EXTRACTA MATHEMATICAE 2, n.3, 99-101 (1987)

DEFORMATION DES ALGEBRES DE BERNSTEIN NORMALES

Moussa OUATTARA

A l'exemple de la théorie classique de déformation d'algèbres, définies par des identités polynomiales (cf. [1]), nous proposons dans cet article un modèle de cohomologie pour une classe d'algèbres pondérées, dites de Bernstein normales. Bien que ce modèle convienne pour la résolution du problème d'extension des algèbres, nous ne donnerons ici que son application à la résolution du problème de déformation, avec des théorèmes de rigidité.

1. Préliminaires. Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2, une K-algèbre commutative, non nécessairement associative, de dimension $n+1$ est dite de Bernstein normale ou, plus simplement, conservative si $x^2y = \omega(x)xy$ où $\omega : A \to K$ est un morphisme non nul d'algèbres, appelé pondération. Toute K-algèbre de Bernstein admet la décomposition de Peirce $A = Ke \oplus U \oplus V$ relativement à l'idempotent e, où $U = \{x | ex = \frac{1}{2} x,\ x \in A\}$ et $V = \{x | ex = 0,\ x \in A\}$. Si $r = \dim_K U$, $s = \dim_K V$ alors A est dite de type $(1+r,s)$ et A conservative équivaut à $UV = 0$ et $V^2 = 0$ (cf. [3]). On dira qu'un K-espace vectoriel M est un A-module conservatif si, il existe une application bilinéaire $A\times M \to M$, $(x,m) \mapsto x.m$ vérifiant : (i) $2(xy).m = \omega(x)y.m + \omega(y)x.m$ et (ii) $2x.(y.m) = \omega(y)x.m$, quels que soient x, y dans A et m dans M. On voit que l'idéal $N = \mathrm{Ker}(\omega)$ est un A-module conservatif mais que A ne l'est pas, puisque (ii) n'est pas vérifié.

2. Cohomologie des algèbres conservatives. Soient A une K-algèbre conservative, M un A-module conservatif et f une application linéaire de A dans M. On associe à f une application $(n+1)$-linéaire de A dans M, notée $\delta_n f$ $(n = 0,1,2,3)$, en posant : $(\delta_o m)(x) = x.m$, $(\delta_1 f)(x_o,x_1) = x_o.f(x_1) - f(x_ox_1) + x_1.f(x_o)$, $(\delta_2 f)(x_o,x_1,x_2) = -\omega(x_o)f(x_1,x_2) + 2f(x_ox_1,x_2) - \omega(x_1)f(x_o,x_2) + 2x_2.f(x_o,x_1)$, $(\delta_3 f)(x_o,x_1,x_2,x_3) = -\omega(x_o)f(x_1,x_2,x_3) + 2f(x_ox_1,x_2,x_3) - \omega(x_1)f(x_o,x_2,x_3) + \omega(x_2)f(x_o,x_1,x_3) - 2x_3.f(x_o,x_1,x_2)$, quels que soient les x_i dans A et pour m fixé dans M.

Soit la suite $C^o \xrightarrow{\delta_o} C^1 \xrightarrow{\delta_1} C^2 \xrightarrow{\delta_2} C^3 \xrightarrow{\delta_3} C^4$ où $C^o := M$, $C^1 := \mathrm{Hom}_K(A,M)$ et C^k est le sous K-espace vectoriel des applications k-linéaires de A dans M $(k = 2,3,4)$, symétriques par rapport aux 2 premières variables. Si on pose $B^{k+1} = \delta_k C^k$, image de δ_k, et $Z^k = \operatorname{Ker} \delta_k$ alors $\delta_{k+1} \circ \delta_k = 0$ entraîne $B^{k+1} \subseteq Z^{k+1}$ et on pose $H^k = Z^k/B^k$, le k-ième groupe de cohomologie de A à coefficient dans M $(k = 0,1,2,3)$, avec $B^0 = 0$. Pour $M = N$, on a $H^0(A) = Z^0(A) = \operatorname{Ann} A$, $Z^1 = \operatorname{Der}_K(A)$ l'algèbre de Lie des K-dérivations de A, $B^1 = \operatorname{Derint}_K(A)$ l'idéal des dérivations intérieures et $H^1(A) = \operatorname{Der}_K(A)/\operatorname{Derint}_K(A)$ (cf. [2]).

3. Déformation d'algèbres conservatives. Soient A une K-algèbre conservative de produit $\mu : A\times A \to A$ et $A_t = A \otimes_K L$ l'espace vectoriel obtenu par extension du corps K au corps $L = K((t))$. Une déformation de A est une algèbre conservative A_t dont le produit $f_t : A_t \times A_t \to A_t$ peut se mettre sous la forme $f_t(x,y) = \mu(x,y) + \sum_{i\geq 1} t^i F_i(x,y)$ où les F_i sont des applications bilinéaires de A dans A (cf. [1]). A étant uniquement pondérée, $\omega' = \omega \otimes_K \mathrm{id}_L$ est l'unique pondération de A_t et par conséquent $\omega'(f_t(x,y)) = \omega(x)\omega(y)$ entraîne $F_i(x,y)$ est dans N. Ici $M = N$ en tant que A-module conservatif. Soit φ dans C^2. Si on suppose que $\mu+\varphi$ est un produit conservatif alors $2(\mu+\varphi)((\mu+\varphi)(x,y),z) = \omega(x)(\mu+\varphi)(y,z) + \omega(y)(\mu+\varphi)(x,z)$ entraîne $\delta_2\varphi(x,y,z) + 2\varphi(\varphi(x,y),z) = 0$.

Notation : $(f \wedge_{p,q} g)(x_1,\dots,x_{p+q-1}) = f(g(x_1,\dots,x_q),x_{q+1},\dots,x_{p+q-1})$. Dans cette notation, l'équation de déformation ci-dessus devient $\delta_2\varphi + 2\varphi \wedge_{2,2} \varphi = 0$. On peut la résoudre par la méthode des séries formelles : on pose $\varphi = \sum_{i\geq 1} t^i \varphi_i$ dans l'équation de déformation, alors la suite suivante d'équations apparaît $\delta_2\varphi_k + 2 \sum_{i+j=k} \varphi_i \wedge_{2,2} \varphi_j = 0$ $(k \geq 1)$, appelées conditions d'intégrabilité.

Lemme 3.1. Pour $n \geq 1$, si $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n$ vérifient les conditions d'intégrabilité alors $\delta_3\left(\sum_{i+j=n+1} \varphi_i \wedge_{2,2} \varphi_j\right) = 0$.

On établit d'abord la relation $\delta_3(f \wedge_{2,2} g) = f \wedge_{2,3} \delta_2 g - \delta_2 f \wedge_{3,2} g$, puis on effectue des changements d'indices.

Lemme 3.2. Si $H^3(A) = 0$ alors chaque φ_1 dans $Z^2(A)$ est intégrable (cf. [1]).

Lemme 3.3. Si $H^2(A) = 0$ alors μ est rigide, c'est-à-dire, pour toute famille μ_t de déformations de μ, il existe une famille F_t de transformations inversibles telle que $\mu_t(x,y) = F_t^{-1}\mu(F_t(x),F_t(y))$, pour tout x, y dans A.

4. Application aux algèbres $A_{T,\omega}$. La multiplication de $A_{T,\omega}$ est donnée par $xy = \frac{1}{2}(\omega(x)T(y) + \omega(y)T(x))$ où T est un projecteur de A tel que $\omega o T = \omega$. $A_{T,\omega}$ est conservative (cf. [3] §4). Supposons $A_{T,\omega} = Ke \oplus U \oplus V$ de type $(1+r,s)$. Alors $H^2(A_{T,\omega})$ est l'ensemble des 2-cochaînes π telles que $\pi(x_1,x_2) = \pi(u_1,u_2)$ soit dans V, où $x_i = \omega(x_i)e + u_i + v_i$. On vérifie que π satisfait l'équation de déformation et par suite, les déformations de $A_{T,\omega}$ sont $\mu_t = \mu + t\pi$, π parcourant $H^2(A_{T,\omega})$.

Théorème 4.1. Les algèbres conservatives de type $(1+n,0)$ sont rigides.

Ici $T = id_A$, $V = 0$ alors $Z^2(A) = 0$ et $H^2(A) = 0$.

Théorème 4.2. Les algèbres conservatives de type $(1,n)$ sont rigides.

Ici $T(x) = \omega(x)e$, $U = 0$ alors $B^2(A) = Z^2(A)$ et $H^2(A) = 0$.

Théorème 4.3. Les algèbres conservatives vérifiant $U^2 = V$ sont rigides.

En fait $B^2(A) = Z^2(A)$ donc $H^2(A) = 0$

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. GERSTENHABER, On the deformations of rings and algebras, Ann. of Math. 79 (1964), 59-104.

[2] G. HOCHSCHILD, On the cohomology groups of an associative algebra, Ann. of Math. 46 (1945), 58-67.

[3] A. MICALI et M. OUATTARA, Sur les algèbres de Jordan génétiques, dans Algèbres de Jordan, Travaux en Cours, Hermann, Paris 1987.

AMS 1980 classification: 17D92

Université des Sciences et
Techniques du Languedoc
Institut de Mathématiques
Place E. Bataillon
34060 MONTPELLIER Cedex France