EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. 6, Núms. 2 y 3, 163 – 165 (1991)

Remarques sur l'Equation $\mathrm{d}X_t = \sigma(X_t)\,\mathrm{d}B_t$

YOUSSEF OUKNINE

Dépt. de Mathématiques, Fac. des Sciences, Univ. Cadi Ayyad, Marrakech, Maroc

AMS *Subject Class.* (1980): 60H10, 60J60, 60G17 *Received June* 6, 1991

RÉSUMÉ

Nous détérminons un intervalle $]a,b[$ tel que si l'équation stochastique

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)\,\mathrm{d}B_s$$

admet une solution faible non trivialle alors la restriction de σ à cet intervalle ne peut s'annuler sur un ensemble de mesure de Lebesgue strictement positive.

Dans [1], les auteurs ont montré que si l'équation differentielle stochastique

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)\,\mathrm{d}B_s \quad (x \in \mathbb{R},\ \text{fixé}) \tag{*}$$

admet une solution faible vérifiant $\int_0^\infty \sigma^2(X_s)\,\mathrm{d}s = +\infty$, alors σ ne peut être nulle sur un sous ensemble de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue strictement positive. Dans cette note, nous utilisons les temps locaux pour améliorer le résultat de [1]. Nous donnons également une condition qui assure la divergence des solutions de (*).

Le résultat principal de cette note est le

THÉORÈME. *Soient* $a = -\|\sup_t (X_t - x)^-\|_\infty$, $b = \|\sup_t (X_t - x)^+\|_\infty$ *(éventuellement infinis), si l'équation* (*) *admet une solution non triviale, alors* σ, *restreinte à l'intervalle* $]a+x, b+x[$ *ne peut s'annuler sur un ensemble de mesure de Lebesgue strictement positive.*

Démonstration. On suppose $x = 0$ pour alléger l'écriture. Pour $\epsilon > 0$ on pose $T_\epsilon = \inf\{t \geq 0 \,/\, X_t = a+\epsilon \text{ ou } X_t = b-\epsilon\}$. Soit $\epsilon_0 > 0$ fixé; il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que si $T = T_{\epsilon_0/2}$ et L_t^y est une version bicontinue des temps locaux de X, on a $\mathrm{E}L^y > \epsilon > 0$, $\forall y \in]a+\epsilon_0, b-\epsilon_0[$. Par la formule d'occupation on a:

$$\int_0^T f(X_s)\,\mathrm{d}\langle X\rangle_s = \int_{a+\epsilon_0/2}^{b-\epsilon_0/2} f(y)\, L_T^y\,\mathrm{d}y\,, \quad (f \text{ borelienne bornée}).$$

Si $N=\{x\in\mathbb{R}/\ \sigma(x)=0\}$ et $f(x)=I_N(x)$, on a:

$$\int_0^T I_N(X_s)\,\mathrm{d}<X>_s=\int_0^T I_N(X_s)\,\sigma^2(x)\,\mathrm{d}s=0$$

$$\int_0^T I_N(X_s)\,\mathrm{d}<X>_s=\int_{a+\epsilon_0/2}^{b-\epsilon_0/2} I_N(y)\,L_T^y\,\mathrm{d}y\,,$$

et par suite:

$$0=\int_{a+\epsilon_0/2}^{b-\epsilon_0/2} I_N(y)\,\mathrm{E}(L_T^y)\,\mathrm{d}y\geqslant\epsilon_1\,\lambda\{N\cap]a+\epsilon_0/2,b-\epsilon_0/2[$$

(λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$), donc $N\cap]a+\epsilon_0/2,b-\epsilon_0/2[$ est de mesure nulle, en faisant tendre ϵ_0 vers 0 on a le résultat desiré. ∎

COROLLAIRE. *Si σ est une fonction réguliére et si N est de mesure de Lebesgue strictement positive, alors toute solution de (*) est convergente.*

Remarque. Si $\mathrm{P}[<X>_\infty=+\infty]>0$, alors par changement de probabilité en une probabilité équivalente on peut supposer que X est une martingale locale divergente, donc $b=+\infty$ et $a=-\infty$ et par suite N est de mesure de Lebesgue nulle. En général, même si N est de mesure nulle, X ne diverge pas, comme le montre l'exemple trés simple suivant: la solution de l'équation

$$X_t=1+\int_0^t X_s\,\mathrm{d}B_s$$

est $X=\exp(B_t-t/2)$; X est convergente vers 0 et on ne peut avoir $\int_0^t X_s^2\,\mathrm{d}s=+\infty$, sauf sur un ensemble de mesure nulle. Pour assurer la divergence des solutions de l'équation (*), il faut une condition plus forte; c'est le:

THÉORÈME. *Si σ^{-2} est localement intégrable, alors toute solution de (*) est divergente.*

Démonstration. Nous allons montrer que

$$\int_0^\infty \sigma^2(X_s)\,\mathrm{d}s=+\infty\quad\text{p.s.}$$

Si $A_t=\int_0^t\sigma^2(X_s)\,\mathrm{d}s$, il existe un mouvement brownien $\hat{B}$ tel que $X_t=x+\hat{B}_{A_t}$. Supposons que $\mathrm{P}[A_\infty<+\infty]$ est soit $\omega\in\{A_\infty<+\infty\}$, $t=\int_0^t\sigma^{-2}(X_s)\,\mathrm{d}A_s=\int_0^{A_t}\sigma^{-2}(x+\hat{B}_s)\,\mathrm{d}s$ et $+\infty=\int_0^{A_\infty}\sigma^{-2}(x+\hat{B}_s)\,\mathrm{d}s$. Mais par la formule de densité d'occupation on a:

$$\int_0^{A_\infty(\omega)}\sigma^{-2}(x+\hat{B}_s)\,\mathrm{d}s=\int_{\mathbb{R}}\sigma^{-2}(x+a)\,L^a_{A_\infty(\omega)}(\hat{B})\,\mathrm{d}a$$

la fonction continue $a \longmapsto L^a_{A_\infty(\omega)}$ est à support compact K, avec:

$$K=[\inf_{s\leqslant A_\infty(\omega)} B_s, \sup_{s\leqslant A_\infty(\omega)} B_s]$$

$$\int_{\mathbb{R}} \sigma^{-2}(x+a)\, L^a_{A_\infty(\omega)}\,\mathrm{d}a \leqslant \sup_{a\in K} L^a_{A_\infty(\omega)} \cdot \int_K \sigma^{-2}(x+a)\,\mathrm{d}a$$

or X n'est pas triviale, donc:

$$\sup_{a\in K} L^a_{A_\infty(\omega)} > 0 \quad \text{et} \quad \int_K \sigma^{-2}(x+a)\,\mathrm{d}a = +\infty.$$

REFERENCES

1. C. BETZ ET H. GZYL, Remarks on the equation $\mathrm{d}X_t=a(X_t)\,\mathrm{d}B_t$, *Stochastic Processes and Their Applications*, (1981), 313–315.