Estudios de Economía. Vol. 31 - Nº 1, Junio 2004. Págs. 39-63

MODELO DE PLANIFICACION BALANCEADO Y MODELO DE ASIGNACION

JORGE OVIEDO
ANA RUBIO DUCA

Resumen

Baïou y Balinski (2002) generalizaron el modelo de asignación empresas-trabajadores a uno donde se planifica la asignación determinando además de la asignación de los trabajadores a las empresas cuánto tiempo los trabajadores le dedicarán a la empresa.
Una planificación es estable si ningún par empresa-trabajador puede incrementar sus horas de trabajo juntos, perjudicando a algún agente menos deseable. Este artículo estudia la relación que existe entre este problema y un problema de matching y se muestra que cada planificación estable es equivalente a cierto matching estable.

Abstract

Baïou y Balinski (2002) generalized the model of firms-workers allocation to one in which allocation is planned determining both the allocation of workers to firms and how much time workers will dedicate to firms.
A planning is stable if there is no pair of firm- worker that could increase their hours of work together, affecting some less desirable agent.
This article studies the relationship between this problem and a matching problem, and shows that each stable planning is equivalent to some stable matching.

Palabras clave: Modelo de Planificación, Planificación Estable, Modelo de Matching, Matching Estable.

Clasificación JEL: C60, C78.

□ Instituto de Matemática Aplicada San Luis. Departamento de Matemática. Universidad Nacional de San Luis. E-mails: joviedo@unsl.edu.ar y rubioduc@unsl.edu.ar

1. Introducción

Baïou and Balinski (2002) propusieron el siguiente problema de planificación de horas de trabajo.

Un problema de planificación o de planificar horas de trabajo viene dado por dos conjuntos disjuntos de agentes. Un conjunto contiene instituciones como empresas, hospitales, universidades, etc., y el otro contiene trabajadores, médicos, profesores, etc. Cada agente dispone de un número fijo de horas (visto como una unidad de tiempo, pudiendo ser minutos o segundos). Las empresas necesitan cubrir una determinada cantidad de horas (trabajo) y los trabajadores disponen de un máximo de horas para trabajar. También hay un máximo de horas que un trabajador puede dedicar para una determinada empresa.

Cada agente tiene preferencias sobre los agentes del conjunto opuesto, es decir, las empresas tienen un orden de preferencias sobre los trabajadores y los trabajadores tienen un orden de preferencias sobre las empresas.

Este problema de planificación o de planificar horas de trabajo es una generalización del modelo de matching. El modelo de matching tiene dos conjuntos disjuntos de agentes (empresas y trabajadores) y cada uno de ellos tiene preferencias sobre los agentes del otro lado del mercado, pero en este modelo no se manifiestan (explícitamente) las horas de trabajo que cada empresa necesita o que cada trabajador posee.

Una planificación o una solución al problema de planificar horas de trabajo para una empresa (trabajador) es asignarle un subconjunto de trabajadores (empresas) con una determinada cantidad de horas. Para esta solución usamos notación matricial, es decir, una planificación es una matriz donde las filas corresponden a las empresas y las columnas a los trabajadores, y cada elemento de la matriz es el tiempo que una empresa emplea a un trabajador.

Una planificación es estable si ningún par empresa-trabajador puede incrementar sus horas de trabajo juntos, perjudicando a algún agente menos deseable. Esto generaliza el concepto de matching estable para el modelo de matching. Un matching es estable si no existe un par de agentes que mutuamente se prefieran con respecto a lo que les asigna el matching.

Baïou and Balinski (2002) también dieron un algoritmo para calcular planificaciones estables.

Alkan and Gale (2002) extendieron el problema de planeamiento bajo preferencias más generales. Generalizaron el algoritmo de Gale and Shapley (1962) y mostraron que propiedades de matching estables se continúan verificando. También estudiaron la lattice de los planeamientos estables.

Vande Vate (1989) relacionó el problema de matching estable con una solución de las restricciones del problema de asignación de programación lineal. Un problema de asignación en programación lineal, es un caso especial del problema de transporte donde el número de orígenes y de destinos es el mismo y el problema es asignarle a cada origen un destino. El problema de transporte de programación lineal consiste en minimizar el costo del transporte entre un conjunto finito de orígenes o fábricas y otro conjunto finito de destinos o distribuidoras (ver Bazaraa, Jarvis and Sherali (1990) Capítulo 10).

Generalizamos el resultado de Vande Vate (1989), ya que un problema de planeamiento puede ser escrito como un problema de transporte con capacidades máximas, el cual es equivalente a un cierto problema de asignación de programación lineal y este último está relacionado a un matching estable. Es decir, a un planeamiento estable le asociaremos un matching estable.

Este trabajo está organizado como sigue. En la sección 2 presentamos los preliminares y notación básica del problema de planificación y de programación lineal. En la sección 3 primero asociamos a un problema de planificación y a una planificación estable un problema de planeamiento uno a uno y una planificación estable uno a uno respectivamente. Luego asociamos a cada problema de planificación uno a uno y a cada planificación estable un modelo de matching y un matching estable.

2. Preliminares

2.1. Definición del problema de planificación

Un problema de planificación de horas de trabajo viene dado por: Dos conjuntos finitos y disjuntos de agentes, los agentes filas $F = \{f_1, f_2, ..., f_m\}$ (empresas) y los agentes columnas $W = \{w_1, w_2,..., w_n\}$ (trabajadores). Cada agente $g \in F \cup \mathrm{W}$ tiene un orden de preferencias individual estricto $P(g)$ sobre los agentes del conjunto opuesto, por ejemplo con

$$P(f_i) = w_3, w_1, w_4, f_i, w_2$$

$$P(\mathrm{w}_j) = f_2, f_1, w_j, f_3$$

indicamos que

$$w_3 P(f_i)\ w_1 P(f_i)\ w_4 P(f_i)\ f_i P(f_i)\ w_2$$

$$f_2 P(w_j)\ f_1 P(w_j)\ w_j P(w_j)\ f_3.$$

También tenemos dos vectores **d** y **s** y una matriz π, tales que: Cada trabajador $w \in W$ tiene $s(w) > 0$ unidades de trabajo (horas) para ofrecer, cada empresa $f \in F$ trata de obtener $d(f) > 0$ unidades de trabajo (horas), y $\pi(f, w) \geq 0$ es el máximo número de unidades de trabajo (horas) que $f \in F$ puede contratar con $w \in W$. Denotaremos a un problema de planificación con $(F, W, P, \mathbf{d}, \mathbf{s}, \pi)$. El caso particular, $|F| = |W|$ y $\mathbf{d} = \mathbf{s} = (1, ..., 1)$, lo llamaremos *problema de planificación uno a uno* y lo denotaremos $(F, W, P, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \pi)$.

El modelo de matching uno a uno es un caso particular de un modelo de planeamiento, donde $s(w) = d(f) = 1$ y $\pi(f, w) = 0$ o 1 para todo (f, w). En el problema de admisión a las universidades, o problema de matching varios a uno, sería $s(w) = 1$ y $\pi(f, w) = 0$ o 1 para todo (f, w). En el problema varios a varios es el problema de planeamiento con $s(w)$ y $d(f)$ enteros positivos, y $\pi(f, w) = 0$ o 1 para todo (f, w).

Trabajaremos con problemas balanceados, es decir,

$$\sum_{w \in W} s(w) = \sum_{f \in F} d(f) = B, \tag{1}$$

ya que generalizamos los resultados de Vande Vate (1989). El usó esta condición de balanceo para matching uno a uno, para este caso la condición (1) queda simplemente $|F| = |W|$.

Definición 1 *Una solución o planificación* $\mu = (\mu(f, w))$ *para un problema de planificación* $(F, W, P, \mathbf{d}, \mathbf{s}, \pi)$ *es una matriz de números enteros que satisface*

(2) $$\sum_{f \in F} \mu(f, w) = s(w), \text{ para todo } w \in W$$

(3) $$\sum_{w \in W} \mu(f, w) = d(f), \text{ para todo } f \in F$$

(4) $$0 \leq \mu(f, w) \text{ para todo } (f, w)$$

(5) $$\mu(f, w) \leq \pi(f, w) \text{ para todo } (f, w).$$

Las condiciones (2) y (3) nos dicen que el problema está saturado, es decir, todas las horas ofrecidas (demandadas) por un trabajador (empresa) son asignadas por la planificación. La condición (5) nos dice que la planificación no puede asignar más horas que el máximo que pueden contratar las partes entre sí.

Definición 2 *Una planificación* μ *es estable si para todo* $(\hat{f}, \hat{w})$

(6) $$\mu(\hat{f}, \hat{w}) < \pi(\hat{f}, \hat{w}) \textit{ implica } \sum_{f R(\hat{w}) \hat{f}} \mu(f, \hat{w}) = s(\hat{w}) \textit{ o } \sum_{w R(\hat{f}) \hat{w}} \mu(\hat{f}, w) = d(\hat{f}),$$

donde $\sum_{f R(\hat{w}) \hat{f}} \mu(f, \hat{w}) = \mu(\hat{f}, \hat{w}) + \sum_{f P(\hat{w}) \hat{f}} \mu(f, \hat{w})$ *y con* $\sum_{f P(\hat{w}) \hat{f}} \mu(f, \hat{w})$ *notamos la suma sobre todas aquellas empresas f en F que el trabajador w prefiere a la empresa f. Similarmente para* $\sum_{w R(\hat{f}) \hat{w}} \mu(\hat{f}, w)$.

La condición de estabilidad nos dice que cuando la planificación asigna menos horas que el máximo es porque alguno de los dos, el trabajador o la empresa, tienen completa la cantidad de horas ofrecidas o demandadas, por agentes más preferidos. Si para algún $(\overline{f}, \overline{w})$, (6) no se cumple, entonces $(\overline{f}, \overline{w})$ *bloquea* μ, pues los agentes $\overline{f} \in F$ y $\overline{w} \in W$, juntos pueden mejorar el planeamiento para ellos mismos: específicamente, si

$$\mu(\overline{f}, \overline{w}) < \pi(\overline{f}, \overline{w})$$

y

(7) $$\sum_{f R(\overline{w}) \overline{f}} \mu(f, \overline{w}) < s(\overline{w}) \overset{por (2)}{=} \sum_{f \in F} \mu(f, \overline{w}) = \sum_{f R(\overline{w}) \overline{f}} \mu(f, \overline{w}) + \sum_{\overline{f} P(\overline{w}) f} \mu(f, \overline{w})$$

y

(8) $\sum_{w R(\bar{f}) \bar{w}} \mu(\bar{f}, w) < d(\bar{f}) \overset{por\,(3)}{=} \sum_{w \in W} \mu(\bar{f}, w) = \sum_{w R(\bar{f}) \bar{w}} \mu(\bar{f}, w) + \sum_{\bar{w} P(\bar{f}) w} \mu(\bar{f}, w).$

Entonces, por (7), existe $\hat{f} \in F$, menos preferido por $\bar{w}$ que $\bar{f}$, es decir, $\bar{f} P(\bar{w}) \hat{f}$, tal que $\mu(\hat{f}, \bar{w}) > 0$. Mientras que, por (8), existe $\hat{w} \in W$, menos preferido por $\bar{f}$ que $\bar{w}$, es decir, $\bar{w} P(\bar{f}) \hat{w}$, tal que $\mu(\bar{f}, \hat{w}) > 0$. Luego $\mu(\bar{f}, \bar{w})$ se puede incrementar en $\delta > 0$, y hacer decrecer en δ a $\mu(\hat{f}, \bar{w})$ y a $\mu(\bar{f}, \hat{w})$.

Observación 1 *Cuando trabajamos con problemas de planeamiento uno a uno, la condición de estabilidad será:*

Si $\pi(\bar{f}, \bar{w}) = 1$ y

(6') $\mu(\bar{f}, \bar{w}) = 0$ entonces $\begin{cases} \exists\, f \in F,\ f P(\bar{w}) \bar{f} : \mu(f, \bar{w}) = 1 \\ \exists\, w \in W,\ w P(\bar{f}) \bar{w} : \mu(\bar{f}, w) = 1 \end{cases}$

Esta condición es equivalente a la condición de estabilidad (6), pues la condición (6) dice que si $\mu(\bar{f}, \bar{w}) < \pi(\bar{f}, \bar{w})$ (como $\pi(\bar{f}, \bar{w})$[1] = 0 o 1, tenemos que $\mu(\bar{f}, \bar{w}) = 0$) entonces

$$\sum_{f R(\bar{w}) \bar{f}} \mu(f, \bar{w}) = 1 \quad o \quad \sum_{w R(\bar{f}) \bar{w}} \mu(\bar{f}, w) = 1$$

por ser μ una matriz de ceros y unos, la primera suma se reduce a pedir existencia de una empresa f, más preferida por el trabajador que $\bar{f}$, es decir $fP(\bar{w}) \bar{f}$. En forma similar la segunda suma se reduce a pedir la existencia de un trabajador w tal que $wP(\bar{f}) \bar{w}$.

Observación 2 *Esta condición de estabilidad para planeamientos uno a uno es equivalente a la siguiente*

(9) $$\sum_{w P(\bar{f}) \bar{w}} \mu(\bar{f}, w) + \sum_{f P(\bar{w}) \bar{f}} \mu(f, \bar{w}) + \mu(\bar{f}, \bar{w}) \geq 1.$$

Pues si (6') se cumple

$$\sum_{w P(\bar{f}) \bar{w}} \mu(\bar{f}, w) + \sum_{f P(\bar{w}) \bar{f}} \mu(f, \bar{w}) + \mu(\bar{f}, \bar{w}) =$$

$$\sum_{w P(\bar{f}) \bar{w}} \mu(\bar{f}, w) + \sum_{f P(\bar{w}) \bar{f}} \mu(f, \bar{w})$$

y alguna de estas dos sumas es igual a 1.

1 $\pi(\bar{f}, \bar{w}) \leq \min \{d(\bar{f}), s(\bar{w})\}$ y como para este caso $d(\bar{f}) = s(\bar{w})$, $\pi(\bar{f}, \bar{w}) = 0$ o 1.

Por otro lado, si (6') no se cumple, para todo $(\bar{i},\ \bar{j})$ tenemos

$$\mu\left(\bar{f},\bar{w}\right)=0\ y\begin{cases}\forall\ f\in F,\ f\,P(\bar{w})\,\bar{f}:\mu(f,\bar{w})=0\\ \forall\ w\in W,\ w P(\bar{f})\,\bar{w}:\mu(\bar{f},w)=0\end{cases}$$

luego

$$\sum_{w P(\bar{f})\bar{w}}\mu\left(\bar{f},\ w\right)=\sum_{f P(\bar{w})\bar{f}}\mu\left(f,\ \bar{w}\right)=\mu\left(\bar{f},\ \bar{w}\right)=0$$

contradiciendo la condición (9).

Entonces un planeamiento uno a uno estable satisface las condiciones

1. $\sum_{f\in F}\mu(f, w) = s(w)$, para todo $w \in W$.

2. $\sum_{w\in W}\mu(f, w) = d(f)$, para todo $f \in F$.

3. $\sum_{w P(\bar{f})\bar{w}}\mu(\bar{f},w)+\sum_{f P(\bar{w})\bar{f}}\mu(f,\bar{w})+\mu(\bar{f},\bar{w})\geq 1.$

4. $0 \leq \mu(f, w)$ para todo (f, w).

Luego, por el Teorema (2.3) de Vande Vate, el planeamiento uno a uno μ es la configuración como matriz de un matching estable, de un problema de matching (F, W, P).

El ejemplo siguiente muestra las definiciones dadas hasta aquí:

Ejemplo 1 *Sea el siguiente modelo de planeamiento* $(F, W, P, \mathbf{d}, \mathbf{s}, \pi)$ *donde* $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3\}$, $\mathbf{d} = (1, 2, 2, 4)$, $s = (4, 4, 1)$,

$$\pi=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

y el orden de preferencias P viene dado por

$P(f_1) = w_3, w_2,$
$P(f_2) = w_1, w_3,$
$P(f_3) = w_2,$
$P(f_4) = w_1, w_2, w_3,$

$P(w_1) = f_4, f_2,$
$P(w_2) = f_4, f_3, f_1,$
$P(w_3) = f_1, f_2, f_4.$

Sea la siguiente matriz

$$\begin{array}{cc} \mu_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \quad\quad 4 & 4 & 1 \end{array} & \end{array}$$

donde los números fuera de la matriz son los valores de **d** *y* **s**. *La matriz* μ_1 *cumple las condiciones (2), (3), (4) y (5) de la Definición 1 entonces es una planificación, pero no es estable, porque* $\mu_1(1, 3)$[2] *no verifica la condición (6) de estabilidad, es decir,*

$$\mu_1(1, 3) = 0 < \pi(1, 3) = 1$$

$$y$$

$$\sum_{f\, R(w_3)\, f_1} \mu_1(f, 3) = \mu_1(1, 3) = 0 \quad s(w_3) = 1,$$

$$y$$

$$\sum_{w\, R(f_1)\, w_3} \mu_1(1, w) = \mu_1(1, 3) = 0 \quad d(f_1) = 1.$$

Si consideramos la siguiente matriz

$$\begin{array}{cc} \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \quad\quad 4 & 4 & 1 \end{array} & \end{array}$$

es una planificación estable pues

$$\mu_2(1, 2) = 0 < 1 = \pi(1, 2)$$

$$y$$

$$\sum_{w\, R(f_1)\, w_2} \mu_2(1, p) = \mu_2(1, 2) + \mu_2(1, 3) = 1 = d(f_1)$$

2 En lo sucesivo $\mu(1, 3)$ denotará $\mu(f_1, w_3)$, y en general $\mu(i, j) = \mu(f_i, w_j)$ cuando no haya lugar a confusión.

$$\mu_2(2, 3) = 0 < 1 = \pi(2, 3)$$

$$y$$

$$\sum_{w R(f_2) w_3} \mu_2(2, p) = \mu_2(2, 3) + \mu_2(2, 1) = 2 = d(f_2)$$

$$\mu_2(4, 3) = 0 < 1 = \pi(4, 3)$$

$$y$$

$$\sum_{w R(f_4) w_3} \mu_2(4, w) = \mu_2(4, 3) + \mu_2(4, 2) + \mu_2(4, 1) = 4 = d(f_4).$$

2.2. Programación lineal

Los siguientes resultados serán necesarios en el desarrollo nuestro trabajo. Presentamos una breve descripción del problema de Transporte y de Asignación de Programación Lineal. Para más información referimos al lector a Bazaraa, Jarvis and Sherali (1990) Capítulo 10, del cual hemos tomado las definiciones y la notación que utilizamos.

2.2.1. *El problema de transporte*

Consideremos m puntos de origen, donde cada origen i tiene a_i unidades de un ítem (mercancía) particular. Hay n puntos de destino, donde cada destino j requiere b_j unidades de la mercancía. Suponemos a_i, $b_j > 0$. Cada origen i y destino j tiene asociado un camino (i, j) y un costo de transporte c_{ij}. El problema es determinar los recorridos de los orígenes a los destinos que minimicen el costo total del transporte.

Sea x_{ij} el número de unidades transportadas a lo largo del camino (i, j). Suponiendo que el total suministrado es igual al total demandado, es decir:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

el modelo de programación lineal para el problema de transporte será como sigue:

$$\text{Minimizar} \qquad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Sujeto a

$$(10) \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, 2..., m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, 2, ..., n$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, 2..., m \qquad j = 1, 2, ..., n$$

2.2.2. *El problema de transporte con capacidades*

Es un problema de transporte en el que las unidades transportadas del origen i al destino j, x_{ij}, tienen una capacidad o cota.

$$\text{Minimizar} \qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Sujeto a

$$(11) \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, 2..., m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, 2, ..., n$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, 2..., m, \quad j = 1, 2, ..., n,$$

$$x_{ij} \leq \alpha_{ij}, \qquad i = 1, 2..., m, \quad j = 1, 2, ..., n,$$

donde α_{ij} nos dice la capacidad (por ejemplo, el peso que soporta un puente) de unidades que se pueden transportar en el camino (i, j).

2.2.3. *El problema de asignación*

El problema de asignación es un caso especial del problema de transporte, es cuando $m = n$ y cada $a_i = 1$ y cada $b_j = 1$. Como un ejemplo, supongamos que tenemos m individuos y m trabajos. Si el individuo i es asignado al trabajo j, el costo será c_{ij}. En cada solución posible, $x_{ij} = 1$ significa que el individuo i es asignado al trabajo j, $x_{ij} = 0$ nos indica que el individuo i no es asignado al trabajo j.

Formalmente el problema de asignación es:

$$\text{Minimizar} \qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

Sujeto a

$$(12) \qquad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, ..., m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, ..., m$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i,\ j = 1, ..., m.$$

A cualquier problema de transporte se le puede asociar un problema de asignación. Esto se realiza haciendo a_i copias del origen i, a los que llamaremos $i_1, ... i_{a_i}$, cada i_k tiene una unidad del ítem o mercancía, para $i = 1, ..., m$. Similarmente, haciendo b_j copias del destino j, al que llamaremos $j_1, ..., j_{b_j}$, donde cada j_l demanda una unidad del ítem, para $j = 1, ..., n$.

Nota: En lo sucesivo cuando hablemos de problema de transporte o problema de asignación estaremos haciendo referencia a las restricciones de dichos problemas.

2.3. La estructura lineal del conjunto de los matching estables

En esta sección introduciremos conceptos del modelo de matching. Una buena referencia para estos temas es Roth and Sotomayor (1990).

Un matching ν es una aplicación de $F \cup W$ en $F \cup W$ donde para todo $f \in F$ y $w \in W$ se cumple que:

1. $\nu(f) \quad f$ implica $\nu(f) \in W$

2. $\nu(w) \quad w$ implica $\nu(w) \in F$

3. $w = \nu(f)$ si solo si $f = \nu(w)$

El matching ν es *individualmente racional* si para todo agente $g \in F \cup W$

$$\nu(g)P(g)g.$$

El par (f, w) *bloquea* el matching ν si

$$wP(f)\nu(f) \quad \text{y} \quad fP(w)\nu(w).$$

Un matching ν es *estable* si es individualmente racional y no es bloqueado por ningún par de agentes.

Vande Vate (1989) probó que en el modelo de matching uno a uno el conjunto de los matching estables se puede representar como los puntos extremos del conjunto de soluciones de un sistema de inecuaciones lineales.

El estudió el caso especial en el cual el número de empresas es igual al número de trabajadores, es decir $|F| = |W|$, todas las preferencias son estrictas y todo par (f, w) es mutuamente aceptable, es decir, $fP(w)w$ y $wP(f)\,f$.

Dado un matching ν, decimos que la matriz x de *ceros* y *unos* es la *configuración* de ν como una matriz si

$$x(f,w) = \begin{cases} 1 & si\ \nu(f) = w \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Recíprocamente, dada una matriz de orden $|F| = |W|$ y con a lo más un 1 por fila y columna, le podemos *asociar* un matching ν por

$$\nu(f) = w \text{ si y solo si } x(f, w) = 1$$

Entonces podemos caracterizar los matching estables por su configuración mediante el siguiente teorema de Vande Vate:

Teorema: (Vande Vate) *Un matching es estable si y sólo si su configuración x es una matriz entera de dimensión $|F| \times |W|$ que satisface el siguiente conjunto de condiciones: para todo $f \in F$* y *$w \in W$*

(i). $\sum_{j=1}^{|W|} x(f, j) = 1,$

(ii). $\sum_{i=1}^{|F|} x(i, w) = 1,$

(iii). $\sum_{j P(f) w} x(f, j) + \sum_{i P(w) f} x(i, w) + x(f, w) \geq 1$, *y*

(iv). $x(f, w) \geq 0.$

La siguiente es una demostración de la equivalencia entre (iii) y estabilidad:

Si *x* es una solución entera del sistema formado por las ecuaciones (i), (ii), y la inecuación (iv), tiene a lo más un 1 por fila y columna por lo tanto podemos asociarle un matching.

Si la solución entera *x* además cumple la condición (iii), el matching asociado a *x* se dice que no tiene pares bloqueantes. Para ver esto, supongamos que la solución entera *x* no satisface (iii), es decir, existen $\overline{f}$ y $\overline{w}$ tales que

$$\sum_{j P(\overline{f}) \overline{w}} x(\overline{f}, j) + \sum_{i P(\overline{w}) \overline{f}} x(i, \overline{w}) + x(\overline{f}, \overline{w}) < 1,$$

por ser *x* una solución entera y no negativa (iv), tenemos que los sumandos cumplen que

$$\sum_{j P(\overline{f}) \overline{w}} x(\overline{f}, j) = \sum_{i P(\overline{w}) \overline{f}} x(i, \overline{w}) = x(\overline{f}, \overline{w}) = 0,$$

la primera suma dice que no existen trabajadores más preferidos para $\overline{f}$, que este matchado bajo la solución *x*, por lo tanto existe un trabajador $\hat{w}$ menos preferido por $\overline{f}$ que $\overline{w}$ tal que $x(\overline{f}, \hat{w}) = 1$, es decir

$\overline{w} P(\overline{f}) \hat{w}$ y $x(\overline{f}, \hat{w}) = 1$, es decir $\nu(\overline{f}) = \hat{w}$, entonces $\overline{w} P(\overline{f}) \hat{w} = \nu(\overline{f})$.

Similarmente, por la segunda suma, existe $\hat{f}$ tal que:

$\overline{f} P(\overline{w}) \hat{f}$ y $x(\hat{f}, \overline{w}) = 1$, es decir $\nu(\overline{w}) = \hat{f}$, entonces $\overline{f} P(\overline{w}) \hat{f} = \nu(\overline{w})$

luego, $\overline{f}$ y $\overline{w}$ bloquean a ν.

3. Relación entre Problema de Planificación y Matching

3.1. Problema de planeamiento y problema de asignación asociado

Nuestra intención en esta sección es asociar a un problema de planeamiento $(F, W, P, \mathbf{d}, \mathbf{s}, \pi)$ un problema de planeamiento uno a uno $(F', W', P', \mathbf{1}, \mathbf{1}, \pi')$. El camino que seguiremos es el utilizado en el "College admission model" cuando se lo relaciona al modelo de matching uno a uno. A cada colegio C con cuota q_C se lo "descompone" en q_C copias de él con cuota uno.

Nosotros aplicaremos esta descomposición a ambos lados del mercado, pero en vez de cuota tenemos para las empresas las horas demandadas d y para los trabajadores las horas ofrecidas s:

Descomponemos cada trabajador w_j con s_j[3] horas de trabajo disponibles en el problema de planeamiento, en s_j "subtrabajadores" $w_{j1}, w_{j2}, ..., w_{js_j}$, donde cada nuevo subtrabajador w_{jl}, $l = 1, ..., s_j$ tiene $s_{jl} = 1$ hora de trabajo disponible. A este nuevo conjunto lo denotamos W', es decir,

$$W' = \{w_{jl} : j = 1, ...n, l = 1, ..., s_j\}.$$

Similarmente, a cada empresa f_i que necesita completar d_i horas de trabajo en el problema de planeamiento, la dividimos en d_i "subempresas" $f_{i1}, f_{i2}, ..., f_{id_i}$, donde la demanda de horas de cada subempresa es $d_{ik} = 1$, $k = 1, ..., d_i$. A este nuevo conjunto lo denotamos F', es decir,

$$F' = \{f_{ik} : i = 1, ..., m, k = 1, ..., d_i\}.$$

Hemos asociado F' a F, W' a W, el vector $\mathbf{1} = (1, ..., 1)$ con B-componentes dadas por la condición de balanceo (1), a $\mathbf{d} = (d_1, ..., d_m)$ y $\mathbf{s} = (s_1, ..., s_n)$.

Como cada empresa f_i y cada trabajador w_j se descomponen en $f_{i1}, f_{i2}, ..., f_{id_i}$ y $w_{j1}, w_{j2}, ..., w_{js_j}$, respectivamente, definimos la matriz $\pi' = \pi'(ik; jl)$ por[4]

$$\pi'(ik; jl) = 0 \;\; o \;\; 1 \;\; y \;\; \sum_{k}^{d_i} \sum_{l}^{s_j} \pi'(ik; jl) = \pi(i, j). \tag{13}$$

Observación 3 *La matriz π' no es única, pues, si $\pi(i, j) > 0$, tenemos $d(i)$ subempresas y $s(j)$ subtrabajadores que tienen una hora disponible, pero a lo más pueden trabajar juntos $\pi(i, j)$ horas, es decir que hay $\binom{d_i \cdot s_j}{\pi(i, j)}$ posibilidades.*

---

[3] Haciendo abuso de notación $s_j = s(w_j) = s(j)$, y $d_i = d(f_i) = d(i)$.

[4] Cada una de las entradas en este nuevo problema viene dada por la posición (f_{ik}, w_{jl}) o simplemente $ik; jl$ donde $i = 1, ..., m$, $k = 1, ..., d_i$, $j = 1, ..., m$, y $l = 1, ..., s_j$, es decir, los dos primeros subíndices corresponden a las filas (subempresas) y los dos últimos a las columnas (subtrabajadores).

Ejemplo 2 *Sea la empresa* f_i *con* $d(f_i) = 2$ *y sea el trabajador* w_j *con* $s(j) = 2$ *y sea* $\pi(i, j) = 2$, *entonces tenemos 6 posibilidades de formar* π', *por ejemplo*

$$\pi' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \pi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \pi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dado el orden de preferencias P del problema de planeamiento definimos un nuevo orden de preferencias P', que responde a P, de la siguiente forma:

Si $w_j P(f_i)\, w_p$ entonces

(i) $w_{jl}\, P'(f_{ik}) w_{jl\text{-}1}$ para todo $j = 1, ..., m$ y $l = 2, ..., s_j$.

(ii) $w_{j1}\, P'(f_{ik})\, w_{ps_p}$ para todo $k = 1, ..., d_i$.

La condición (i) dice que todas las subempresas de f_i asignan el mismo orden a todos los subtrabajadores de w_j. La condición (ii) dice que si f_i prefiere w_j a w_p entonces cada subempresa f_{ik} de f_i prefiere, en el nuevo orden, el peor subtrabajador w_{j1} de w_j al mejor subtrabajador w_{ps_p} de w_p, y por la condición (i) todos los subtrabajadores w_j son preferidos en P' a todos los subtrabajadores de w_p.

Similarmente para $P'(w_{jl})$. Si $f_i P(w_j)\, f_p$ entonces

(i) $f_{ik}\, P'(w_{jl})\, f_{ik\text{-}1}$ para todo $i = 1, ..., n$ y $k = 2, ..., d_i$.

(ii) $f_{i1}\, P'(w_{jk})\, f_{pd_p}$ para todo $l = 1, ..., s_j$.

Luego esta descomposición para el Ejemplo 1 será:

Continuación del Ejemplo 1 Sólo descomponemos las empresas f_1 y f_2 y el trabajador w_1. Para los otros agentes es similar.

$$\begin{aligned}
P'(f_{11}) &= w_{31}, w_{24}, w_{23}, w_{22}, w_{21}, \\
P'(f_{21}) &= w_{14}, w_{13}, w_{12}, w_{11}, w_{31}, \\
P'(f_{22}) &= w_{14}, w_{13}, w_{12}, w_{11}, w_{31}, \\
P'(f_{3k}) &= w_{24}, w_{23}, w_{22}, w_{21}, \\
P'(f_{4k}) &= w_{14}, w_{13}, w_{12}, w_{11}, w_{24}, w_{23}, w_{22}, w_{21}, w_{31},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P'(w_{11}) &= f_{44}, f_{43}, f_{42}, f_{41}, f_{22}, f_{21}, \\
P'(w_{12}) &= f_{44}, f_{43}, f_{42}, f_{41}, f_{22}, f_{21}, \\
P'(w_{13}) &= f_{44}, f_{43}, f_{42}, f_{41}, f_{22}, f_{21}, \\
P'(w_{14}) &= f_{44}, f_{43}, f_{42}, f_{41}, f_{22}, f_{21}, \\
P'(w_{2l}) &= f_{44}, f_{43}, f_{42}, f_{41}, f_{32}, f_{31}, \\
P'(w_{3l}) &= f_{11}, f_{22}, f_{21}, f_{44}, f_{43}, f_{42}, f_{41}.
\end{aligned}$$

Dado un problema de planeamiento (F, W, P, $\mathbf{d}$, $\mathbf{s}$, π), cualquier matriz μ que satisface las condiciones (2), (3), (4) y (5) de la Definición 1, satisface las restricciones de un problema de transporte con capacidades, mientras que las condiciones (2), (3) y (4) de la Definición 1 son las restricciones de un problema de transporte de programación lineal, que notaremos (F, W, P, $\mathbf{d}$, $\mathbf{s}$).

A su vez, un problema de transporte (F, W, P, $\mathbf{d}$, $\mathbf{s}$) (restricciones (2), (3) y (4) de la Definición 1) tiene asociado un problema de asignación, que notaremos (F', W', P', $\mathbf{1}$, $\mathbf{1}$). Entonces decimos que el problema de planeamiento (F, W, P, $\mathbf{d}$, $\mathbf{s}$, π) tiene *asociado* el problema de asignación (F', W', P', $\mathbf{1}$, $\mathbf{1}$).

Observación 4 *Para tener un problema de asignación* (F', W', P', $\mathbf{1}$, $\mathbf{1}$) *necesitamos que: los conjuntos de agentes tengan la misma cardinalidad: El conjunto de subempresas* F', *y el conjunto de subtrabajadores* W', *cumplen esta condición ya que por ser balanceado*

$$|F'| = \sum_{f_i \in F} d(f_i) = \sum_{w_j \in W} s(w_j) = |W'|.$$

Dado un problema de planeamiento (F, W, P, $\mathbf{d}$, $\mathbf{s}$, π), una solución μ y el problema de asignación asociado (F', W', P', $\mathbf{1}$, $\mathbf{1}$), decimos que la matriz $Z_\mu = (z(ik; jl))$ está *asociada a* μ si Z_μ es solución del problema (F', W', P', $\mathbf{1}$, $\mathbf{1}$), y satisface:

(14) $$\sum_{k=1}^{d_j} \sum_{l=1}^{s_j} z(ik; jl) = \mu(i, j) \qquad \text{para todo } (i, j).$$

La matriz $Z_\mu = (z(ik; jl))$, para ser solución del problema de asignación (F', W', P', $\mathbf{1}$, $\mathbf{1}$) debe cumplir lo siguiente

(15) $$\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{s_j} z(ik; jl) = 1 \qquad \text{para todo } i \text{ y para todo } 1 \le k \le d_i$$

(16) $$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{d_i} z(ik; jl) = 1 \qquad \text{para todo } j \text{ y para todo } 1 \le l \le s_j$$

(17) $$z(ik; jl) \ge 0 \text{ para todo } ik; jl.$$

El algoritmo siguiente, que es una modificación del algoritmo de aceptación diferida (AAD), construye una matriz Z_μ, que satisface las condiciones (14), (15), (16) y (17):

3.1.1. *Algoritmo*

La siguiente descripción y notación del algoritmo es desde el punto de vista de “las empresas proponen”, para el caso “los trabajadores proponen” sólo debemos adaptar la notación.

Llamamos C, $W^{<}$ y $W^{=}$ a los siguientes subconjuntos de W'

$$C(f_{ik}) = \{w_{jl} : w_{jl} \text{ rechazó a } f_{ik}\}$$

$$W^{<}(f_{ik}) = \left\{w_{jl} : 0 < \sum_{k=1}^{d(i)} \sum_{l=1}^{s(j)} z^{p-1}(ik; jl) < \mu(f_i, w_j)\right\} \setminus C(f_{ik}),$$

$$W^{=}(f_{ik}) = \left\{w_{jl} : 0 < \sum_{k=1}^{d(i)} \sum_{l=1}^{s(j)} z^{p-1}(ik; jl) = \mu(f_i, w_j)\right\} \setminus C(f_{ik}).$$

Sea Z_{μ}^{0} una matriz de *ceros*, es decir $z^{0}(ik; jl) = 0$ para todo $ik; jl$.

Paso p: Dada Z_{μ}^{p-1}. Cada subempresa f_{ik} pone un 1 en (es decir, le ofrece a) el subtrabajador $w_{\bar{j}\bar{l}}$, si:

$$w_{\bar{j}\bar{l}} = \max_{P'(f_{ik})}\left\{w_{\hat{j}\hat{l}}, w_{\tilde{j}\tilde{l}}\right\},$$

donde

1. $w_{\hat{j}\hat{l}} = \max_{P'(f_{ik})} W^{<}(f_{ik})$

2. $w_{\tilde{j}\tilde{l}} = \max_{P'(f_{ik})} W^{=}(f_{ik})$ y existe

$$w_{\tilde{j}\tilde{\tilde{l}}} = \min_{P'(f_{ik})} W = (f_{ik}) \quad \text{tal que } w_{\tilde{j}\tilde{l}} \; R'(f_{ik}) \; w_{\tilde{j}\tilde{\tilde{l}}}$$

Cada subtrabajador w_{jl} se queda con el 1 más preferido y "rechaza" (es decir, pone ceros en) los demás, formando la matriz Z^{p}. Cuando no hay ningún rechazo, el algoritmo para.

Paso $p + 1$: Las subempresas rechazadas vuelven al paso anterior.

Observación 5 *Finalmente hay a lo más un uno por fila y por columna.*

Observación 6 *Si hay un agente que tenga* $s(w) > 1$ *o* $d(f) > 1$ *entonces el algoritmo nunca puede parar en el Paso 1.*

Observación 7 *Nunca una subempresa ofrece dos veces al mismo subtrabajador.*

Observación 8 *El algoritmo para por la Observación anterior y porque hay un número finito de agentes.*

Construyamos la matriz Z_μ asociada al planeamiento μ_2 del ejemplo 1:

Continuación del ejemplo 1 El planeamiento μ_2 era:

$$\mu_2 = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 4 & 4 & 1 \end{array} & \end{array}$$

Comenzamos con[5]

$$Z^0_{\mu_2} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

Paso 1: Todas las subempresas ponen un *uno* en su subtrabajador más preferido, cada subtrabajador se queda con el *uno* más preferido y rechaza, es decir, pone ceros en los demás, luego w_{14} se queda con f_{44}, y rechaza (los unos tachados) a f_{21}, f_{22}, f_{41}, f_{42} y f_{43}, y w_{24} se queda con f_{32} y rechaza a f_{31}. Obteniendo[6]

$$Z^1_{\mu_2} = \left(\begin{array}{c|cccc|cccc|c} & w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} & w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} & w_{31} \\ \hline f_{11} & & & & & & & & & 1 \\ \hline f_{21} & & & & \cancel{1} & & & & & \\ f_{22} & & & & \cancel{1} & & & & & \\ \hline f_{31} & & & & & & & & \cancel{1} & \\ f_{32} & & & & & & & & 1 & \\ \hline f_{41} & & & & \cancel{1} & & & & & \\ f_{42} & & & & \cancel{1} & & & & & \\ f_{43} & & & & \cancel{1} & & & & & \\ f_{44} & & & & 1 & & & & & \end{array}\right)$$

5 Las líneas horizontales y verticales corresponden a **d** y **s** respectivamente.

6 Los lugares vacíos y los lugares donde los unos están tachados corresponden a *ceros*.

Paso 2: Cada subempresa rechazada vuelve a ofrecer, por ejemplo:
f_{21} le ofrece a w_{13} pues

$$W^{<}(f_{21}) = \left\{ w_{jl} : 0 < \sum_{k=1}^{d(f_2)=2} \sum_{l=1}^{s(w_1)=4} z^0(2k;\, 1l) < \mu_2(f_2, w_1) = 2 \right\} \setminus \{w_{14}\}$$

$$= \{w_{13}, w_{12}, w_{11}\},$$

$$\max_{P'(f_{21})} W^{<}(f_{21}) = \{w_{13}\},$$

y

$$W^{=}(f_{21}) = \emptyset.$$

Luego

$$w_{13} = \max_{P'(f_{21})} \{w_{13}\}.$$

Similarmente f_{22}, f_{41}, f_{42} y f_{43} le ofrecen a w_{13}, y f_{31} le ofrece a w_{23}. Cada subtrabajador se queda con el uno más preferido y rechaza, es decir, pone ceros en los demás, entonces w_{13} se queda con f_{43}, y rechaza a f_{21}, f_{22}, f_{41}, y f_{42}, y w_{24} se queda con f_{31}. Obteniendo

$$Z^2_{\mu_2} = \left(\begin{array}{c|cccc|cccc|c}
 & w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} & w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} & w_{31} \\ \hline
f_{11} & & & & & & & & & 1 \\ \hline
f_{21} & & & 1 & 1 & & & & & \\
f_{22} & & & 1 & 1 & & & & & \\ \hline
f_{31} & & & & & & & 1 & 1 & \\
f_{32} & & & & & & & & 1 & \\ \hline
f_{41} & & & 1 & 1 & & & & & \\
f_{42} & & & 1 & 1 & & & & & \\
f_{43} & & & 1 & 1 & & & & & \\
f_{44} & & & & 1 & & & & &
\end{array} \right)$$

Paso 3: Cada subempresa rechazada vuelve a ofrecer, por ejemplo:
f_{41} le ofrece a w_{24} pues:

$$W^{<}(f_{41}) = \left\{ w_{jl} : 0 < \sum_{k=1}^{d(f_4)=4} \sum_{l=1}^{s(w_2)=4} z^2(4k;\, 2l) < \mu_2(f_4, w_2) = 2 \right\} \setminus \{w_{14}, w_{13}\},$$

$$= \{w_{24}, w_{23}, w_{22}, w_{21}\},$$

$$\max_{P'(f_{41})} W^{<}(f_{41}) = \{w_{24}\},$$

$$W^{=}(f_{41}) = \left\{ w_{jl} : 0 < \sum_{k=1}^{d(f_2)=4} \sum_{l=1}^{s(w_1)=4} z^2(4k;\, 1l) = \mu_2\,(f_4,\, w_1) = 2 \right\} \setminus \{w_{14},\, w_{13}\} =$$

$$= \emptyset;$$

$$w_{24} = \max_{P'(f_{41})} \{w_{24}\}.$$

Similarmente f_{22} y f_{21} le ofrecen a w_{12}, y f_{42} le ofrece a w_{24}. Cada subtrabajador se queda con el *uno* más preferido y rechaza, es decir, pone ceros en los demás, luego w_{12} se queda con f_{22}, y rechaza a f_{21} y w_{24} se queda con f_{42} y rechaza a f_{32} y f_{41}. Obteniendo

$Z^3_{\mu_2} =$

	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{21}	w_{22}	w_{23}	w_{24}	w_{31}
f_{11}									1
f_{21}		*1*	*1*	*1*					
f_{22}		1	*1*	*1*					
f_{31}							1	*1*	
f_{32}								*1*	
f_{41}			*1*	*1*				*1*	
f_{42}			*1*	*1*				1	
f_{43}			1	*1*					
f_{44}				1					

Paso 4: Obtenemos

$Z^4_{\mu_2} =$

	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{21}	w_{22}	w_{23}	w_{24}	w_{31}
f_{11}									1
f_{21}	1	*1*	*1*	*1*					
f_{22}		1	*1*	*1*					
f_{31}							*1*	*1*	
f_{32}							*1*	*1*	
f_{41}			*1*	*1*			1	*1*	
f_{42}			*1*	*1*				1	
f_{43}			1	*1*					
f_{44}				1					

Paso 5: Obtenemos

$$Z^5_{\mu_2} = \begin{array}{c|cccc|cccc|c}
 & w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} & w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} & w_{31} \\ \hline
f_{11} & & & & & & & & & 1 \\ \hline
f_{21} & 1 & \mathit{1} & \mathit{1} & \mathit{1} & & & & & \\
f_{22} & & 1 & \mathit{1} & \mathit{1} & & & & & \\ \hline
f_{31} & & & & & & \mathit{1} & \mathit{1} & \mathit{1} & \\
f_{32} & & & & & & 1 & \mathit{1} & \mathit{1} & \\ \hline
f_{41} & & & \mathit{1} & \mathit{1} & & & 1 & \mathit{1} & \\
f_{42} & & & \mathit{1} & \mathit{1} & & & & 1 & \\
f_{43} & & & 1 & \mathit{1} & & & & & \\
f_{44} & & & & 1 & & & & &
\end{array}$$

Paso 6: Obtenemos

$$Z^6_{\mu_2} = \begin{array}{c|cccc|cccc|c}
 & w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} & w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} & w_{31} \\ \hline
f_{11} & & & & & & & & & 1 \\ \hline
f_{21} & 1 & \mathit{1} & \mathit{1} & \mathit{1} & & & & & \\
f_{22} & & 1 & \mathit{1} & \mathit{1} & & & & & \\ \hline
f_{31} & & & & & 1 & \mathit{1} & \mathit{1} & \mathit{1} & \\
f_{32} & & & & & & 1 & \mathit{1} & \mathit{1} & \\ \hline
f_{41} & & & \mathit{1} & \mathit{1} & & & 1 & \mathit{1} & \\
f_{42} & & & \mathit{1} & \mathit{1} & & & & 1 & \\
f_{43} & & & 1 & \mathit{1} & & & & & \\
f_{44} & & & & 1 & & & & &
\end{array}$$

Como no hay más rechazos, ésta es la matriz Z_{μ_2} asociada al planeamiento μ_2, es decir:

$$Z_{\mu_2} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Lema 1 *Sea el problema de planeamiento* (F, W, P, **d**, **s**, π), sea (F', W', P', **1**, **1**) *el problema de asignación y sea* μ *un planeamiento de* (F, W, P, **d**, **s**, π) *entonces la matriz* Z_μ, *asociada al planeamiento* μ, *obtenida por el algoritmo, es solución de* (F', W', P', **1**, **1**).

Demostración Debemos demostrar que Z_μ verifica las condiciones (15), (16) y (17). La condición (17) de no negatividad, se sigue de que para todo $(ik; jl)$, $i = 1, ..., m$, $k = 1, ..., d(i)$, $j = 1, ..., n$ y $l = 1, ..., s(j)$:

$$z(ik; jl) = 0 \text{ o } 1.$$

Supongamos que (15) no se verifica, por la Observación (5), sólo tenemos que considerar que Z_μ tiene una fila de ceros, es decir $\exists\ \hat{i}$ y $\exists\ \hat{k}$ de $\hat{i}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{s(j)} z(\hat{i}\,\hat{k};\ jl) = 0. \tag{18}$$

Como μ es planeamiento, verifica (3) de la Definición (1), es decir

$$d(\hat{i}) = \sum_{j=1}^{n} \mu(\hat{i}, j) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{d(\hat{i})}\sum_{l=1}^{s(j)} z\left(\hat{i}k; jl\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{d(\hat{i})}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{s(j)} z\left(\hat{i}k; jl\right)\right) \leq d(\hat{i}) - 1.$$

La segunda igualdad se sigue de la condición (14), la última desigualdad se sigue de la Observación (5) y de la condición (18).

Supongamos que (16) no se verifica, por la Observación (5), sólo tenemos que considerar que Z_μ tiene una columna de ceros, es decir $\exists\ \hat{j}$ y $\exists\ \hat{l}$ de $\hat{j}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{d(i)} z(ik;\ \hat{j}\,\hat{l}) = 0. \tag{19}$$

Como μ es planeamiento, verifica (2) de la Definición (1), es decir

$$s(\hat{j}) = \sum_{i=1}^{m} \mu(i, \hat{j}) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{d(i)}\sum_{l=1}^{s(\hat{j})} z\left(ik; \hat{j}l\right)\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{s(\hat{j})}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{d(i)} z\left(ik; \hat{j}l\right)\right) \leq s(\hat{j}) - 1.$$

La segunda igualdad se sigue de la condición (14), la última desigualdad se sigue de la Observación (5) y de la condición (19).

Luego Z_μ, es solución de $(F', W', P', \mathbf{1}, \mathbf{1})$.

3.2. Problema de planeamiento y problema de planeamiento uno a uno asociado

Hasta ahora hemos asociado a un problema de planeamiento $(F, W, P, \mathbf{d}, \mathbf{s}, \pi)$ un problema de asignación $(F', W', P', \mathbf{1}, \mathbf{1})$, y a un planeamiento μ, una matriz Z_μ, solución del problema de asignación. Ahora bien, como un problema de planeamiento uno a uno es una extensión de un problema de asignación, lo que necesitamos es definir π'_μ.

Definición 3 *Dado el problema de planeamiento* $(F, W, P, \mathbf{d}, \mathbf{s}, \pi)$, μ *una solución de él,* $(F', W', P', \mathbf{1}, \mathbf{1})$ *el problema de asignación asociado y la matriz* $Z_\mu = (z(ik; jl))$, *solución asociada a* μ,*construida por el algoritmo, definimos para cada* (i, j)

$$\pi'_\mu(ik;\ jl) = \begin{cases} 1 & z(ik; jl) = 1 \\ 1 & (i1; jl_1), \ldots, (i1, jl_\alpha) \\ 0 & \textit{otro caso} \end{cases} \tag{20}$$

donde $\alpha = \pi(i, j) - \mu(i, j)$, $i1$ *es la subempresa menos preferida de la empresa* i, *en el orden* P', *y* $jl_1, ..., jl_\alpha$, *son los* α *– ésimos subtrabajadores menos preferidos del trabajador* j, *en el orden* P', *tales que* $z(i1; jl_1) = ... = z(i1; jl_\alpha) = 0$.

Observación 9 π'_μ *cumple la condición siguiente*

$$\pi'_\mu(ik; jl) = 0 \ \ o \ \ 1 \quad y \quad \sum_k^{d(i)} \sum_l^{s(j)} \pi'_\mu(ik; jl) = \pi(i, j)$$

pues como Z_μ *esta asociada a* μ

$$\sum_k^{d(i)} \sum_l^{s(j)} z(ik; jl) = \mu(i, j)$$

$$\sum_{r=1}^{\alpha} \pi'_\mu(i1; jl_r) = \alpha = \pi(i, j) - \mu(i, j),$$

entonces

$$\sum_k^{d(i)} \sum_l^{s(j)} \pi'_\mu(ik; jl) = \pi(i, j).$$

Veamos cómo se aplica la Definición 3 al Ejemplo 1:

Continuación Ejemplo 1

En el ejemplo 1 teníamos

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mu_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz Z_{μ_1} es

$$Z_{\mu_1} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \pi'_\mu = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

donde, por ejemplo, el *uno* en $\pi'_\mu(11; 21)$ viene de $z(11; 21) = 1$, el *uno* en $\pi'_\mu(31; 21)$ viene de $\alpha = \pi(3, 2) - \mu(3, 2) = 1$ y $z(31; 21) = 0$.

La proposición siguiente muestra que los planeamientos estables tienen asociado un planeamiento uno a uno estable.

Proposición 2 *Sea* $(F, W, P, \mathbf{d}, \mathbf{s}, \pi)$ *un problema de planeamiento y* μ *una solución, entonces existe una matriz* π'_μ*, tal que* $(F', W', P', \mathbf{1}, \mathbf{1}, \pi'_\mu)$ *es un problema de planeamiento uno a uno asociado a* $(F, W, P, \mathbf{d}, \mathbf{s}, \pi)$ *y existe* Z_μ *planeamiento uno a uno solución de* $(F', W', P', \mathbf{1}, \mathbf{1}, \pi'_\mu)$. *Además, si* μ *es estable,* Z_μ *también es estable.*

Demostración Dado el problema $(F, W, P, \mathbf{d}, \mathbf{s}, \pi)$, podemos asociarle un problema de asignación $(F', W', P', \mathbf{1}, \mathbf{1})$ y dada la solución μ podemos encontrar la matriz Z_μ asociada a μ, solución de $(F', W', P', \mathbf{1}, \mathbf{1})$ (Algoritmo y Lema 1). Por la Definición 3, tenemos que $Z_\mu = (z(ik, jl))$ es un planeamiento de $(F', W', P', \mathbf{1}, \mathbf{1}, \pi'_\mu)$.

Veamos que si μ es estable, es decir, cumple la condición (6) de la Definición 2, entonces Z_μ es estable en $(F',\ W',\ P',\ \mathbf{1},\ \mathbf{1},\ \pi'_\mu)$, es decir, cumple la condición (6') de la Definición 2.

Escribimos nuevamente la condición de estabilidad para μ: si para algún $(\bar{i},\ \bar{j})$

$$\mu(\bar{i},\ \bar{j}) < \pi(\bar{i},\ \bar{j})$$

implica

(21) $$\sum_{i R(\bar{j}) \bar{i}} \mu(\bar{i},\ \bar{j}) = s(\bar{j})$$

o

(22) $$\sum_{j R(\bar{i}) \bar{j}} \mu(\bar{i},\ \bar{j}) = d(\bar{i}).$$

La condición (6') de la Definición 2 decía: Si $\pi'_\mu(\bar{i}\ \bar{k},\ \bar{j}\ \bar{l}) = 1$ y

$$z(\bar{i}\ \bar{k},\ \bar{j}\ \bar{l}) = 0 \text{ entonces } \begin{cases} \exists\, \hat{i}\hat{k} \in F',\ \hat{i}\hat{k}P'(\bar{j}\,\bar{l})\bar{i}\,\bar{k} : z(\hat{i}\hat{k}, \bar{j}\,\bar{l}) = 1 \\ \exists\, \hat{j}\hat{l} \in W',\ \hat{j}\hat{l}P'(\bar{i}\,\bar{k})\bar{j}\,\bar{l} : z(\bar{i}\,\bar{k}, \hat{j}\hat{l}) = 1 \end{cases}$$

Supongamos que para algún $(\bar{i}\ k;\ \bar{j}\ \bar{l})$

(23) $$z(\bar{i}\ k;\ \bar{j}\ \bar{l}) = 0 \text{ y } \pi'_\mu(\bar{i}\ k;\ \bar{j}\ \bar{l}) = 1,$$

por la Definición 3 de π'_μ tenemos que $k = 1$ y $1 \le \bar{l} \le \alpha = \pi(i, j) - \mu(i, j) > 0$, luego la condición (23) nos queda:

(24) $$z(\bar{i}\,1;\ \bar{j}\,\bar{l}) = 0 \text{ y } \pi'_\mu(\bar{i}\,1;\ \bar{j}\,\bar{l}) = 1.$$

Si $z(\bar{i}\,1;\ \bar{j}\,\bar{l}) = 0$ es porque

Caso 1: la subempresa $\bar{i}\,1$ le ofreció al subtrabajador $\bar{j}\,\bar{l}$, y fue "rechazada". Pero si fue rechazada es porque existe una subempresa $\hat{i}\hat{k}$ tal que

$$\hat{i}\hat{k}\ P'(\bar{j}\,\bar{l})\ \bar{i}\,1 \quad \text{con } z(\hat{i}\hat{k};\bar{j}\,\bar{l}) = 1.$$

es decir, se cumple la condición (6').

Caso 2: la subempresa $\bar{i}\,1$ nunca le "ofreció" al subtrabajador $\bar{j}\,\bar{l}$, entonces

a) No le ofreció porque existía un subtrabajador $\hat{j}\hat{l}$ tal que

$$\hat{j}\hat{l}\ \ P'(\bar{i}\,1)\,\bar{j}\,\bar{l} \quad \text{con} \ \ z(\bar{i}\,1;\ \hat{j}\hat{l}\,) = 1,$$

es decir, se cumple la condición (6’).

b) No le ofreció porque $w_{\bar{j}\,\bar{l}}$ era menos preferido que

$$\min_{P'(f_{ik})} W = (f_{ik})$$

es decir

(25) $$\sum_{k=2}^{d(\bar{i})} \sum_{l=\bar{l}+1}^{s(\bar{j})} z(\bar{i}\ k;\ \bar{j}\ l) = \mu\,(\bar{i},\ \bar{j}).$$

Entonces, por el algoritmo, $\bar{i}\,1$ le ofreció a algún subtrabajador $\tilde{j}\,l$ del trabajador $\tilde{j}$ tal que

$$\bar{j}\,P(\bar{i}\,)\,\tilde{j}\,,$$

pero entonces por (22)

$$\sum_{j\,R(\bar{i})\,\bar{j}} \mu\,(\bar{i}\,, j) < d(\bar{i}\,),$$

luego por la estabilidad de μ, se tiene que cumplir (21), que es equivalente a

$$\forall i \text{ tal que } \bar{i}\,P(\bar{j}\,)\ i\ \mu(i,\ \bar{j}\,) = 0,$$

que es equivalente a

(26) $$\forall i,\ \forall k \text{ de } i, \text{ y } \forall l \text{ de } \bar{j} \text{ tal que } \bar{i}\,P(\bar{j}\,)\ i\ z(ik,\ \bar{j}\,l) = 0.$$

Entonces, como Z_μ es planeamiento, por (25) y (26), existe una subempresa $\tilde{i}\,\tilde{k}$ tal que

$$\tilde{i}\,\tilde{k}\ \ P'(\bar{j}\,\bar{l}\,)\ \ \bar{i}\,1 \text{ con } z(\tilde{i}\,\tilde{k}\,;\bar{j}\,\bar{l}\,) = 1,$$

es decir, se cumple la condición (6’).

Ahora bien, si en vez de cumplirse (21) de la definición de estabilidad, se verificara (22), tendríamos que

$$\forall j \text{ tal que } \bar{j}\,P(\bar{i}\,)\ j\ \mu(\bar{i}\,, j) = 0,$$

que es equivalente a

(27) $\forall j, \forall l$ de j, y $\forall k$ de $\bar{i}$ tal que $\bar{j}P(\bar{i})\,j\; z(\bar{i}k, jl) = 0$.

Pero entonces por ser Z_μ planeamiento, por (25) y (27), existe un $\tilde{j}$ y un $\tilde{l}$ de $\tilde{j}$ tal que

$$\tilde{j}\,P(\bar{i})\,\bar{j} \quad \text{con} \quad \mu'(\bar{i}1;\ \tilde{j}\,\tilde{l}) = 1,$$

es decir, se cumple la condición (6').

Luego Z_μ es estable.

3.3. Problema de planeamiento y problema de matching

Hemos probado que, dado un planeamiento estable μ de (F, W, P, **d**, **s**, π) podemos construir un planeamiento uno a uno estable Z_μ de (F', W', P', **1**, **1**, π'_μ). En la Sección 2.1, Observación (2), vimos que dado un planeamiento uno a uno estable, podíamos decir que era la configuración como matriz de un matching estable ν, solución del problema de matching asociado a (F, W, P, **d**, **s**, π). Entonces dado un planeamiento estable de (F, W, P, **d**, **s**, π) podemos encontrar un matching estable de (F', W', P'). Formalmente

Corolario 3 *Sea* (F, W, P, **d**, **s**, π) *un problema de planeamiento,* μ *una solución estable y* (F', W', P') *el problema de matching asociado, entonces existe un matching estable, solución de* (F', W', P') *asociado a* μ.

Demostración Proposición 2 y Observación 2.

4. Referencias

Alkan, A. and D. Gale (2002). "Stable schedule matching under revealed preference". *Journal of Economic Theory*, Academic Press.

Baïou, M. and M. Balinski (2002). "The stable allocation (or ordinal transportation) problem". *Mathematics of Operations Research* 27, 485-503.

Bazaraa, M. S.; J. J. Jarvis and H. D. Sherali (1990). *Linear programming and network flows.* John Wiley & Sons.

Gale, D. and L. Shapley (1962). "College admissions and the stability of marriage". *American Mathematical Monthly* 69, 9-15.

Roth, A. E. and M. Sotomayor (1990). *Two-side Matching: A Study in Game-Theoretic Modelling and Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge.

Vande Vate, J. H. (1989). "Linear programming brings marital bliss". *Operations Research Letters* 8, 147-53.