EXTRACTA MATHEMATICAE 2, n.1, 4-6 (1987)

MEDIDAS DE HAAR-BEREZIN

Daniel Hernández Ruipérez y Jaime Muñoz Masqué
Departamento de Matemáticas. Universidad de Salamanca.

1.Introducción: Una de las nociones más sorprendentes introducidas en Matemáticas por necesidades de las teorías físicas de Supersimetrías es la integral de Berezin sobre variables anticonmutativas ([1],[5],2.4.4), que se define como sigue: Sea $(x_1, \ldots, x_m)$ un sistema de coordenadas en $\mathbf{R}^m$, $(s_1, \ldots, s_n)$ una base de $\mathbf{R}^n$, y sea $f=\Sigma f_\alpha(x)\cdot s_\alpha$ $(\alpha=(\alpha_1<\ldots<\alpha_p)$, $s_\alpha=s_{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot s_{\alpha_p}$, $1\leq\alpha_1, \alpha_p\leq n)$ la expresion de una *función graduada de soporte compacto* $f\in A^{m,n}=\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^m)\otimes\Lambda(\mathbf{R}^n)$ como elemento del álgebra exterior sobre $\mathbf{R}^n$. La integral de *Berezin* de f respecto del sistema de coordenadas graduado (x_i,s_j) es

$$\int_{(x_i,s_j)} f = \int_{\mathbf{R}^m} f_{(1,\ldots,n)}(x)\cdot dx_1\wedge\ldots\wedge dx_m$$

siendo $f_{(1,\ldots,n)}(x)$ la componente de f según $s_1\cdot\ldots\cdot s_n$.

El propósito de esta nota es *caracterizar la integral de Berezin como el equivalente graduado de la integral de Lebesgue*, esto es, como *la única medida graduada invariante por supertraslaciones*. Para ello es preciso disponer de una descripción global de la integral de Berezin sobre una variedad graduada (X,A) de dimensión (m,n) ([4]).Dicha descripción fue dada en ([3]) del siguiente modo: Sea $\Omega^m(A)\otimes\mathcal{P}^n(A)$ el haz de operadores diferenciales de orden n sobre A con valores en el módulo de las m-formas diferenciales $\Omega^m(A)$ y sea $\mathcal{K}$ el submódulo por la derecha cuyas secciones en un abierto U de X son aquellos operadores $P:A(U)\longrightarrow\Omega^m(A(U))$ tales que para toda $f\in A(U)$ de soporte compacto ,la especialización $P(f)^\sim$ de P(f) a X sea la diferencial de una (m-1)-forma de soporte compacto. Se define el haz *Bereziniano* sobre (X,A) por:

$$\mathbf{Ber}(A) = \Omega^m(A)\otimes\mathcal{P}^n(A)/\mathcal{K}.$$

La fórmula de cambio de coordenadas de la integral de Berezin ([5],2.4.5) prueba que dicha integral evalua secciones del Bereziniano y la integral de Berezin de una sección con *soporte compacto* ξ de $\mathbf{Ber}(A)$ viene ahora dada por:

$$\int_{Ber}\xi = \int_X P(1)^\sim,$$

siendo P un operador con soporte compacto en la clase ξ, $\xi=[P]$.

2.Medidas graduadas: Los espacios topológicos graduados se definen del mismo modo que las variedades graduadas ([4]). Hablando sin precisión, un *espacio topológico graduado de dimensión impar* n, es una pareja (X,A) donde X es un espacio topológico localmente compacto de base numerable y A es un haz de anillos sobre X dotado de un epimorfismo $f\mapsto f^\sim$ en el haz $\mathcal{C}_X$ de las *funciones continuas* y tal que localmente sea $A(U)=\mathcal{C}_X(U)\otimes\Lambda(\mathbf{R}^n)$.

Los anillos A(U), siendo U un abierto de X, tienen una estructura natural de *álgebra de Frèchet anticonmutativa* (ver [2],th.1). Si K es un compacto de X contenido en U, el anillo $A_K(U)$ de los elementos de A(U) con soporte en K, tiene, análogamente, una estructura de *álgebra de Banach anticonmutativa*, y el anillo $A_c(U) = \lim\ \mathrm{ind.}_{U\supset K} A_K(U)$ de los elementos de A(U) con *soporte*

AMS (MOS) Subject Class.: Primary 58A50; Secondary 58C50, 28C10

compacto, puede ser dotado de la topología del límite inductivo, con la que es un *espacio de Frèchet*. Se tiene ahora:

2.1.Definición: *El* espacio de las medidas graduadas *sobre* (U,A) *es el dual topológico* $A_c(U)'$ *del espacio de Frèchet* $A_c(U)$.

La relación entre las medidas graduadas y las ordinarias viene dado por el siguiente,

2.2.Teorema. *Sea* $\mathcal{P}^n(A(U),\mathcal{C}_X(U))$ *el* A(U)*- módulo por la izquierda de los operadores diferenciales de orden* n *de* A(U) en $\mathcal{C}_X(U)$. *Existen morfismos de* A(U)*- módulos por la derecha,* $\phi:\mathcal{C}_c'\otimes_A\mathcal{P}^n(A,\mathcal{C}_X)\longrightarrow A_c(U)'$, $\phi(\mu\otimes P)=\mu\circ P$, *que inducen un* isomorfismo *de* A*- módulos por la derecha,*

$$\mathcal{C}_c'\otimes_A\mathcal{P}^n(A,\mathcal{C}_X)\approx A_c'.$$

Sea (X,A) un espacio topológico graduado de dimensión impar n . Para cada abierto U de X sea $\mathcal{K}(U)$ el ideal por la derecha del anillo $\mathcal{P}^n(A)(U)$ de los operadores diferenciales de orden n de A(U) formado por aquellos operadores tales que $P(f)^\sim=0$ para toda sección f con soporte compacto de A(U).

2.3.Definición. *El* Bereziniano topológico *de* (X,A) *es el haz de* A*- módulos por la derecha,*

$$\mathbf{B}^t(A)=\mathcal{P}^n(A)/\mathcal{K}.$$

2.4.Teorema. *El Bereziniano topológico* $\mathbf{B}^t(A)$ *es un haz de línea de paridad* n (mód.2). *Si* $(s_1,\dots,s_n)$ *son coordenadas impares en* A(U), *se tiene* $\Gamma(U,\mathbf{B}^t(A))=[\partial/\partial s_1\circ\dots\circ\partial/\partial s_n]\cdot A(U)$, *donde* [ ] *denota la clase de un operador módulo* $\mathcal{K}$.

Por argumentos standard de Análisis Funcional, el espacio $\mathbf{B}^t(A)_c(U)$ de secciones con soporte compacto del Bereziniano topológico puede ser dotado de una única estructura de espacio de Frèchet tal que los morfismos $\mathbf{B}^t(A)_c(U)\rightarrow\mathbf{B}^t(A)_c(V)$ sean homomorfismos topológicos para $U\supseteq V$, y que los isomorfismos locales $A_c(U)\approx\mathbf{B}^t(A)_c(U)$ sean isomorfismos topológicos.

2.5.Definición. *El* espacio de medidas Berezinianas *sobre* (X,A) *es el dual topológico* $(\mathbf{B}^t(A)_c(U))'$ *del espacio de Frèchet* $\mathbf{B}^t(A)_c(U)$.

2.6.Teorema. $U\rightarrow(\mathbf{B}^t(A)_c(U))'$ *es un haz,* $\mathbf{B}^t(A)_c'$, *de* A*-módulos por la derecha.*

El teorema de estructura de las medidas Berezinianas es similar al de las medidas graduadas,

2.7.Teorema. *Existe un isomorfismo de haces de* A*-módulos por la derecha,*

$$\mathcal{C}_c'\otimes_A\mathcal{P}^n(\mathbf{B}^t(A)(U),\mathcal{C}(U))\approx\mathbf{B}^t(A)_c'$$

dado por $\mu\otimes P\rightarrow\mu\circ P$ *en cada abierto.*

3.Medida Bereziniana inducida por una medida ordinaria. Caracterización: Sea (X,A) un espacio topológico graduado de dimensión impar n . Cada medida ordinaria $\mu\in\mathcal{C}_c(X)'$ induce una medida Bereziniana $\mu_{Ber}:\mathbf{B}^t(A)(X)\longrightarrow\mathbf{R}$ que llamaremos la *medida Bereziniana asociada a* μ, por una fórmula análoga a la que define la integral de Berezin,a saber:

$$\mu_{Ber}(\xi)=\mu(P(1)^{\sim})$$

siendo P un operador de soporte compacto en la clase ξ , $\xi=[P]$.

Sea $\mathcal{H}(X)$ el grupo de los automorfismos homogeneos de $\mathbf{Z}_2$-álgebras graduadas de A(X) que conmutan con los epimorfismos de estructura $A(X) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$. $\mathcal{H}(X)$ opera de modo continuo en $\mathbf{B}^t(A)_c(X)$ por la fórmula: $\beta\cdot[P]=[\beta\circ P\circ\beta]$ y se tiene:

3.1.Teorema. *Una medida Bereziniana* $\nu\in\mathbf{B}^t(A)_c(X)'$ *es la medida Bereziniana asociada a una medida ordinaria* $\mu\in\mathcal{C}_c(U)'$ (*esto es,* $\nu=\mu_{Ber}$) *si, y sólo si,* ν *es* invariante *por la acción del grupo* $\mathcal{H}(X)$.

De este modo quedan caracterizadas las medidas Berezinianas producidas por una medida ordinaria.

5.Grupos topológicos graduados. La medida de Haar-Berezin: Los *grupos topológicos graduados* (G,A) se definen como en el caso diferenciable ([4]).

5.1.Definición. *Una* traslación graduada por la izquierda *sobre un grupo topológico graduado* (G,A) *es un morfismo* $\tau_g:(G,A) \longrightarrow (G,A)$ *de espacios topológicos graduados que induce una traslacion ordinaria por la izquierda* $L_g:G \longrightarrow G$, $L_g(g')=g\cdot g'$.

El grupo $\Xi(G)$ de las traslaciones graduadas por la izquierda sobre (G,A) opera de modo continuo por la izquierda en $\mathbf{B}^t(A)_c(G)$ por la misma fórmula con que lo hace $\mathcal{H}(G)$, resultando

5.2.Teorema (de Haar para las medidas Berezinianas). *Sea* (G,A) *un grupo topológico graduado. Existe una* única *medida Bereziniana* $\nu\in\mathbf{B}^t(A)_c(G)'$, *salvo factores escalares, invariante por el grupo* $\Xi(G)$ *de las traslaciones graduadas. Dicha medida* ν *es la* medida Bereziniana *asociada a una* medida de Haar *ordinaria* μ *sobre* G, $\nu=\mu_{Ber}$.

Así pues, la integral de Berezin en la variedad graduada standard $(\mathbf{R}^m, \mathcal{C}^{\infty}(\mathbf{R}^m)\otimes\Lambda^{\cdot}(\mathbf{R}^n))$ es *la única medida*, salvo factores escalares, que es *invariante por traslaciones graduadas* (*supertraslaciones*) lo que aclara la importancia de la integral de Berezin en la Geometría y el Análisis de las variedades graduadas,

Referencias:

[1] BEREZIN, F.A., Canonical operator transformations in representations of the secondary quantization, *Dokl. Akad. Nauk.* ≡ *Soviet Phys. Dokl.*, **6**, (1961), 212-215.

[2] HERNANDEZ RUIPEREZ,D.-MUÑOZ MASQUE,J., Global variational calculus on graded manifolds,I, *J. Math. Pures et Appl.* , **63**, (1984), 283-309.

[3] HERNANDEZ RUIPEREZ,D.-MUÑOZ MASQUE,J., Construction intrinsèque du faisceau de Berezin d'une variété graduée, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **301**, *Série* I, nº **20**, (1985), 915-918.

[4] KOSTANT, B., Graded manifolds, graded Lie theory and prequantization, *in* Diff. Geom. Meths. in Math. Phys. (Bonn 1975). Springer, *Lecture Notes in Mathematics*, **570**,(1977), 177-306.

[5] LEITES, D. A., Introduction to the theory of Supermanifolds, *Uspehi Math. Nauk.* **35**, (1980)≡ *Russian Math. Surveys* **35:1**, (1980), 1-64.