}{8} + \frac{5[\mathbb{C}P^1][\mathbb{C}P^2]}{3} - \frac{3[\mathbb{C}P^3]}{4}\right)c_1c_2\\
&+ \left(\frac{5[\mathbb{C}P^1]^3}{4} - 2[\mathbb{C}P^1][\mathbb{C}P^2] + \frac{3[\mathbb{C}P^3]}{4}\right)c_3\,.
\end{aligned}
$$

Soit maintenant $\varphi : MU_* \to R$ un genre à valeurs dans un anneau sans torsion, et q un nombre premier non inversible dans R. Si $g_\varphi(X)$ est le logarithme de φ, nous avons $g_\varphi(X) = \varphi^*(g_U(X))$ (φ^* est l'extension de φ aux anneaux de séries formelles, $\varphi^* : MU_*[[X_1, X_2, \dots]] \to R[[X_1, X_2, \dots]]$ définie par $\varphi^*(\sum_{(i_1,i_2,\dots)} a_{i_1,i_2,\dots} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots) = \sum_{(i_1,i_2,\dots)} \varphi(a_{i_1,i_2,\dots}) X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots$). De plus, si $K^\varphi = \{K_n^\varphi\}$ est la m-suite de Hirzebruch de série caractéristique $P_\varphi(X) = \frac{X}{g_\varphi^{-1}(X)}$, alors $K_n^\varphi(c_1, \dots, c_n) = \varphi^*(U_n(c_1, \dots, c_n))$. En remarquant que la réduction modulo q de la série formelle $\tilde{g}_\varphi(X) = (1/f) g_\varphi(fX)$ est égale à $X + \varphi^*([\mathbb{C}P^{q-1}]) X^q$, on déduit l'existence d'un automorphisme de cohomologie de $\mathrm{H}^{**}(\,-\,; \mathbb{Z}_q \otimes R)$,

$$\lambda = 1 + \sum_{n \geq 0} \left(\varphi^*([\mathbb{C}P^{q-1}])\right)^n \otimes \mathcal{P}^n \tag{5}$$

tel que:

$$Wu(\lambda) \equiv \sum_{n \geq 0} f^n K_n^\varphi(c_1, \dots, c_n) \mod (q) \tag{6}$$

EXEMPLES 2.4. (1) *Genre de Todd:* $Td : MU_* \to \mathbb{Z}$ est donné par le logarithme $g_{Td}(X) = -\mathrm{Log}\,(1 - X)$; et nous avons $\varphi_{Td}([\mathbb{C}P^k]) = 1$ pour tout k (cf [3]). D'après (5), il existe un automorphisme de cohomologie de $\mathrm{H}^{**}(\,-\,; \mathbb{Z}_q)$, $\lambda = \sum_{r \geq 0} \mathcal{P}^r$ qui n'est rien d'autre que la classe totale de Steenrod. De plus, si on note $\{T_n(c_1, \dots, c_n)\}$ les polynômes de Todd, nous obtenons à partir de (6): $Wu(\sum_{r \geq 0} \mathcal{P}^r) = \sum_{n \geq 0} f^n T_n(c_1, \dots, c_n) \mod (q)$.

(2) *Genre elliptique:* $\varphi_{ell} : MU_* \to \mathbb{Z}[1/2][\delta, \varepsilon]$ est défini par son logarithme (voir [5]):

$$\begin{aligned} g_{ell}(X) &= \int_0^X \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - 2\delta t^2 + \varepsilon t^4}} \\ &= \sum_{n \geq 0} P_n\Big(\frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)(\sqrt{\varepsilon})^n \frac{X^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n \geq 0} P_n(\delta, \varepsilon) \frac{X^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

où $P_n(X)$ est le $\mathrm{n}^{\text{ième}}$ polynôme de Legendre. On supposera que δ et ε sont algébriquement indépendants. D'aprés [9], sa série caractéristique est $\mathcal{Q}_{ell}(X^2)$ = 1 - $\sum_{k \geq 0} H_k X^{2k}$ avec $H_k = \frac{G_{2k}^*}{2^{2k-2}(2k-1)!}$, où G_{2k}^* est une forme modulaire de poids $2k$ pour le sous groupe $\Gamma_0(2)$ du groupe modulaire $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ formé des matrices $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ telles que c est pair. Du fait que $\mathcal{Q}_{ell}(X)$ est paire, le calcul direct de la m-suite de Hirzebruch à partir de sa série caractéristique $\mathcal{Q}_{ell}(X)$, induit une familie de polynômes $\{K_n^{ell}(c_1,\dots,c_n)\}$ tels que $K_{2n+1}^{ell}(c_1,\dots,c_{2n+1})=0$ et $K_{2n}^{ell}(c_1,\dots,c_{2n})=E_n(p_1,\dots,p_n)$ où les p_i et les c_i sont liés par la relation $\left(\sum_{i\geq 0}c_iX^i\right)\left(\sum_{i\geq 0}c_i(-X)^i\right)=\sum_{i\geq 0}p_i(-X^2)^i$, et où la m-suite de Hirzebruch $E_n(p_1,\dots,p_n)$ est donnée par (voir [4]):

$$E_n(p_1,\dots,p_n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sum_{\omega\in\mathcal{P}(n),|\omega|=k}\frac{H_\omega}{d(\omega)}\mu^\omega$$

$\omega=(i_1,i_2,\dots,i_s)\in\mathcal{P}(n)$ étant une partition de n, $\mu^\omega=\sum\mu_1^{i_1}\mu_2^{i_2}\dots\mu_s^{i_s}$ avec $p_i=\sigma_i(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n)$, $H_\omega=H_{i_1}H_{i_2}\dots H_{i_s}$ et où $d(\omega)=\Pi_{t=1}^n r(t)!$ avec $r(t)$ le nombre d'éléments de ω identiques à t.

On peut vérifier que $E_n(p_1,\dots,p_n)$ est un polynôme homogène en δ et ε, dont les coefficients sont des polynômes homogènes en $p_1,\dots,p_n$ de poids n. Par exemple:

$$\begin{aligned}
E_1(p_1)&=\frac{p_1}{3}\delta\\
E_2(p_1,p_2)&=\left(\frac{7}{90}p_1^2-\frac{2}{45}p_2\right)\delta^2+\left(\frac{1}{5}p_2-\frac{1}{10}p_1^2\right)\varepsilon\\
E_3(p_1,p_2,p_3)&=\left(\frac{1}{27}p_3-\frac{31}{1890}(p_1^3-3p_1p_2-3p_3)+\frac{7}{270}(p_1p_2+3p_3)\right)\delta^3\\
&\quad-\left(\frac{1}{270}(p_1p_2+3p_3)+\frac{2}{1890}(p_1^3-3p_1p_2-3p_3)\right)\delta\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Comme $\varphi_{ell}([\mathbb{C}P^{2n}])=P_n(\delta,\varepsilon)$ et $\varphi_{ell}([\mathbb{C}P^{2n+1}])=0$, on a pour tout q premier impair: $\varphi_{ell}([\mathbb{C}P^{q-1}])=P_{\frac{q-1}{2}}(\delta,\varepsilon)$, et d'aprés (5) et (6), nous obtenons un automorphisme de cohomologie $\lambda=\sum_{r\geq 1}P_{\frac{q-1}{2}}(\delta,\varepsilon)^r\otimes\mathcal{P}^r$ qui vérifie:

$$Wu(\lambda)\equiv\sum_{n\geq 0}f^{2n}E_n(p_1,\dots,p_n)\mod(q)\,.$$

Cas Particuliers. (a) Si $\delta=\varepsilon=1$, φ_{ell} est le L-genre (ou signature de Hirzebruch). Comme $P_n(\delta,\varepsilon)$ est le coefficient de X^n dans le développement en série formelle de $\Psi(X)=1/\sqrt{1-2\delta X+\varepsilon X^2}$, on a $\Psi(X)=1/\sqrt{(1-X)^2}=\sum_{n\geq 0}X^n$ ce qui donne $P_n(1,1)=1$. Alors, l'automorphisme de cohomologie de $\mathrm{H}^{**}(-;\mathbb{Z}_q)$ associé au L-genre est: $\lambda_L=\sum_{n\geq 0}\mathcal{P}^n=\mathcal{P}$, et on a : $Wu(\mathcal{P})\equiv\sum_{n\geq 0}f^nL_n(c_1,\dots,c_n)\mod(q)$.

(b) Si $\delta = -1/8$, $\varepsilon = 0$, nous obtenons le $\hat{A}$-genre (ou signature spinorielle). L'automorphisme de cohomologie de $\mathrm{H}^{**}(-;\mathbb{Z}_q)$ associé est:

$$\lambda_{\hat{A}} = \sum_{k\geq 0}(P_{\frac{q-1}{2}}(-1/8,0))^k \otimes \mathcal{P}^k, \quad \text{or} \quad P_n(-1/8,0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{4^{2n}(n!)^2}, \quad \text{donc}$$

$$P_{\frac{q-1}{2}}(-1/8,0) = \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}(q-1)!}{4^{q-1}[(\frac{q-1}{2})!]^2} \equiv 1 \bmod (q),$$

car

$$(q-1)! \equiv (-1)^{\frac{q-1}{2}}\left[(\frac{q-1}{2})!\right]^2 \bmod (q),$$

ainsi $\lambda_{\hat{A}} = \mathcal{P}$ et $Wu(\mathcal{P}) \equiv \sum_{n\geq 0} f^n \hat{A}_n(c_1,\ldots,c_n) \bmod (q)$. Nous retouvons ainsi les résultats donnés dans [3]:

$$\begin{aligned} Wu(\mathcal{P}) &\equiv \sum_{n\geq 0} f^n T_n(c_1,\ldots,c_n) \\ &\equiv \sum_{n\geq 0} f^n L_n(c_1,\ldots,c_n) \equiv \sum_{n\geq 0} f^n \hat{A}_n(c_1,\ldots,c_n) \bmod (q). \end{aligned}$$

3. THEOREMES D'INTEGRALITE

Notons $Wu(\lambda_U)_n$ la composante de degré n de $Wu(\lambda_U)$. D'après (4) nous avons: $Wu(\lambda_U)_n \equiv f^n U_n(c_1,\ldots,c_n) \bmod (q)$.

LEMME 3.1. $Wu(\lambda_U) \equiv 0 \bmod (0) \iff n \equiv 0 \bmod (q-1)$.

Démonstration. la condition nécessaire est immédiate; il suffit de faire la division euclidienne de n par $(q-1)$. Pour la condition suffisante on considère le générateur x de $\mathrm{H}^*(\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z}_q)$ et on applique la formule de Riemann-Roch (cf [2]), on a alors $x^k Wu(\lambda_U)_{k(q-1)}[\mathbb{C}P^{kq}] = \lambda_U(x^k)[\mathbb{C}P^{kq}] = (x + [\mathbb{C}P^{q-1}]x^q)^k([\mathbb{C}P^{kq}]) = [\mathbb{C}P^{q-1}]^k$, qui est non nul modulo q dans MU_* car $Td([\mathbb{C}P^{q-1}]^k) = 1$. ∎

Nous avons déjà fait remarquer plus haut que les polynômes universels $\{U_n(c_1,\ldots,c_n)\}$ sont de polynômes homogènes de poids n en $c_1,\ldots,c_n$ à coefficients dans $MU_* \otimes \mathbb{Q}$, on a:

THÉORÈME 3.2. *$\mu_n = \Pi_{2\leq q\leq n+1} q^{\frac{n}{q-1}}$ est le dénominateur commun des coefficients de $U_n(c_1,\ldots,c_n)$.*

Démonstration. Posons $\mu_n = \Pi_q q^{\alpha_q}$.

Si $q > n+1$, alors $n = 0 \bmod (q-1)$ et d'après le lemme 3.1, $W_U(\lambda_U)_n \equiv 0 \bmod (q)$, c'est à dire, $q^{\frac{n}{q-1}} U_n(c_1,\ldots,c_n) \equiv 0 \bmod (q)$, donc $U_n(c_1,\ldots,c_n)$ est q-entier et on aura $\alpha_q \leq \frac{n}{q-1}$.

Si $q \leq n+1$, il suffit pour conclure, de montrer que $q^{\frac{n}{q-1}} U_n(c_1,\ldots,c_n) \equiv 0 \bmod (q)$. Pour cela, on fait une récurrence sur le reste de la division euclidienne de n par $q-1$: $n = k(q-1)+r$, $0 \leq r < q-1$.

Le cas $r = 0$ est immédiat, car $q^k U_{k(q-1)}(c_1,\ldots,c_{k(q-1)}) \equiv 0 \bmod (q)$ (lemme 3.1). Maintenant, sachant que $U_1(X) = \frac{[\mathbb{C}P^1]}{2} X$, on considère la série $\sum_{i\geq 0} c_i(X)t^i = \big(\sum_{i\geq 0} a_i t^i\big)(1+2Xt)$. Nous avons alors:

$$\begin{aligned} U_{n+1}(c_1,\ldots,c_{n+1}) &= \sum_{i+j=n+1} U_i(c_1,\ldots,c_n)U_j(2X,0,\ldots,0) \\ &= U_{n+1}(a_1,\ldots,a_{n+1}) + [\mathbb{C}P^1]U_n(a_1,\ldots,a_n)X + (X^2)\,. \end{aligned}$$

$U_{n+1}(c_1,\ldots,c_{n+1})$ étant un polynôme en X, si $q^k U_n(a_1,\ldots,a_n)$ est non nul $\bmod (q)$, il en sera de même pour $q^k U_{n+1}(c_1,\ldots,c_{n+1})$, ce qui achève la démonstration. ∎

La fonctorialité nous permet maintenant de dégager un résultat d'intégralité pour les polynômes $\{K_n^\varphi(c_1,\ldots,c_n)\}$ associés à un genre φ. En effect, soit R un anneau sans torsion, $\varphi : MU_* \to R$ un genre, $K^\varphi = \{K_n^\varphi(c_1,\ldots,c_n)\} = \{\varphi_* U_n(c_1,\ldots,c_n)\}$ la m-suite associée (les K_n^φ sont à coefficients dans $R\otimes\mathbb{Q}$). Notons J l'ensemble des nombres premiers inversibles dans R.

PROPOSITION 3.3. *Si $\varphi([\mathbb{C}P^{q-1}]^k) \not\equiv 0 \bmod (q)$ dans R pour tout $q \notin J$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors $\mu_n^J = \Pi_{q\notin J} q^{\frac{n}{q-1}}$ est le dénominateur commun des coefficients de $K_n^\varphi(c_1,\ldots,c_n)$ dans $R\otimes\mathbb{Q}$.*

Démonstration. D'après le théorème 3.2, $\mu_n U_n(c_1,\ldots,c_n)$ est un polynôme à coefficients dans $MU_*\otimes\mathbb{Z}[J^{-1}]$. Soit $\varphi^* : MU_*\otimes\mathbb{Z}[J^{-1}] \to R\otimes\mathbb{Z}[J^{-1}] \simeq R$ l'extension de φ, on a: $\varphi^*(\mu_n^J U_n(c_1,\ldots,c_n)) = \mu_n^J \varphi^*(U_n(c_1,\ldots,c_n)) = \mu_n^J K_n^\varphi(c_1,\ldots,c_n) \in R[c_1,\ldots,c_n]$. De plus, $\varphi^*([\mathbb{C}P^{q-1}]^k) \not\equiv 0 \bmod (q)$ pour tout $q \notin J$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$, donc en vertu de la démostration du lemme 3.1, μ_n^J est le plus petit entier possédant cette propiété. ∎

Nous retrouvons le résultat d'intégralité des polynômes de Todd donné par Hirzebruch dans [3]:

COROLLAIRE 3.4. *$\mu_n^J = \Pi_{2\leq q\leq n+1} q^{\frac{n}{q-1}}$ est le plus petit entier tel que $Td_n(c_1,\ldots,c_n)$ soit à coefficients entiers.*

Démonstration. En effet, le genre de Todd envoie $[\mathbb{C}P^{q-1}]^k$ sur 1 pour tout entier naturel k et tout q, de plus $\mu_n^J = \Pi_{2\leq q\leq n+1} q^{\frac{n}{q-1}}$ car $J=\emptyset$. ∎

Il y a un résultat analogue dans le cas des polynômes elliptiques $E_n(p_1,\ldots, p_n)$ associés au genre elliptique universel (i.e., δ et ε $\mathbb{Q}$-algébriquement indépendants; voir [6]):

COROLLAIRE 3.5. *$\mu_{2n} = \Pi_{3\leq q\leq 2n+1} q^{\frac{2n}{q-1}}$ est le plus petit entier tel que $\mu_{2n}E_n(p_1,\ldots,p_n)$ soit à coefficients dans $\mathbb{Z}[1/2][\delta,\varepsilon]$.*

Démonstration. Ici $R=\mathbb{Z}[1/2][\delta,\varepsilon]$, $J=\{2\}$ et $\varphi_{ell} : MU_* \to \mathbb{Z}[1/2][\delta,\varepsilon]$ est le genre elliptique. Nous avons $\varphi_{ell}([\mathbb{C}P^{q-1}]^k) = P_{\frac{q-1}{2}}(\delta,\varepsilon)^k \not\equiv 0 \bmod (q)$ car δ et ε sont $\mathbb{Q}$-algébriquement indépendants. D'après la proposition 3.3, $\mu_n^J = \Pi_{3\leq q\leq n+1} q^{\frac{n}{q-1}}$ est le plus petit entier tel que $\mu_n^J \varphi_{ell\,*}(U_n(c_1,\ldots,c_n))$ soit à coefficients dans $\mathbb{Z}[1/2][\delta,\varepsilon]$, mais comme $\varphi_{ell\,*}(U_{2n+1}(c_1,\ldots,c_{2n+1})) = 0$ et $\varphi_{ell\,*}(U_{2n}(c_1,\ldots,c_{2n})) = E_n(p_1,\ldots,p_n)$, on a: $\mu_{2n}^J E_n(p_1,\ldots,p_n) \in \mathbb{Z}[1/2][\delta,\varepsilon][p_1,\ldots,p_n]$. ∎

Remarque 3.6. Le corollaire 3.5 reste valable même dans le cas de singularité du genre elliptique (c'est à dire lorsque $\delta=\varepsilon=1$ où l'on a le L-genre et lorsque $\delta=-1/8$, $\varepsilon=0$ où l'on a le A-genre) du fait que la condition de la proposition 3.3 reste vérifiée; ceci confirme les résultats donnés par Hirzebruch (voir [3]).

RÉFÉRENCES

[1] ADAMS, J.F., On the Chern character and the structure of the unitary group, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **57** (1961), 189–199.

[2] ATIYAH, M.F., HIRZEBRUCH, F., Cohomologie Operationen und Charakteristise Klassen, *Math. Z.* **77** (1961), 149–187.

[3] HIRZEBRUCH, F., "Topological Methods in Algebraic Geometry", 3rd edition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1966.

[4] KHELDOUNI, A., LAMRINI, F., Elliptic character, preprint.

[5] LANDWEBER, P.S., "Elliptic Curves and Modular Forms", L.N.M. 1326, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1988.

[6] LANDWEBER, P.S., RAVENEL, D., STONG, R.E., Periodic cohomology theories defined by elliptic curves, preprint.

[7] MILNOR, J., The Steenrod algebra and its dual, *Annals of Math.* **67** (1958), 150–171.

[8] SMITH, L. , The Todd character and cohomology operations, *Advances in Math.* **10** (1973), 72 – 92.

[9] ZAGIER, D. , "Note on the Landweber-Stong Elliptic Genus", L.N.N. 1326, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1988.