FENÓMENOS QUE ORGANIZAN EL LÍMITE

Francisco Javier Claros Mellado, María Teresa Sánchez Compaña, Moisés Coriat Benarroch

Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo se pone de manifiesto la presencia de los fenómenos de aproximación organizados por una definición de límite en el caso de las sucesiones de números reales y de las funciones reales de una variable real. La exposición incluye la caracterización de tales fenómenos, una descripción del análisis comparativo desarrollado en base a ellos entre dos definiciones formales de límite de sucesión y función y una síntesis del estudio llevado a cabo sobre una muestra intencional de libros de texto de matemáticas.

Abstract

In this work the presence of the phenomena of approximation organized by the limit is shown in the successions of real numbers and the real functions of an only real variable. The exposition includes the characterization of such phenomena, a description of the comparative analysis developed in base to them between two formal definitions of limit of succession and function and a synthesis of the study carried out on an intentional sample of textbooks of math.

1. INTRODUCCIÓN

El concepto de límite es reconocido en Educación Matemática como una de las nociones clave en el desarrollo del pensamiento matemático avanzado de los alumnos. Tal como se ha venido subrayando recientemente (Azcárate y Camacho, 2003), las investigaciones desarrolladas en este ámbito han experimentado en los últimos años una evolución significativa en sus enfoques y propósitos, transitando de los estudios centrados en caracterizar las dificultades y obstáculos existentes en la comprensión del límite (Cornu, 1991; Tall, 1992) a las investigaciones preocupadas por analizar las razones que subyacen a tales dificultades y por proporcionar, en base al nuevo conocimiento generado, soluciones efectivas en forma de propuestas didácticas sustentadas en marcos teóricos operativos (Espinoza y Azcárate, 2000; Mamona-Downs, 2001). Otros autores, teniendo en cuenta las dificultades que plantea la definición formal de limite de una función en secundaria, han optado por dar una nueva definición de límite como "aproximación optima" (Blázquez y Ortega, 2002). En general, desde la perspectiva de estos nuevos planteamientos suele admitirse la relevancia que posee el análisis de los fenómenos que organiza o dan sentido al límite para el estudio de su comprensión. De hecho, la preocupación por esta cuestión llega a reflejarse en procedimientos específicos, como la descomposición genética planteada por Dubinsky (1991), empleada en la actualidad con éxito en modelos tan influyentes como la teoría APOS (Moreno, 2005).

Por nuestra parte, venimos realizando esfuerzos con el propósito general de profundizar en la naturaleza de los distintos fenómenos organizados por el límite, estudiar su presencia en la enseñanza y el currículo y analizar su influencia en la comprensión de los sujetos. En términos más precisos, nuestra investigación transcurre en torno a los problemas didácticos generados por el uso de las distintas nociones, ideas y definiciones que configuran el campo semántico vinculado al concepto de límite.

Como contribución específica, en el presente trabajo caracterizamos algunos de estos fenómenos concretos y establecemos las diferencias estructurales existentes entre dos definiciones formales de límite enunciadas en términos equivalentes: una, en el caso del límite finito de una sucesión de números reales, y la otra, en el límite finito de una función real de variable real en un punto. Con objeto de delimitar y especificar, en los currículos, la presencia de tales fenómenos, describimos algunos resultados obtenidos al estudiar una muestra de libros de texto de matemáticas. Tales resultados permiten centrar la atención, en la parte final del trabajo, sobre algunas cuestiones de interés, de las que se derivan consecuencias relevantes para la construcción y la organización didáctica del concepto de límite en la sucesión y la función.

2. FENÓMENOS DE APROXIMACIÓN INTUITIVA Y DE RETROALIMENTACIÓN

Nuestro análisis fenomenológico (en el sentido de Freudenthal (1983); véase también Puig (1997)) del concepto de límite pone al descubierto la presencia de dos fenómenos específicos de diferente naturaleza, a los que hemos denominado genéricamente *aproximación intuitiva* y *retroalimentación, y* cuyas características pasamos a describir a continuación.

Fenómenos de Aproximación Intuitiva

Los fenómenos de aproximación que se manifiestan al contemplar, de forma no rigurosa, el límite en su faceta dinámica admiten una clasificación básica con dos tipos diferenciados, presentes en el caso de las sucesiones de números reales y de las funciones reales de variable real.

Con objeto de reducir en lo posible la complejidad de la exposición y lograr un mayor grado de precisión en el análisis, en el estudio que se presenta tan sólo se considerarán sucesiones simples monótonas y funciones continuas.

La aproximación intuitiva remite bien al progreso experimentado por los términos de una sucesión de números reales con límite real o bien, en funciones reales de variable real con límite finito en un punto, a la evolución de las variables dependiente e independiente.

Empleamos la expresión *parecen acercarse* para capturar, al usarla, cualquier intuición para el limite finito (de la sucesión o de la función en un punto); por ejemplo, como conjetura o como resultado del reconocimiento de una pauta (explicita o no) en los valores inspeccionados.

Aproximación simple intuitiva (ASI)

Dados k términos ordenados de una sucesión, generalmente consecutivos, $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, …, (k,a_k), caracterizamos la aproximación simple intuitiva como el fenómeno observado al inspeccionar la secuencia de valores a_1, a_2, ..., a_k cuando “parecen acercarse” a otro valor fijo.

Modelo: En la sucesión $(1,1)$, $(1,1/2)$, $(1,1/3)$,…, los términos $1/n$, parecen acercarse a 0 a medida que n crece.

Aproximación doble intuitiva (ADI)

Dados k pares de valores de una función real f de variable real $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)),\ldots, (x_k, f(x_k))$, identificamos la aproximación doble intuitiva como el fenómeno que acontece cuando, de forma relacionada, los valores $x_1, x_2,\ldots, x_k$ y sus respectivas imágenes $f(x_1), f(x_2),\ldots, f(x_k)$ parecen acercarse a sendos valores fijos distintos. El que está aprendiendo cree que hay dos aproximaciones, la de la sucesión de valores de la variable independiente hacia un valor y la de la sucesión de valores de la variable dependiente hacia el límite; es consciente, o no, de la conexión que la función f establece entre ambas sucesiones. Esta observación nos conduce a designar el fenómeno con la expresión *aproximación doble intuitiva*, o ADI.

Modelo: Dada la función $f(x) = 2x$, en los pares de valores *(0.9 ,1.8), (0.99, 1.98), (0.999, 1.998), …,* se observa que cuando la variable independiente parece acercarse a 1 la dependiente parece acercarse a 2.

Fenómenos de Retroalimentación

La retroalimentación se manifiesta al interpretar y aplicar las acciones incluidas en la definición formal de límite desde una perspectiva métrica, la cual exige construir una función (ε-n para sucesiones; ε-δ para funciones). Dicho en términos coloquiales y gráficos, cada retroalimentación corresponde a un proceso de ida-vuelta: una vez establecido el entorno en el límite con el ε dado "vamos" desde el eje de ordenadas al de abscisas para determinar el correspondiente **n** o δ asociado, según sea el caso, y "volvemos" al entorno del límite en el eje de ordenadas para comprobar que las imágenes de valores correspondientes al eje de abscisas, pertenecen al entorno considerado.

Estos dos fenómenos de retroalimentación, describen procesos matemáticos presentes en determinadas definiciones formales de límite (tanto en el caso de las sucesiones como en el de las funciones), y organizan, a su vez, los fenómenos de aproximación simple y doble intuitiva. En este sentido, afirmamos que:

> *La definición de límite enunciada en términos formales organiza los fenómenos ASI y ADI mediante un fenómeno de retroalimentación en sucesiones y funciones.*

En la retroalimentación se lleva a cabo la construcción efectiva de una nueva función que queda vinculada unívocamente a la sucesión o a la función. De hecho, con el apoyo de la propia sucesión o función de referencia, la definición formal de límite induce, en ambos casos, la construcción simbólica de tal función, o en su defecto la demostración de su existencia, la cual sirve a su vez para establecer una propiedad de la sucesión o función dada.

Esta nueva función emergente adopta un aspecto básicamente diferente en ambos casos (el de la sucesión y el de la función), llegándose a manifestar dos fenómenos de "ida y vuelta" no equivalentes desde un punto de vista práctico. En el caso de las sucesiones, al resultar una función natural de variable real $(\varepsilon, n(\varepsilon))$, hablamos del fenómeno de *ida y vuelta en sucesiones (IVS).* En el caso de las funciones, resulta una función real de variable real, $(\varepsilon, \delta(\varepsilon))$; por ello, hablamos del fenómeno de *ida y vuelta en funciones (IVF).*

Modelo ivs: Partiendo de la sucesión (n, 1/n) se construye la función (ε, E(1/ε) + 1) donde E designa la función parte entera.

Modelo ivf: Partiendo la función f(x)=2x, se construye la función (ε, δ) , donde $\delta< \varepsilon/2$.

La figura 1 resume la relación que establecemos entre los distintos fenómenos presentados en torno al límite.

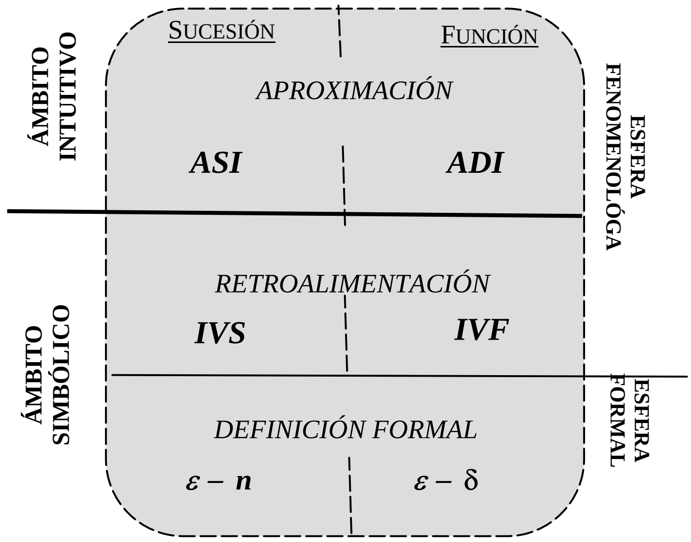

Figura 1. Fenómenos de aproximación y retroalimentación en el límite finito

3. DIFERENCIAS ESTRUCTURALES EN LA DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA SUCESIÓN Y UNA FUNCIÓN

Las definiciones formales de límite admiten análisis desde un punto de vista simbólico y fenomenológico. En el presente apartado, exponemos desde ambas perspectivas las principales diferencias identificadas en dos definiciones formales específicas para el límite de una sucesión y una función en un punto.

Las definiciones formales

Con el propósito de garantizar la representatividad de las definiciones objeto de estudio, inicialmente llevamos a cabo una consulta a expertos[1] en la que se concluyó la elección de la siguiente definición de límite finito para una sucesión de números reales:

Sea x_n una sucesión en $\Re$, decimos que x_n converge a un número real x (o tiene como límite el real x y escribimos lim x_n= x) si para cada $\varepsilon>0$, existe un número natural N tal que si $n \geq N$ se cumple que $|x_n - x| < \varepsilon$

Por su paralelismo formal con la anterior, consideramos también la correspondiente definición de límite finito de una función real de variable real en un punto:

Una función f(x) tiene límite L en el punto $x = x_0$, en el que la función puede tomar un valor cualquiera o incluso no estar definida, si para todo número real $\varepsilon > 0$ existe otro número real $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ se cumple que $|f(x) - L| < \varepsilon$

---

[1] Se trata de una consulta a expertos realizada en el curso 2001-2002 a profesores de la facultad de Ciencias Matemáticas y del departamento de Matemática Aplicada de la E.T.S.I de Informática de la Universidad de Málaga, en la que se solicitó que valoraran la pertinencia y la preferencia en el empleo de siete definiciones para el límite de una sucesión extraídas de manuales de Cálculo de uso frecuente en los primeros cursos de universidad.

Diferencias simbólicas

El estudio comparativo realizado desde el enfoque simbólico centra su atención en los aspectos de orden, acotación, procesos infinitos y tipos de infinito. Entendemos por *proceso infinito* cada una de las formas posibles de aproximación experimentadas por las variables, independiente y dependiente, presentes en las definiciones formales consideradas y, para el análisis de los tipos de infinitos, se tomará como referencia a Tall (1991). La figura 2 muestra las diferencias más significativas que hemos apreciado entre ambas definiciones.[2]

		LÍMITE DE UNA SUCESIÓN	***LIMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO***
DIFERENCIAS SIMBÓLICAS	***Acotación***	variable independiente **no acotada**	variable independiente **acotada**
	Procesos Infinitos	- aproximación **unilateral** (izqda.) en variable independiente - aproximación al límite mediante **valores superiores o inferiores** - procesos infinitos **discretos**	- aproximación **bilateral** en variable independiente - aproximación al límite mediante **valores superiores e inferiores** - procesos infinitos **continuos**
	Tipos de Infinito	- infinito potencial **presente** - infinito actual (cardinal) **numerable**	- infinito potencial **ausente** - infinito actual (cardinal) **no numerable**

Figura 2. Comparación entre límite de una sucesión y límite de una función en un punto: punto de vista simbólico

Diferencias fenomenológicas

2 Esta figura constituye una síntesis de un estudio pormenorizado que incluimos en nuestro trabajo de investigación doctoral.

El enfoque fenomenológico pone de manifiesto nuevas diferencias entre ambas definiciones, atendiendo a los fenómenos de aproximación y de retroalimentación que hemos caracterizado (ver Figura 3.)

		LÍMITE	
		Sucesión	***Función***
FENÓMENOS	***Aproximación***	ASI	ADI
	Retroalimentación	IVS	IVF

Figura 3. Fenómenos que organizan el concepto de límite.

4. PRESENCIA EN LOS LIBROS DE TEXTO

El siguiente paso del estudio fue la observación en los libros de texto de los fenómenos descritos en el apartado 2. El análisis global se dividió en dos partes:

1) Estudio dedicado a la observación de los fenómenos presentes en el concepto de límite de sucesiones, para el que se contempló 24 libros.

2) Estudio dedicado a la observación de los fenómenos presentes en el concepto de límite de funciones, en el que se consideró una muestra de 26 libros.

Ambas muestras han de considerarse intencionales y no representativas dado que solamente contemplamos aquellos libros a los que tuvimos acceso en los diferentes institutos en los que trabajamos como docentes. El periodo de estudio abarcado para cada una de las partes descritas fue: 1933-2005[3].

4.1 Ejemplos paradigmáticos de los fenómenos en los libros de texto

A continuación presentamos cuatro ejemplos de los fenómenos que hemos definido anteriormente: los fenómenos de aproximación intuitiva (simple o doble), y los fenómenos de retroalimentación, en sucesiones y en funciones.

Al estudiar la presencia de estos fenómenos en los libros de texto, hay que considerar los sistemas de representación que, en opinión de sus autores, mejor se adaptan a las ideas que quieren transmitir; también eligen la presentación de ideas usando ejemplos o definiciones. Sin profundizar aquí en esta cuestión, anotamos que hemos considerado cuatro sistemas de representación: verbal, tabular, gráfico y simbólico.

Análogamente, cada autor decide presentar sus ideas a través de definiciones o ejemplos.

[3] Este estudio no está publicado, forma parte de nuestro trabajo de tesis.

En la figura 4 se presentan ejemplos paradigmáticos o "modelos" extraídos de libros de texto. Esta figura no pretende abarcar todas las situaciones propuestas por los autores consultados, sino ofrecer textos ajenos que sustituyen sin dificultad a los modelos que hemos presentado en el Apartado 2.

a.s.i. (Modo de presentación: verbal-definición)

"Diremos que el numero a es el limite de la sucesión (a_n) cuando a medida que n toma valores cada vez mayores entonces los términos de la sucesión se aproximan cada vez más al número real a".

(Vizmanos, J.R., Anzola, M. y Primo, A. (1981) *Funciones-2. Matemáticas 2º B.U.P.* Madrid: SM)

i.v.s (Modo de presentación: verbal-definición)

"Sea a_n una sucesión de números reales y l un número, también real. Se dice que la sucesión a_n tiende a l, o tiene por límite l cuando para todo número $\varepsilon>0$ es posible encontrar un término a_p de la sucesión tal que él y todos los términos que le siguen difieren de l, en valor absoluto, en menos que ε".

(Segura, D.(1973) *Matemáticas*. Valencia: Ecir)

a.d.i (Modo de presentación: verbal-definición)

"Intuitivamente se puede pensar en el límite de una función y=f(x) en el punto x=a como el valor al que tienden las imágenes, y, cuando los originales, x, tienden hacia a."

(Negro, A., Benedicto, C., Martínez, M., y Poncela, M. (1996) *Matemáticas 1.CCNN*. Madrid: Santillana)

i.v.f (Modo de presentación: verbal-definición)

"L es el límite de f (x) en el punto x = a si y sólo si para cualquier distancia ε que se tome, por pequeña que sea, existe otra distancia δ, tal que si la distancia entre x y a es menor que δ entonces la distancia entre f(x) y L se mantiene menor que ε."

(Bescos, E. y Pena, Z. (2002). *Matemáticas 1º Bachillerato*. Madrid: Oxford Educación)

Figura 4. Modelos de fenómenos de aproximación y retroalimentación en sucesiones y en funciones. (Varios autores.)

4.2 Presencia de los fenómenos de aproximación simple y doble intuitiva en los libros de texto (Período LOGSE)

Denominamos *período LOGSE* al intervalo comprendido entre 1990 y 2005.

En este período, para el estudio del límite de una sucesión se analizaron 5 libros de texto, y para el estudio del límite de una función, 6 libros. Las frecuencias de las tablas que siguen representan el número de veces que hemos observado los fenómenos que se indican; debe tenerse en cuenta que un mismo fenómeno puede observarse varias veces en un mismo libro.

(A) En sucesiones:

R_1. *Los fenómenos con mayor frecuencia absoluta son la aproximación simple intuitiva gráfica (g) y tabular (t) en ejemplo (e), con una frecuencia absoluta de 9.*

R_2. *En los libros de texto no hemos observado la presencia de los siguientes fenómenos:* - *aproximación simple intuitiva tabular en definición (d).* - *aproximación simple intuitiva gráfica en definición.* - *aproximación simple intuitiva simbólica (s) en definición.* - *aproximación simple intuitiva simbólica en ejemplo.*

Los datos numéricos correspondientes a R1 y R2 se indican en la tabla 1

Fenómenos	**a.s.i v-e**	**a.s.i v-d**	**a.s.i t-e**	**a.s.i t-d**	**a.s.i g-e**	**a.s.i g-d**	**a.s.i s-e**	**a.s.i s-d**
Frecuencia	5	3	9	0	9	0	0	0

Tabla 1: Fenómenos de aproximación simple intuitiva, frecuencias

(B) En funciones

El estudio relativo al límite de funciones en los libros de texto, arrojó los siguientes resultados destacados:

R_3. *El fenómeno con mayor frecuencia absoluta es la aproximación doble intuitiva tabular en ejemplo, con una frecuencia absoluta de 10.*

R_4. *En los libros de texto no hemos detectado la presencia de los siguientes fenómenos:* - *aproximación doble intuitiva tabular en definición.* - *aproximación doble intuitiva simbólica en ejemplo*

Los datos numéricos correspondientes a R3 y R4 se indican en la tabla 2

Fenómenos	**a.d.i v-e**	**a.d.i v-d**	**a.d.i t-e**	**a.d.i t-d**	**a.d.i g-e**	**a.d.i g-d**	**a.d.i s-e**	**a.d.i s-d**
Frecuencia	9	7	10	0	4	2	0	1

Tabla 2: Fenómenos de aproximación doble intuitiva, frecuencias

4.3 Presencia de los fenómenos de retroalimentación en sucesiones y en funciones, en los libros de texto.

(A) En sucesiones

R_5. *El fenómeno con mayor frecuencia absoluta es la ida-vuelta en sucesiones verbal (v) en definición con una frecuencia absoluta de 4.*

R_6. *No hemos observado los siguientes fenómenos:*

- *ida-vuelta en sucesiones tabular en definición.*
- *ida-vuelta en sucesiones tabular en ejemplo.*
- *ida-vuelta en sucesiones gráfico en definición.*
- *ida-vuelta en sucesiones simbólico en definición.*

Los datos numéricos correspondientes a R5 y R6 se indican en la tabla 3

Fenómenos	**i.v.s v-e**	**i.v.s v-d**	**i.v.s t-e**	**i.v.s t-d**	**i.v.s g-e**	**i.v.s g-d**	**i.v.s i s-e**	**i.v.s s-d**
Frecuencia	2	4	0	0	2	0	2	0

Tabla 3: Fenómenos de ida-vuelta en sucesiones, frecuencias

(B) En funciones

R_7. *El fenómeno con mayor frecuencia absoluta es la ida-vuelta en funciones verbal en definición con una frecuencia absoluta de 4.*

R_8. N*o hemos detectado la presencia de los siguientes fenómenos:*

- *la ida-vuelta en funciones tabular en ejemplo.*
- *la ida-vuelta en funciones tabular en definición.*

Los datos numéricos correspondientes a R7 y R8 se indican en la tabla 4

Fenómenos	**i.v.f v-e**	**i.v.f v-d**	**i.v.f t-e**	**i.v.f t-d**	**i.v.f g-e**	**i.v.f g-d**	**i.v.f i s-e**	**i.v.f s-d**
Frecuencia	2	4	0	0	2	1	2	3

Tabla 4: Fenómenos de ida-vuelta en funciones, frecuencias

4.4 Resultados referentes a los sistemas de representación

Recogemos las relaciones observadas entre los fenómenos encontrados en los libros de texto y los sistemas de representación (verbal, gráfico, tabular y simbólico).

R_9. *En los fenómenos de aproximación simple intuitiva los sistemas de representación más empleados son el gráfico y el tabular.*

R_{10}. *En los fenómenos de ida-vuelta en sucesiones el sistema de representación más empleado es el verbal.*

R_{11}. *En los fenómenos de aproximación doble intuitiva el sistema de representación más empleado es el verbal.*

R_{12}. *En los fenómenos de ida-vuelta en funciones el sistema de representación más empleado es el verbal.*

4.5 Comparación entre fenómenos de aproximación intuitiva y retroalimentación

La comparación de resultados entre los fenómenos de aproximación intuitiva y retroalimentación arrojó lo siguiente:

R_{13}. Los fenómenos de aproximación intuitiva superan en frecuencia absoluta a los fenómenos de retroalimentación

R_{14}. Los fenómenos de aproximación simple intuitiva en sucesiones superan en frecuencia absoluta a los fenómenos de ida-vuelta en sucesiones.

R_{15}. Los fenómenos de aproximación doble intuitiva en funciones superan en frecuencia absoluta a los fenómenos de ida-vuelta en funciones.

La tabla siguiente recoge las frecuencias totales de aparición de los diferentes fenómenos en los libros de texto del período LOGSE

	Fenómenos de aproximación intuitiva		**Fenómenos de retroalimentación**	
Fenómenos	**a.s.i**	**a.d.i**	**i.v.s**	**i.v.f**
Frecuencia	26	33	10	12
Frecuencia Total	59		22	

Tabla 5: Frecuencias de los fenómenos en los libros del período LOGSE analizados

De manera cualitativa, en los libros de texto del período LOGSE, nuestros resultados muestran un desequilibrio entre los fenómenos de aproximación intuitiva y retroalimentación, favorable a los primeros. La razón aproximada 13/5 parece asociada a todas las comparaciones entre ambos fenómenos:

$$FREC (asi) / FREC (ivs) \approx FREC (adi) / FREC (ivf).$$

En cambio, la importancia asignada por los autores estudiados del período LOGSE al límite de sucesiones y al límite de una función en un punto parece aproximadamente la misma (razón aproximada, 5:6).

5. CONCLUSIONES

En los libros de texto estudiados, y en la inmensa mayoría de los currículos, el concepto de límite de una sucesión precede al concepto de límite de una función. Este supuesto orden en la enseñanza del límite ya había sido propuesto por Tall (1981).

Los estudios didácticos raramente han distinguido entre el estudio del límite de una sucesión y el límite de una función. Se han ocupado en la mayoría de los casos del estudio del límite en general.

Con este estudio, aportamos evidencias fenomenológicas de que el concepto de límite finito de una sucesión está organizado por los fenómenos que hemos denominado *asi* e *ivs*, mientras que el concepto de límite finito de una función en un punto está organizado por los fenómenos que hemos denominado *adi* e *ivf*. Se sigue que cada uno de ellos tiene interés y entidad propios, y que el paso de un concepto a otro no consiste en una simple generalización.

Las razones que justifican la importancia de cada concepto son los diferentes fenómenos que involucran cada uno de ellos y las expresiones de cada concepto en los diferentes sistemas de representación.

Los fenómenos asociados al concepto de límite, han sufrido, en los libros de texto, una evolución con el paso del tiempo, aunque en este trabajo solamente aportamos resultados del estudio de libros de texto producidos en el marco de la LOGSE. Tras la entrada en vigor y extensión generalizada de esta ley, observamos un auge de los fenómenos de aproximación intuitiva; como hemos explicado en la Tabla 5, las frecuencias de estos fenómenos prevalecen sobre los fenómenos de retroalimentación. El desequilibrio observado en el período LOGSE otorga mucho más peso a la intuición del concepto de límite que a los enfoques más precisos, que exigen manejar los fenómenos de retroalimentación.

Por otro lado echamos de menos en los libros de texto el desarrollo del concepto de límite tanto de sucesión como de función en los diferentes sistemas de representación. En la mayoría de los libros revisados se realiza una exposición del concepto de límite solamente en alguno de ellos, perdiendo de esta manera la posibilidad de pasar de un sistema de representación a otro y de reconocer los fenómenos de aproximación intuitiva y los fenómenos de ida-vuelta en los diferentes sistemas de representación.

Expresamos nuestro agradecimiento a los comentaristas anónimos que, con sus sugerencias, han permitido mejorar el aspecto final de esta comunicación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Azcarate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X, 2, 135-149.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002): Nueva definición de límite funcional. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas. vol. 30, pp. 67-82.* Graó. ISSN: 1133-9853. Barcelona.

Cornu, B. (1991). Limits. En Tall, D. (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En Tall, D.(Ed), *Advanced Mathematical Thinking (*pp. 95-123.). Dordrecht: Kluwer.

Espinoza, L. y Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "límite de función": una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias*, 18.3, 355-368.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics,* 48, 259-288.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.) *Actas del IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 81-96). Córdoba: Universidad de Córdoba.

Puig, L. (1997). Análisis Fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Horsori.

Tall, D. (1991) (Ed.). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer.

Tall, D. (1992). Students' Difficulties in Calculus*.* *Plenary presentation in working Group 3* (pp. 1-8). Québec: ICME

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, pp. 151-169.