EXTRACTA MATHEMATICAE 4, n.1, 48-50 (1989)

PARTAGES DE TYPE BORSUK

par

Valentin Boju
Department of Mathematics
University of Craiova
Al. I. Cuza 13
R-1100-CRAIOVA
ROMANIA

Louis Funar
Department of Mathematics
University of Bucharets
Academiei -14
R-70109-BUCHAREST
ROMANIA

Le diametre d'un ensemble compact A d'un espace metrique quelconque est defini comme la distance maximale des deux points $x,y \in A$. En etudiant quelques problemes sur la theorie des fonctions, Borsuk a prouvé la suivante: Si la sphère unitaire n-dimensionnelle B^n est partagée en n sous-ensemble A_i, $i \in \{1,\dots,n\}$, il existe un sous-ensemble A_i de diametre 1. On a apparu naturellment une question plus generales: Etant donné l'ensemble compact $A \subset E^n$ de diametre diam $A > 0$, il existe un partage $A=\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$ de sorte que diam $A_i <$ diam A? Nous mentionnons que la réponse, affirmative, est connu pour $n \in \{2,3\}$; de plus cette question a resté ouverte pour $n \geq 4$.

Dans ce travail nous utilisons une autre definition du diametre. Soit pour $1 \leq n \leq d$, $G(n,d)$ l'ensemble des n-planes de l'espace euclidien E^d, $K \subset E^d$ un ensemble compact, convexe et: $\mathrm{diam}_n K ====== \max_{F \in G(n,d)} \mathrm{aria}_n F \cap K$, (ici $\mathrm{aria}_n F\ K$ denomme la mesúre Lebesque n-dimensionelle de l'ensemble $F \cap K$). Naturellment on pose la question d'estimer le plus petit nombre $b(d,n)$ avec la proprieté que pour $K \subset E^d$, il existe le partage $K=\bigcup_{i=1}^{b(d,n)} K_i$, ($K_i$ convexes) ainsi que $\mathrm{diam}_n K_i < \mathrm{diam}_n K$. On voit que pour n=1 cela c'est le problème de Borsuk audessus mentionné.

THEOREME. Si $d \geq 2$, $b(d,d-1) \leq (3\ d\ 2^{d-1} w_d/w_{d-1})+1$, ou w_d=volume B^d. Une section $F \in G(n,d)$ est denommé n-section maximale pour l'ensemble K si $\mathrm{diam}_n K=\mathrm{aria}_n F \cap K$. En general le nombre des n-sections maximales est infini, mais si n=d-1, le nombre des n-sections maximales F_i avec $F_i \cap F_j \cap K=\phi$ est fini. Pour montrer ceçi soit:

$$pr_n(K)=\max_{F \in G(n,d)} \mathrm{aria}_n pr_F\ K$$ ou $pr_F\ K$ est la projection orthogonale de l'ensemble K sur le n-plane F.

PROPOSTION 1. (|3|). Si $t \in \partial B^d$, $d\sigma$ est l'element d'aire sur la sphere ∂B^d, alors

$$\int_{\partial B^d} pr_{t^\perp} K \quad d\sigma = w_{d-1} \quad \text{aria } K$$

ou $t^\perp$ c'est l'espace orthogonale du vecteur t. Ce resultat est atribué à Cauchy et la demostration est donné dans |3|.

PROPOSITION 2. Si l'ensemble K est convex, compact on peut trouver un simplex S à dimension d ainsi que volume S $\geqslant \frac{1}{2d}$ volume K.

Demostration. Suivant la compacité de l'ensemble K soit S un des simplexes qui satisfaient $S \subset K$, volume S est maximale, et $x_1, \ldots, x_{d+1}$ ses sommets. De ça il en resulte $x_i \in \partial K$, et l'éxistence des hiperplanes d'appui $P_i \ni x_i$, de sorte que:

$P_i \parallel (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{d+1}) = R_i$, autrement on peut trouver un point y pour qui $\text{dist}(y,(R_i)) > \text{dist}(x_i,(R_i))$ donc volume $(yx_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_{d+1}) >$ volume $(x_1 \ldots x_{d+1})$ qui contredit l'hypothese.

Soit H_i le demiespace determiné par l'hiperplane P_i, qui contient l'ensemble K; alors: $K \subset \bigcap_{i=1}^{d+1} H_i = S'$ ou S' est un simplex homothetique a S de rapport -2, donc volume K $\leqslant$ volume $S' = 2^d$ volume S qui conclut la preuve de notre proposition.

PROPOSITION 3. Pour K un ensemble convex, compact nous avons $pr_{d-1} K \leqslant 2^{d-1} \text{diam}_{d-1} K$.

Demonstration. Soit $F \in G(d,d-1)$ ainsi que: $pr_{d-1}K = \text{aria}_{d-1} pr_F K$. De la proposition 2 il resulte qu'il existe le simplex $S_0 \subset pr_F K$ avec $\text{aria}_{d-1} S_o \geqslant \frac{1}{2^{d-1}} \text{aria}_{d-1} pr_F K$. Si $x_{o1}, \ldots, x_{od}$ sont les sommets du simplex S_o, on peut trouver les points $x_1, \ldots, x_d$ qui se projectent respectivement en $x_{o1}, \ldots, x_{od}$ sur l'hiperplan F.

Donc les points $x_1, \ldots, x_d$ definent un hiperplan G et: $\text{aria}_{d-1}(x_1, \ldots, x_d) = \text{aria}_{d-1} S_o / \cos \measuredangle(F,G) \geqslant \text{aria}_{d-1} S_o \geqslant \frac{1}{2^{d-1}} \text{aria}_{d-1} pr_F K$ mais: $\text{aria}_{d-1}(x_1 \ldots x_d) \leqslant \text{aria}_{d-1} G \cap K \quad \text{diam}_{d-1} K$ et les dérnières relations finissent la preuve.

PROPOSITION 4. Le nombre des (d-1) sections maximales mutuellement disjointes c(d)verifie: $c(d) \leqslant d\, 2^{d-1} w_d / w_{d-1}$.

Demontration de la theoreme. Soit $H_1, \ldots, H_v$ un ensemble maximale des (d-1)-sections maximales disjointes, $H_i \pm \varepsilon$ des sections simetriques par rapport à H_j, à distance ε près de l'hiperplan H_i (ε est sufissament petit). Soit Q_i un hiperplan qui partages $H_i \cap K$ dans deux souensem bles A_i, B_i ainsi que aria$_{d-1}$ A_i=aria$_{d-1}$ $B_i=\frac{1}{2}$ aria$_{d-1}$ $H \cap K$ et aussi: $\sphericalangle(Q_i \cap H_i)=\frac{\pi}{2}$ donc Q_i determine les ensembles convexes A_i^{ε}, B_i^{ε} qui partagent $\bigcup_{\delta=0}^{\varepsilon}(H_i^{\delta}\ H_i^{\delta})\cap K$ et $A_i \subset A_i^{\varepsilon}$, $B_i \subset B_i^{\varepsilon}$.

Pour ε sufissament petit diam$_{d-1}$ A_i^{ε}, diam$_{d-1}$ B_i^{ε} < diam$_{d-1}$ $K=1$, sinon il existe la suite $\varepsilon_r \longrightarrow 0$ et les sections $V_i^{\varepsilon_r}$ dans les ensembles $A_i^{\varepsilon_r}$ $\forall r \in \{1,2,\ldots,n,\ldots\}$ ou dans les ensembles $B_i^{\varepsilon_r}$ $\forall r \in \{1,2,\ldots,n,\ldots\}$ ainsi que aria$_{d-1}$ $V_i^{\varepsilon_r} \cap A_i^{\varepsilon_r}=1$ (respectif avec $B_i^{\varepsilon_r}$ en place de $A_i^{\varepsilon_r}$ donc $1/2$=aria$_{d-1}$ $A_i=\lim_{r\to\infty}$ diam$_{d-1}$ $V_i^{\varepsilon_r}\cap A_i^{\varepsilon_r}=1$ qui est false. Ceça nous donne que pour ε sufissament petit: diam$_{d-1}$ A_i^{ε}, diam$_{d-1}$ $B_i^{\varepsilon}<1$ et comme $K\setminus\bigcup_{i=1}^{v} A_i^{\varepsilon}\cup B_i^{\varepsilon}$ a $(v+1)$ composantes convexes disjointes C_i, qui ne contiennent pas des $(d-1)$ -sections maximales donc diam$_{d-1}$ C_i < diam$_{d-1}$ K pour ne contredire pas la maximalité du nombre des $(d-1)$-sections maximales disjointes, on va suivre: $b(d,d-1) \leqslant 3v+1$. De la proposition 4 il resulte la validité de la theoreme.

REMARQUE 1. Si on peut estimer meilleur $c(d)$ aussi $b(d,d-1)$ est majoré plus fine.

REMARQUE 2. Le resultat de la proposition 4 reste valable en supposant seulement: int $(F_i \cap F_j \cap K)=\phi$.

REMARQUE 3. L'estimation de la fonction $c(d)$ est assez grossière parce que $c(d)$ semble être e qual avec 1, pour aucun $d \geqslant 1$. Sous la condition plus faible exprimée dans la remarque 2 la nouvelle fonction $c(d)$ semble être plus petit que $d+1$.

BIBLIOGRAPHIE

|1| K. BORSUK:"Drei Sätze über die n-dimensionale Sphäre". Fundamenta Mathematica, 20(1933) s. 177-190.

|2| B. GRUNBAUM:"Borsuk's problem and related questions". Proc. Sympos. Pure Math., v.7 (Convexity) Providense (USA) 1963, 271-284.

|3| K. LEICHTWEISS:"Konvexe Mengen". VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1980.