EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. 7, Núm. 2–3, 158 – 160 (1992)

Solution d'une Equation Fonctionnelle Liée à L'Orthogonalité de Carlsson

BOUSSOUIS BRAHIM

Université Sidi Mohamed ben Abdellah, Fac. Sciences, B.P 1796 *Fes Atlas, Fes–Maroc*

AMS *Subject Class.* (1980): 46B20 *Received January* 20, 1993

On s'intéresse à l'équation fonctionelle linéaire homogène suivante:

$$\text{(E)} \qquad \Sigma_{1<j<m} p_j f(xq_j) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

Où $p_1,\dots,p_m$, $q_1,\dots,q_m$ sont des réels non nuls et $q_1,\dots,q_m$ deux à deux distincts. On rencontre une telle équation lorsqu'on étudie l'orthogonalité de Carlsson dans une espace normé (voir [1], [2], [3]). Pour la résoudre, S.O. Carlsson utilise la technique des F–series (cf. [2]). Mais cette méthode suppose que la fonction f soit de classe $\mathscr{C}^1$ (ou tout au moins que f soit la primitive d'une fonction réglée, voir [1]).

Dans ce qui suit nous allons nous servir de la transformation de Fourier pour résoudre (E). Cette méthode est particulièrement adaptée au cas où f admet un comportement asymptotique du genre de celui considéré dans [2], et n'exige aucune condition de dérivabilité sur f.

Le lemme suivant est essentiel pour la suite:

LEMME 1. *Soit f une fonction measurable solution de l'équation fonctionelle non triviale suivante,*

$$\Sigma_{1<j<m} a_j F(x+b_j) = 0 \quad (x \in \mathbb{R},\ a_j \in \mathbb{R},\ b_j \in \mathbb{R},\ j = 1,\dots,m).$$

Si de plus $f(x) = O(e^{ax})$ quand $x \longrightarrow -\infty$ et $f(x) = O(e^{bx})$ quand $x \longrightarrow +\infty$ où $b < a$, alors f est presque partout nulle sur $\mathbb{R}$.

Preuve. On choisit $c \in \mathbb{R}$ et $d > 0$ tels que $e^{d|x|}e^{-cx}f(x)$ soit sommable sur $\mathbb{R}$. (Pour cela il suffit de prendre $b < c < a$ et $0 < d < \inf(a-c,\ c-b)$). Soient $g(x) = e^{-cx}f(x)$ et $G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-izx}dx$, où z est un complexe appartenant à la bande horizontale définie par $|\mathrm{Im} z| < d$.

En utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on déduit aisément que G est analytique dans la bande $|\mathrm{Im} z| < d$ (voir [4], théorème 13.8.6–iii), p. 126).

Par ailleurs on a, $\Sigma_{1<j<m} a'_j g(x+b_j) = 0 \quad (x \in \mathbb{R},\ a'_j = a_j e^{cb_j})$.

En multipliant cette dernière équation par e^{-izx} et intégrant par rapport à x sur $\mathbb{R}$ on obtient: $[\Sigma_{1<j<m} a'_j e^{izb_j}] G(z) = 0$ pour $|\mathrm{Im} z| < d$.

La fonction analytique $\Sigma_{1<j<m} a'_j e^{izb_j}$ admet un ensemble de zéros, au plus dénombrable et formé uniquement de points isolés, donc G est identiquement nulle dans la bande $|\mathrm{Im} z| < d$, en particular G est nulle sur $\mathbb{R}$ et par conséquent g est presque partout nulle sur $\mathbb{R}$, en vertu d'un résultat classique sur la transformation de Fourier dans L^1 (cf. [5], p. 2064). Enfin de compte $f = 0$ presque partout sur $\mathbb{R}$.

COROLLAIRE 2. *Si h est une fonction continue sur l'ensemble des réels strictement positifs, vérifiant l'équation fonctionnelle non triviale,*

$$\Sigma_{1<j<m} p_j F(xq_j) = 0 \quad (x > 0,\ q_j > 0,\ j = 1,\dots,m).$$

Si de plus $h(x) = O(x^a)$ quand $x \longrightarrow 0^+$ et $h(x) = O(x^b)$ quand $x \longrightarrow +\infty$, alors h est identiquement nulle.

Ce résultat découle immédiatement du lemme 1, si on pose $q_j = e^{b_j}$, $p_j = a_j$ et $f(x) = h(e^x)$.

L'equation (E) est dite paire s'elle peut se mettre sous la forme

$$\Sigma_{1<j<r} p_j [F(xq_j) - F(-xq_j)] = 0 \quad (q_j > 0,\ j = 1,\dots,r).$$

Elle est dite impaire si on peut la mettre sous la forme

$$\Sigma_{1<j<r} p_j [F(xq_j) + F(-xq_j)] = 0 \quad (q_j > 0,\ j = 1,\dots,r).$$

THÉOREME 3. *Si f est une solution continue de l'equation fonctionnelle non triviale*

$$\text{(E)} \qquad \Sigma_{1<j<m} p_j F(xq_j) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

et si $f(x) = O(|x|^a)$ quand $x \longrightarrow 0$ et $f(x) = O(|x|^b)$ quand $|x| \longrightarrow +\infty$ $(b < a)$, alors f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ si (E) n'est ni paire ni impaire, f est paire si (E) est paire et f est impaire si (E) est impaire.

Preuve. Soient $f_1(x) = f(x) - f(-x)$, $f_2(x) = f(x) + f(-x)$, $(x > 0)$, $J = \{j \mid 1 \leqslant j \leqslant m$ et $q_j > 0\}$, $K = \{j \mid 1 \leqslant j \leqslant m$ et $q_j < 0\}$. Il est facile de voir que:

$$(\mathrm{E}_1) \qquad \Sigma_{j\in J} p_j f_1(xq_j) + \Sigma_{j\in K} p_j f_1(-xq_j) = 0.$$

$$(\mathrm{E}_2) \qquad \Sigma_{j\in J} p_j f_2(xq_j) - \Sigma_{j\in K} p_j f_2(-xq_j) = 0.$$

De plus $f_i(x) = O(|x|^a)$ quand $x \longrightarrow 0$ et $f_i(x) = O(|x|^b)$ quand $|x| \longrightarrow +\infty$ $(i = 1,2)$. Donc f_1 et f_2 vérifient des équations fonctionnelles du type de celle considérée dans le corollaire 2. On en déduit le théorème 3 en distinguant respectivement le cas où ni (E_1) ni (E_2) n'est triviale, le cas où (E_1) n'est pas triviale et enfin le cas où (E_2) n'est pas triviale. ∎

Nous terminons par un résultat qui regroupe et améliore les théorèmes 6.3 et 6.4 de [2]:

COROLLAIRE 4. *Si f_0 est une solution continue de l'équation fonctionnelle*

$$\Sigma_{1<j<m} p_j F(xq_j) = C_1 + x^2 C_2, \quad (x \in \mathbb{R})$$

où $\Sigma_{1<j<m} p_j = C_1$, $\Sigma_{1<j<m} p_j q_j^2 = C_2$, $\Sigma_{1<j<m} p_j q_j = 1$, p_j *et* q_j *non nuls,* $j = 1,\ldots,m$.

Si $f_0(x) = 1 + O(x^2)$ *quand* $x \longrightarrow 0$ *et* $f_0(x) = x^2 + O(x)$ *quand* $|x| \longrightarrow +\infty$, *alors* f_0 *est paire.*

Preuve. On applique le théorème 3 à la fonction $f(x) = f_0(x) - f_0(-x)$, avec $a = 2$ et $b = 1$; la condition $\Sigma_{1<j<m} p_j q_j = 1$ garantit la non imparité de l'équation $\Sigma_{1<j<m} p_j F(xq_j) = 0$ vérifiée par f.

REFERENCES

1. BOUSSOUIS, B., Caractérisation des espaces préhilbertienes au moyen des orthogonalités généralisées, *Extracta Mathematicae* 7(1) (1992), 20–24.
2. CARLSSON, S.O., Orthogonality in normed linear spaces, *Arkiv fur Math.* 4 (1962), 297–318.
3. DESBIENS, J., Une nouvelle caractérisation des espaces de Hilbert, *Ann. Sc. Math. Québec*, 14 (1990), 17–21.
4. DUNFORD, SCHWARTZ, "Linear Operators, Part III, Spectral operators", Wiley–Interscience, 1988.