

AXIOMATIZACION CONJUNTISTA DE LAS TEORIAS DE LA CIENCIA EXPERIMENTAL

JUAN ANTONIO VALOR YEBENES
Universidad Europea de Madrid (CEES)
Departamento de Filosofía

RESUMEN

La pretensión que orienta el trabajo del empirismo lógico desde sus comienzos es la de una reconstrucción de las teorías de la ciencia experimental aplicando el método axiomático clásico. Pero es justamente la aplicación de este método la que genera el problema de los términos teóricos y el problema de la verificación de enunciados generales, ambos tratados recurrentemente por los autores de orientación empirista. Este trabajo muestra que una reconstrucción de la ciencia experimental aplicando el método de axiomatización mediante definición de un predicado conjuntista ofrece nuevas soluciones a aquellos viejos problemas.

ABSTRACT

Logical empiricism has always sought to reconstruct experimental scientific theories by applying the classical axiomatic method. But it is precisely the application of this method which generates the problems of theoretical terms and the verification of general propositions that have been discussed by empiricist authors. This work explains that a reconstruction of the experimental sciences by applying the method of axiomatization in terms of the definition of a set-theoretic predicate offers new solutions for these old problems.

Palabras clave: Axiomatización, Axiomatización clásica, Axiomatización conjuntista, Problema de los términos teóricos, Problema de la verificación de enunciados generales.

La concepción tradicional de la ciencia, mantenida a lo largo de la evolución del empirismo lógico, con el fin de poner al descubierto la estructura subyacente de las teorías de la ciencia experimental intentó su

reconstrucción aplicando el método axiomático clásico. La aplicación de este método supone que cada teoría empírica es un conjunto de enunciados que se puede ordenar deductivamente en axiomas y teoremas. Los axiomas son inmediatamente verdaderos y a la verdad de los teoremas se llega desde los axiomas por medio de las reglas lógicas de paso. Ahora bien: si la verdad de los axiomas es presencia inmediata de esta referencia observable —en el caso de la ciencia experimental se trata de la presencia inmediata de este hecho espacial y temporal— y algunos de los conceptos primitivos de los axiomas carecen de referencia observable, ¿cómo es posible la verdad de los axiomas? Además, es característico del conocimiento científico que sus axiomas estén formados por enunciados o leyes generales, pero si la verdad es presencia de hechos particulares, ¿cómo es posible la verdad de lo general?

Ambos problemas, conocidos como el problema de los términos teóricos y el problema de la verificación de los enunciados generales respectivamente, aunque fueron minuciosamente estudiados por la concepción tradicional no fueron resueltos del todo. Sin embargo pensamos, y así lo intentamos mostrar en el presente artículo, que aun sin entrar a discutir el sentido de toda reconstrucción de las teorías de la ciencia experimental, es posible aportar nuevas soluciones aplicando en la reconstrucción el método axiomático conjuntista en vez del método axiomático clásico.

El artículo comienza con un estudio histórico que tiene como finalidad la mejor comprensión de las novedades que aporta la axiomática conjuntista respecto de la axiomática clásica. En la segunda parte se formulan los problemas a que nos hemos referido, se exponen de forma breve algunas de las soluciones discutidas por la concepción tradicional y se explica por qué no son del todo satisfactorias. Finalmente mostramos que la negación del supuesto de que las teorías empíricas son meramente conjuntos de enunciados permite la aplicación del método conjuntista, y que éste resuelve los problemas tratados evitando las dificultades de soluciones anteriores.

1. Cinco tipos de sistemas axiomáticos

1.1. *Sistemas axiomáticos clásicos*

La polémica que a principios de siglo tuvo lugar entre Frege y Hilbert a propósito de la naturaleza del método axiomático cambió de manera esencial la comprensión que hasta el momento se tenía de las teorías axiomáticas. Según el punto de vista clásico, que en la polémica era defendido por Frege, un sistema axiomático S es una clase de enunciados tal que existe una subclase A de S finita cuyos elementos son inmediatamente verdaderos, de modo que la

verdad de cualquier enunciado de la clase complementaria $S-A$ es siempre mediata e inferida de A en virtud de las reglas de paso de la lógica ordinaria. A los elementos de A les llamamos *axiomas* de S . La verdad inmediata de los axiomas tiene su fundamento en la intuición de los nombres primitivos que aparecen en dichos axiomas, de tal manera que una vez comprendido el significado de aquéllos *salta a la vista* irremediablemente la verdad de éstos. Escribe Frege:

"Llamo axiomas a los enunciados que son verdaderos pero que no están demostrados porque nuestro conocimiento de ellos surge de una fuente muy diferente de la lógica, una fuente que puede ser llamada intuición espacial" [FREGE, 1980, p. 37].

1.2. *Sistemas axiomáticos hilbertianos informales*

El primer sistema axiomático que se conoce es la geometría de Euclides. Según el punto de vista de Frege, los axiomas de Euclides son verdades levantadas sobre la intuición de conceptos tales como *punto*, *recta*, *plano*, *incide con*, *está entre*, etc. El problema se plantea cuando en el siglo XIX los repetidos esfuerzos encaminados a demostrar que el quinto axioma —el llamado axioma de las paralelas— es una pieza superflua del sistema axiomático euclídeo llevaron a la conclusión de que la negación del axioma no originaba contradicciones. Surgen así las geometrías no euclídeas de Gauss, Bolyai y Lobatchevski. Con ellas se va abriendo paso la idea de que la no contradicción de los nuevos sistemas axiomáticos implica que el axioma de las paralelas no es verdadero —ni falso, dado que su afirmación tampoco genera contradicciones—¹. Pero la cuestión es que si tal axioma no es verdadero, entonces no hay razón alguna para que lo sean el resto de los axiomas de la geometría euclídea.

Así las cosas, poco a poco va calando entre los geómetras la idea de que en matemáticas es posible hablar de distintas geometrías, de que las geometrías no describen, desde un punto de vista matemático, nada que tenga que ver con la efectividad de la naturaleza, sino meras estructuras abstractas y que, en consecuencia, ninguna geometría es susceptible de ser calificada como verdadera o falsa. Obviamente, Frege se opuso a esta concepción: siguió afirmando la verdad de los axiomas de la geometría euclídea apelando al criterio de intuición de los nombres primitivos y rechazó por falsas las geometrías no euclídeas [FREGE, 1969].

Las nuevas geometrías contribuyeron al desarrollo del *Programa de Erlangen*², conferencia que pronunció Klein cuando en 1872 fue elegido catedrático de la Universidad de Erlangen³. En aquel momento definió la

geometría, a partir de un conjunto de cualquier dimensión y de un grupo de transformaciones entre los elementos del conjunto, como el estudio de las propiedades de dicho conjunto invariantes respecto de las transformaciones del grupo. El punto de vista de Klein fue compartido por Lie, y es a éste a quien Hilbert dirige sus críticas debido a que no discute si el supuesto de la diferenciabilidad de las funciones que intervienen en el movimiento es consecuencia del concepto de grupo, lo cual obliga a establecer explícitamente el axioma de que el grupo de movimientos se produce por transformaciones infinitesimales⁴. Con el fin de no suponer la diferenciabilidad de las funciones, Hilbert introduce en primer lugar los axiomas de continuidad, a diferencia de lo que había hecho en los *Grundlagen* —allí aparecían en último lugar—. Una vez introducido el concepto de continuidad, lo que Hilbert pretende es estructurar toda la geometría, entendida según la definición de Klein y Lie, utilizando el menor número posible de axiomas.

Como se ve, el criterio que orienta la elección de los axiomas en los nuevos sistemas axiomáticos no es ya el de la visión inmediata de la verdad de los axiomas, sino el interés por depurar lo superfluo y hacer explícitas las suposiciones implícitas. Esto se puede lograr por medio de la intuición de los conceptos utilizados, pero en todo caso la intuición es un recurso del que se puede prescindir, e incluso a veces hasta se debe prescindir, porque puede impedir la explicitación de axiomas que son lógicamente necesarios. Es lo que ocurre con el cuarto axioma de Pasch [PASCH, 1882]: por ser independiente del resto de los axiomas debe ser enunciado explícitamente, y sin embargo parece innecesario cuando se trabaja con la intuición de los nombres primitivos. Aunque Pasch aún sigue defendiendo un origen empírico de los conceptos de la geometría⁵, otros, como por ejemplo la Escuela Italiana, representada fundamentalmente por Pieri, Veronese y Peano, propugnaron una concepción más abstracta del método axiomático, libre ya de dependencias empíricas.

En 1889 publica Hilbert los *Grundlagen der Geometrie* en un volumen conjunto editado en honor de Gauss y Weber que llevaba el título de *Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmal in Göttingen*⁶. La pretensión de Hilbert era la de axiomatizar la geometría euclídea reduciendo al mínimo los elementos básicos necesarios para su construcción y demostrando la consistencia e independencia de los axiomas empleados. En el capítulo primero presenta los axiomas divididos en cinco grupos: I) de enlace, II) de ordenación, III) de congruencia, IV) de paralelas y V) de continuidad. Lo interesante del asunto es que no se pretende declarar de antemano la verdad de los axiomas, ni se pretende tampoco un apoyo en intuiciones que permita la reconstrucción de la geometría. Los axiomas son considerados como meras hipótesis, como meras menciones sobre las relaciones mutuas entre los

elementos de tres clases de cosas. Estas clases son designadas por los términos *punto*, *recta* y *plano*, y las relaciones entre los elementos de las clases son designadas por los términos *está entre*, *es congruente con* e *incide con*. Aunque los términos empleados son los términos clásicos, aquí lo que se pide es atenerse a lo que explícitamente se dice de ellos y no emplear el significado intuitivo que se les atribuye en la geometría euclídea. Por tanto, según el punto de vista de Hilbert, un sistema axiomático S es una clase de enunciados formulados en el lenguaje corriente, tal que existe una subclase A de S finita cuyos enunciados definen ciertas relaciones entre los elementos de una o más clases de objetos, y dada la clase C de todos los enunciados que son consecuencia lógica de A se cumple que $S = A \cup C$. Los elementos de A son los axiomas del sistema S .

Después de la lectura de los *Grundlagen*, Frege envió una carta a Hilbert [FREGE, 1980, pp. 34-38] el 27 de diciembre de 1899 en la que insistía en el punto de vista clásico, según el cual los axiomas son enunciados cuya verdad es dada inmediatamente [FREGE, 1980, p. 37]. Dos días más tarde respondía Hilbert [FREGE, 1980, pp. 38-43] afirmando su punto de vista:

"Usted escribe: «llamo axiomas a los enunciados [...] De la verdad de los axiomas se sigue que no se contradicen entre sí». Encuentro muy interesante leer esta frase en su carta, ya que cuando yo he pensado, escrito y expuesto sobre estas cosas he dicho exactamente lo contrario: si los axiomas dados arbitrariamente no se contradicen entre sí con todas sus consecuencias, entonces son verdaderos y las cosas definidas por los axiomas existen. Este es para mí el criterio de verdad y existencia" [FREGE, 1980, pp. 39-40].

Es importante el texto porque pone a las claras que la diferencia entre la concepción de Frege y la de Hilbert radica en último extremo en una idea distinta de la verdad. Para Frege la verdad es dada inmediatamente por intuición o mediatamente por deducción, y una vez conquistada es posible afirmar la no contradicción de lo verdadero —o dicho de otro modo: la contradicción implica lo falso—. Hilbert defiende la implicación recíproca: si no hay contradicción, entonces hay verdad. Por esta razón, al tiempo que Frege busca la contradicción del sistema axiomático resultante de negar el axioma de las paralelas, la consistencia del sistema permite a Hilbert declarar su verdad.

La reflexión en torno al problema de la intuición y la verdad viene ligada al problema de la naturaleza de los conceptos primitivos del sistema. Hilbert había librado su axiomática de cualquier forma de intuición diciendo que los conceptos primitivos —los seis mencionados— quedaban definidos por medio de los axiomas. Por esta razón puede afirmar en la carta del 29 de diciembre dirigida a Frege que:

" [...] cada teoría es sólo un andamiaje o esquema de conceptos junto con ciertas relaciones necesarias entre ellos, y los elementos básicos pueden ser pensados arbitrariamente. Si a propósito de mis puntos entiendo cualquier sistema de cosas, por ejemplo, el sistema amor, ley, deshollinador, [...] y considero todos mis axiomas como relaciones entre estas cosas, entonces mis enunciados, por ejemplo el teorema de Pitágoras, son válidos para esas cosas. En otras palabras: cada teoría puede ser aplicada a una infinidad de sistemas de elementos básicos" [FREGE, 1980, pp. 40-41].

Sin embargo, esta idea es articulada mejor por Frege que por Hilbert. En la segunda parte del artículo titulado *Über die Grundlagen der Geometrie* [FREGE, 1906] dice Frege que los conceptos primitivos —elementos básicos— del sistema axiomático de Hilbert son meros lugares vacíos que sólo sirven para expresar generalidad, al igual que las letras en la aritmética. Por ello, se consigue una comprensión más clara de la situación si en vez de *el punto A está en el plano α* decimos *A está en la relación p con α* , si en vez de *el punto A está en la recta a* decimos *A está en la relación q con a*, si en vez de *A es punto* decimos *A es un π* [FREGE, 1906, pp. 304-305]. Pero hay que resaltar que efectivamente las letras indican meros lugares vacíos, y porque se trata de lugares vacíos permanecen sin definir. Los axiomas no definen los conceptos primitivos, ni siquiera los definen implícitamente, como pensaba Schlick. Hilbert era consciente de que algo se definía mediante los axiomas, pero Frege tenía claro que lo definido no eran los conceptos de primer orden de punto, recta, plano, etc., sino el concepto de espacio euclídeo, que ya es de segundo orden. En la carta a Hilbert del 6 de enero de 1900 escribe [FREGE, 1980, pp. 43-48]:

" [...] tenemos que considerar mi distinción entre conceptos de primer y de segundo orden... Me parece que usted realmente quiere definir conceptos de segundo orden, pero no los distingue claramente de los de primer orden" [FREGE, 1980, p. 46].

Puestas así las cosas, el paso de la axiomática clásica a la axiomática de Hilbert acarrea una importante consecuencia epistemológica, y es que antes el matemático se ocupaba de demostrar enunciados categóricos, mientras que ahora demuestra enunciados condicionales generales. Dicho de otro modo: cualquier teorema de un sistema axiomático clásico puede entenderse como un enunciado aislado, con un significado anterior e independiente de los axiomas, cuya verdad se demuestra a partir de los axiomas mediante el uso de las reglas lógicas de paso; en cambio, en el caso de los sistemas axiomáticos hilbertianos los teoremas son, como los axiomas, formas proposicionales que incorporan variables libres, y tienen un significado en la medida en que son puestos en relación con los axiomas por medio de la implicación.

En el capítulo segundo de los *Grundlagen* analiza Hilbert la consistencia e independencia de sus axiomas. La consistencia es demostrada sirviéndose de números reales que satisfacen los cinco grupos de axiomas. Aquí los puntos son pares de números, las rectas son tríos de números, etc. Con esto quedaba probada la consistencia relativa a la aritmética. Por tal razón termina Hilbert afirmando que:

"Toda contradicción en las consecuencias de los axiomas I-IV necesitará verse, según esto, en la aritmética del sistema de los números reales" [HILBERT, 1899, p. 41].

Naturalmente, Frege considera del todo inútil probar la consistencia, dado que, en su opinión, la no contradicción se sigue de la verdad. Por otro lado, ya sabemos que Hilbert defiende la implicación recíproca, pero aquí se equivoca: la no contradicción no implica la verdad; sencillamente lo que ocurre es que los axiomas de su sistema axiomático no son susceptibles de ser calificados como verdaderos o falsos. En cuanto a la independencia de los axiomas, es demostrada por medio de un sistema que satisface todos los axiomas excepto aquél cuya independencia se trata de probar. Con este método, a la vez que se prueba la independencia del axioma de las paralelas se prueba la consistencia de la geometría no euclídea. Pero aquí también se encontró Hilbert con la oposición de Frege, que utiliza el argumento de que ningún axioma puede ser falso.

El sistema axiomático presentado por Hilbert en sus *Grundlagen* es un sistema axiomático *informal*. Informal porque los axiomas están formulados en el lenguaje ordinario. Ahora bien, reinterpretando los *Grundlagen* bajo conceptos lógicos posteriormente desarrollados podemos afirmar lo siguiente.

1.3. *Sistemas axiomáticos hilbertianos formales*

Si resulta que los conceptos primitivos empleados son meros lugares vacíos, esto es, si resulta que tanto los axiomas como los teoremas son enunciados condicionales generales, entonces es posible sustituir los nombres del lenguaje ordinario por signos, de la misma manera que Frege podía sustituir enunciados del tipo *el punto A está en el plano α* por *A está en la relación p con α* . Esto requiere como primer paso la explicitación de una tabla de signos o alfabeto que permita la construcción de un lenguaje formal. Pero además, se hace necesario definir un repertorio de reglas de formación de fórmulas, y de la clase S de fórmulas bien formadas se escoge una subclase A cuyos elementos son los axiomas de S . Finalmente hay que explicitar, de modo puramente sintáctico, una clase R de reglas de inferencia o tránsito de unas fórmulas a otras. Estas reglas permiten definir el concepto de

deducibilidad inmediata de una fórmula a partir de otra. El concepto de *prueba* de un teorema se define como la deducción inmediata a partir de los axiomas o de fórmulas ya deducidas inmediatamente.

Por tanto, llamamos *sistema axiomático hilbertiano formal* a una clase S de fórmulas que debe suponer:

- 1) una tabla de signos primitivos o alfabeto;
- 2) un repertorio de reglas de formación de fórmulas;
- 3) una lista A de axiomas, que son las fórmulas primitivas del sistema, y
- 4) un repertorio R de reglas de inferencia o tránsito de unas fórmulas a otras.

Dado que los conceptos primitivos del sistema axiomático informal se han transformado en meros signos, no hay ninguna duda de que las fórmulas del sistema formal carecen de referencia y, por tanto, no son ni verdaderas ni falsas. Ahora bien: si queremos dotar a este sistema de una referencia inequívoca y precisa, y con ello obtener de las fórmulas enunciados susceptibles de ser verdaderos o falsos, podemos hacer lo siguiente:

1) elegir un conjunto de objetos cualesquiera, reales o posibles, al que llamaremos *universo*, con dos condiciones: que el conjunto no sea vacío de individuos y que los individuos que lo integren sean distinguibles entre sí;

2) seleccionar dentro del conjunto determinadas propiedades y relaciones que se den entre los objetos. Si designamos por U al conjunto elegido y por R^*_1, \dots, R^*_n las propiedades y relaciones elegidas, el conjunto $E = \{U; R^*_1, \dots, R^*_n\}$ es el posible *modelo* del sistema formal;

3) poner en relación el conjunto de fórmulas con el modelo, lo cual se hace de la siguiente manera:

- a) a cada letra predicativa n -ádica se le asigna como correlato una relación n -ádica del modelo E ;
- b) a cada constante individual del conjunto de fórmulas se le asigna un individuo del universo U ;
- c) los símbolos lógicos (cuantores y jutores) ya tienen un significado y se mantiene.

Pues bien: a esta función que pone en correspondencia el conjunto de fórmulas y el modelo se le llama *interpretación* (I): $I(S) = E$. Además, si como resultado de la interpretación una fórmula del conjunto de fórmulas, un subconjunto o el conjunto entero, se convierten en enunciados verdaderos,

decimos que la interpretación *satisface* el conjunto de fórmulas, es decir, *I Sat S*. A propósito de *E* diremos que es el efectivo modelo del sistema. Queda así entendida la noción de verdad relativa a una interpretación y a un universo. También puede ocurrir que la fórmula —o bien el conjunto de fórmulas— se transforme en un enunciado verdadero bajo toda interpretación: decimos entonces que se trata de una *verdad lógica* o de una *tautología*.

1.4. *Sistemas axiomáticos conjuntistas informales y formales*

La crítica de Frege al sistema axiomático informal presentado por Hilbert en los *Grundlagen* ponía a las claras que los conceptos primitivos efectivamente no son conceptos, sino signos que permanecen sin definir, y que lo definido por los axiomas no son conceptos de primer orden, sino de segundo orden. Esto es: la conjunción de los axiomas define explícitamente un concepto de orden superior a los conceptos que aparecen en cualquier interpretación del sistema axiomático. Llamaremos a este concepto *predicado conjuntista* y al sistema axiomático cuyos axiomas son entendidos como miembros de la definición de un predicado conjuntista le llamaremos *sistema axiomático conjuntista*. Aquí radica la diferencia entre los axiomas de este cuarto tipo de axiomatización y los axiomas de los tres tipos anteriores: si en los sistemas axiomáticos clásicos los axiomas se consideran enunciados, en los sistemas hilbertianos informales se consideran formas proposicionales y en los sistemas hilbertianos formales se consideran fórmulas, ahora se consideran miembros de una definición.

A su vez, un sistema axiomático conjuntista puede ser informal o formal. Hablamos de una axiomatización informal cuando el predicado conjuntista está definido por unos axiomas expresados en el lenguaje ordinario, con lo cual no hace falta explicitar una tabla de signos primitivos ni un repertorio de reglas de formación y de inferencia: como elementos básicos se emplean los conceptos del lenguaje ordinario, como reglas de formación de formas proposicionales se usan las reglas sintácticas del lenguaje ordinario, y como reglas de tránsito de unas formas a otras se usan las reglas lógicas del lenguaje ordinario. En el caso de un sistema axiomático conjuntista formal, además de recurrir a una tabla de signos primitivos, tanto las reglas de formación como las reglas de inferencia han de ser definidas y explicitadas.

Dado un sistema axiomático conjuntista formal o informal, un modelo del sistema es toda entidad que satisface el predicado conjuntista. En el caso de que el sistema sea formal, la caracterización de los modelos se lleva a cabo por medio de un metalenguaje que permita poner en relación el conjunto de fórmulas del sistema con los objetos, propiedades y relaciones del modelo; por el contrario, los sistemas informales, al estar definidos en el lenguaje

ordinario, caracterizan directamente el modelo. Por ejemplo, el predicado conjuntista *ser un grupo* queda definido formalmente mediante los siguientes axiomas [MOSTERIN, 1984, p. 160]:

- 1) $\forall xyz (xOy)Oz = xO(yOz)$
- 2) $\forall xy \exists z, xOz = y$
- 3) $\forall xy \exists z, zOx = y$

Los signos primitivos o elementos básicos son x, y, z, O . Aunque no están explicitadas, las reglas de formación y de inferencia son las empleadas en el lenguaje ordinario de la matemática. Sólo mediante un metalenguaje es posible poner en relación el sistema con un modelo.

El mismo predicado conjuntista puede ser definido informalmente del siguiente modo [MOSTERIN, 1984, p. 160]:

X es un grupo si y sólo si existen D y O tales que:

- 1) $X = \langle D, O \rangle$
- 2) $D \neq \emptyset$
- 3) $O: D \times D \rightarrow D$
- 4) $\forall xyz \in D$ es $(xOy)Oz = xO(yOz)$
- 5) $\forall xy \in D \exists z \in D, xOz = y$
- 6) $\forall xy \in D \exists z \in D, zOx = y$

Aquí tanto los elementos básicos como las reglas de formación y de tránsito pertenecen al lenguaje ordinario de la matemática. Ahora el posible modelo del sistema viene definido por los axiomas 1) a 3). Si además cumple los axiomas 4) a 6) entonces efectivamente se trata de un modelo del sistema, esto es, de un grupo.

El conjunto R de los números reales con la operación producto es un modelo de este sistema axiomático conjuntista. Otra forma de decir lo mismo es que el conjunto R tiene *estructura* de grupo. Estructura y sistema axiomático conjuntista son lo mismo.

2. Sistemas axiomáticos y ciencia experimental. El problema de los términos teóricos y el problema de la verificación

Desde el positivismo lógico hasta nuestros días una parte de la filosofía de la ciencia ha entendido que su trabajo consistía en reconstruir las teorías de la ciencia experimental por medio de la *incrustación* en ese dominio, consciente y deliberadamente, de un aparato conceptual previamente

elaborado⁷. Lo que una reconstrucción así perseguía era poner al descubierto las estructuras subyacentes e inconscientes que hacen que un conocimiento pueda ser calificado como *científico*. La concepción tradicional, que es la concepción mantenida a lo largo de toda la evolución del empirismo lógico, intentó una reconstrucción de las teorías empíricas tomando como modelo los sistemas axiomáticos clásicos. Entendió que *científicos* eran aquellos retazos de conocimientos que podían ordenarse deductivamente a partir de axiomas verdaderos, y para concretarlo y justificarlo se empeñó en una axiomatización de teorías pertenecientes a todos los ámbitos del saber.

La concepción tradicional es simple, elegante y de fácil comprensión, pero se levanta sobre un supuesto que hasta hace poco permaneció incuestionado⁸: que las teorías de la ciencia experimental son conjuntos de enunciados. Por otro lado, a pesar de la claridad de objetivos y método del proyecto de investigación, desde el comienzo buena parte de los esfuerzos se tuvieron que dedicar no a la axiomatización de las teorías, sino a resolver los problemas que la aplicación del método estaba generando. Dos de esos problemas, el problema de los términos teóricos y el problema de la verificación de enunciados generales, se tratan a continuación. Sin embargo, como veremos más adelante, la eliminación del supuesto de que las teorías empíricas son conjuntos de enunciados permite una reconstrucción por medio de la axiomatización conjuntista que evita los problemas a que llevó el método de la axiomatización clásica.

2.1. Análisis histórico del problema de los términos teóricos

La concepción tradicional pensaba que la verdad de los axiomas de la ciencia experimental era reconocida inmediatamente cuando inmediatamente se daba la presencia —intuición empírica— de los conceptos primitivos, o dicho de otra manera, cuando se había puesto en relación los nombres primitivos con un conjunto de impresiones o datos sensoriales⁹. Sin embargo, cualquier teoría de la ciencia experimental está plagada de términos —términos teóricos— que, al menos de forma inmediata, no guardan relación con lo observable: nunca nadie ha visto un electrón, ni un gas ideas, ni un calor específico, etc. El problema entonces es el siguiente: 1) siguiendo el método de la axiomatización clásica, la reconstrucción de teorías empíricas requiere axiomas verdaderos, pero 2) ocurre que en algunos enunciados, los cuales necesariamente han de entenderse como axiomas con el fin de obtener la deducción de algún conjunto de teoremas, aparecen conceptos primitivos que no tienen una referencia observable (términos teóricos), y 3) dado que en la observación radica el criterio de verdad, resulta que 4) estos axiomas no pueden ser calificados como verdaderos.

Para dotar a los términos teóricos de una referencia observable Russell propone la construcción de una función lógica con enunciados de observación y la definición del término teórico por medio de la función [RUSSELL, 1914]. Por ejemplo: las líneas espectrales discretas son explicadas suponiendo que los átomos tienen electrones, que los electrones están situados en niveles discretos de energía y que cuando un electrón cae de un nivel de energía superior a otro inferior libera una cantidad de energía; por otro lado, situada una cámara de niebla en un campo magnético, ciertas estelas de anchura y curvatura determinadas pueden ser explicadas por la ionización de gotas de agua al pasar un electrón; y finalmente, la desviación de la aguja de un amperímetro en un circuito cerrado puede ser explicada por el paso de una corriente de electrones a través del circuito. Efectivamente, nadie ha visto un electrón de forma inmediata, porque lo que aquí podemos considerar que se ve inmediatamente son líneas espectrales, estelas y la aguja del amperímetro; sin embargo, de todo ello se infiere el paso de electrones. Pues bien, lo que Russell propone es no permitir la inferencia de ninguna entidad sino, por el contrario, definir el término teórico *electrón* por medio de una función lógica que incorpore los enunciados de observación que efectivamente se refieren de modo inmediato a los tres experimentos dados.

Ahora bien: esto supone que cada nuevo experimento que nos sirva para inferir el electrón tiene que pasar a formar parte de la definición, con lo que nos vemos envueltos en una redefinición constante de los conceptos primitivos. Pero el argumento más fuerte en contra señala que si los términos son definidos como propone Russell, entonces es ilegítima la extensión de la teoría a un campo de fenómenos que quede fuera de los utilizados en la definición, con lo que se niega a las teorías científicas una de sus principales características, a saber, la capacidad de predecir fenómenos en campos distintos¹⁰.

Una segunda salida viene del operacionalismo, y especialmente de P.W. Bridgman [BRIDGMAN, 1927]. Su propuesta se basa en un intento de definición explícita de los conceptos primitivos por medio de operaciones. Así, por ejemplo, el significado del término *longitud* es el conjunto de operaciones que realizamos cuando medimos un objeto. El hecho de que las longitudes se puedan medir mediante traslación de reglas, métodos ópticos, etc. quiere decir que existen distintos conceptos de longitud, por lo que hablando en propiedad deben ser denotados por términos diferentes. A la objeción de que no todos los términos de la ciencia experimental se refieren de alguna manera a operaciones —por ejemplo, términos tales como *fluido*, *electrón*, *gas*, *cuerpo rígido*, etc.—, ni tampoco todas las magnitudes se refieren a operaciones —por ejemplo, la carga del electrón, el hamiltoniano, el

lagrangiano, etc.— responde Bridgman que en último extremo también hay que tener en cuenta las operaciones con papel y pluma.

Encontramos aquí el mismo problema que ya señalamos a propósito de la definición explícita de Russell, y es que, por un lado, se limita drásticamente la posibilidad de extender conceptos a nuevas áreas de conocimiento —no es posible el empleo de conceptos ya en uso en aquellas áreas en las que por unas razones u otras no se pueden utilizar los métodos de medición que se han venido utilizando— y, por otro lado, como contrapartida, se ocasiona una gran proliferación del número de conceptos, mientras que si nos atenemos a la ciencia real parece que hay un interés por sistematizar el conocimiento empleando unos pocos conceptos fundamentales.

La tercera solución que comentamos es propuesta por Campbell¹¹. Como Russell, defiende la necesidad de conectar los conceptos primitivos con la experiencia por medio de lo que llama *reglas de correspondencia*, pero a diferencia de Russell, no busca una regla para cada término; basta con que algunos estén anclados en la experiencia para que el resto mantenga una referencia empírica en virtud de la ocurrencia de unos y otros en fórmulas. Por tanto, en lugar de anclar cada concepto primitivo en el suelo de observación se exige algo más débil: que sea el sistema como un todo el que esté anclado por medio de algunos de sus términos. De abajo a arriba el esquema es así: hay una experiencia desde la que se levantan inmediatamente conceptos empíricos y hay conceptos primitivos cuya referencia está fundada en la de los conceptos empíricos, bien por medio de la relación de algunos de estos conceptos, bien a través de reglas de correspondencia (leyes, fórmulas, etc.) en las cuales tiene que haber al menos un término empírico. En un sentido ascendente siempre es posible la creación de conceptos cada vez más complejos que tienen alguna relación con algún concepto empírico por medio de las reglas de correspondencia.

Puestas así las cosas, el problema es el que señala Hempel [HEMPEL, 1970]: que las reglas de correspondencia no son siempre las mismas, sino que cambian en función del desarrollo de la investigación científica, con lo cual nos vemos en la necesidad de reconocer que los conceptos primitivos cambian. Ocurre entonces que nos podemos encontrar con una misma teoría representada por sistemas axiomáticos clásicos que incorporan conceptos distintos.

2.2. Análisis histórico del problema de la verificación de enunciados generales

La explicitación de un conjunto de axiomas verdaderos que permita la axiomatización clásica de las teorías empíricas no pasa sólo por que los conceptos primitivos de los axiomas tengan una referencia observable sino,

además, por que exista algún criterio que nos permita calificar como verdaderos los enunciados generales que aparecen en los axiomas como leyes generales. ¿Existe tal criterio o sencillamente es imposible determinar si una ley general es verdadera o falsa? Este es el problema de la verificación de enunciados generales.

Según el criterio de Nicod, una ley general de la forma $(x) (Px > Qx)$ ¹² es confirmada por un enunciado observacional que tenga la forma $(Pa \cdot Qa)$ ¹³, y será desconfirmada por un enunciado observacional de la forma $(Pa \cdot \neg Qa)$ ¹⁴. El asunto está resuelto tan sólo a primera vista, porque si establecemos la equivalencia legítima entre $(x) (Px > Qx)$ y $(x) (\neg Qx > \neg Px)$, resulta que sólo $(\neg Qa \cdot \neg Pa)$ confirma el enunciado, con lo cual tenemos que enunciados que dicen lo mismo, porque son lógicamente equivalentes, se ven confirmados por un enunciado particular u otro en función de su forma lógica. Esto puede acarrear consecuencias tan absurdas como la siguiente: que $(x) (Px > Qx)$ es lógicamente equivalente a $(x) [(Px \cdot \neg Qx) > (Rx \cdot \neg Rx)]$, y sin embargo este enunciado no puede ser confirmado, ya que toda instancia confirmadora es de la forma $(Pa \cdot \neg Qa \cdot Ra \cdot \neg Ra)$, lo cual viola el principio de contradicción.

Se puede proponer cierta *condición de equivalencia* [HEMPEL, 1965, p. 22] que diga que todo enunciado particular que confirme o desconfirme un enunciado general confirma o desconfirma los enunciados generales equivalentes, pero con ello surgen las conocidas *paradojas de la confirmación* [HEMPEL, 1965, p. 23]. Sea el enunciado de la forma $(x) (Px > Qx)$, pongamos por caso *Todos los cuervos son negros*. Una instancia confirmadora es $(Pa \cdot Qa)$, es decir, un cuervo y negro. Pero si se acepta la condición de equivalencia, dado que $(x) (Px > Qx)$ es equivalente a $(x) (\neg Qx > \neg Px)$, una instancia confirmadora es el enunciado $(\neg Qa \cdot \neg Pa)$, es decir, cualquier objeto que ni sea cuervo ni sea negro, por ejemplo, este bolígrafo azul. Y así podemos llegar a absurdos mayores, porque $(x) (Px > Qx)$ también es equivalente a $(x) [(Px \vee \neg Px) > (\neg Px \vee Qx)]$ ¹⁵, lo cual puede ser verificado por cualquier cosa, dado que el antecedente se cumple siempre. Dice Goodman [GOODMAN, 1965, pp. 70-71] que todo esto abre innumerables perspectivas a la ornitología casera, ya que sin salir de casa se pueden encontrar multitud de instancias confirmadoras de cualquier enunciado general.

La salida de Hempel a las paradojas de la confirmación recurre a la *ilusión psicológica* [HEMPEL, 1965, p. 27] bajo dos argumentos:

1) Es erróneo pensar que el enunciado *Todos los cuervos son negros* se refiere tan sólo a los cuervos; se trata de algo mucho más general, de un enunciado que se refiere a la totalidad de los objetos y que dice que dado un objeto que sea cuervo es negro, o bien que dado un objeto que no sea negro no

puede ser cuervo. Así las cosas, mi bolígrafo azul confirma el enunciado porque es un objeto no negro y no cuervo.

2) La lógica de la confirmación debe adoptar una *ficción metodológica* [HEMPEL, 1965, pp. 28-29], que consiste en establecer una relación lógica entre el enunciado general y el conjunto de evidencias de que disponemos. De esta manera, si pongo un trozo de hielo en una llama y observo que no se pone amarilla, se confirma el enunciado general que dice que *Todas las sales de sodio producen al arder una llama amarilla*, y la apariencia de paradoja deriva de que no me he limitado a la evidencia que poseo, que es la de un objeto desconocido, sino que he introducido ilegítimamente en el análisis la información adicional de que se trata de un objeto de hielo. Si se toma un objeto desconocido y vemos que su llama no es amarilla, un análisis posterior hubiera revelado que no es una sal de sodio, y en este caso no hubiera habido ningún problema en tomarlo como evidencia de que *Todas las sales de sodio producen al arder una llama amarilla*.

Aceptar la ficción metodológica supone aceptar una tesis más fundamental, y es la de que el mundo se compone de hechos que son lógicamente independientes los unos de los otros. Ningún hecho puede ser deducido de otro hecho, y ningún hecho puede contradecir a otro hecho. Es lo que afirma Wittgenstein cuando, después de aclarar la relación entre proposiciones elementales y hechos atómicos [WITTGENSTEIN, 1918, proposición 4.21], escribe: *Un signo característico de una proposición elemental es que ninguna proposición elemental puede estar en contradicción con ella* [WITTGENSTEIN, 1918, proposición 4.211]. Puestas así las cosas se entiende que, para evitar las paradojas, se pida ignorar información. Nada tiene que ver el hecho de que esto sea negro con el hecho de que sea, por ejemplo, un trozo de carbón. El hecho de que sea negro confirma el enunciado general de que *Todos los objetos son negros*, y a la vez confirma la consecuencia mucho más débil de que *Todos los cuervos son negros*. Que una vez producida la confirmación luego conozca que esto es un trozo de carbón, y no un cuervo, es lógicamente irrelevante para el enunciado general, ya que se trata de un hecho lógicamente independiente. El nuevo enunciado puede aportar efectivamente cierta *confusión psicológica*, pero no afecta en lo más mínimo a la relación lógica.

Ahora bien: en la ciencia real no se acepta la ficción metodológica; el científico no juega a ignorar información en el proceso de confirmación, sino todo lo contrario: intenta reunir cuantas más evidencias mejor, y no extrae conclusiones definitivas a la luz de un hecho concreto. En la ciencia real no se establece la separación entre hechos que solicita la concepción tradicional, sino que, por el contrario, se trata de relacionar *semánticamente* unos hechos con

otros, y unos campos de investigación con otros, de tal manera que la confirmación del enunciado general se tiene cuando se dispone de un número suficiente de instancias verificadoras distintas.

Con el fin de rechazar la posibilidad de construir una definición de la confirmación en términos estrictamente lógicos, Goodman utiliza el argumento que llama *el nuevo enigma de la inducción* [GOODMAN, 1965, p. 74]. Consideremos la proposición *Todas las esmeraldas son verdes*, y supongamos que hemos visto una gran cantidad de esmeraldas verdes y ninguna esmeralda que no sea verde. El enunciado general está confirmado. Pero definamos el predicado *verdul* así: un objeto es verdul si y sólo si es verde antes de un tiempo t y es azul después. En este caso, no sabemos si lo que se ha confirmado es que *Todas las esmeraldas son verdes* o bien que *Todas las esmeraldas son verdules*. Lo que Goodman quiere decir con esto es que siempre que se confirma una proposición general se están proyectando las evidencias presentes al futuro, lo cual es legítimo en la medida en que la verificación no sólo exige un enunciado particular del tipo $(Pa \cdot Qa)$, sino también información relativa a los enunciados particulares que han servido como instancias confirmadoras a lo largo de la historia del enunciado general, esto es, información de las proyecciones pasadas y de su éxito o fracaso. De esta manera decimos que *Todas las esmeraldas son verdes* no sólo porque nos hemos encontrado con una esmeralda verde, sino porque ya hay una historia de proyecciones con éxito de este predicado, cosa que no tiene el predicado *verdul*. Decimos entonces que el predicado *verde* está mucho mejor *atrincherado* [GOODMAN, 1965, p. 94].

Efectivamente, esto supone una ruptura con la concepción tradicional, porque en el fondo lo que se está diciendo es que sólo a la luz de la historia de la ciencia puede afirmarse si una observación confirma o no un enunciado general. Lo que no se dice es cuánta historia se necesita y por qué en las revoluciones científicas se adoptan predicados que están mucho peor atrincherados —o al menos así lo parece—; tampoco se explica cómo entra la historia a formar parte del proceso de confirmación.

La salida de Popper exige reconocer la equivalencia lógica entre un enunciado general con la forma $(x) (Px \supset Qx)$ y la negación de una proposición existencial que tiene la forma $\neg \exists (x) (Px \cdot \neg Qx)$. Lo que esta proposición afirma es que no existe un objeto tal que sea a la vez P y no Q . Si se encuentra un objeto tal que $(Pa \cdot \neg Qa)$, entonces es que la proposición universal es falsa independientemente del número de instancias corroboradoras que la historia haya proporcionado. Vemos que las proposiciones generales pueden ser entendidas como *vetos* o *prohibiciones* [POPPER, 1935, pp. 66-67]. No afirman la existencia de algo determinado, sino justamente lo

contrario, lo niegan, excluyen ciertas cosas o situaciones. Y por esta razón son falsables: si vemos como verdadero un enunciado particular que infringe la prohibición del enunciado general, entonces éste queda refutado.

El descubrimiento de instancias del tipo ($Pa \cdot Qa$) no confirma el enunciado general ni le confiere un grado de probabilidad, pero eso no quiere decir que tales instancias sean irrelevantes para la evaluación y aceptación del enunciado; por el contrario, hacen posible su *corroboración*. Un enunciado general está corroborado si sale indemne tras su evaluación por medio de enunciados básicos aceptados, es decir, cuando pasa un test o una contrastación cuyo resultado hubiera podido refutarlo pero no lo refuta [POPPER, 1935, p. 82]. Unos enunciados están mejor o peor corroborados que otros y, por tanto, es posible hablar de un *grado de corroboración* [POPPER, 1935, p. 249], pero no puede hallarse contando el número de casos considerados, puesto que puede ocurrir que un enunciado esté mucho peor corroborado que otro aún cuando tengamos muchas más instancias corroboradoras para el primero que para el segundo. Por tanto, lo que determina el grado de corroboración no es el número de casos corroboradores, sino la *dureza* de las diversas contrastaciones a las que pueda someterse el enunciado general en cuestión. Dicha dureza depende a su vez del *grado de contrastabilidad* [POPPER, 1935, p. 249], es decir, de la sencillez del enunciado: el que es falsable en un grado más alto —o sea, el más sencillo— es también el corroborable en un grado más elevado. Y finalmente: puesto que no se puede definir un grado de corroboración calculable numéricamente, tan sólo es posible hablar de grados positivos o negativos de corroboración¹⁶.

Desde este punto de vista, la historia de la ciencia no consiste más que en conjeturas y refutaciones: conjeturas que el científico hace arriesgándose en una salida que no tiene fundamento lógico en absoluto y refutaciones de las conjeturas por medio de la deducción de resultados observables teniendo en cuenta las condiciones circunstanciales. Así las cosas, la historia de la ciencia muestra que la única lógica de la investigación científica es la lógica deductiva; todos los demás factores que pueden entrar en la investigación son alógicos y, por tanto, interesantes para el psicólogo o el sociólogo, pero no para el filósofo de la ciencia que pretende un análisis de la lógica del conocimiento.

Son varias las críticas que se pueden hacer a los argumentos de Popper:

1) No todos los enunciados generales de la ciencia se entienden como falsos cuando a la luz de la experiencia algunas de sus consecuencias resulta negada. La historia de la ciencia ofrece multitud de ejemplos. Aún después de que Newton publicase sus *Principia*, existieron grandes discrepancias entre la

teoría y los resultados de observación y experimentación. Newton era consciente de que el valor observado del movimiento de la órbita de la luna era el doble del valor calculado¹⁷ a través de la ley de gravitación, y no consideró esta discrepancia suficiente como para rechazarla, sino más bien como un problema que tenía que ser más detenidamente investigado. Efectivamente, el problema fue resuelto en 1750 —los *Principia* se publicaron en 1687— por Clairaut, que mostró que se trataba de un error de aplicación de la mecánica. Asimismo, el valor que daba Newton de la velocidad del sonido era diferente al valor observado en un 20%, y esta discrepancia permaneció durante más de un siglo sin que se cuestionara por ello la segunda ley de Newton.

Conforme a la concepción de Popper, tanto el movimiento del ápside de la luna como la velocidad del sonido proporcionaron claros contraejemplos, por lo que la segunda ley de Newton y la ley de gravitación debieron ser rechazadas. Pero nos encontramos con una situación inesperada: no sólo no se rechazan, sino que aquellas dificultades se convierten en problemas de investigación en lugar de contraejemplos. Esto da una imagen muy diferente de la investigación científica: en vez de partir de los datos observados y usarlos para confirmar o rechazar las leyes o las teorías, los científicos aceptan las leyes y son ellas las que guían la investigación y determinan cómo deben ser tratados los fenómenos observados¹⁸.

2) Ocurre efectivamente que los enunciados generales de la ciencia experimental se entienden, cuando la experiencia así lo determina, como falsos. Pero no es menos cierto que, de acuerdo también con la experiencia, pueden entenderse como verdaderos. Después podemos entrar en una investigación acerca de la verdad, pero incluso si una investigación así tiene sentido es porque ya de antemano sabemos que es posible la verdad de la misma manera que sabemos que es posible lo falso. Por tanto, la historia de la ciencia no puede ser una historia de conjeturas y refutaciones, sino sencillamente de aciertos y de errores. Los enunciados generales no son conjeturas con cierto grado de corroboración porque el científico no los entiende como conjeturas —a no ser que se trate de modelos, pero en este caso el científico habla precisamente de modelos, y no de teorías, lo cual demuestra que no se trata siempre y en todo caso de conjeturas— sino como efectivo conocimiento —en el caso en que resulten verificados— de la naturaleza.

Y aún podemos llevar el argumento más allá, porque recurriendo al punto de vista del científico, no está claro que los enunciados generales resulten falsos al modo como indica Popper. Efectivamente hay veces en que así ocurre, pero no precisamente en los casos que se suelen tomar como ejemplos. Considérese el clásico experimento en que se tomaron medidas de las posiciones aparentes de las estrellas que, durante un eclipse, parecían estar

próximas al disco solar. El experimento se llevó a cabo en 1919 para ver si era cierta una consecuencia de la teoría general de la relatividad de Einstein que difería de lo predicho por la ley newtoniana de la gravitación. La teoría de Einstein concluía que el campo gravitatorio del Sol curvaría los rayos de luz que pasaran cerca en una proporción mucho mayor que lo indicado por la mecánica clásica. Los resultados obtenidos estuvieron de acuerdo con la teoría de la relatividad y fueron contrarios a la predicciones de Newton. Desde el punto de vista de Popper, esto falsa la ley clásica, aunque no verifica la relatividad general ni le confiere un valor de probabilidad, sino que la corrobora. Ahora bien: no vemos en absoluto que el experimento muestre que la ley de Newton es falsa. Ante el científico, la ley no aparece ahora falsada, sino sencillamente como incapaz de resolver el problema considerado. Es el objeto el que no *cae* dentro de la ley.

3) Todo enunciado general puede ser protegido de la falsación por medio de hipótesis *ad hoc* o por medio de la reinterpretación de los resultados teóricos como definiciones. Tanto una cosa como la otra son siempre lógicamente posibles, y además se emplean en la ciencia real, puesto que lo que en una teoría ya elaborada entra como definición, hipótesis o teorema, fue una vez, en el proceso de construcción de la teoría, hipótesis *ad hoc* de la prototeoría. Por tanto, los enunciados de observación que resultan ser falsos no sólo no se utilizan —a veces— para refutar enunciados generales, sino que se emplean incluso para mejorar la teoría.

Obviamente hay casos en los que la hipótesis *ad hoc* presenta un aspecto de cosa artificial, lo cual se revela cuando se muestra incapaz de prever nuevas consecuencias. Pero en otros casos es difícil juzgar hasta qué punto la hipótesis *ad hoc* es algo ficticio o denota una toma de conciencia de aspectos que hasta el momento se habían descuidado. Hay ramas completas de la física que se han desarrollado sobre lo que al comienzo parecía ser una hipótesis *ad hoc*. Así, el primer principio de la termodinámica fue elaborado para eliminar una excepción del principio de conservación de la energía, y de la misma manera el principio de cuantificación fue avanzado por Planck como una hipótesis *ad hoc* que se suponía que más tarde sería reabsorbida por la mecánica clásica.

4) Quizá el argumento más sólido en contra del falsacionismo sea este último. Se trata de preguntarse por el papel que desempeñan los enunciados básicos en el proceso de falsación.

Los enunciados básicos los necesitamos, primero, para saber si un enunciado general puede ser falsable, y segundo, para falsarlo efectivamente. De ellos se exige que cumplan las siguientes condiciones: 1) que no se puedan

deducir de enunciado general alguno si no está acompañado de las condiciones iniciales, y 2) que puedan contradecirse con los enunciados generales. Ambas condiciones se cumplen si hacemos que los enunciados básicos tengan la forma de enunciados existenciales singulares [POPPER, 1935, parág. 28]. A estas condiciones formales hay que añadir una condición material: que sean contrastables intersubjetivamente por observación [POPPER, 1935, parág. 28].

Ahora bien: si las falsaciones son en todo caso definitivas, no se puede deber sólo al carácter definitivo de la regla lógica del *modus tollens* —la cual se puede aplicar en todo caso en que se trate de enunciados existenciales singulares— sino que se exige también el carácter definitivo de la observación. O dicho de otro modo: siempre que una teoría se someta a contraste para ser corroborada o falsada, el proceso tiene que detenerse forzosamente en algún enunciado básico que consideremos con carácter último y definitivo [POPPER, 1935, parág. 29].

Pero la propia metodología de Popper no puede admitir esto porque, dado que los enunciados básicos forman parte de argumentos científicos, ellos mismos tienen que ser argumentos científicos y, de acuerdo con el *criterio de demarcación*, sólo pueden ser calificados de científicos los enunciados que pueden ser falsables. Por tanto, también los enunciados básicos son conjeturas que, a la luz de nuevas observaciones, pueden resultar falsadas. Con lo cual no se ve la razón que hace que el científico se dedique a refutar enunciados generales desde algunos enunciados básicos en vez de dedicarse a refutar los enunciados básicos. Efectivamente, el proceso de contrastación de un enunciado general debe suspenderse hasta que los enunciados básicos implicados hayan sido contrastados y corroborados a partir de ciertas observaciones o resultados experimentales —enunciados básicos— los cuales requieren para su corroboración de ciertas observaciones o experimentos, y de esta manera nos vemos envueltos en un regreso al infinito.

3. Aplicación del método axiomático conjuntista a la ciencia experimental

3.1. Solución del problema de los términos teóricos

La axiomatización clásica requiere la verdad de los axiomas para la construcción de teorías, pero dado que en algunos enunciados que lógicamente han de ser considerados axiomas aparecen términos teóricos, resulta que no todos los axiomas pueden ser verdaderos, al menos hasta que, como hacen Russell, Bridgman o Campbell, se muestre que en último

extremo también los términos teóricos tienen una referencia observable. Sin embargo, las tres soluciones que hemos comentado conducen a los mismos problemas: por un lado, se limita la posibilidad de aplicar conceptos ya en uso a otros campos de conocimiento, y por otro lado se ocasiona una gran cantidad de conceptos; en cambio, la ciencia real pretende sistematizar el conocimiento con el menor número posible de conceptos.

Si eliminamos el supuesto de que las teorías de la ciencia experimental son meramente conjuntos de enunciados y las entendemos como conjuntos de fórmulas susceptibles de interpretación, entonces se abre un nuevo camino para la reconstrucción de teorías que evita los problemas del método axiomático clásico. Sneed pide considerar los conceptos de las teorías empíricas vigentes como meros signos vacíos de contenido, esto es, signos sin significado y sin referencia [SNEED, 1971]. Los signos constituyen fórmulas de acuerdo con las reglas sintácticas utilizadas en la teoría, fórmulas que, como los signos, carecen también de significado y de referencia. Es posible, no obstante, ordenar el conjunto de fórmulas axiomáticamente en función de las reglas de paso ya utilizadas en la teoría, y así se diferencian axiomas de teoremas. A su vez, los axiomas procuran la definición de lo que hemos llamado un concepto de segundo orden o predicado conjuntista. Al sistema axiomático resultante le llamamos sistema axiomático conjuntista informal.

Veamos un ejemplo. La mecánica newtoniana es una teoría física bien conocida. Para simplificar las cosas llamaremos *mecánica clásica de partículas* a la teoría física definida por la segunda ley de Newton, y consecuentemente también por la primera, ya que ésta se deduce de aquélla. Prescindimos ahora de la tercera ley de Newton. Una reconstrucción conjuntista informal de la mecánica clásica de partículas es la siguiente [MOSTERIN, 1984, p. 163]:

X es una mecánica clásica de partículas si y sólo si, dados E, T, s, m, f, se cumple que

- 1) $X = \langle E, T, s, m, f \rangle$,
- 2) $E \neq \emptyset$ y E es finito,
- 3) T es un intervalo de \mathbb{R} ,
- 4) $s: E \times T \rightarrow \mathbb{R}^3$, para todo $p \in E$ y para todo $t \in T$ existe $D^2 s(p,t)$.
- 5) $m: E \rightarrow \mathbb{R}^+$,
- 6) $f: E \times T \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^3$, para todo $p \in E$ y para todo $t \in T$, $\sum_{i \in \mathbb{N}} f(p,t,i)$ es absolutamente convergente,
- 7) para todo $p \in E$ y $t \in T$, $m(p).D^2 s(p,t) = \sum_{i \in \mathbb{N}} f(p,t,i)$.

Los seis primeros axiomas indican las condiciones que debe cumplir un conjunto X para que acerca de él tenga sentido preguntarse si es o no una mecánica clásica de partículas. Si además el conjunto X cumple la condición del séptimo axioma, entonces es posible decir que X es una mecánica clásica de partículas.

Como vemos aquí ya no contamos con enunciados, sino con fórmulas que definen el predicado conjuntista *mecánica clásica de partículas*. Tomemos ahora el universo U formado por los elementos *tierra* y *bala*; tomemos además las propiedades *posición de la tierra*, *posición de la bala*, *masa de la tierra*, *masa de la bala*, y la relación *fuerza ejercida por la tierra sobre la bala*. Llamamos E al conjunto formado por U y las propiedades y relaciones referidas. E es un posible modelo del sistema axiomático conjuntista porque interpreta satisfactoriamente los seis primeros axiomas. Pero dado que, además, interpreta satisfactoriamente el séptimo axioma, decimos que E es un modelo efectivo del sistema axiomático conjuntista. Otra manera de decir lo mismo es que E tiene la estructura de *mecánica clásica de partículas*.

Cuando reconstruimos mediante la axiomatización clásica esta teoría física encontramos los siguientes términos teóricos: *masa de la tierra*, *masa de la bala*, *fuerza ejercida por la tierra sobre la bala*. El método conjuntista informal no soluciona el problema de los términos teóricos, sino que lo elimina. La razón es que la axiomatización conjuntista permite distinguir los signos y las fórmulas de los elementos y las propiedades utilizados en la interpretación. Por un lado, es obvio que los signos y las fórmulas por sí mismos carecen de significado y referencia. Por otro lado, los elementos, propiedades y relaciones, tales como *tierra*, *bala*, *masa de la tierra*, *masa de la bala*, *posición de la bala*, etc., ya poseen un significado y una referencia con anterioridad a la interpretación; de otra manera no hablaríamos de interpretación, sino que, por el contrario, seguiríamos en el ámbito de las meras formulaciones.

Por tanto, la reconstrucción de teorías a través del método axiomático conjuntista permite distinguir entre la estructura de la teoría —el sistema axiomático conjuntista— y el modelo, lo cual lleva a las siguientes conclusiones: 1) los axiomas del sistema axiomático conjuntista no son verdaderos ni falsos, porque se trata de fórmulas sin referencia alguna; y 2) el modelo consta de objetos, propiedades y relaciones que ya poseen un significado y una referencia con anterioridad a la interpretación. Por consiguiente, el problema de los términos teóricos no se plantea cuando se reconstruyen las teorías utilizando el método axiomático conjuntista.

Lo esencial del asunto es que los conceptos del modelo son conceptos físicos claramente definidos o bien conceptos pertenecientes a teorías ya

vigentes, teorías que incluso pueden pertenecer a otros campos de investigación, y tanto lo uno como lo otro permite atribuir a los conceptos una referencia observable. Un breve análisis del significado y la referencia de los conceptos del modelo nos lleva a las consideraciones que a continuación esbozamos.

El significado de los conceptos del modelo ancla sus raíces en los conocimientos ya adquiridos; nos referimos principalmente a los conocimientos científicos que el investigador ya posee, a las teorías pertenecientes a su campo de investigación o a otros distintos, a las teorías de otras disciplinas, a conocimientos particulares, métodos experimentales, etc., pero de modo secundario también nos referimos al cúmulo de conocimientos que escapan de lo meramente científico y llegan hasta lo absolutamente privado. De entre todo este complejo significado, la referencia observable de los conceptos se logra por medio de los *predicados básicos* y de los *criterios de protoco­laridad*¹⁹.

Predicados básicos son aquellas determinaciones del significado definidas con arreglo a procedimientos experimentales. Predicados básicos son, por ejemplo, las posiciones y los momentos de los puntos materiales en la mecánica, o bien la presión, el volumen y la temperatura en la termodinámica. Los predicados básicos pueden cambiar al introducir ciertas matizaciones en la definición o en la medición de los ya admitidos, y por otro lado siempre es posible abandonar los ahora vigentes y tomar otras determinaciones como predicados básicos. Así, puede resultar más interesante definir el tiempo físico en relación con fenómenos atómicos, ya que éstos son más exactos que los macroscópicos. Si se hace, el predicado básico sigue siendo el tiempo, pero ahora ha cambiado de significado porque ha cambiado el procedimiento experimental que lo define. En microfísica, resulta interesante introducir como predicado básico la energía de las partículas, ya que se dispone de procedimientos experimentales para determinar su valor.

A los procedimientos experimentales que definen los predicados básicos les llamamos *criterios de protoco­laridad* y son los que proporcionan la base empírica imprescindible para la determinación intersubjetiva del concepto. Una vez formulados se dispone de reglas que permiten establecer una relación entre los conceptos empleados en el modelo y los experimentos, y consecuentemente, establecen la referencia observable y precisa del concepto.

Por tanto, de entre las múltiples determinaciones del significado de los conceptos, es el núcleo objetivo de determinaciones definidas con arreglo a los criterios de protoco­laridad el que proporciona la referencia observable al concepto.

Se reconocerá que de alguna manera esto tiene que ver con el operacionalismo de Bridgman. Efectivamente, el núcleo objetivo de predicados básicos queda determinado con arreglo a los procedimientos experimentales o de medida; pero es importante reconocer que el significado se expande más allá, tiene más ingredientes, está aún más determinado, e incluso vagamente determinado en la medida en que el campo de determinaciones tiene cierta lejanía que acaba por insertarse en el mundo de cada cual. Por esta razón podemos decir nosotros, en contra de Bridgman, que la longitud que medimos por procedimientos mecánicos es la misma que medimos por procedimientos ópticos, etc.; aunque unos procedimientos y otros supongan determinaciones distintas, más allá hay determinaciones comunes que hacen que se manifieste lo mismo, en este caso la longitud.

Por otro lado, desde este punto de vista aparece innecesario el proyecto de Russell de eliminar las entidades inferidas en favor de enunciados de observación. Es posible reducir los términos a sus predicados básicos y así ponerlos en relación con los procedimientos experimentales, pero con ello desaparece gran parte del significado del término. Por eso la propuesta de Russell ahogaba la posibilidad de aplicar los términos a otros campos: porque precisamente esta extensión de los términos es posible no desde el núcleo objetivo del significado, sino desde el conjunto restante de determinaciones. E incluso desde determinaciones privadas (y aquí es donde encuentra su razón de ser la *genialidad* que se reconoce a los que por primera vez aplican los conceptos más allá del campo asignado desde las determinaciones objetivas).

En resumen podemos decir que la aplicación del método conjuntista a las teorías de la ciencia experimental permite distinguir entre modelo y estructura matemática —sistema axiomático conjuntista—. Se ve entonces que los conceptos del modelo son independientes del sistema axiomático, esto es, que recogen su significado de conocimientos científicos y no científicos previamente adquiridos, y que son aquellas determinaciones definidas con arreglo a procedimientos experimentales las que proporcionan en todo caso la referencia observable al concepto.

3.2. Solución del problema de la verificación de los enunciados generales

El problema de la verificación de enunciados generales surge por el hecho de que la referencia objetiva de los conceptos no basta para asignar a los enunciados generales un valor de verdad; o dicho de otro modo, la unión de los conceptos en el juicio amplía la referencia objetiva. La concepción tradicional admite que la verificación de un enunciado general requiere la previa verificación de un enunciado particular y la mediación de ciertas reglas de

carácter lógico, psicológico —en el caso de Hempel— e incluso sociológico —en el caso de Goodman—. En contra, Popper rechaza la presencia de factores extralógicos en todo análisis pretendidamente lógico de la ciencia, y dado que la única lógica en la que cree es la lógica deductiva, finalmente rechaza la verificación de enunciados generales a través de particulares, aunque afirma reiteradamente la capacidad de éstos para falsar aquéllos. Sin embargo, ya vimos que el análisis de Popper acarrea al menos dos problemas importantes: en primer lugar, multitud de ejemplos señalados por Kuhn y otros historiadores de la ciencia muestran que enunciados y leyes generales no son falsados por medio de enunciados particulares; en segundo lugar, aunque la metodología de Popper lleva a entender los enunciados generales como conjeturas y a propósito de toda conjetura aparece suspendido el juicio acerca de su verdad o falsedad, es un hecho que la ciencia real no suspende el juicio verificativo de los enunciados generales.

El método conjuntista informal junto a la distinción entre sistema conjuntista y modelo permite, sin recurrir a artificios lógicos o psicológicos, recuperar convenientemente corregida la parte del criterio de Nicod que dice que un enunciado general de la forma $(x), (Px > Qx)$ es confirmado por un enunciado particular de la forma $(Pa . Qa)$. Para ello tenemos que considerar el enunciado general como una fórmula miembro de la definición del predicado conjuntista. La interpretación satisfactoria de la fórmula por medio de los objetos, propiedades y relaciones correspondientes del modelo origina un enunciado particular susceptible de ser verificado. La verificación se lleva a cabo atendiendo a la presencia de lo referido: si efectivamente ocurre que el objeto se manifiesta tal como dice el enunciado, entonces el enunciado es verdadero. Pero lo esencial del asunto es que la verificación del enunciado particular supone también la verificación de la estructura —esto es, la verificación del concepto de segundo orden que representa el predicado conjuntista— explícita en la fórmula. La presencia del objeto referido por el enunciado particular que se obtiene de la interpretación satisfactoria de una fórmula no es sólo presencia de las propiedades y relaciones del modelo sino, al mismo tiempo, presencia de la estructura definida por la fórmula, puesto que lo dado ahora son aquellas propiedades y relaciones *en* dicha estructura. Todo lo cual nos permite concluir que la verificación del enunciado particular acarrea la verificación de la estructura mencionada por la fórmula cuando aquél resulta de la interpretación satisfactoria de ésta. Por tanto, el criterio de Nicod puede ser reinterpretado diciendo que la estructura implícita en los enunciados generales de las teorías puede ser confirmada por un enunciado particular.

En cambio, la estructura no puede ser desconfirmada o falsada por un enunciado particular. En el caso en que las propiedades y relaciones referidas por el enunciado particular no muestren la estructura definida por la fórmula,

ésta no resulta falsada; sencillamente lo que ocurre es que el modelo no la interpreta satisfactoriamente. No obstante, un nuevo modelo puede proporcionar una nueva interpretación, ahora satisfactoria, de tal manera que la verificación del enunciado particular resultante sea al mismo tiempo verificación de la estructura mencionada por la fórmula.

El nuevo punto de vista que hemos alcanzado justifica los argumentos empleados en contra de la metodología de Popper, según vemos a continuación:

1) En el caso en que el sistema axiomático resulte satisfactoriamente interpretado por un modelo, el sistema axiomático se muestra como siendo verdadero, esto es, como siendo de hecho así en el conjunto de elementos que se toma como modelo. Más concretamente: dado que el predicado conjuntista es un concepto de segundo orden, la verdad del concepto, la efectiva presencia de lo referido por él, tiene lugar cuando se logra una interpretación satisfactoria. En tal caso, el predicado conjuntista aparece como predicado del modelo, como una nueva determinación de los elementos del modelo.

De todo esto se concluye que los sistemas axiomáticos ya interpretados no son conjeturas, y tampoco se puede hablar de cierto grado de corroboración; sencillamente nos encontramos con sistemas verdaderos. Se trata de conjeturas cuando el sistema es meramente propuesto y no se ofrece ningún modelo efectivo; pero cualquier interpretación satisfactoria da lugar a un sistema axiomático verdadero.

2) Decíamos que no todos los enunciados generales de la ciencia experimental se entienden como falsos cuando a la luz de la experiencia alguna de sus consecuencias resulta negada. Lo que se produce no es la negación de la estructura que define el enunciado general, sino la negación del modelo, que se revela incapaz de interpretarla satisfactoriamente. A modo de ejemplo vimos que Newton era consciente de la diferencia entre el valor observado y el valor calculado del movimiento de la órbita de la luna. Ante tal resultado defendió dos opciones: o suponer que se trataba de un error de cálculo, o suponer que el sistema formado por la tierra y la luna no era un modelo que satisficiera el predicado conjuntista definido en su teoría. Pero ninguno de los dos casos ponía en cuestión el sistema axiomático conjuntista.

Si tomamos el caso de la mecánica clásica de partículas explicitado más arriba, vemos que cuando un determinado conjunto de objetos, propiedades y relaciones no cumple el séptimo axioma decimos que el conjunto no interpreta satisfactoriamente la estructura, o bien que no interpreta satisfactoriamente el predicado conjuntista *ser una mecánica clásica de partículas*; pero ello no refuta

la estructura misma. Por tanto, a modo de conclusión diremos que el predicado conjuntista definido por una teoría empírica no puede ser refutado mediante resultados negativos de observaciones o experimentos.

4. Conclusión

La reconstrucción de las teorías de la ciencia experimental por medio de sistemas axiomáticos conjuntistas permite diferenciar, en cada teoría, el predicado conjuntista que define la estructura del conjunto de objetos, propiedades y relaciones que la interpretan satisfactoriamente. Además de ordenar las teorías, lo que se logra con ello es resolver algunos de los problemas a los que había conducido la concepción tradicional de la ciencia. La distancia entre estructura y modelo revela que el significado de los conceptos del modelo es independiente de la estructura, y que es una parte del contenido significativo la que proporciona la referencia objetiva al concepto con anterioridad a la interpretación; así queda solucionado el problema de los términos teóricos. En cuanto al problema de la verificación de los enunciados generales, si entendemos que éstos definen implícitamente la estructura de la teoría y que dicha estructura puede ser explicitada en fórmulas, entonces podemos decir que la verificación de los enunciados particulares que resultan de la interpretación satisfactoria de las fórmulas implica también la verificación de la estructura.

NOTAS

1 Lo que debajo de este razonamiento se mantiene es que la verdad implica la no contradicción, con lo cual, si hay contradicción, entonces algún axioma del sistema es falso. Al negar el quinto axioma se buscaba la contradicción para concluir la falsedad de lo negado, es decir, la verdad del axioma. El problema surge cuando la negación no origina contradicción alguna; resulta entonces que el axioma de las paralelas no es ni verdadero ni falso.

2 Sobre el *Programa de Erlangen* puede verse: RUSSO [1968], ROWE [1983], HAWKINS [1984].

3 El título de la conferencia es: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen Programm zum Eintritt in die philosophische Facultät und den Senat der K. Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen*. Una traducción al inglés comentada se encuentra en ROWE [1985].

4 Véase HILBERT [1899, apéndice IV, p. 186].

5 Véase PASCH [1882, *Prólogo a la edición española*].

6 *Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmal in Göttingen*, Verlag von B.G. Teubner, Leipzig, 1899.

7 Es lo que U. Moulines entiende por interpretación. Desde su punto de vista, la filosofía de la ciencia es una interpretación de interpretaciones de la realidad. Véase MOULINES [1982, cap. 1.2, pp. 42-45].

8 Hasta la publicación de SNEED [1971]. Parecidas tesis son defendidas en STEGMÜLLER [1973].

9 Esta es la idea presente en RUSSELL [1914].

10 Este es el argumento desarrollado por BRAITHWAITE [1959].

11 CAMPBELL [1957]. Más recientemente este enfoque ha sido defendido por FEIGL [1970].

12 El signo ">" se lee "implica". Las comillas significan que tomamos como referentes los enunciados –aquí los enunciados en su forma lógica– y no eso a lo que los enunciados se refieren.

13 El signo "." se lee "y".

14 El signo "-" se lee "no".

15 El signo "v" se lee "o".

16 A pie de página afirma POPPER [1935, p. 249] que ahora sí cabe definir un *grado de corroboración* que permita comparar varios entre sí, y que esta definición permite atribuir grados numéricos de corroboración a hipótesis estadísticas y a otros enunciados si se les puede atribuir a ellos y a los enunciados corroboradores un grado de probabilidad lógica absoluta y relativa.

17 Lo cual sirve, de paso, como un argumento en contra de la concepción de Margenau acerca de los errores aceptados para la verificación. Según este punto de vista, la verificación debe obviar los posibles errores de observación mientras estos se sitúen en el margen de error predicho por la teoría de errores. Véase MARGENAU [1950, cap. VI].

18 Este tipo de investigación ha sido denominada por Kuhn *ciencia normal*, en contraposición a la *ciencia revolucionaria* de Popper. Véase KUHN [1962, cap. II-IV].

19 Recojo los términos de ARTIGAS [1989, pp. 116-120].

BIBLIOGRAFIA

(Cuando hay traducción castellana, las notas y las citas se refieren a la traducción)

AGAZZI, E. (1974) *Tem e problemi di filosofia della fisica*. Roma, Abete [Trad. castellana: *Temas y problemas de filosofía de la física*. Herder, Barcelona, 1978].

ARTIGAS, M. (1989) *Filosofía de la ciencia experimental*. Pamplona, EUNSA.

BRAITHWAITE, R.B. (1959) *Scientific Explanation*. Cambridge University Press [Trad. castellana: *La explicación científica*. Tecnos, Madrid, 1964].

BRIDGMAN, P.W. (1927) *The Logic of Modern Physics*. New York, Macmillan.

CAMPBELL, N.R. (1957) *Foundations of Physics*. New York, Dover.

FEIGL, H. (1970) "The *Ortodox* View of Theories". En: *Minnesota Studies in the Philosophy of Science*, IV, 3-37.

FREGE, G. (1906) "Über die Grundlagen der Geometrie, II". En: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 15, 377-403. Recogido en FREGE [1990, pp. 295-317].

----- (1969) "Über Euklidische Geometrie". En: *Nachgelassene Schriften*. H. Hermes, F. Kambartel y F. Kaulbach (eds.), Hamburg, Felix Meiner Verlag, 182-184.

----- (1980) *Philosophical and Mathematical Correspondence*. G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, C. Thiel y A. Veraart (eds.), Chicago, University of Chicago Press.

----- (1990) *Kleine Schriften*. 2ª ed., Hildesheim, Georg Olms Verlag.

GOODMAN, N. (1965) *Fact, Fiction and Forescast*. New York, Bobbs-Merril.

HAWKINS, T. (1984) "The Erlanger Programm of Felix Klein: Reflexions on its place in the History of Mathematics". En: *Historia Mathematica*, 11, 442-470.

HEMPEL, C.G. (1965) *Aspects of scientific explanation and other essays in the philosophy of science*. New York, The Free Press [Trad. castellana: *La explicación científica*. Paidós, Barcelona, 1988].

----- (1970) "On the *Standar* Conception of Scientific Theories". En: *Minnesota Studies in the Philosophy of Science*, IV.

HILBERT, D. (1899) *Grundlagen der Geometrie*. Lipsia [Trad. castellana de la séptima edición alemana (1930): *Fundamentos de la Geometría*. Madrid, 1991].

KUHN, T.S. (1962) *The Structure of Scientific Revolution*. Chicago, University of Chicago Press [Trad. castellana: *La estructura de las revoluciones científicas*. Fondo de Cultura Económica, Madrid, 1987].

MARGENAU, H. (1950) *The Nature of Physical Reality: a philosophy of modern physics*. New York, Mac Graw-Hill Book Company [Trad. castellana: *La naturaleza de la realidad física*. Tecnos, Madrid, 1970].

MOSTERIN, J. (1984) *Conceptos y teorías en la ciencia*. Madrid, Alianza Editorial.

MOULINES, C.U. (1982) *Exploraciones metacientíficas*. Madrid, Alianza Editorial.

PASCH, M. (1882) *Vorlesungen über neuere Geometrie*. Berlín, Springer. Hay traducción de la obra al castellano con un "Prólogo a la edición española", apéndices y notas introductorias: *Lecciones de Geometría moderna*. Junta para la Ampliación de Estudios, Madrid, 1912. Las notas se refieren a la traducción.

POPPER, K.R. (1935) *Logik der Forschung*. Viena, Springer Verlag [Trad. castellana: *La lógica de la investigación científica*. Tecnos, Madrid, 1985].

ROWE, D.E. (1983) "A forgotten chapter in the history of Felix Klein's Erlanger Programm". En: *Historia Mathematica*, 10, 448-457.

----- (1985) "Felix Klein's, *Erlanger Antrittsrede*. A transcription with translation and commentary". En: *Historia Mathematica*, 12, 123-141.

RUSSELL, B. (1914) "The Relation of Sense-Data to Physics". En: *Scientia*, 4. Recogido en RUSSELL [1957].

----- (1957) *Mysticism and Logic*. Doubleday Anchor Books [Trad. castellana: *Misticismo y lógica*. Edhasa, Barcelona, 1987].

RUSSO, F. (1968) *Groupes et géométrie. La genèse du programme d'Erlangen de Félix Klein*. París.

SNEED, J.D. (1971) *The Logical Structure of Mathematical Physics*. Dordrecht.

STEGMÜLLER, W. (1973) *Theorienstrukturen und Theoriendynamik*, Heidelberg, Springer-Verlag [Trad. castellana: *Estructura y dinámica de teorías*, Ariel, Barcelona, 1983].

WITTGENSTEIN, L. (1918) *Tractatus Logico-Philosophicus*. Londres, Routledge and Kegan Paul [Trad. castellana: *Tractatus Logico-Philosophicus*. Tecnos, Madrid, 1985].