EXTRACTA MATHEMATICAE 2, n.3, 96-98 (1987)

LES ALGEBRES SYMETRIQUES A GAUCHE EN DIMENSION DEUX

Saad AHMAD

1. Préliminaires. Une algèbre symétrique à gauche (algèbre SG, définition analogue pour algèbre SD) sur un corps commutatif K est un espace vectoriel A sur K, muni d'une multiplication, vérifiant l'identité $(x,y,z) = (y,x,z)$ où $(x,y,z) = (xy)z - x(yz)$. Si l'on pose $xy = L_x(y) = R_y(x)$ et $[x,y] = xy-yx$ cette identité est équivalente à chacune des deux identités $L_{[x,y]} = [L_x,L_y]$ ou $R_{yz}-R_zR_y = [L_y,R_z]$. On peut vérifier que le crochet $[x,y]$ est de Lie. Si A est une algèbre SG (ou SD) et si de plus A est flexible, alors A est alternative à droite (ou à gauche). J. Helmstetter a donné une classification de ces algèbres, en dimension deux, en utilisant l'algèbre de Lie non-abélienne sous-jacente à A. Nous la faison sans cette considération ce qui nous permet d'obtenir toutes les algèbres SG réelles en dimension deux. Ce faisant, nous donnerons quelques résultats concernant les algèbres réelles.

2. Les algèbres SG à éléments nilpotents. Soient A une K-algèbre à éléments nilpotents non nuls. Notons $N(A)$ l'ensemble des éléments nilpotents de A, le zéro inclus. Si $x \neq 0$ est dans A l'ordre de x, noté $O(x)$, est le plus petit entier n tel que $R_x^{n-1}(x) = 0$. De plus, $O(0) = 1$. On montre facilement la proposition suivante :

Proposition 2.1. *Soit A une K-algèbre de dimension finie. Si x est un élément de $N(A)$ d'ordre n, les vecteurs $x,R_x(x),R_x^2(x),\ldots, R_x^{n-2}(x)$ sont K-linéairement indépendants.*

Il résulte que pour tout x dans $N(A)$, $O(x) \leq \dim_K(A)+1$, ce qui nous dit que $\max\limits_{x\in N(A)} O(x)$ est un nombre entier fini et, par définition, l'ordre de A, noté $O(A)$, est $O(A) = \max\limits_{x\in N(A)} O(x)$, si $N(A) = 0$, on pose $O(A) = 1$. Soit A est de dimension n, si $O(A) = n+1$, il existe $x \in A$ tel que $A = \langle x\rangle$, et si $O(A) = n$ et x un élément nilpotent d'ordre n dans A, alors il existe y dans A tel que $A = \langle x,y\rangle$. Supposons maintenant que A est une K-algèbre SG, si A contient un idempotent alors, $O(A) \leq \dim_K(A)$.

Proposition 2.2. *Pour tout entier $p \geq 1$, soit M_p les sous-algèbres de l'algèbre SG A formée par les vecteurs x pour lesquels la quantité $trR_y^pR_x = trR_{R_y^p(x)}$ est nulle pour tout y dans A. Si x est dans*

M_p, R_x est un endomorphisme nilpotent de A. [Voir 2].

Il en résulte que pour tout x dans A, $p \geq 1$ on a $trR_x^p = trR_{(R_x)^{p-1}(x)}$, de plus, si x est un élément nilpotent d'ordre p, les deux membres sont nuls, en particulier, si x est un élément nilpotent d'ordre deux dans A, alors on peut démontrer la proposition suivante :

Proposition 2.3. Soit A une K-algèbre SG. S'il existe un élément x dans A tel que $x^2 = 0$, alors R_x est nilpotent.

En particulier, toute nilalgèbre SG d'ordre deux est une algèbre de Lie 2-nilpotente (quels que soient x,y,z dans A, $[[x,y],z]] = 0$).

Proposition 2.4. Soit A une K-nilalgèbre SG de dimension deux. Alors A est ou bien une zéro-algèbre, ou l'algèbre A_1 dont la table de multiplication relativement à une base $\{e_1,e_2\}$ s'écrit $e_1^2 = e_2$, $e_2e_1 = 0$, $e_1e_2 = \alpha e_2$, et $e_2^2 = 0$ avec α dans K.

Proposition 2.5. A isomorphisme près, il existe deux algèbre SG de dimension deux qui contiennent des éléments nilpotents, et qui ne sont pas des nilalgèbres. L'algèbre A_2 dont la table de multiplication relativement à une base $\{e_1,e_2\}$ s'écrit $e_1^2 = \alpha e_1+\beta e_2$, $e_1e_2 = \gamma e_2$, $e_2e_1 = e_2^2 = 0$ et l'algèbre A_3 dont la table de multiplication s'écrit $e_1^2 = \alpha e_1+\beta e_2$, $e_1e_2 = \gamma e_2$, $e_2e_1 = \alpha e_2$ et $e_2^2 = 0$ où α,β,γ sont dans K.

3. **Les algèbres SG réelles sans éléments nilpotents**. On considère la table de multiplication générale d'une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension deux (table 1) : $e_1^2 = \alpha e_1+\beta e_2$, $e_1e_2 = \gamma e_1+\delta e_2$, $e_2e_1 = \lambda e_1+\mu e_2$ et $e_2^2 = \nu e_1+\theta e_2$ où $\{e_1,e_2\}$ est une base et $\alpha,\ldots,\theta$ sont dans $\mathbb{R}$. Une manière possible de simplifier cette table est de considérer les idempotents. La proposition suivante a été démontrée dans [3] pour les $\mathbb{R}$-algèbres commutatives et dans [1] pour les $\mathbb{R}$-algèbres à division. En fait, on peut la démontrer en supposant que la $\mathbb{R}$-algèbre est sans éléments nilpotents d'ordre deux.

Proposition 3.1. Si A est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension deux, sans éléments nilpotents d'ordre 2, alors A possède au moins un idempotent.

Ceci nous permet d'écrire toute $\mathbb{R}$-algèbre de dimension deux, sans éléments nilpotents d'ordre 2, sous la forme (table 2) : $e_1^2 = e_1$, $e_1e_2 = \gamma e_1+\delta e_2$, $e_2e_1 = \lambda e_1+\mu e_2$ et $e_2^2 = \nu e_1+\theta e_2$. Mais il existe des $\mathbb{R}$-algèbres écrites sous cette forme et qui contiennent des éléments nilpotents d'ordre 2. Cependant on a :

Proposition 3.2. Une $\mathbb{R}$-algèbre décrite sous la forme de la table (2) ne possède pas d'éléments nilpotents d'ordre 2 si et seulement si (1) $\theta^2 \neq \begin{vmatrix} \theta & \delta+\mu \\ \nu & \gamma+\lambda \end{vmatrix}(\mu+\delta)$ si $(\theta,\mu+\delta) \neq (0,0)$ ou (2) $(\gamma+\lambda)^2-4\nu<0$ si $(\theta,\mu+\delta) = (0,0)$.

Proposition 3.3. Une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension deux, sans éléments nilpotents d'ordre 2, a exactement 1, 2 ou 3 idempotents. (voir [1])

La plupart des résultats annoncés en [1] sont valables pour les algèbres réelles sans éléments nilpotents d'ordre 2.

Soit A la $\mathbb{R}$-algèbre SG où la table de multiplication est donnée par la (table 1). D'après la proposition 3.1, A peut se présenter sous la forme de la (table 2). On cherche toutes les algèbres SG qui s'écrivent sous la forme de la (table 2), et on choisit ceux qui vérifient les conditions de la proposition 3.2, puis ou simplifie chaque table selon les nombres des idempotents.

Proposition 3.4. A isomorphisme près il existe quatre $\mathbb{R}$-algèbres SG isolées (indépendantes d'un paramètre) de dimension deux, sans éléments nilpotents d'ordre 2, à savoir : A_4 : $e_1^2 = e_1$, $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$, $e_2^2 = e_2$, A_5 : $e_1^2 = e_1$, $e_1e_2 = \frac{1}{2}e_2$, $e_2e_1 = 0$, $e_2^2 = e_1$, A_6 : $e_1^2 = e_1$, $e_1e_2 = e_1+\frac{1}{2}e_2$, $e_2e_1 = 2e_1$, $e_2^2 = e_2$, A_7 : $\mathbb{C}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S.C. ALTHOEN and L.D. KLUGER, When is $\mathbb{R}^2$ a division algebra ? Amer. Math. Month. 90 (1983), 625-635.

[2] J. HELMSTETTER, Radical et groupe formel d'une algèbre SG (1975), thèse de doctorat de 3ème cycle, Université de Grenoble.

[3] L. MARKUS, Quadratic differential equations and nonassociative algebras in Contributions to the theory of nonlinear oscillations, Vol. V(1960), 185-213, Princeton University press, Princeton, N.J.

AMS 1980 Subject
classification : 17A99

Université Montpellier II, Mathématiques
Place Eugène Bataillon
F-34060 Montpellier France