

# EVALUACIÓN DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS BÁSICAS MEDIANTE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON AYUDA DE PAQUETES DE CÁLCULO SIMBÓLICO

Ana M. Martín Caraballo<sup>1</sup>, Ángel F. Tenorio Villalón<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidad Pablo de Olavide, [ammarcar@upo.es](mailto:ammarcar@upo.es)

<sup>2</sup>Universidad Pablo de Olavide, [afterorio@upo.es](mailto:afterorio@upo.es)

## Resumen

En el presente artículo, discutimos sobre la idoneidad de evaluar las competencias matemáticas básicas en las asignaturas de primer curso para el alumnado de nuevo ingreso. En particular, nos centraremos en una evaluación basada en la resolución de problemas planteados al alumnado y que pueden ser tratados con la ayuda de un paquete de cálculo simbólico.

Analizaremos cómo el uso de dichos paquetes puede facilitar la observación de las destrezas matemáticas de nuestro alumnado sin que sean ocultadas por dificultades operacionales o procedimentales. Estos paquetes permiten centrar la evaluación en los conceptos y procedimientos tratados en cada momento y tener una mejor percepción de la evolución que el/la estudiante está teniendo en su proceso de enseñanza/aprendizaje.

Veremos igualmente el cambio de paradigma a la hora de plantear cuestiones y preguntas cuando se pretende llevar a cabo una evaluación como la que proponemos en el presente artículo. Principalmente, nos referimos a dejar en segundo nivel las preguntas puramente de calculística y aplicación de fórmulas, pasando a preguntas de comprensión de los conceptos y procedimientos trabajados.

Para poder contextualizar nuestro análisis, nos basaremos en ejemplos sobre contenidos del Álgebra Lineal en alumnado tanto de Ingeniería como de Empresa.

A este respecto, analizaremos igualmente las dificultades que presenta el alumnado en el manejo de dichos paquetes dependiendo del tipo de titulación que están cursando.

Palabras clave: Evaluación, uso de TIC, competencias matemáticas, alumnado de nuevo ingreso.

## 1 INTRODUCCIÓN

Uno de los principales objetivos al impartir asignaturas de Matemáticas es no centrarnos solo en el mero aprendizaje de conceptos y procedimientos por pura repetición memorística, sino lograr que el alumnado adquiera tanto las competencias matemáticas básicas como las específicas para la futura profesión que puedan ejercer tras egresar de la universidad. Pero en pleno siglo XXI y con una sociedad eminentemente tecnológica, para que nuestro alumnado sea realmente competente, estamos obligados a desarrollar sus competencias digitales en combinación con las propias de nuestra materia y contextualizadas a las mismas; ya que en otro caso estaríamos favoreciendo una analfabetización de tipo funcional para desenvolverse en la sociedad actual. Una forma de alfabetizar digitalmente a nuestro alumnado en las asignaturas de Matemáticas simplemente consiste en usar los distintos tipos de software matemático existentes para el tratamiento de los problemas que se trabajan en el aula (Gewerc *et al.*, 2011; Tenorio *et al.*, 2010). Más aún, haciendo uso de dicho software, podemos mostrar a nuestro alumnado cómo realmente se trabajan hoy en día dichos problemas matemáticos y no limitarnos a explicar y reproducir las Matemáticas que tal y como las trabajaron los más ilustres e insignes matemáticos de los siglos XVIII a XIX y principios del siglo XX (Tenorio, 2008; Tenorio *et al.*, 2010).

Por otra parte, siendo plenamente conscientes de la relevancia del uso de las TIC (Tecnologías de la Información y Comunicación) y de la fuerte apuesta que ha venido realizando por éstas la Universidad Pablo de Olavide (UPO), es completamente natural que en nuestras titulaciones se abogue por el desarrollo de la competencia digital en el alumnado. Así, un ejemplo de este hecho es la virtualización de asignaturas con la consiguiente creación de campus virtuales y el uso por defecto de plataformas virtuales en las asignaturas o la implantación de modalidades semivirtuales en algunas titulaciones.

En el presente trabajo, queremos mostrar cómo hemos planteado el trabajo con el alumnado de nuevo ingreso en las asignaturas de Matemáticas para poder realizar la evaluación de este alumnado mediante la resolución de problemas asistida con paquetes de cálculo simbólico y otras herramientas informáticas para el tratamiento de problemas matemáticos.

## 2 VENTAJAS DEL USO DE LAS TIC EN LA DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS UNIVERSITARIAS

Cuando el profesorado deja de preocuparse en exceso sobre el aprendizaje correcto y formal de la ejecución manual de un algoritmo (incluida la comprobación de todas las hipótesis necesarias para su aplicación) y comenzamos a pensar que lo realmente importante es que el alumnado sea capaz de aplicar correctamente dicho algoritmo y de utilizar la respuesta que éste devuelve en el contexto del problema trabajado, es entonces cuando toma sentido el uso de los ordenadores y de software de cálculo simbólico y de geometría para el tratamiento de problemas matemáticos (Montero, 2006; Pérez-Jiménez, 2005).

Nada más lejos de nuestra intención el suprimir la explicación y tratamiento de procedimientos a la manera tradicional usando lápiz y papel. Obviamente esto es completamente necesario ya que ese aprendizaje permite adquirir una serie de competencias matemáticas que solo pueden obtenerse de ese modo. Pero sí afirmamos que las asignaturas no pueden enfocarse solo en el uso de este tipo de aprendizajes; creemos que es fundamental dar su lugar al tratamiento computacional de problemas matemáticos en las asignaturas.

Igual que no es apropiado abandonar la enseñanza tradicional de resolución de problemas (primando la mente sobre la máquina), tampoco se puede dejar de lado el tratamiento computacional de estos problemas. La forma de atacar un mismo problema puede resultar completamente diferente cuando se usa uno y otro tratamiento. Es más, cuando se resuelve un problema a mano se realizan cálculos y comprobaciones que pueden no ser necesarias (e incluso carecer de sentido) cuando se emplea un ordenador, lo mismo que puede ocurrir en el sentido inverso. Veámoslo con un ejemplo muy sencillo: si queremos resolver un sistema de ecuaciones lineales a mano, primero deberíamos estudiar si el sistema es compatible (tiene solución) o incompatible (no la tiene), ya que los métodos de resolución efectiva conllevan un alto volumen de operaciones que no merece la pena de realizar manualmente si sabemos que el sistema no tiene solución. Por el contrario, si el problema lo estamos tratando con la asistencia de un ordenador, nos importa relativamente poco saber a priori si el sistema tiene solución o no, puesto que ni somos nosotros los que realizaremos los cálculos (será el ordenador) ni el testeo previo para ver si hay solución va a reducir el tiempo de cálculo del ordenador (Tenorio *et al.*, 2010).

Al usar un software de cálculo simbólico en nuestra práctica docente, podemos realizar preguntas al alumnado que de otro modo no podríamos hacerle y que no se centran en la simple realización correcta de cálculos (ya que los hace el ordenador), sino en la asimilación de conceptos y adquisición de competencias matemáticas. Podemos centrarnos en si el alumnado sabe cuándo y cómo deben aplicarse los métodos tratados y si sabe interpretar adecuadamente (y, por tanto, utilizar) las soluciones devueltas por el software al problema que se haya planteado. Las preguntas no deben limitarse a escribir simplemente la salida dada por el software.

Es más, un ordenador con el software apropiado nos permite trabajar con problemas de modelización del mundo real y, por supuesto, la reinterpretación de las soluciones matemáticas; es decir, dada la solución, ésta debe contextualizarse a la situación del mundo real que dio lugar al problema.

El uso de software matemático en la docencia permite al alumnado manipular por sí mismo los problemas, pudiendo así experimentar con diferentes ejemplos con los que testear de manera autónoma lo que acontece cuando se van modificando las condiciones iniciales de un problema, puesto que dichas modificaciones ya no supondrían un aumento significativo del trabajo a realizar por el alumnado; no tendrán que rehacer ningún cálculo sino que simplemente será el ordenador el que procederá a recalcular todos los valores a partir de los datos modificados. De hecho, para el testeo, el alumnado solo tendría que cambiar las condiciones iniciales pertinentes y ejecutar nuevamente la aplicación. De este modo, el alumnado puede trabajar en una primera fase de aprendizaje mediante una técnica de ensayo-acierto/error que le facilitará la posterior asimilación abstracta del problema en cuestión. Como ejemplos prácticos de esta metodología docente, remitimos a Martín Caraballo y Caro Chaparro (2010) o a Martín Caraballo y Tenorio Villalón (2011), en los que se expone el uso del software "GeoGebra". Para el uso de esta metodología con un paquete de cálculo simbólico, el lector puede consultar Tenorio (2010) o Tenorio *et al.* (2010).

Con un paquete de cálculo simbólico, somos capaces de trabajar con nuestro alumnado tanto la significación como las propiedades de índole geométrico o algebraico que presentan los diferentes conceptos y métodos que debe ser tratados tanto desde la perspectiva del Álgebra Lineal como del Cálculo en cualquier curso universitario de introducción a las matemáticas en un primer curso de grado. Es más, estos paquetes permiten que sea el propio alumnado quien manipule los mismos realizando diversas simulaciones de éstos y así pueda ser constructor de su propio conocimiento.

Es más, cuando incluimos el software matemático en nuestra docencia, podemos tener una mejor adaptabilidad al alumnado al que se le está impartiendo la materia en función de la propia idiosincrasia de su titulación y de las competencias profesionales con las que deben salir formados al finalizar sus estudios de grado. Obviamente, los contenidos y procedimientos no han de tratarse con el mismo nivel de profundidad para estudiantes de un grado en Ciencias Ingeniería o incluso Economía que para los de un grado en Admón. de Empresas o en Finanzas y Contabilidad. Los primeros deben no solo aplicar los procedimientos sino conocer por qué se pueden aplicar y las conexiones entre conceptos que permita combinar procedimientos y tratarlo de una manera más abstracta que les permita generalizar problemas particulares para resolver problemas más genéricos.

Pero no solo nos permite la adaptabilidad para impartir contenidos similares en distintos grados, sino que también nos facilita el adaptar nuestra docencia a la distinta casuística de estudiantes que llegan en primer curso de grado. Las distintas vías de acceso a los estudios universitarios conlleva la existencia de grupos heterogéneos de estudiantes que, pese a ser sumamente enriquecedores para la formación integral del alumnado, plantea algunas dificultades en la docencia de asignaturas de contenido matemático. Por poner un ejemplo, el acceso a los grados en Ingeniería Informática puede realizarse por la vía más natural que consiste en la realización del bachillerato científico-tecnológico, pero también es muy habitual el acceso mediante la realización de ciclos formativos de grado superior; con lo que nos encontramos con estudiantes que plantean serias carencias en las competencias matemáticas básicas que son esenciales para poder afrontar con éxito las asignaturas de Matemáticas de primer curso.

Sin embargo, el uso de un software matemático (especialmente de cálculo simbólico) nos permitirá rebajar algunas de las dificultades que pueden encontrarse parte de nuestro alumnado. Concretamente, nos permite evitar que el alumnado con problemas operativos provenientes de etapas previas del sistema educativo o aparecidos durante la propia asignatura no quede advocating al fracaso y le sea posible continuar con su aprendizaje (conceptual y procedimental), puesto que el alumnado puede estar asimilando correctamente los contenidos y procedimientos, sabiendo aplicarlos correctamente a los situaciones que se plantean (Stainback *et al.*, 1999).

### **3 LA EVALUACIÓN DE LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS BÁSICAS**

Es obligado aclarar que a la par que se avanza en los contenidos del curso, el equipo docente debe hacer uso del seguimiento continuado de cada estudiante durante el curso para detectar cualquier dificultad o incorrección que pueda estar aconteciéndole en su proceso de enseñanza/aprendizaje. Este seguimiento permite el asesoramiento del alumnado por parte del equipo docente, lo cual es esencial para solventar y corregir los problemas de manera personalizada (Tenorio y Oliver, 2012).

Para poder hacer un seguimiento continuado de la evolución de nuestro alumnado (teniendo en cuenta la heterogeneidad de este colectivo) es de gran utilidad el uso del software matemático pues nos permitirá detectar si las competencias matemáticas básicas que van fallando son de tipo puramente operativo (nuestro alumnado no sabe cómo funcionan las operaciones elementales a nivel bachillerato) o son de tipo conceptual y/o procedimental propias del contenido de la materia impartida.

Es por ello que, en nuestras asignaturas, estamos empleando software tanto de cálculo simbólico como de geometría dinámica (Mathematica y GeoGebra en nuestro caso, respectivamente). Este software nos permite complementar y reforzar el proceso de enseñanza/aprendizaje del alumnado, no solo enseñando acorde a lo que demanda una sociedad digitalizada como la nuestra; sino que también nos permite, mediante la asignación de actividades durante el semestre, el comprobar la asimilación de conceptos y procedimientos pues muchas de estas actividades pueden realizarse y/o complementarse con el uso del pertinente software para evitar las dificultades operativas antes indicadas. Pero es más, nos gustaría destacar que el uso de un software de geometría dinámica es también una herramienta eficaz para que nuestro alumnado pueda desarrollar, siempre que sea posible, una visión espacial y geométrica del problema a resolver; con lo que se favorece la comprensión de dicho problema puesto que lo puede visualizar y no se trata de una cuestión

abstracta, las cuales suelen ser de suma dificultad, pero que son esenciales en la formación matemática que deben recibir.

Debido al seguimiento que realizamos de nuestro alumnado durante todo el semestre, la evaluación en nuestras asignaturas es de tipo continuo y basada en la realización de una serie de actividades y pruebas a realizar durante el semestre y no realizando simplemente un examen final escrito (lo que no permitiría observar dicha evolución sino solo el resultado final). Cada una de las actividades y pruebas realizadas tienen un peso en la evaluación (y, por tanto, en la calificación final que tanto preocupa al alumnado). Este peso depende de la complejidad de la actividad, las competencias trabajadas y del esfuerzo y dedicación necesaria.

Debe tenerse en cuenta que todo el proceso de evaluación se basa esencialmente en un enfoque eminentemente práctico de las asignaturas (que subyacentemente conlleva un conocimiento teórico de los contenidos trabajados). En ese sentido, la mayor parte de la evaluación consiste en la realización de problemas prácticos o supuestos teórico-prácticos cuya complejidad y dificultad dependen del nivel de abstracción que deben desarrollar el alumnado según la titulación que cursan. La ventaja de usar la resolución de problemas como columna vertebral de la evaluación del alumnado reside en que el alumnado tiene que demostrar que es capaz de resolver problemas de características similares a los que ha venido trabajando durante el semestre y no requiere de la memorización de resultados teóricos o de conexiones lógicas y de razonamiento abstracto muy altas, ya que la práctica diaria de la asignatura por su parte le habrá hecho interiorizar los procedimientos al resolver los problemas que se ponen a su disposición para su trabajo autónomo durante el semestre.

A continuación, indicamos algunos ejemplos del uso hecho del software matemático en nuestras asignaturas en los diferentes que se imparten:

- En los grados en Admón. y Dirección de Empresa y en Finanzas y Contabilidad, se usó GeoGebra para generar una web dinámica empleada en la docencia de varios conceptos relativos al cálculo diferencial e integral y su aplicación a conceptos económicos, como pueden ser el cálculo de los excedentes del consumidor y del productor en una economía de mercado o el cálculo del índice de Gini para medir la distribución de riqueza en una población. Para el tratamiento de los problemas también se hizo uso de Mathematica para los cálculos.

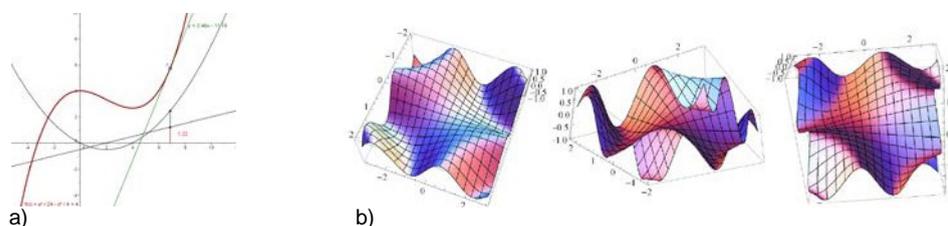


Figura 1. a) Uso de GeoGebra para estudio de la convexidad y concavidad según el signo de la derivada segunda.  
b) Uso de Mathematica para la representación de funciones reales de dos variables.

- En el grado en Ingeniería Informática en Sistemas de Información, el uso del software de cálculo simbólico Mathematica es esencial porque las asignaturas están enfocadas en la resolución de problemas tanto con el tratamiento tradicional como con el computacional. De hecho, se llega a necesitar el conocer las ventajas y desventajas de usar el software según el problema trabajado. Por ejemplo, se trabaja la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (con factorización matricial y procedimientos algorítmicos implementables en Mathematica). Pero no solo usamos este software... también empleamos GeoGebra para que el docente explique y el estudiante manipule métodos numéricos de resolución para ecuaciones lineales que tienen una fuerte componente geométrica en su formulación.



Figura 2. a) Uso de Mathematica para resolución de sistemas de ecuaciones lineales.  
b) Uso de GeoGebra para la resolución de ecuaciones no lineales.

Por último, nos gustaría también analizar las dificultades que presenta el alumnado en el manejo de los paquetes de cálculo simbólico. La principal dificultad que nos encontramos es el rechazo del alumnado a la utilización de tales programas aun cuando su uso sea bastante intuitivo (como es el caso de GeoGebra). Este rechazo es significativamente menor cuando estamos trabajando con estudiantes de los grados en Ingeniería y, en especial, en las Ingenierías Informática. Estos últimos son bastante favorables al uso del ordenador y al tratamiento computacional de los problemas.

Respecto a Mathematica, existe la dificultad añadida del idioma, puesto que la versión estudiante está en inglés y, a parte del alumnado, esto le supone una dificultad añadida. En Ingeniería Informática, esto no es una complicación, pues los lenguajes de programación usan el inglés y Mathematica está basado en el lenguaje C, que se estudia durante el primer semestre de la titulación.

En los grados en Admón. y Dirección de Empresas, en Finanzas y Contabilidad y en Análisis Económico, el alumnado proviene mayoritariamente del Bachillerato de Ciencias Sociales, por lo que presentan serias dificultades tanto en el uso del software como en la interpretación y contextualización de los resultados obtenidos con éste. Otra dificultad que presentan es la de su capacidad para interpretar enunciados de problemas, ya que este perfil de estudiante está acostumbrado a resolver ejercicios repetitivos y no a trabajar problemas con las consiguiente interpretación del enunciados, modelización del problema, resolución (mediante asociación a técnicas ya empleadas) y, por último, interpretación de la solución en el contexto del enunciado.

En el caso de la Ingeniería Informática, un 40% de estudiantes provienen de ciclos formativos, lo que conlleva, en el mejor de los casos dos años sin haber trabajado una asignatura de contenido matemático. En el peor, podemos encontrarnos con estudiantes que vieron por última vez las Matemáticas en 4º ESO. Tanto los unos como los otros presentan serias carencias operativas y procedimentales esenciales para poder afrontar el primer curso. Además, el nivel de abstracción que presenta este alumnado está muy por debajo de lo que debería ser para un grado en Ingeniería. A esto hay que sumar otro 15% proveniente del Bachillerato de Ciencias Sociales con las dificultades ya indicadas antes pero más acusadas por la mayor profundidad con la que se trata la materia.

## REFERENCIAS

- [1] Gewerc A., Montero I. & Pernas E. Competencia digital y planes de estudio universitarios. En busca del eslabón perdido. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento* 8, 14-30 (2011).
- [2] Martín Caraballo A.M. & Caro Chaparro A. Web dinámica con GeoGebra: ejemplo de aplicación de la integral en la economía. *Epsilon: Revista de la SAEM THALES* 74, 79-92 (2010).
- [3] Martín Caraballo A.M. & Tenorio Villalón A.F. GeoGebra-based activities for teaching numerical iterative methods of nonlinear equations. En *ICERI2011 Proceedings CD. IATED* (2011).
- [4] Montero L. Enseñanza de la Matemática dominada por algoritmos versus una enseñanza más conceptual. En *Actas digitales del I Encuentro de Enseñanza de la Matemática. Universidad Estatal a Distancia* (2006).
- [5] Pérez-Jiménez A.J. Algoritmos en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática* 1, 37-44 (2005).
- [6] Stainback W., Stainback S. & Moravec J. Un currículo para crear aulas inclusivas. En Stainback S. & Stainback W. (eds.). "Aulas inclusivas". Narcea, pp. 83-101 (1999).
- [7] Tenorio A.F. Propuesta de actividades con calculadora gráfica para el tratamiento de operaciones matriciales en el aula. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática* 15, 171-190 (2008).
- [8] Tenorio A.F. Resolución de problemas asistida por software matemático: evaluando conocimientos y procedimientos en el alumnado. En *Actas del VI Congreso Internacional de Docencia Universitaria e Innovación. Universitat Politècnica de Catalunya* (2010).
- [9] Tenorio A.F., Paralera C. & Martín A.M. Evaluación mediante competencias digitales: una experiencia con Mathematica. *Epsilon: Revista de Educación Matemática*, 123-136 (2010).
- [10] Tenorio A.F. & Oliver E. Matemáticas sin exámenes finales: Evaluación continua basada en la tutorización personalizada del alumnado. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática* 29, 35-57 (2012).