DOS NOTAS HISTÓRICAS SOBRE TERNAS PITAGÓRICAS

M. BENITO MUÑOZ, E. FERNÁNDEZ MORAL, J. L. MARQUÉS LÓPEZ

I.E.S. "Sagasta", Logroño.

Resumen

La primera nota de esta comunicación recoge algunos problemas de la Aritmética de Diofanto relacionados con las ternas pitagóricas. Diofanto resuelve problemas como descomponer 16 en suma de dos cuadrados, para lo que obtiene la solución racional

$$16 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 .$$

La segunda nota estudia la tablilla cuneiforme Plimpton 322. De acuerdo con la transcripción más extendida, esta tablilla recoge (salvo errores) el cateto menor, la hipotenusa y el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa (tomando como unidad de área la del cuadrado construido sobre el cateto mayor) de 15 triángulos rectángulos.

1. Ternas pitagóricas en la Aritmética de Diofanto

A una terna de números naturales no nulos (a,b,c) que satisface la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$ la llamamos una terna pitagórica. El correspondiente triángulo rectángulo de catetos *a*, *b* e hipotenusa *c* se llama triángulo pitagórico. Si además se cumple que $\text{mcd}(a,b,c) = 1$, decimos que la terna pitagórica es primitiva.

Un ejemplo de ternas pitagóricas lo constituye el problema número ocho del libro II de la Aritmética de Diofanto de Alejandría, que dice así: *"Descomponer un cuadrado dado en dos cuadrados"*. Y lo resuelve de la siguiente manera (texto tomado de Vera [1970, pp. 1056-58]):

"Si queremos descomponer el número 16 en dos cuadrados y suponemos que el primero es el cuadrado de un aritmo, el otro tendrá 16 unidades menos un cuadrado de aritmo, y por tanto 16 unidades menos un cuadrado de aritmo, son un cuadrado.
Formamos el cuadrado de un conjunto cualquiera de aritmos disminuidos en tantas unidades como tiene la raíz de 16 unidades, y sea el cuadrado de 2 aritmos menos 4 unidades.
Este cuadrado tendrá, pues, 4 cuadrados de aritmo y 16 unidades menos 16 aritmos. Lo igualamos a 16 unidades menos un cuadrado de aritmo, y, sumando a uno y otro lado los términos negativos y restando los semejantes, resulta que 5 cuadrados de aritmo equivalen a 16 aritmos, y por tanto un aritmo vale $\frac{16}{5}$*; luego uno de los números es* $\frac{256}{25}$ *y el otro* $\frac{144}{25}$*, números cuya suma es* $\frac{400}{25}$*, es decir, 16 unidades, y cada uno de ellos es un cuadrado."*

$$16 = x^2 + (16 - x^2)$$

$$16 - x^2 = \square$$

$$\square = (2x-4)^2 = 4x^2 + 16 - 16x$$

$$4x^2 + 16 - 16x = 16 - x^2$$

$$5x^2 = 16x$$

$$x = \frac{16}{5}$$

$$16 = \frac{256}{25} + \frac{144}{25} = \left(\frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2$$

En resumen, lo que Diofanto hace es identificar $16 - x^2$ con una expresión del tipo $\left(mx - \sqrt{16}\right)^2$, en el caso $m = 2$. En general se trata de hacer

$$n^2 = x^2 + y^2,$$
$$n^2 - x^2 = (mx - n)^2 = m^2x^2 - 2mnx + n^2,$$
$$\left(m^2 + 1\right)x^2 = 2mnx,$$
$$x = \frac{2mn}{m^2 + 1},$$
$$y^2 = n^2 - \frac{4m^2n^2}{\left(m^2 + 1\right)^2} = n^2\frac{m^4 + 2m^2 + 1 - 4m^2}{\left(m^2 + 1\right)^2},$$
$$y = n\frac{m^2 - 1}{m^2 + 1},$$

obteniéndose la terna

$$\left(\frac{2mn}{m^2 + 1}, \frac{\left(m^2 - 1\right)n}{m^2 + 1}, n\right),$$

que dividiendo por n y multiplicando por $m^2 + 1$ nos da

$$\left(2m, m^2 - 1, m^2 + 1\right).$$

Para m natural, este resultado corresponde a la parametrización atribuida a Platón. Si m es racional, $m = \frac{p}{q}$, se tiene

$$\left(2\frac{p}{q}, \frac{p^2}{q^2} - 1, \frac{p^2}{q^2} + 1\right),$$

que multiplicando por q^2 nos da

$$(2pq, p^2 - q^2, p^2 + q^2)$$

que es la parametrización, que es atribuida a Diofanto de Alejandría.

Comenta Vera [1970, p. 1058] que, en el manuscrito 48 de la Biblioteca Nacional – catálogo de Iriarte – del siglo XIII (el ejemplar de Diofanto más antiguo que se conoce), una mano anónima dejó escrito esta curiosa nota marginal: *"Que tu alma Diofanto sea con Satanás por la dificultad de los otros teoremas y, sobre todo, de la de éste"*. Comentario algo exagerado ya que II.8 es uno de los problemas que podríamos llamar de entre los 6 libros griegos de Diofanto.

Prosiguiendo con los problemas diofánticos, el libro VI consta de 24 problemas sobre triángulos rectángulos de lados racionales que, además de satisfacer la ecuación pitagórica, deben cumplir las condiciones que les imponen sus respectivos enunciados. En alguno de ellos se utiliza la parametrización (2pq, p^2-q^2, p^2+q^2), por ejemplo en el problema 1: *"Encontrar un triángulo tal que la hipotenusa menos una y otra de las perpendiculares haga un cubo."*

En la parametrización,

$$a=2pq,\ \ b=p^2\text{-}q^2,\ \ c=p^2+q^2$$

se intenta .

$$p = x,\ \ q = 3,\ \ a= 6x,\ \ b= x^2 – 9,\ c = x^2 + 9$$

Pero la diferencia $c-b=18$ es $2\cdot 3^2$, que no es un cubo. Para conseguir que $2q^2 = \text{cubo}$, Diofanto toma $q=2$. Entonces,

$$a=4\text{x},\ \ b=\text{x}^2 – 4,\ \ c= \text{x}^2 + 4,\ c\text{-}a=x^2 – 4x+4=(x\text{-}2)^2.$$

Para que sea cubo, toma $x-2=8$, o sea, $x=10$. Luego $a=40$, $b=96$ y $c=104$.

En el problema 17 del mismo libro se pide: *“Encontrar un triángulo rectángulo tal que su área más su hipotenusa sea un cuadrado y su perímetro sea un cubo.”* Esto es:

$$\frac{1}{2}xy+z=\text{cuadrado}, \tag{1}$$

$$x+y+z=\text{cubo}. \tag{2}$$

Aunque la solución original no utiliza la parametrización de Diofanto, podemos recrear una solución con parametrización que no utiliza más cuentas que las que aparecen en las soluciones de los problemas VI.3 y VI.19, aparte de las de este mismo problema VI.17. Partiendo de

$$\begin{cases} x = 2pq\lambda, \\ y = \left(p^2 - q^2\right)\lambda, \\ z = \left(p^2 + q^2\right)\lambda, \end{cases}$$

tomamos $q=1$ y $\lambda = \dfrac{1}{p}$, dando

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = p - \dfrac{1}{p}, \\ z = p + \dfrac{1}{p}. \end{cases}$$

Se debe cumplir entonces que

$$2p = \text{cuadrado}, \tag{3}$$

$$2p + 2 = \text{cubo}, \tag{4}$$

de manera que llevando (3) a (4) se hace necesario encontrar una solución de

$$\text{cuadrado} + 2 = \text{cubo}. \tag{5}$$

Diofanto hace, para esto, lo siguiente:

$$\text{Cuadrado} = (\sigma + 1)^2, \quad \text{cubo} = (\sigma - 1)^3,$$

con lo que

$$\sigma^2 + 2\sigma + 3 = \sigma^3 - 3\sigma^2 + 3\sigma - 1,$$

$$4\sigma^2 + 4 = \sigma^3 + \sigma,$$

$$4(\sigma^2 + 1) = \sigma(\sigma^2 + 1),$$

luego $\sigma = 4$, $\text{cuadrado} = 5^2$ y $\text{cubo} = 3^3$, que sustituidos en (5) nos da $5^2 + 2 = 3^3$.

Entonces $p = \frac{25}{2}$ y la solución diofántica es

$$x = 2,\ y = \frac{621}{50},\ z = \frac{629}{50}$$

2. La tablilla Plimpton 322

Retrocedamos unos 1500 años a los tiempos de la Babilonia antigua. En la Figura 1 tenemos parte de una tablilla de arcilla, escrita en la variante paleobabilónica de la escritura cuneiforme, perteneciente a la colección Plimpton de la Universidad de Columbia (EE.UU.), en Nueva York, y catalogada con el número 322. La descripción que sigue está extraída de Neugebauer [1969, pp. 36-40], van der Waerden [1983, pp. 2-5] y Robson [2001, pp. 173-175], junto con algunas interpretaciones propias que posiblemente sean novedosas.

La tablilla está inscrita por una cara sólo (aunque en el reverso ya se habían trazado divisiones para columnas en las que escribir texto) y consta de cuatro columnas. Cada columna está encabezada por un texto corto que ha sido traducido de diversas formas; en la Tabla 1 se recogen tres de estas traducciones. En la última columna (columna IV) aparecen los números de 1 a 15. Cada número viene precedido por el ideograma sumerio  KI = *ašru* “lugar” (Labat [1988, entrada 461]), para indicar la posición de tal número dentro de la columna.

Figura 1. *Tablilla cuneiforme Plimpton 322. Fotografía tomada de la página web: http://cerebro.cs.xu.edu/math/math147/02f/plimpton/plimpton322.html.*

	Columna I	**Columna II**	**Columna III**	**IV**
literal	El coeficiente de la diagonal [que] es extraído (o restado) [a 1], y así el lado de frente asciende a	El lado del cuadrado del lado de frente (El lado del cuadrado perteneciente al lado de frente)	El lado del cuadrado de la diagonal	su nombre
Neugebauer	aparece la palabra “diagonal”, pero no consiguió descifrar el significado exacto de las otras palabras	números solución de la anchura	números solución de la diagonal	su nombre
Robson	el marco (cuadrado) de la diagonal del que se sustraiga 1 y así resulte el lado corto	el cuadrado de la diagonal	el cuadrado del lado corto	su nombre

Tabla 1. *Diferentes versiones de la traducción de los encabezamientos de las columnas.*

Las cuatro primeras columnas de la tabla 2 recogen la transcripción de la parte numérica de la tablilla. En la primera columna aparecen entre corchetes los signos que se suponen se han perdido. En la transcripción de Neugebauer [1969, p. 37], el inicio de cada casilla de la columna I aparece un 1, mientras que otros autores consideran que este uno no aparecía. Para identificar el contenido de la tablilla, tomemos por ejemplo los números que aparecen en la quinta fila (suponiendo que en el número de la primera columna empieza por 1):

1.815007716, 65, 97, 5 .

Vemos que el número en las columnas II y III

$$97^2-65^2=72^2$$

está relacionado con el de la primera columna de acuerdo con

$$\frac{97^2}{72^2}=1.815007716\,.$$

Si pensamos en un triángulo rectángulo en el que un cateto (*y*) mida 65 unidades y la hipotenusa (*z*) mida 97, el otro cateto (*x*) medirá 72 unidades y el cuadrado de la secante del ángulo (α) opuesto al cateto *y* valdrá $\frac{97^2}{72^2}=1.815007716$. Si no se considera que los números de la columna I empiezan por 1, entonces el contenido de las casillas de tal columna corresponde al cuadrado de la tangente del ángulo α : $\frac{65^2}{72^2}=\tan^2(\alpha)$.

I, $\left(z/x\right)^2$	II, y	III, z	IV	x	p	q	α
[1, 59, 0,] 15 1.98340277	1, 59 119	2, 49 169	1	2, 0 120	12 12	5 5	44º 45' 37''
[1, 56, 56,] 58, 14, 50, 6, 15 (*) 1.949158552	56, 7 3367	**3, 12, 1** 1, 20, 25 11521 4825	2	57, 36 3456	1, 4 64	27 27	44º 15' 10''
[1, 55, 7,] 41, 15, 33, 45 1.918802127	1, 16, 41 4601	1, 50, 49 6649	3	1, 20, 0 4800	1, 15 75	32 32	43º 47' 14''
[1,] 5[3, 1]0. 29, 32, 2, 16 1.886247907	3, 31, 49 12709	5, 9, 1 18541	4	3, 45, 0 13500	2, 5 125	54 54	43º 16' 17''
[1,] 48, 54, 1, 40 1.815007716	1, 5 65	1, 37 97	5	1, 12 72	9 9	4 4	42º 04' 30''
[1,] 47, 6, 41, 40 1.785192901	5, 19 319	8, 1 481	6	6, 0 360	20 20	9 9	41º 32' 40''
[1,] 43, 11, 56, 28, 26, 40 1.719983676	38, 11 2291	59, 1 3541	7	45, 0 2700	54 54	25 25	40º 18' 55''
[1,] 41, 33, 59, 3, 45 (**) 1.692773438	13, 19 799	20, 49 1249	8	16, 0 960	32 32	15 15	39º 46' 18''
[1,] 38, 33, 36, 36 1.642669445	**9, 1** 8, 1 541 (***) 481	12, 49 769	9	10, 0 600	25 25	12 12	38º 47' 05''
1, 35, 10, 2, 28, 27, 24, 26, 40 1.586122566	1, 22, 41 4961	2, 16, 1 8161	10	1, 48, 0 6480	1, 21 81	40 40	37º 26' 14''
1, 33, 45 1.5625	45 45, 0 45 (****) 2700	**1, 15** 1, 15, 0 75 4500	11	1, 0 60 3600	1, 0 60	30 30	36º 52' 12''
1, 29, 21, 54, 2, 15 1.489416843	27, 59 1679	48, 49 2929	12	40, 0 2400	48 48	25 25	34º 58' 34''
[1,] 27, 0, 3, 45 (*****) 1.450017361	**7, 12, 1** 2, 41 25921 (******) 161	4, 49 289	13	4, 0 240	15 15	8 8	33º 51' 18''
1, 25, 48, 51, 35, 6, 40 1.43023882	29, 31 1771	53, 49 3229	14	45, 0 2700	50 50	27 27	33º 15' 43''
[1,] 23, 13, 46, 40 1.387160494	**56** 28 56 28	**53** 1, 46 53 106	15	1, 30 90 45	9 9	5 5	31º 53' 27''

Tabla 2. *Transcripción de los números en las columnas de la tablilla Plimpton 322.*

En cada casilla aparece en primer lugar la transcripción de la numeración sexagesimal cuneiforme seguida debajo de su conversión a la notación decimal moderna. En la primera columna, los números (salvo el 1 inicial) son potencias negativas 60. Aquellos números entre corchetes corresponden a la restitución debida a Neugebauer [1969, p. 37]. En las casillas que están divididas en dos, la parte izquierda corresponde a los números que aparecen directamente en la tablilla y que Neugebauer considera simples errores de escriba, siendo los números en la parte de la derecha la corrección correspondiente:

- (*) : en la tablilla aparece 56 (signos cuneiformes de 50 y 6 juntos), aunque debería ser 50 y 6 separados.
- (**) : en la tablilla aparece [1,] 41, 33, 59, (hueco), 3, 45 cuando debería ser 1, 41, 33, 45, 14, 3, 45. Según Robson [2001, p. 175], el escriba ha cambiado 45, 14 por su suma, dejando un espacio en blanco detrás del 59.
- (***) : simple error de 9, 1 por el correcto 8, 1.
- (****) : error explicado en el texto de este artículo como terna derivada de la terna primitiva (4,3,5).
- (*****) : aunque el 0 no está escrito (no había signo paleobabilónico para ello), existe un hueco entre la cifra 27 y 3.
- (******) : Neugebauer [1969, p. 37] atribuye este error a que el escriba puso el cuadrado del número 2, $41_{(60}=161_{(10}$, que es $(161_{(10)})^2=25921_{(10}=7, 12, 1_{(60}$, en vez del número directamente.

La última fila 15 así como el error en la casilla III,2 requieren una discusión más detallada (ver texto)

Esto que sucede en la fila quinta se repite en las demás filas de la tablilla, con excepción de los números que en la Tabla 2 están marcados con negrita y que Neugebauer considera errores del escriba. Además, en esa Tabla nosotros hemos añadido a la transcripción cuatro columnas más (las encabezadas por *x*, *p*, *q* y α), que comentaremos más adelante.

En todas las casillas de la Tabla 2 (salvo en la columna de α) aparecen dos filas: el número superior está escrito en notación sexagesimal (transcripción directa del original cuneiforme), mientras que el inferior corresponde a su conversión a la notación decimal moderna. Los números de las columnas II y III corresponden al cateto y la hipotenusa de diversos triángulos pitagóricos, siendo sus catetos *x* e *y* e hipotenusa *z*. Para las casillas que se consideran erróneas, en la parte derecha aparece lo que, supuestamente, debería ser el contenido correcto.

La columna quinta, una de la que hemos añadido, contiene los correspondientes valores del cateto *x*. Además, en las columnas sexta y séptima hemos incluido los valores *p* y *q* de la parametrización diofántica $x = 2pq$, $y = p^2 - q^2$, $z = p^2 + q^2$. Observamos que todas las ternas pitagóricas que aparecen en la tablilla se pueden obtener con esta parametrización, excepto la undécima. Pero ya que la escritura cuneiforme paleobabilónica no disponía de ningún signo para el cero, en vez de leer $1,15_{(60} = 75_{(10}$ podríamos leer $1,15,0_{(60} = 4500_{(10}$; y en vez de leer $45_{(60} = 45_{(10}$, leer $45,0_{(60} = 2700_{(10}$, terna que se obtiene por la parametrización diofántica tomando $p = 60$ y $q = 30$. La terna pitagórica primitiva (4,3,5) se obtiene de las anteriores dividiendo por 15 (ó por 900 si se considera la introducción del 0 al final). Aparte de ésta y de la decimoquinta, todas las restantes ternas son primitivas; la decimoquinta es cuasiprimitiva, generada por $p = 9$ y $q = 5$, que son primos entre sí.

Podemos observar que, en la descomposición en factores de todos los *x* de la Tabla 2, sólo aparecen los primos 2, 3 y 5. Por tanto son números que en base 60 son fáciles de invertir (número regulares). El mayor valor que alcanza *x* es $13500_{(10} = 3,45,0_{(60}$.

En la columna I aparece $\dfrac{z^2}{x^2}$, esto es, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa tomando como unidad el área del cuadrado construido sobre el cateto mayor; o en otras palabras, el valor de $(\sec\alpha)^2$, siendo α el ángulo comprendido entre la hipotenusa *z* y el cateto *x*. La última columna añadida en la Tabla 2 a la derecha muestra los correspondientes valores de α en grados sexagesimales (con notación actual). Vemos que los ángulos correspondientes a la ordenación de los números en la tablilla están ordenados decrecientemente.

Así mismo hemos construido la Tabla 3 que contiene *todas* las ternas pitagóricas con x regular, $x < 4,0,0_{(60} = 14400_{(10}$ e $y < x$, ordenadas de mayor a menor de acuerdo con el valor de $\frac{z^2}{x^2}$.

Es de destacar que las 15 primeras ternas de la Tabla 3 son precisamente los que aparecen en la tablilla Plimpton 322.

Por otra parte, con x regular, $x < 4,0,0_{(60} = 14400_{(10}$ e $y < 4,0,0_{(60} = 14400_{(10}$ hay un total de 148 ternas.

$\sec^2\alpha = \frac{z^2}{x^2}$	y	z	n
1, 59, 0, 15	1, 59	2, 49	1
1, 56, 56, 58, 14, 50, 6, 15	56, 7	1, 20, 25	2
1, 55, 7, 41, 15, 33, 45	1, 16, 41	1, 50, 49	3
1, 53, 10, 29, 32, 52, 16	3, 31, 49	5, 9, 1	4
1, 48, 54, 1, 40	1, 5	1, 37	5
1, 47, 6, 41, 40	5, 19	8, 1	6
1, 43, 11, 56, 28, 26, 40	38, 11	59, 1	7
1, 41, 33, 45, 14, 3, 45	13, 19	20, 49	8
1, 38, 33, 36, 36	8, 1	12, 49	9
1, 35, 10, 2, 28, 27, 24, 26, 40	1, 22, 41	2, 16, 1	10
1, 33, 45	3	5	11
1, 29, 21, 54, 2, 15	27, 59	48, 49	12
1, 27, 0, 3, 45	2, 41	4, 49	13
1, 25, 48, 51, 35, 6, 40	29, 31	53, 49	14
1, 23, 13, 46, 40	28	53	15
1, 22, 9, 12, 36, 15	2, 55	5, 37	16
1, 17, 58, 56, 24, 1, 40	7, 53	16, 25	17
1, 17, 4	8	17	18
1, 15, 4, 53, 43, 54, 4, 26, 40	1, 7, 41	2, 31, 1	19
1, 14, 15, 33, 45	39	1, 29	20
1, 12, 45, 54, 20, 15	6, 9	14, 41	21
1, 10, 25	5	13	22
1, 9, 45, 22, 16, 6, 40	14, 31	38, 49	23
1, 8, 20, 16, 4	11, 11	32, 1	24
1, 7, 45, 23, 26, 38, 26, 15	34, 31	1, 42, 1	25
1, 7, 14, 53, 46, 33, 45	16, 41	50, 49	26
1, 6, 42, 40, 16	5, 1	15, 49	27
1, 5, 34, 4, 37, 46, 40	5, 29	18, 49	28
1, 5, 6, 15	7	25	29
1, 3, 43, 52, 35, 3, 45	6, 39	27, 29	30
1, 3, 23, 29, 29, 33, 54, 1, 40	41, 5	2, 57, 37	31
1, 3, 2, 15	9	41	32
1, 2, 1	11	1, 1	33

1, 1, 44, 55, 12, 40, 25	4, 55	29, 13	34
1, 1, 31, 19, 18, 53, 26, 15	25, 29	2, 42, 1	35
1, 0, 50, 10, 25	17	2, 25	36
1, 0, 40, 6, 40	19	3, 1	37
1, 0, 21, 21, 53, 46, 40	52	11, 17	38
1, 0, 15, 0, 56, 15	31	8, 1	39
1, 0, 6, 0, 9	49	20, 1	40

Tabla 3. Ternas pitagóricas con *x* regular, $x < 14400_{(10} = 4,0,0_{(60}$, $y < x$

El que hayamos utilizado la parametrización atribuida a Diofanto no quiere decir que pensemos que la tablilla se construyó de esta forma, sino que la consideramos la forma más adecuada de explicarle a un lector actual cómo se pueden obtener las ternas pitagóricas.

Numerosas son las teorías sobre cómo pudieron obtenerse los datos que figuran en la tablilla Plimpton 322, de las que vamos a exponer las dos que tienen más predicamento. Para ello, volvamos a la terna $\left(\frac{2mn}{m^2+1}, \frac{(m^2-1)n}{m^2+1}, n\right)$, en donde si se dividen los tres términos por $\frac{2mn}{m^2+1}$ se obtiene la terna $\left(1, \frac{m-m^{-1}}{2}, \frac{m+m^{-1}}{2}\right)$. A partir de un par de números inversos, m y m^{-1}, se obtienen los números $v = \frac{m-m^{-1}}{2}$, $w = \frac{m+m^{-1}}{2}$, que satisfacen $1+\left(\frac{m-m^{-1}}{2}\right)^2 = \left(\frac{m+m^{-1}}{2}\right)^2$. Y para explicar cómo se construyó la tablilla, van der Waerden [1983, pp. 4,5], que utiliza la notación $\frac{y}{x} = v$ y $\frac{z}{x} = w$, afirma: *"Los babilonios primero calculaban la terna pitagórica* $(1, v, w)$ *que satisface la ecuación* $1+v^2 = w^2$*, y después multiplicaban la terna* $(1, v, w)$ *por un x conveniente para obtener una terna de enteros* (x, y, z) *.... Es posible que los babilonios tomasen* m y m^{-1} *directamente de una tabla de recíprocos. También es posible que pusiesen* $m = \frac{p}{q} = pq^{-1}$ *y* $m^{-1} = \frac{q}{p} = qp^{-1}$*, tal y como Neugebauer y Sachs suponían. No puedo decidirme entre estas dos posibilidades.*

En lo referente a los errores en la tablilla, aparte de aquellos que son fácilmente atribuibles a un pequeño descuido del escriba, hay dos errores que merecen una discusión más detallada: el error III,15 y el III,2. El error III,15, donde aparece 53 en vez de 1, 46 (que es el doble en notación sexagesimal de 53), Neugebauer [1969, pp. 37,38] lo atribuye a que el escriba se le olvidó multiplicar por 2. Sin embargo, nosotros pensamos que de ser cierta alguna de las dos hipótesis expuestas por van der Waerden, el verdadero error sería el 56 que aparece en la misma fila en la casilla II,15, que debería ser la mitad, 28, quedando así la terna $y = 28$, $z = 53$ y $x = 45$, que es primitiva. Pues para $p = 9$ y $q = 5$ se obtiene $w = \frac{\frac{9}{5}+\frac{5}{9}}{2} = \frac{106}{90} = \frac{53}{45}$, $v = \frac{\frac{9}{5}-\frac{5}{9}}{2} = \frac{56}{90} = \frac{28}{45}$, y de ahí se deriva la terna (45, 28, 53) en vez de la terna (90, 56, 106).

Para explicar el error III,2 Neugebauer [1969, p. 50] sigue a R. J. Gillings, quien supone que el escriba cometió dos errores. Al calcular $z = p^2 + q^2 = (p+q)^2 - 2pq$ con $p = 1,4_{(60} = 64_{(10}$ y $q = 27_{(60}$, el escriba cambió $-2pq$ por $+2pq$ y, en vez de escribir $2_{(60} \times 27_{(60} \times (1,4)_{(60} = 57,36_{(60}$, escribió $2_{(60} \times 27_{(60} \times (1,0)_{(60} = 54,0_{(60}$. Con ello halló por lo tanto un valor de $z = (2,18,1)_{(60} + (54,0)_{(60} = 3,\ 12,1_{(60}$ en vez de $z = (2,18,1)_{(60} - (57,36)_{(60} = 1,20,25_{(60}$. Robson [2001, p. 193] en cambio es partidaria de la primera opción. Supone que d y d^{-1} se obtenían directamente de una tabla de recíprocos, explicando el error de la siguiente forma: el escriba llegó a la terna básica $(0,58,27,17,30_{(60}, 1_{(60}, 1,23,46,2,30_{(60})$ y multiplicó cada número de la terna para ir eliminando los factores comunes, tal y como sigue en la siguiente tabla

58, 27, 17, 30	1	1, 23, 46, 2, 30	Por 2 porque dos números acaban en 30
1, 56, 54, 35	2	2, 47, 32, 5	Por 12 porque dos números acaban en 5
23, 22, 55, 24	24	33, 30, 25	Por 12 porque dos números acaban en 5
4, 40, 35	4, 48	6, 42, 5	Por 12 porque dos números acaban en 5
56, 7	57, 36	1, 20, 25	

Nuevamente el escriba, no estando seguro de haber hallado la terna óptima, siguió multiplicando por 12:

56, 7	57, 36	1, 20, 25	Por 12
11, 13, 24	11, 31, 12	16, 5, 0	Por 12
2, 14, 36, 48	2, 18, 14, 24	3, 13, 0, 0	

y al volver a la terna más corta se olvidó de reconvertir el último de los tres números. Como el cálculo habría sido hecho en sucio, el escriba leyó mal las tres cuñas finales de $3,13_{(60}$ y transfirió $3,12,1_{(60}$ a la copia en limpio.

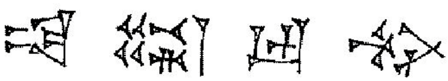
Apéndice: traducción de los encabezamientos de las columnas en la tablilla Plimpton 322

A continuación sigue la traducción de los encabezamientos en cada columna de la tablilla Plimpton 322. Como diccionario de acadio se ha utilizado Labat [1988]. La restitución de los signos que faltan en la primera columna es de Robson [2001, p. 191].

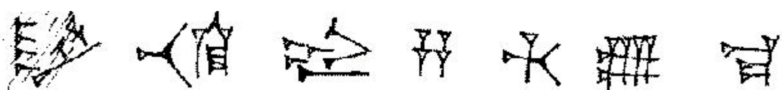
Las palabras en escritura cuneiforme van seguidas de su pronunciación (en mayúscula si se trata de ideogramas sumerios, y en minúscula cursiva las palabras o sílabas en acadio). La traducción está entrecomillada, y entre corchetes van aquellos signos que han sido completados a partir de la sintaxis de la frase.

Encabezamiento de la columna I:

- *[ta]-ki-il-ti*: *takīlti(m)* es el nominativo (aunque con termi-nación de genitivo) de *takīltu(m)* "coeficiente" (Labat [1988, entrada 36]). El signo *ta* está reconstruido y el signo *ki* se ha perdido en buena parte.



- *şi-li-ip-tim*: *şiliptim* es el genitivo de *şiliptu(m)* "diagonal" (Labat [1988, entrada 74]).



- *in-na-as-sá-khu-ú-ma*: *innasakhu* es la tercera persona singular (*i-*) de la forma pasiva (prefijo en *-n-*) del verbo *nasakhu* "extraer de, restar a" (Labat [1988, entrada 84]); finaliza con la partícula enfática *-ma*. Sólo una parte del signo *in* es visible.

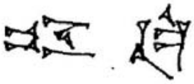
Antes de esta palabra, en la esquina superior izquierda perdida hay un espacio para al menos un signo más, que Robson [2001, p. 191] restituye como el pronombre relativo *ša* "que" más el número 1.

- SAG, abreviatura del ideograma sumerio SAG.KI, que equivale al acadio *pūtu(m)* "lado de frente" (Labat [1988, entrada 115]).

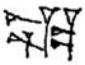
• *i-il-lu-ú*: *ilû* es la tercera persona singular del presente (*i*+infinitivo) del verbo *elû* "ascender a" (Labat [1988, entrada 381]).

La traducción del encabezamiento de la primera columna es por tanto: "El coeficiente de la diagonal [que] es extraído (o restado) [a 1], y así el lado de frente asciende a".

Encabezamiento de la columna II:



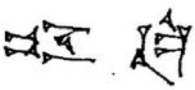
• ÍB.SÁ: esta palabra sumeria corresponde al sustantivo acadio *miṭkharu(m)* "(lado del) cuadrado" (Labat [1988, entrada 207]).



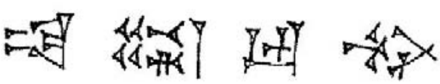
• SAG: como arriba, abreviatura sumeria de *pūtu(m)* "lado de frente" o de su genitivo o de su genitivo *pūti(m)*.

La traducción de este segundo encabezamiento es: "El lado del cuadrado del lado de frente" ("El lado del cuadrado perteneciente al lado de frente").

Encabezamiento de la columna III:



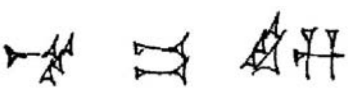
• ÍB.SÁ=*miṭkharu(m)* "(lado del) cuadrado".



• *şi-li-ip-tim*: como arriba, genitivo de *şiliptu(m)* "diagonal".

La traducción del tercer encabezamiento es: "El lado del cuadrado de la diagonal".

Encabezamiento de la columna IV:



- MU.BI.IM: palabra sumeria correspondiente a la acadia *šumsu*, que es el nominativo *šumu* "nombre" (Labat [1988, entrada 61]) más el sufijo posesivo masculino de tercera persona *–šu*; con ello esta palabra significa "su nombre".

Bibliografía

LABAT, R. (1988) *Manuel d'épigraphie Akkadienne*, 6ª edición, París, Librairie Orientaliste Paul Geuthner.

NEUGEBAUER, O. (1969) *The Exact Sciences in Antiquity*, 2ª edición, New York, Dover Publications.

ROBSON, E. (2001) "Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322". *Historia Mathematica*, *28*, 167-206.

VERA, F. (1970) *Los científicos griegos*, Madrid, Aguilar.

Van der WAERDEN, B. L. (1983) *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer Verlag.