EXTRACTA MATHEMATICAE 2, n.1, 14-16 (1987)

UN RESULTADO SOBRE EL ORDEN Y EL TAMAÑO DE GRAFOS QUE REPRESENTAN A UN GRUPO FINITO (*)

Eduardo Montenegro

Instituto de Matemáticas . Facultad de Ciencias Básicas y Matemáticas . Universidad Católica de Valparaíso. Avenida Brasil 2950 .VALPARAISO . CHILE

En 1938 , Frucht [2] demostró que cualquier grupo finito puede ser representado por un grafo, es decir , dado cualquier grupo finito H , existe un grafo G cuyo grupo de automorfismos es isomorfo a H , resolviendo de esa manera un problema propuesto por D. Konig [5] en 1936. Después Frucht [3] y G. Sabidussi [6] demostraron la existencia de grafos con ciertas propiedades preestablecidas y que representan a un grupo dado . Un problema de esta clase es el de determinar el número mínimo de vértices y líneas que puede tener un grafo con un grupo dado .

En este artículo un **grafo** G es un sistema (V,E) donde V es un conjunto finito no vacío y E un conjunto de parejas $\{x,y\}$ tal que $x \neq y$; x , y elementos de V . Cada elemento de V lo llamaremos **vértice** y cada elemento de E lo llamaremos **línea** . La línea $\{x,y\}$ la anotaremos por xy . Diremos que dos vértices x,y son **adyacentes** o **vecinos** si xy es línea del grafo . Por **N(v)** anotaremos al conjunto de vecinos de v . El **grupo de automorfismos** de un grafo está formado por las permutaciones de los vértices del grafo que preservan la relación de adyacencia . La mayor parte de la terminología usada en este trabajo está tomada de los textos [1] y [4] .

El objeto de este artículo es probar que para todo grupo finito H existen dos enteros positivos p_H y q_H tales que si $n \geq p_H$ entonces existe un grafo con n vértices cuyo grupo de automorfismos es isomorfo a H . Además si $m \geq q_H$ entonces existe un grafo con m líneas , que representa a H .

Los teoremas que desarrollaremos a continuación nos asegurarán la existencia de ciertos números enteros positivos, p_H y q_H , que permiten la construcción de grafos que representan a un grupo finito H y que tienen orden y tamaño preestablecidos .

(*) A.M.S. Subject Clasification (1980) 05-C-25 , 05-C-35

Teorema 1 : Sea H un grupo finito no trivial . Entonces existe un entero p_H tal que para cada entero $n \geq p_H$ existe un grafo G de orden n que representa a H .

Demostración :

Anotemos por $\mathfrak{F}$ el grafo que representa a H , obtenido según la demostración empleada por Frucht [2] y definamos p_H como el orden de $\mathfrak{F}$.

Sea n un número entero tal que $n \geq p_H$. Consideremos dos casos, que n sea igual a p_H o que sea mayor. Si n es p_H , entonces un grafo que satisface las condiciones requeridas es el grafo $\mathfrak{F}$. Si n es mayor que p_H , se obtiene un grafo G que cumple las condiciones preestablecidas por recurrencia . En efecto , sea X_1 , X_2 , ... , X_i , ... una colección de copias del grafo trivial K_1 , disjuntos por vértices entre sí y con $\mathfrak{F}$. Para cada número natural i se define $G_i = Y_{i-1} \cup X_i$, donde Y_{i-1} es el complemento del grafo G_{i-1} , para $i > 1$ e $Y_0 = G_0 = \mathfrak{F}$ si $i = 1$. Usando inducción sobre i , se puede demostrar que el orden de G_i es $p_H + i$ y que G_i representa a H . Definiendo $i = n - p_H \geq 1$ se tiene que el grafo G , definido por $G = G_i$, tiene orden $p_H + i = n$ y representa al grupo H .

Teorema 2 : Sea H un grupo finito no trivial . Entonces existe un entero q_H tal que para cada entero $m \geq q_H$ existe un grafo G de tamaño m que representa a H

Demostración :

Anotemos por v el vértice del grafo trivial K_1 y por $\mathfrak{F}$ el grafo de Frucht [2] que representa a H . Sea $M = \mathfrak{F} + K_1$, entonces $| E(M) | = | V(\mathfrak{F}) | + | E(\mathfrak{F}) |$. El tamaño de M nos permite definir un número natural q_H , como $q_H = | E(M) |$. Puesto que la valencia del vértice v en M es igual al orden de $\mathfrak{F}$, y v es único con tal valencia , entonces v es dejado fijo por todo automorfismo de M y por lo tanto M y $\mathfrak{F}$ tienen grupo de automorfismos isomorfos H

Sea m un número entero tal que $m \geq q_H$. Consideremos dos casos, que m sea igual a q_H o que sea mayor. Si m es q_H, entonces un grafo que satisface las condiciones requeridas es el grafo M. Si m es mayor que q_H, sea t un número natural tal que $t = m - q_H$ y sea P_{t-1} una cadena de longitud t, sin vértices en común con M. Modificando el grafo M mediante la identificación del vértice v con un vértice extremo de P_{t-1}, se obtiene el grafo G requerido.

NOTA : Aún queda por resolver el problema de determinar los mínimos valores p_H y q_H que satisfaccn las condiciones de los Teoremas 1 y 2.

REFERENCIAS

[1] Behzad, M., Chartrand, G. and Lesniak-Foster, L., Graphs and Digraphs. Wadsworth International, Belmont, CA (1979).

[2] Frucht, R. , Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe. Compositio Math., 6 (1938) 239-250.

[3] Frucht, R., Graphs of degree three whith a given abstract group. Canad. J. Math., 1 (1949) 365-378.

[4] Harary, F., Graph Theory. Addison-Wesley(1968)

[5] König, D., Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. (Leipzig,1936).

[6] Sabidussi, G., Graphs with, given group and given graph-theoretical properties. Canad.J. Math., 9 (1957) 515-52.