EXTRACTA MATHEMATICAE 1, n.2, 85-87 (1986)

SOBRE UN PRINCIPIO DE DUALIDAD ENTRE SISTEMAS MECANICOS Y CAMPOS ESCALARES

Gerardo Rodríguez Sánchez (*)

Sea Q una variedad diferenciable y $p:\mathbb{R}\times Q \longrightarrow \mathbb{R}$ la proyección canónica: $p(t,q) = t$. Se considera una lagrangiana de primer orden $\mathcal{L}\in C^{\infty}(J^1(\mathbb{R}\times Q/\mathbb{R}))$ y el problema variacional definido por la densidad $\mathcal{L}dt$. Como es sabido ([2]), la forma de Poincaré-Cartan asociada a dicho problema es una 1-forma sobre $J^1(\mathbb{R}\times Q/\mathbb{R})$ cuya expresión local es :

$$\Theta = \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}(dq_i - \dot{q}_i dt) + \mathcal{L}dt \quad ,$$

donde $(t,q_i,\dot{q}_i)$ son las coordenadas inducidas en el fibrado de jets por un sistema de coordenadas de Q .

Si el problema variacional es *regular* , las funciones

$$(t,q_i,p_i) \quad \text{con} \quad p_i = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i \quad ,$$

pueden tomarse como sistemas de coordenadas, y la expresión de Θ es :

$$\Theta = \sum_i p_i dq_i + Hdt \quad ,$$

donde

$$H = \mathcal{L} - \sum p_i\dot{q}_i$$

es la hamiltoniana del sistema.

LEMA. Supóngase que la lagrangiana $\mathcal{L}$ es regular y que $\Theta_\xi \neq 0$ para todo $\xi\in J^1(\mathbb{R}\times Q/\mathbb{R})$ (esta condición se satisface, por ejemplo, si H no se anula en ningún punto). En estas condiciones, Θ es una forma de contacto sobre $J^1(\mathbb{R}\times Q/\mathbb{R})$. tanto, existen coordenadas locales (z,u_i,v_i) en el fibrado de jets tales que :

$$\Theta = dz - \sum_i u_i dv_i \quad .$$

Dichas coordenadas reciben el nombre de *coordenadas canónicas* del sistema mecánico definido por la lagrangiana $\mathcal{L}dt$. Esto es, *las coordenadas canónicas del problema variacional definido por* $\mathcal{L}dt$ *son aquéllas para las cuales la forma de Poincaré-Cartan se expresa en forma canónica.*

La demostración del lema se deduce del Teorema de Darboux ([1]) y de las propiedades bien conocidas de los sistemas mecánicos regulares.

TEOREMA. En las hipótesis del lema anterior, sea W un abierto de $J^1(\mathbb{R}\times Q/\mathbb{R})$ en el que exista un sistema de coordenadas canónicas (z,u_i,v_i) tales que la proyección

$$(z,u_1,\ldots,u_n):W \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

sea epiyectiva. Se designa por V el abierto de $\mathbb{R}^n$ imagen de la proyección $(v_1,\ldots,v_n):W\longrightarrow\mathbb{R}^n$. Se verifica:

1º) Dada una sección $s:V\longrightarrow V\times\mathbb{R}$ de la proyección canónica de $V\times\mathbb{R}$ sobre V, existe un único morfismo $\bar{s}:V\longrightarrow W$ tal que:

a) El diagrama de la figura es conmutativo,

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[d, "{(v_1,\ldots,v_n,z)}"] \\ V \arrow[ur, "\bar{s}"] \arrow[r, "s"'] & V\times\mathbb{R} \end{tikzcd}$$

b) La imagen inversa de la forma de Poincaré-Cartan a lo largo de $\bar{s}$ es nula; es decir, $\bar{s}^*\Theta = 0$.

2º) Existe un único difeomorfismo $J^1(V\times\mathbb{R}/V) \simeq W$ que transforma $j^1_x(s)$ en $\bar{s}(x)$, para todo x de V. En este difeomorfismo la forma Θ asociada a $\mathcal{L}dt$ se identifica de modo natural con la forma de estructura de $J^1(V\times\mathbb{R}/V)$.

3º) Por tanto, la función $\mathcal{L}$ considerada como función sobre $J^1(V\times\mathbb{R}/V)$ define una lagrangiana de un campo escalar.

Ejemplo. Sea $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\sum \dot{q}_i^2)$ (partícula libre). Se tiene:

$$\Theta = \sum \dot{q}_i dq_i - \mathcal{L}dt = dz - \sum u_i dv_i \quad ,$$

donde,

$$z = \mathcal{L}t \quad , \quad u_i = -\dot{q}_i \quad , \quad v_i = q_i - t\dot{q}_i \quad .$$

Por tanto la lagrangiana del campo escalar asociado es: $\mathcal{L} = (1/2)\sum u_i^2$, cuya ecuación de Euler-Lagrange es la ecuación de Laplace, $\sum \partial^2 z/\partial v_i^2 = 0$.

Mediante el teorema anterior, el método de integración de Hamilton-Jacobi puede interpretarse en los siguientes términos :

COROLARIO. Sea $S:(\mathbb{R}\times Q)\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, y $\bar{S}:W \longrightarrow J^1(V\times\mathbb{R}/V)$ la aplicación definida por :

$$\bar{S}(t,q,\dot{q}) = j^1_v(S_{t,q}) \quad ,$$

donde $v = (v_1(t,q,\dot{q}),\ldots,v_n(t,q,\dot{q}))$ y $S_{t,q}:V \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función

$$S_{t,q}(v') = S(t,q,v') \quad .$$

Se verifica: La función S es una solución n-paramétrica de la ecuación de Hamilton-Jacobi $H(t,q_i,\partial S/\partial q_i) + \partial S/\partial t = 0$ si y sólo si la transformación asociada $\bar{S}$ deja invariante la forma de Poincaré-Cartan; es decir, $\bar{S}^*\Theta = \Theta$ con la identificación $J^1(V\times\mathbb{R}/V) \simeq W$.

REFERENCIAS

[1] C.Godbillon. Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique. Collection Méthodes, Hermann, 1969.

[2] P.L.García. The Poincaré-Cartan invariant in the Calculus of Variations. Symp. Math., Vol.XIV, pp.219-246, Academic Press, 1974.

(*) Dirección del autor : Gerardo Rodríguez Sánchez, Instituto de Bachillerato, Pravia (Asturias) .

AMS 58E30 , 70H15 , 58A20 .