



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

TESIS DOCTORAL

METODOLOGÍA PARA IDENTIFICAR LAS PROPIEDADES MECÁNICAS DE LA MEMBRANA BASADA EN ENSAYOS NO DESTRUCTIVOS

Autora

Antonia María Lima Rodríguez

Tutor

Dr. Antonio González Herrera

Directores

Dr. Antonio González Herrera

Dr. José Manuel García-Manrique Ocaña

ESCUELA DE INGENIERÍAS INDUSTRIALES
Programa de doctorado: Ingeniería Mecatrónica

Diciembre 2022





UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

AUTOR: Antonia María Lima Rodríguez

 <https://orcid.org/0000-0002-3213-421X>

EDITA: Publicaciones y Divulgación Científica. Universidad de Málaga



Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Internacional:

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode>

Cualquier parte de esta obra se puede reproducir sin autorización pero con el reconocimiento y atribución de los autores.

No se puede hacer uso comercial de la obra y no se puede alterar, transformar o hacer obras derivadas.

Esta Tesis Doctoral está depositada en el Repositorio Institucional de la Universidad de Málaga (RIUMA): riuma.uma.es



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

TESIS DOCTORAL

METODOLOGÍA PARA IDENTIFICAR LAS PROPIEDADES MECÁNICAS DE LA MEMBRANA BASADA EN ENSAYOS NO DESTRUCTIVOS

DOCTORANDO

Antonia María Lima Rodríguez

DIRECTORES DE TESIS

Dr. Antonio González Herrera

Dr. José Manuel García-Manrique Ocaña

Diciembre 2022



UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Programa de doctorado: Ingeniería Mecatrónica

Tesis doctoral

**METODOLOGÍA PARA IDENTIFICAR LAS
PROPIEDADES MECÁNICAS DE LA
MEMBRANA BASADA EN ENSAYOS NO
DESTRUCTIVOS**

Autora:

ANTONIA MARÍA LIMA RODRÍGUEZ

Tutor:

Dr. ANTONIO GONZÁLEZ HERRERA

Directores:

Dr. ANTONIO GONZÁLEZ HERRERA

Dr. JOSÉ MANUEL GARCÍA-MANRIQUE OCAÑA

Tesis doctoral presentada en la

**ESCUELA DE INGENIERÍAS INDUSTRIALES de la UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA**

para la obtención del Grado de Doctora

Málaga, diciembre de 2022



DECLARACIÓN DE AUTORÍA Y ORIGINALIDAD DE LA TESIS PRESENTADA PARA OBTENER EL TÍTULO DE DOCTOR

D./Dña ANTONIA MARÍA LIMA RODRÍGUEZ

Estudiante del programa de doctorado INGENIERÍA MECATRÓNICA de la Universidad de Málaga, autor/a de la tesis, presentada para la obtención del título de doctor por la Universidad de Málaga, titulada: METODOLOGÍA PARA IDENTIFICAR LAS PROPIEDADES MECÁNICAS DE LA MEMBRANA BASADA EN ENSAYOS NO DESTRUCTIVOS

Realizada bajo la tutorización de DR. ANTONIO GONZÁLEZ HERRERA y dirección de DR. ANTONIO GONZÁLEZ HERRERA Y DR. JOSÉ MANUEL GARCÍA-MANRIQUE OCAÑA (si tuviera varios directores deberá hacer constar el nombre de todos)

DECLARO QUE:

La tesis presentada es una obra original que no infringe los derechos de propiedad intelectual ni los derechos de propiedad industrial u otros, conforme al ordenamiento jurídico vigente (Real Decreto Legislativo 1/1996, de 12 de abril, por el que se aprueba el texto refundido de la Ley de Propiedad Intelectual, regularizando, aclarando y armonizando las disposiciones legales vigentes sobre la materia), modificado por la Ley 2/2019, de 1 de marzo.

Igualmente asumo, ante a la Universidad de Málaga y ante cualquier otra instancia, la responsabilidad que pudiera derivarse en caso de plagio de contenidos en la tesis presentada, conforme al ordenamiento jurídico vigente.

En Málaga, a 23 de DICIEMBRE de 2022

Fdo.: ANTONIA MARÍA LIMA RODRÍGUEZ Doctorando/a	Fdo.: DR. ANTONIO GONZÁLEZ HERRERA Tutor/a
Fdo.: DR. ANTONIO GONZÁLEZ HERRERA Y DR. JOSÉ MANUEL GARCÍA-MANRIQUE OCAÑA Director/es de tesis	



A mi marido y mi hijo Ángel.

A mis padres y hermana.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer, de todo corazón, a todas las personas que me han ayudado durante el camino de la realización de esta tesis doctoral.

Primero a mis directores de tesis, Dr. Antonio González Herrera y Dr. José Manuel García-Manrique Ocaña, que sin su apoyo y sin su paciencia no hubiese sido posible realizarla. Confiaron en mí y compartiendo su trabajo y conocimientos conmigo.

A mis compañeros del área de Medios Continuos y Teoría de Estructuras de la Universidad de Málaga, si no los hubiera encontrado en el camino de la docencia, no me hubiera lanzado a la aventura de la realización de una tesis doctoral.

A mi familia, que sin ellos no hubiese sido posible, ni esto ni otras muchas cosas. En especial agradecer a Ángel, por atender sin mí, tantas horas a nuestras obligaciones familiares. A mis padres y mi hermana, que sin su disposición a ayudarme en todo lo que pueden, jamás hubiera terminado este trabajo ni tantos otros.

A mi hijo Ángel, aunque es muy pequeño y no es consciente de muchas cosas, por darme el mejor de los motivos para terminar este trabajo.

Por último, pero no menos importante, a mis amigos, que siempre me han animado y empujado.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1: Introducción y objetivos.....	29
1.1. Introducción.....	29
1.2. Antecedentes.....	31
1.3. Motivación y objetivos de este trabajo	38
1.4. Contenidos de la memoria	41
CAPÍTULO 2: Fundamentos de dinámica. Comportamiento dinámico de la membrana. Método de elementos finitos	45
2.1 Introducción.....	45
2.2 Conceptos teóricos.....	46
2.2.1 Fundamentos de dinámica	46
2.2.2 Ecuaciones de comportamiento	47
2.2.2.1 Sistema estático	47
2.2.2.2 Sistema dinámico.....	48
2.2.3 Vibraciones.....	49
2.2.4 Sistemas de 1 g.d.l.	51
2.2.4.1 Vibraciones libres sin amortiguamiento	51
2.2.4.2 Vibraciones libres con amortiguamiento.....	52
2.2.4.3 Vibraciones forzadas armónicas sin amortiguamiento	55
2.2.4.4 Vibraciones forzadas armónicas con amortiguamiento.....	57

2.2.5	Sistemas de n g.d.l.: Métodos de cálculo.....	59
2.2.6	Vibración libre no amortiguada. Análisis modal.....	60
2.2.7	Vibración forzada. Método de superposición modal.....	62
2.2.8	Vibración forzada armónica con amortiguamiento. Análisis armónico	65
2.3	Ecuaciones de comportamiento de la membrana	68
2.3.1	Membrana sin tensión: caso placa.....	68
2.3.2	Membrana con tensión: caso membrana	74
2.3.3	Membrana con cierto nivel de tensión: caso intermedio	78
2.4	Método de elementos finitos	82
2.4.1	Tipo de elementos utilizados	83
2.4.1.1	Fluid30: Elemento de fluido acústico 3d.....	84
2.4.1.2	Fluid130: Elemento acústico infinito 3D	85
2.4.1.3	Solid185: Elemento para estructuras sólidas 3D	86
2.4.1.4	Shell181: Elemento para estructuras de capa	87
2.4.2	Interacción fluido-estructura	88
2.4.2.1	Elementos acústicos sometidos a presión.....	88
2.4.2.2	Ecuaciones matriciales del problema de interacción fluido-estructura.....	89

**CAPÍTULO 3: Estudio de la respuesta de la membrana.
Comportamiento con tensión95**

3.1	Introducción.....	95
3.2	Método numérico. Análisis de elementos finitos	96
3.3	Casos de estudio	100
3.3.1	Membrana de acero	100
3.3.2	Membrana equivalente del tímpano	118
3.4	Conclusiones.....	123

**CAPÍTULO 4: Estudio de los principales parámetros que influyen en
la respuesta de la membrana. Diseño del experimento.....129**

4.1	Introducción.....	129
4.2	Hipótesis en el experimento	130
4.3	Configuración del experimento	131
4.4	Método numérico. Análisis de elementos finitos	132
4.5	Estudio de la influencia de los diferentes parámetros en la respuesta de la membrana	137
4.6	Diseño del experimento	147
4.7	Conclusiones.....	147

**CAPÍTULO 5: Cálculo de las frecuencias de resonancia. Método de
ajuste circular151**

5.1.	Introducción.....	151
------	-------------------	-----

5.2.	Método del ajuste circular	153
5.2.1.	Determinación de los parámetros de la respuesta en frecuencia en desplazamiento	157
5.3.	Aplicación del método del ajuste circular a una simulación numérica	167
5.3.1.	Membrana de 40 micras de espesor.....	168
5.4.	Conclusiones.....	181
CAPÍTULO 6: Aplicación del método a un ensayo real.....		185
6.1.	Introducción.....	185
6.2.	Resultados experimentales	186
6.2.1.	Configuración del experimento	186
6.2.2.	Resultados obtenidos	189
6.2.3.	Resultados del ajuste circular aplicado a los datos experimentales	191
6.2.3.1.	Tratamiento de los datos experimentales	191
6.2.3.2.	Análisis de los resultados experimentales	196
6.2.3.3.	Cálculo de las propiedades mecánicas del material (módulo de Young)	200
6.3.	Conclusiones.....	206
CAPÍTULO 7: Conclusiones.....		211
7.1.	Introducción.....	211

7.2.	Sobre los principales parámetros que influyen en la respuesta de la membrana.....	211
7.3.	Sobre el uso del método de ajuste circular para identificar los modos de la respuesta	213
7.4.	Sobre la aplicación del método a un ensayo experimental real	213
7.5.	Sobre el diseño del ensayo.....	215
7.6.	Líneas futuras de trabajo.....	217
BIBLIOGRAFÍA.....		221

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1. Sistema estático de 1 g.d.l.....	48
Figura 2.2. Respuesta de un sistema de 1 g.d.l., en vibración libre y sin amortiguamiento [70].....	52
Figura 2.3. Respuesta de un sistema sobreamortiguado (azul), de un sistema con amortiguamiento crítico (morado) y de un sistema subamortiguado (rojo) [71]	54
Figura 2.4. Función de respuesta en frecuencia [70]	56
Figura 2.5. Respuesta de un sistema forzado armónico sin amortiguamiento, ante una fuerza sinusoidal de frecuencia $\omega = \omega_n$ [70].....	56
Figura 2.6. Factor de amplificación dinámica y ángulo de desfase [70]....	58
Figura 2.7. Respuesta de un sistema forzado armónico con amortiguamiento [70]	59
Figura 2.8. 3 primeros modos de vibración de una viga empotrada-libre [71]	62
Figura 2.9. Ejemplo de función de respuesta en frecuencia [72]	67
Figura 2.10. Placa circular empotrada.....	71
Figura 2.11. Formas de deformación de los primeros 9 modos de vibración de una membrana circular	74
Figura 2.12. Configuraciones geométricas del elemento FLUID30 [74]...	84

Figura 2.13. Configuraciones geométricas del elemento FLUID130 [74] 85

Figura 2.14. Elementos FLUID130 en el exterior de un volumen esférico de elementos FLUID30 [68]86

Figura 2.15. Geometría estructural del elemento SOLID185 [74] 87

Figura 2.16. Geometría del elemento SHELL181 [74].....88

Figura 3.1. Simulación modal de elementos finitos de una membrana circular. (a) Esquema de deformación impuesta. (b) Geometría. (c) Tipo de elemento. (d) Mallado. (e) Algunas soluciones de desplazamiento: modos 2, 3 y 4.....98

Figura 3.2. Relación F_{ANM}/F_{FEM} en función de la deformación, para los primeros nueve modos de vibración 103

Figura 3.3. Relación F_{ANP}/F_{FEM} en función de la deformación, para los nueve primeros modos de vibración..... 105

Figura 3.4. Relación F_n/F_1 para las frecuencias naturales de los modos 2 a 9 obtenidas con ANSYS 108

Figura 3.5. Puntos de Wah superpuestos en los gráficos de relaciones F_{ANM}/F_{FEM} (a) y F_{ANP}/F_{FEM} (b)..... 111

Figura 3.6. Relaciones F_{ANM}/F_{FEM} (a) y F_{ANP}/F_{FEM} (b) en función de la deformación ensayada para las cinco primeros modos y valores de espesor/diámetro (h/d): 10^{-2} , 10^{-3} , 10^{-4} , 10^{-5} y 10^{-6} 113

Figura 3.7. Relación F_n/F_1 para las primeras cinco frecuencias naturales obtenidas con elementos finitos y valores de espesor/diámetro (h/d): 10^{-2} , 10^{-3} , 10^{-4} , 10^{-5} y 10^{-6} 115

Figura 3.8. Valor de deformación para soluciones con error del 2% y 5%, y diferentes valores de h/d : 10^{-5} , 10^{-4} , 10^{-3} y 10^{-2}	118
Figura 3.9. Relaciones F_{ANM}/F_{FEM} (a), F_{ANP}/F_{FEM} (b) y puntos Wah (a) y (b) superpuestos en los gráficos en función de las deformaciones ensayadas, s probadas para los nueve primeros modos	120
Figura 3.10. Relación F_n/F_1 para las cinco primeras frecuencias naturales obtenidas con ANSYS.....	121
Figura 4.1. Configuración del ensayo	131
Figura 4.2. Modelo de malla de la simulación numérica de la respuesta vibroacústica de una membrana delgada.....	136
Figura 4.3. Deformada de los primeros 9 modos de vibración de una membrana circular.....	137
Figura 4.4. Velocidad del centro de la membrana de 40 μm (azul), 60 μm (verde) y 100 μm (rojo) μm de espesor, con fuente de sonido a 90° , y $d=1$ cm.....	139
Figura 4.5. Velocidad del centro de la membrana de 40 μm de espesor, con la fuente de sonido a 90° (azul) y 45° (verde), y $d=5$ cm	140
Figura 4.6. Velocidad del punto de coordenadas $y=0$, $x=\text{radio}/2$ de la membrana de 40 μm de espesor, con la fuente de sonido a 90° (azul) y 45° (verde), y $d=5$ cm	141
Figura 4.7. Velocidad del centro de la membrana de 60 μm de espesor, con presión de la fuente de sonido de 1 Pa (azul) y 0.1 Pa (verde), y $d=1$ cm	142

Figura 4.8. Velocidad del punto central de la membrana de 40 μm . Posición de la fuente a 90° , $d= 1 \text{ cm}$ y valores de amortiguamiento: 1% (azul), 5% (verde), 10% (rojo), 20% (cian), 30% (amarillo) y 40% (magenta) 143

Figura 4.9. Velocidad del punto central de la membrana de 60 μm . Posición de la fuente a 90° , $d= 1 \text{ cm}$ y valores de amortiguamiento: 1% (azul), 5% (verde), 10% (rojo), 20% (cian), 30% (amarillo) y 40% (magenta) 143

Figura 4.10. Respuesta superficial de algunos puntos para la membrana de 40 μm , ángulo de fuente de 90° , 1 Pa de presión en la fuente y $d=5 \text{ cm}$. 145

Figura 4.11. Respuesta superficial de todos puntos para la membrana de 40 μm , ángulo de fuente de 90° , 1 Pa de presión en la fuente y $d=5 \text{ cm}$ 145

Figura 4.12. Puntos candidatos de la superficie de la membrana para la membrana con un espesor de 40 micras y con un ángulo de 90° , y $d=5 \text{ cm}$. Modos 1, 3, 4, 7, 8 y 9 146

Figura 5.1. Función de respuesta en frecuencia (FRF), representación del módulo frente a la frecuencia..... 151

Figura 5.2. Diagrama de Nyquist de una función de respuesta en frecuencia 154

Figura 5.3. Parámetros en la circunferencia..... 156

Figura 5.4. Ejemplo de ángulo entre dos vectores consecutivos en el diagrama de Nyquist 160

Figura 5.5. Ejemplo de dos vectores consecutivos con ángulo mayor de 180° 161

Figura 5.6. Signo del producto vectorial de los vectores a y b162

Figura 5.7. Cálculo de la proporción P para la determinación de la frecuencia de resonancia ν_k164

Figura 5.8. Puntos en la circunferencia165

Figura 5.9. Propiedades del círculo modal [62]166

Figura 5.10. Función de respuesta en frecuencia del centro de la membrana de 40 μm de espesor y amortiguamiento de 1%. Valores de las frecuencias modales y frecuencias de pico.....168

Figura 5.11. Diagrama de Nyquist en desplazamiento del centro de la membrana de 40 μm de espesor y amortiguamiento de 1%.....169

Figura 5.12. Zoom en el diagrama de Nyquist en desplazamiento del centro de la membrana de 40 μm de espesor y amortiguamiento de 1%170

Figura 5.13. Circunferencias superpuestas en diagrama de Nyquist en desplazamiento del centro de la membrana de 40 μm de espesor y amortiguamiento de 1%171

Figura 5.14. Zoom en el diagrama de Nyquist en desplazamiento, con las circunferencias superpuestas, del centro de la membrana de 40 μm de espesor y amortiguamiento de 1%172

Figura 5.15. Circunferencias correspondientes con el modo 1 (a), modo 4 (b) y modo 9 (c), para el centro de la membrana de 40 μm de espesor y amortiguamiento de 1%175

Figura 5.16. Función de respuesta en frecuencia del centro de la membrana de 40 μm de espesor y amortiguamiento de 1%, 5%, 10% y 20%176

Figura 5.17. Diagrama de Nyquist en desplazamiento del centro de la membrana de 40 μm de espesor y amortiguamientos de 1%, 5%, 10% y 20%. Circunferencias del ajuste circular superpuestas 179

Figura 5.18. Zooms en el diagrama de Nyquist en desplazamiento, con las circunferencias superpuestas, del centro de la membrana de 40 μm de espesor y amortiguamiento de 1%, 5%, 10% y 20% 180

Figura 6.1. Disposición de los diferentes elementos en el experimento (a) y (b). Medición en el centro de la membrana (c). Medición en un punto de apoyo (d) 187

Figura 6.2. Función de transferencia en velocidad de las membranas. Respuestas de las membranas de diámetros: 5 mm (a), 10 mm (b) y 15 mm (c), para la posición central (curva azul) y la posición de la base (curva verde). Respuestas de la posición de la base aumentada 10 veces 190

Figura 6.3. Diagrama de Nyquist para la membrana de diámetro 5 mm (a), 10 mm (b) y 15 mm (c), y para la posición central (azul) y la posición de la base (verde)..... 192

Figura 6.4. Función de transferencia en aceleración de las membranas. Respuestas de las membranas de diámetros: 5 mm (a), 10 mm (b) y 15 mm (c), para la posición central (azul) y la posición de la base (verde). Respuestas de la posición de la base aumentada 10 veces. Frecuencias de resonancia añadidas en el centro (líneas rojas) y en la base (líneas grises) 196

Figura 6.5. Determinación del módulo de Young para las membranas de diámetro 5 mm (a), 10 mm (b) y 15 mm (c)201

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1. Valores de λ^2 para una placa circular empotrada [33]	72
Tabla 2.2. Valores de α para una membrana circular [31]	77
Tabla 2.3. Valores de α y β para una placa circular empotrada [60]	81
Tabla 3.1. Relación F_{ANM}/F_{FEM} para los nueve primeros modos y deformaciones seleccionadas	102
Tabla 3.2. Relación F_{ANP}/F_{FEM} para los nueve primeros modos y deformaciones seleccionadas	104
Tabla 3.3. Relación F_{nANP} /F_{1ANP} y F_{nANM} /F_{1ANM} para las primeras nueve frecuencias naturales para el caso de placa y membrana	106
Tabla 3.4. Relación F_{WAH}/F_{FEM} para los nueve primeros modos y valores de deformación relacionados con ϕ	110
Tabla 5.1. Parámetros del método circular para el centro de la membrana de 40 μm de espesor y amortiguamiento de 1%	173
Tabla 5.2. Comparación de las frecuencias de resonancia, para el centro de la membrana de 40 μm de espesor y amortiguamiento de 1%	173
Tabla 5.3. Frecuencias de resonancia de la respuesta en frecuencia del centro de la membrana de 40 μm de espesor y amortiguamientos de 1%, 5%, 10% y 20%	177
Tabla 5.4. Parámetros del método circular para el centro de la membrana de 40 μm de espesor y amortiguamiento de 1%, 5%, 10% y 20%	178

Tabla 6.1. Frecuencias de resonancia detectadas por el método de ajuste circular en el centro de la membrana (Hz), para los diámetros de 5, 10 y 15 mm 194

Tabla 6.2. Frecuencias de resonancia detectadas por el método de ajuste circular en el punto de apoyo (Hz), para los diámetros de 5, 10 y 15 mm 194

Tabla 6.3. Comparación entre las frecuencias de resonancia detectadas por el método de ajuste circular válidas y las calculadas analíticas, en el centro de la membrana, para las membranas de 5 mm, 10 mm y 15 mm.....204

CAPÍTULO 1

Introducción y objetivos



CAPÍTULO 1: Introducción y objetivos

1.1. INTRODUCCIÓN

Los materiales delgados tipo film son elementos presentes en multitud de problemas de ingeniería, de ahí la importancia de conocer el comportamiento de estos materiales y caracterizarlos. El módulo de Young o módulo de elasticidad es uno de los parámetros más importantes para obtener el modelo físico de estos materiales.

Entre los campos donde está presente el uso de membranas, se encuentra el de los instrumentos musicales, donde el componente que produce el sonido es un material de pequeño espesor, el campo de los microdispositivos, con el uso de membranas en diferentes aplicaciones o el de la biomecánica, con el caso concreto de la membrana timpánica.

Sin embargo, la determinación de las propiedades mecánicas de un material en forma de membrana es un problema difícil de resolver, estos materiales presentan un pequeño espesor y pequeña rigidez, y las pruebas experimentales tradicionales no siempre son adecuadas para su caracterización.

Además, los resultados de ensayos tradicionales para estos materiales presentan imperfecciones y en su mayoría implican la destrucción del material, lo cual es especialmente poco deseable en el caso de materiales

biológicos, debido a la poca disponibilidad de muestras y a la variabilidad del material.

Una solución es buscar un ensayo no destructivo, basado en el comportamiento dinámico del material. Cuando una membrana de un material es sometida a una excitación sonora, ésta responde vibrando en un rango de pequeñas deformaciones y pequeños desplazamientos, en función de las características dinámicas de la membrana, en términos de frecuencia de resonancia y modos de vibración.

Se puede relacionar la respuesta esperada de un espécimen sometido a una excitación controlada, con las propiedades mecánicas del material, para obtener información del módulo de Young. Sin embargo, esta medida no es fácil de conseguir, la interacción entre las ondas sonoras y la respuesta de la membrana es compleja (acoplamiento acústico-mecánico).

La respuesta se vería afectada por multitud de factores, entre los que se encuentra la posición de la fuente sonora, los puntos de medición, las dimensiones de la membrana, las frecuencias sonoras o las magnitudes a medir, la posible tensión a la que está sometida, entre otros.

Partiendo de la necesidad de determinar las características mecánicas de materiales de película delgada, y debido a que los ensayos tradicionales y destructivos en muchas ocasiones no son adecuados, en este trabajo se propone un ensayo no destructivo para determinar el módulo de Young mediante ensayos vibroacústicos, basado en el análisis dinámico del comportamiento de la membrana.

Debido a la complejidad en la respuesta dinámica de la membrana, y de la multitud de factores que afectan a la misma, es necesario realizar un estudio teórico minucioso de los parámetros que influyen en el problema.

El objetivo del presente trabajo es diseñar un experimento, basado en ensayos vibroacústicos de la membrana, donde la configuración elegida permita prever la respuesta de la misma. Para ello es necesario conocer el comportamiento dinámico de la membrana y los factores que influyen en su respuesta.

Finalmente se aplicará el método desarrollado a un ensayo experimental real, y se analizarán los resultados obtenidos.

La presente tesis parte de la investigación del estudio del oído, donde la membrana timpánica es un elemento muy importante en el proceso de audición, ya que es la encargada de transmitir las ondas sonoras captadas desde el canal auditivo externo hacia el interior del oído. De ahí la necesidad de conocer sus propiedades mecánicas para obtener un modelo físico de la misma.

1.2. ANTECEDENTES

Distintas metodologías se han utilizado en el cálculo de las propiedades mecánicas de los materiales tipo film, como ensayos tradicionales (ensayo de tracción), métodos de resonancia, el método de nano o micro-indentación, la técnica de la espectroscopia de fuerza atómica (AFM), entre otras.

En este apartado se va a realizar una recopilación de los principales trabajos y métodos de la bibliografía, utilizados para la determinación de las

propiedades mecánicas de la membrana, destacando los campos de aplicación.

Uno de los ensayos más conocidos para determinar las propiedades mecánicas es el ensayo de tracción, ensayo destructivo con el que se determina el módulo de Young, entre otras características mecánicas.

Muchos autores han utilizado este ensayo para determinar el módulo de Young de materiales de película delgada de diferentes composiciones. En [1], tanto la prueba de tracción como las técnicas de resonancia se utilizaron para caracterizar mecánicamente películas de silicio dopadas con boro, y con espesores entre 1 y 4 μm . En [2], el módulo de Young de las membranas amnióticas de fetos prematuros y a término se midieron mediante el uso de un aparato de tensión-deformación. En [3], se sometieron micromembranas delgadas a tensiones de compresión, con o sin desviaciones iniciales, para determinar el módulo de Young y la tensión residual de las micromembranas para su uso en microdispositivos.

Otros trabajos se basan en la relación entre la deflexión y la presión aplicada. Por ejemplo en [4], donde la relación entre estos parámetros se utilizó para obtener el módulo de Young y la tensión interna de membranas rectangulares compuestas, de superficie 2 mm por 8 mm.

Los métodos de resonancia también han sido utilizados en la bibliografía para caracterizar mecánicamente a los materiales tipo film, ejemplo de estos son los trabajos [5–9]. En [5,6,9] se usaron vigas en voladizo fabricadas a partir de películas delgadas, y los módulos de Young se calcularon a partir de la medición de las frecuencias de resonancia de las vigas que fueron forzadas a vibrar. En [7] se estudió la influencia en el módulo de Young en

fenómenos de envejecimiento en vigas en voladizo de silicio micromecanizadas y fuertemente dopadas. En [8] se midió el primer y segundo modo de vibración simétrico de un diafragma circular de película delgada para calcular el módulo de Young y la tensión residual de la película, basándose en la resolución de la ecuación de Rayleigh-Ritz de forma analítica.

Centrándonos en el estudio de la membrana timpánica, hay bastantes trabajos realizados para la determinación del módulo de Young de la misma. Algunos autores han realizado experimentos con muestras cortadas de la membrana timpánica para caracterizarlas mecánicamente, como es el caso de [10], donde se midió el módulo de Young de una tira de membrana timpánica humana utilizando una técnica de vibración longitudinal. En [11] se realizó pruebas de flexión con las muestras para determinar el módulo de Young, mientras que en [12] se reportó resultados de ensayos uniaxiales del tímpano humano.

Otros trabajos relacionados son [13,14], en los cuales también se aplicó el ensayo de tracción a muestras del tímpano de cadáveres humanos frescos. En el trabajo [13] se determinó el módulo de Young mediante pruebas mecánicas de tensión, y donde se evaluó estadísticamente usando el t test. En [14] los resultados experimentales se analizaron utilizando el modelo hiperelástico de Ogden y el método de correlación de imágenes digitales.

Más recientemente [15] comparó el comportamiento acústico de distintos tipos de membranas para su uso en la reparación de perforaciones crónicas del tímpano, donde membranas de diferentes espesores, desde 10 a 100 μm fueron ensayadas en un modelo con canal auditivo simulado, para

determinar la función de respuesta en frecuencia (FRF) y la resistencia de las membranas a las cargas de presión.

Hay trabajos interesantes que se centran en nano o micro-indentaciones para la caracterización mecánica de membranas timpánicas [16–20]. En [19], adicionalmente el material se sometió a una prueba de tracción uniaxial para validar los resultados obtenidos, y en [20] además de utilizar la técnica de indentación para el tejido, se adaptó un análisis inverso de elementos finitos. Hay otros autores que también han utilizado esta técnica para el cálculo del módulo elástico para otros tipos de materiales tipo film [21,22].

El método de nano o micro-indentación presenta buenos resultados para obtener la curva tensión-deformación de la membrana. Se puede capturar el comportamiento no lineal del material con gran deformación, pero se obtiene menor información en el rango de deformación baja. El problema es que es precisamente en ese rango de baja deformación donde la mayoría de las membranas se comportan en vibración.

Otra técnica utilizada para calcular las propiedades mecánicas de los materiales es la espectroscopia de fuerza atómica (AFM) [23–25]. En estos trabajos, el cálculo del módulo de Young se centra en materiales microscópicos, y en estos casos, puede ser interesante monitorear el estado de una muestra durante la prueba, para estar seguros de que no ocurren fallas no deseadas en el material [26,27].

Hay otros trabajos que investigan el comportamiento mecánico de la membrana timpánica utilizando métodos de resonancia [28,29]. En [28], además de este método dinámico, se utiliza un modelo constitutivo para estimar las propiedades en base a valores de rigidez conocidos de los

elementos que componen la membrana timpánica. Además, los datos experimentales existentes se reinterpretaron utilizando la teoría clásica de laminación compuesta. En el trabajo [29] se desarrolló una nueva barra de tensión de Hopkinson para investigar el comportamiento mecánico de la membrana timpánica a altas tasas de deformación.

La norma ASTM E 756-05 [30] presenta un experimento que permite determinar propiedades dinámicas, tales como las frecuencias naturales y amortiguamiento del material, y luego establecer relaciones analíticas con propiedades mecánicas, como módulo de Young (E) o módulo transversal de elasticidad (G). Los ensayos se basan en el análisis del comportamiento de una ménsula, que es excitada mediante vibración en un rango de frecuencia de 50-5000 Hz, y a diferentes temperaturas. En el caso de materiales no autoportantes, como los materiales tipo film, utiliza una configuración donde se fija a un material base con suficiente rigidez. En estos casos, se repite el ensayo con la pieza compuesta y el material base, para establecer relaciones entre la amortiguación del material base versus el conjunto. La necesidad de unir ambos materiales, la inclusión de adhesivos y las simplificaciones asumidas implican niveles de precisión que la norma establece en un 20%. Aunque son un punto de partida, las propiedades de los materiales cambian cuando éstas se presentan en forma de película o membrana.

Otro factor importante a tener en cuenta en la respuesta dinámica de una membrana es la existencia o no de carga aplicada en el plano de la misma. En relación a la carga aplicada, existen dos casos extremos en el comportamiento de la membrana, el caso que no existe tensión aplicada en el plano (denominado en la literatura como caso placa), y el caso de estar

sometida a carga en su plano (denominado en la literatura como caso membrana). El comportamiento dinámico de estos dos casos ha sido muy estudiado y está ampliamente cubierto en la literatura [31,32]. Para estos dos casos extremos existen soluciones analíticas que sirven para calcular de las frecuencias de resonancias.

Muchos autores han publicado sobre este tema, existiendo multitud de estudios sobre diferentes casos de placas y membranas. Rayleigh [31] y Timoshenko [32] realizaron estudios de vibración de placas y membranas con diferentes formas, y el segundo de ellos [32], incluyó en su estudio el método energético para la resolución de los diferentes casos. Otros autores recopilaron trabajos anteriores, como Leissa [33], que en 1969 recopiló estudios y publicaciones sobre vibración de placas.

Centrándonos en el caso de placas circulares, los primeros estudios se atribuyen a Poisson [34] y Kirchhoff [35]. Más tarde, otros autores han seguido investigando y publicando sobre este tema, como es el caso de Airey [36], Itao y Crandall [37] y Amabili et al. [38], que realizaron estudios sobre placas de bordes libres. Airey [36] también estudió el caso de las membranas con bordes empotrados y Amabili et al. [38] estudió las placas circulares que vibran en el vacío y en contacto con líquido. Otros autores han estudiado las frecuencias naturales de placas circulares simplemente apoyadas [39], con soportes elásticos en los bordes [40] o con restricciones en los bordes no uniformes [41]. En este último caso se incluyen las publicaciones de Narita y Leissa [42,43], Amabili et al. [44] o Eastep y Hemming [45]. Otros trabajos investigan la vibración de placas circulares en contacto con agua [46] o con fluido [47]. Después de hacer un recorrido por la multitud de publicaciones sobre el tema, se puede concluir que el estudio de las

situaciones extremas de comportamiento de placa y membrana están ampliamente cubiertas en la literatura.

Menos atención se ha prestado en la literatura al caso de la membrana sometida a un ligero nivel de tensión, para el cual el comportamiento se espera que sea intermedio entre membrana y placa. Una de las razones de la ausencia de estudios en esta línea es que, en la mayoría de las situaciones reales presentadas en ingeniería respecto al comportamiento de las membranas, el comportamiento responde a uno de esos casos extremos. Sin embargo, también existen situaciones en estudio en la actualidad que pueden responder a una situación intermedia.

Un campo en el que es importante el estudio de las vibraciones de membranas es el de los instrumentos musicales [48–51], y específicamente, el caso de membranas sometidas a tensión es importante en el estudio de instrumentos musicales de percusión, donde el componente que produce el sonido es un material de pequeño espesor sometido a tensión [52].

Recientemente, el uso de membranas en microelectrónica ha hecho de este tema un punto clave. Pequeñas membranas se utilizan en diferentes aplicaciones (por ejemplo, en sensores o como parte de dispositivos MEMS) que, durante la fabricación, adquieren cierto nivel de tensión, que desvía su comportamiento del esperado [53–57].

Otro campo de estudio donde se manifiesta este efecto es el estudio de la mecánica auditiva. Basado en diferentes estudios experimentales [58] y simulación del sistema auditivo humano [59], se ha observado que pequeños niveles de tensión previa en el sistema, particularmente en la membrana timpánica, provoca cambios significativos en la respuesta. La presencia de

tensión previa en la membrana timpánica se ha planteado como hipótesis desde hace mucho tiempo [10,11] y es una cuestión en discusión en la investigación auditiva actual.

Las desviaciones que ocurren entre los comportamientos esperados y los obtenidos pueden estar relacionadas con la suposición de comportamientos ideales de membrana o placa en estos problemas. Hay soluciones analíticas [60,61] que desarrollaron el comportamiento intermedio entre el caso placa y membrana, para algunas formas regulares y algunas situaciones específicas.

1.3. MOTIVACIÓN Y OBJETIVOS DE ESTE TRABAJO

En el contexto particular de los estudios del oído y la necesidad de caracterizar la membrana timpánica, se origina la motivación de la realización del presente trabajo.

Se puede destacar que la membrana timpánica es un material biológico y por lo tanto no siempre es posible disponer de suficientes muestras para realizar un ensayo destructivo, y las mediciones no se pueden realizar in situ.

Además, otro aspecto a considerar, es que los resultados están sujetos a importantes incertidumbres debido a la composición heterogénea de la membrana timpánica y sus propiedades anisotrópicas. De hecho, el rango de resultados del módulo de Young para la membrana timpánica es muy amplio, incluso de diferentes órdenes de magnitud en muchos casos, debido a la alteración del material durante el experimento.

Debido a la necesidad de determinar las características mecánicas de materiales de película delgada, como es la membrana del tímpano, para conocer su comportamiento, y debido a que los ensayos tradicionales y destructivos en muchas ocasiones no son adecuados, en este trabajo se propone un ensayo no destructivo para determinar el módulo de Young mediante ensayos vibroacústicos, basados en el análisis dinámico del comportamiento de la membrana. La muestra probada permanece intacta y se puede reutilizar en otras configuraciones o pruebas en el futuro.

La metodología propuesta se basa en un experimento controlado donde el rango de presión sonora sobre la membrana garantiza que las vibraciones muestren un comportamiento de pequeña deformación y presenten una respuesta lineal y elástica.

Se evalúan aspectos como la posición de la fuente sonora, los puntos de medición, las dimensiones de la membrana, el rango de frecuencias, las magnitudes a medir, la tensión a la que está sometida la membrana, entre otros. Para evitar en lo posible fuentes de incertidumbre, estos parámetros se estudiaron mediante ensayos previos y simulaciones numéricas con el software ANSYS v19.

Por otro lado, se explora la validez de las técnicas de ajuste de curvas de análisis modal para extraer el parámetro modal de las medidas de datos. Una vez establecido el procedimiento del experimento, se analizan diferentes estrategias de posprocesamiento de datos, incluyendo la observación directa y los diagramas de Nyquist [62].

Una vez determinada la configuración del experimento, la geometría de la muestra (especímenes circulares) y conocida la posible respuesta de la

membrana, se puede usar la solución analítica para describir la respuesta dinámica. De esta forma se obtendría el módulo de Young del material.

En la última parte del trabajo se usará un experimento real con la configuración elegida, para determinar el módulo de Young de varias muestras ensayadas.

En cuanto a los objetivos a alcanzar en esta tesis, pueden dividirse en dos grupos, un objetivo principal que es el fin del presente trabajo, y otros secundarios derivados del primero.

OBJETIVO PRINCIPAL:

1. Diseñar un ensayo no destructivo, basado en el comportamiento dinámico de la membrana, para determinar las propiedades mecánicas del material, en concreto el módulo de Young.

Es necesario elegir una configuración de ensayo donde estén controlados los distintos factores que intervienen en la respuesta de la membrana, para poder preverla.

OBJETIVOS SECUNDARIOS:

Del objetivo principal se sacan otros objetivos secundarios, y que son necesarios abordar en el presente trabajo:

2. Conocer los principales parámetros que influyen en la respuesta de la membrana y en su comportamiento, como pueden ser la tensión a la que está sometida, la posición de la fuente de sonido que genera la excitación, la amortiguación, entre otros.
3. Utilizar métodos de ajuste de curvas para identificar los modos de la respuesta de la membrana. Se van a usar métodos de ajustes de curvas

tradicionales, como las FRF y otros métodos (método del ajuste circular) para calcular con más exactitud los modos de vibración.

4. Aplicar el método a un ensayo experimental real, usando el diseño deseado, para obtener el módulo de Young del material.

1.4. CONTENIDOS DE LA MEMORIA

La memoria del documento se ha organizado en los siguientes capítulos:

- *Capítulo 1: Introducción y objetivos.* En este presente capítulo se explican los antecedentes del trabajo de investigación realizado, así como la motivación que ha llevado a la realización del mismo y los objetivos buscados.
- *Capítulo 2: Fundamentos de dinámica. Comportamiento dinámico de la membrana. Método de elementos finitos.* En este capítulo se desarrolla conceptos teóricos de dinámica y los conocimientos necesarios para conocer el comportamiento de la membrana. Incluye el método de elementos finitos, con la explicación de los distintos elementos usados en el software ANSYS v19, así como la interacción fluido-estructura desde el punto de vista de los elementos finitos.
- *Capítulo 3: Estudio de la respuesta de la membrana. Comportamiento con tensión.* En este capítulo se estudia la influencia del pretensado en membranas, y se relacionan con los casos extremos de placa y membrana.
- *Capítulos 4: Estudio de los principales parámetros que influyen en la respuesta de la membrana. Diseño del experimento.* En este capítulo se estudia la influencia de los principales parámetros que intervienen en la respuesta de la membrana frente a una excitación dinámica. Entre

los parámetros más importantes están: la posición de la fuente, el amortiguamiento, la presión sonora de excitación, entre otros. Se explica la configuración del diseño adoptado para el experimento y los motivos de la elección de los distintos parámetros.

- *Capítulo 5: Cálculo de las frecuencias de resonancia. Método de ajuste circular.* En este capítulo se explica el método del ajuste circular, su aplicación, los parámetros que participan en el mismo, y las diferencias con la visualización de picos en la función FRF. Se aplica el método a un caso numérico realizado con el software ANSYS v19.
- *Capítulo 6: Aplicación del método a un ensayo real.* En este capítulo se aplica el método de ajuste circular a los datos de ensayos reales realizados a distintas muestras de membranas, y se analizan los resultados obtenidos.
- *Capítulo 7: Conclusiones.* En este capítulo se recogen las conclusiones principales de la investigación desarrollada en el presente trabajo, exponiéndolas en función de los objetivos planteados inicialmente, y se destacan las posibles líneas futuras de investigación.

CAPÍTULO 2

**Fundamentos de dinámica.
Comportamiento dinámico
de la membrana.
Método de elementos finitos**



CAPÍTULO 2: Fundamentos de dinámica. Comportamiento dinámico de la membrana. Método de elementos finitos

2.1 INTRODUCCIÓN

En este primer capítulo se intenta resumir los aspectos teóricos fundamentales de la respuesta dinámica, compararla con la respuesta estática, indicando los parámetros que participan en cada respuesta y la diferencias entre las mismas.

Después se clasificarán los sistemas vibratorios, y se indicarán las ecuaciones que participan en el movimiento de los distintos sistemas de vibración [62,63].

Más adelante, se tratarán los diferentes métodos de cálculo dinámico, indicando las ecuaciones que rigen el movimiento y los parámetros en cada uno de ellos.

Seguidamente, se tratarán las ecuaciones de comportamiento de una membrana circular, material de pequeño espesor y pequeña rigidez, sometido o no a tensión radial en su plano. En la bibliografía se puede encontrar muchos trabajos sobre el estudio de vibración de membranas con diversas formas geométricas: cuadradas, triangulares, en forma de anillo..., con o sin tensión aplicada en su plano y con distintas condiciones de contorno [31,33,60,64].

En nuestro caso nos centramos en la respuesta dinámica de membranas circulares, con condiciones de contorno de empotramiento, y se prestará especial interés a las ecuaciones que determinan el cálculo de las frecuencias de resonancia. Estas frecuencias están ligadas a las propiedades mecánicas del material (principalmente el módulo de Young), de ahí el interés en el conocimiento de las mismas.

Se estudia la respuesta de una membrana sin estar sometida a tensión en su plano (caso placa), con tensión aplicada en su plano, siendo el fenómeno de la tensión el que rige el movimiento de la misma (caso membrana), y el caso de membranas con un cierto nivel de tensión en su plano, cuya respuesta es intermedia entre los dos casos anteriores.

Por último, se incluye un apartado en el que se incluye el método de elementos finitos. En el presente trabajo se recurre al uso del programa ANSYS v19, programa basado en el uso de este método, y en nuestro caso se usa para obtener la respuesta mecánica de casos concretos de membranas [65–69].

2.2 CONCEPTOS TEÓRICOS

2.2.1 FUNDAMENTOS DE DINÁMICA

En función de la respuesta de un sistema, se pueden distinguir dos tipos de cargas, las cargas estáticas y las cargas dinámicas, que dan lugar a clasificar los sistemas en dinámicos y estáticos.

- **Sistemas estáticos.** Son aquellos sistemas sometidos a cargas estáticas. Las cargas estáticas son aquellas acciones estacionarias que no varían

en el tiempo, ya sean fuerzas o momentos, que se caracterizan por actuar en un punto, con una magnitud y una dirección.

- **Sistemas dinámicos.** Son los sistemas sometidos a cargas dinámicas, la principal característica de estas cargas es que son aquellas acciones variables en el tiempo, que pueden ser también variables en magnitud y en su dirección. Estas cargas pueden tener características muy diferentes, por ejemplo, pueden ser cargas aplicadas en un instante (impactos) o cargas que actúan de forma prolongada en el tiempo.

2.2.2 ECUACIONES DE COMPORTAMIENTO

2.2.2.1 SISTEMA ESTÁTICO

La ecuación que rige el movimiento en un cálculo estático, y para un sistema de 1 grado de libertad es (2.1):

$$F = k u \quad (2.1)$$

donde k es la rigidez del sistema, que depende de la geometría del mismo y del material.

La Figura 2.1 representa un sistema estático de 1 g.d.l., y consiste en un voladizo con una masa en el extremo libre, sometido a una fuerza F constante en el extremo, y en el que se produce un desplazamiento u .

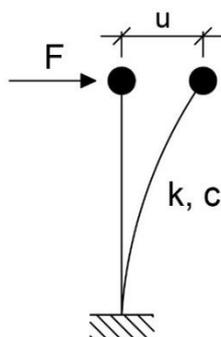


Figura 2.1. Sistema estático de 1 g.d.l.

Si el problema a estudiar es de n grados de libertad, los parámetros de la ecuación se convierten en vectores o matrices (2.2):

$$\{F\} = [k]\{x\} \quad (2.2)$$

donde $\{F\}$ y $\{x\}$ son los vectores fuerza y desplazamiento respectivamente, y $[k]$ es la matriz de rigidez.

2.2.2.2 SISTEMA DINÁMICO

En primer lugar, vamos a estudiar los distintos parámetros que intervienen en el movimiento dinámico de un sistema de 1 grado de libertad.

La ecuación fundamental de un sistema dinámico de 1 g.d.l. es (2.3):

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = F(t) \quad (2.3)$$

donde m es la masa del sistema, c es el amortiguamiento del mismo, k es la rigidez, (término también presente en el caso del sistema estático), $x(t)$ es el desplazamiento, $\dot{x}(t)$ es la velocidad y $\ddot{x}(t)$ la aceleración en función del tiempo.

Comparando las ecuaciones (2.1) y (2.3), se observa que en la ecuación de movimiento de un sistema dinámico aparecen más términos que en el caso del sistema estático. Los diferentes términos de la ecuación en dinámica son:

- $m \ddot{x}(t)$ representa las fuerzas de inercia, que aparecen en el movimiento dinámico.
- $c \dot{x}(t)$ representa las fuerzas viscosas, fuerzas presentes en el movimiento dinámico.
- $k x(t)$ representa las fuerzas estáticas, presentes también en el sistema estático.
- $F(t)$ es la fuerza dinámica, que depende del tiempo.

2.2.3 VIBRACIONES

Una vibración es un movimiento ondulatorio, en el que se produce una propagación del movimiento a través de ondas. Hay que indicar que en este proceso también se produce una transmisión de energía, de energía cinética y potencial durante el movimiento.

En función de la fuerza implicada en el movimiento tenemos la siguiente clasificación de las vibraciones:

- Vibraciones libres: Aquellas en las que el movimiento se genera por una carga inicial, que separa al sistema de su posición inicial, pero durante el movimiento el sistema no está sometida a ninguna carga externa.
- Vibraciones forzadas: Aquellas vibraciones sometidas a una fuerza aplicada durante el movimiento. Estas vibraciones se pueden clasificar en función de la fuerza aplicada en:
 - Vibraciones deterministas: Aquellas en las que la fuerza aplicada es función del tiempo y conocida. La vibración más habitual de este tipo son las vibraciones armónicas.
 - Vibraciones aleatorias: Aquellas en las que la fuerza aplicada no es función del tiempo, y no se conoce su evolución temporal.

Por otra parte, las vibraciones libres y forzadas pueden ser a su vez:

- Vibraciones amortiguadas.
- Vibraciones no amortiguadas.

Todos los sistemas reales tienen amortiguamiento aunque sea de pequeño valor, y el término $c \dot{x}(t)$ aparece en la ecuación de comportamiento, pero el estudio teórico de la ecuación sin el término relacionado con el amortiguamiento permite obtener información relevante mediante un cálculo simplificado.

Además de las clasificaciones anteriores, en función de la respuesta del sistema, las vibraciones pueden ser lineales o no lineales.

En los siguientes apartados se va a estudiar la respuesta de diferentes sistemas dinámicos. Se va a empezar con el caso más sencillo, los sistemas con 1 g.d.l, considerando primero el caso de vibración libre, con y sin amortiguamiento, y posteriormente el caso de vibración forzada. Para el caso de la vibración forzada, se estudiará la vibración forzada armónica, que es el tipo de vibración que compete en este trabajo.

El estudio de los sistemas de 1 g.d.l., aunque sean los casos más simples que puedan darse, sirve para conocer qué parámetros participan en la respuesta, algunos conocidos, y otros que se definen para poder manejarlos más adecuadamente.

2.2.4 SISTEMAS DE 1 G.D.L.

2.2.4.1 VIBRACIONES LIBRES SIN AMORTIGUAMIENTO

La ecuación diferencial que rige en movimiento para este caso es la Ecuación (2.4), donde no aparece el término asociado al amortiguamiento:

$$m \ddot{x}(t) + k x(t) = 0 \quad (2.4)$$

La solución de la ecuación es sinusoidal, y puede tener las siguientes expresiones (2.5):

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega_n t + \phi_1) \\ x(t) = A \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi_2) \\ x(t) = A \cos(\omega_n t) + B \operatorname{sen}(\omega_n t) \\ x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t} \end{cases} \quad (2.5)$$

donde ω_n es la frecuencia de oscilación, denominada frecuencia de resonancia o natural del sistema, cuyo valor es (2.6):

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.6)$$

Las constantes que aparecen en la forma de la solución (A, B, C₁ o C₂), se calculan con las condiciones de contorno.

Se observa que la frecuencia de oscilación de un sistema sometido de una vibración libre depende de la rigidez y la masa, características intrínsecas del sistema.

La forma de la respuesta es la representada en la Figura 2.2:

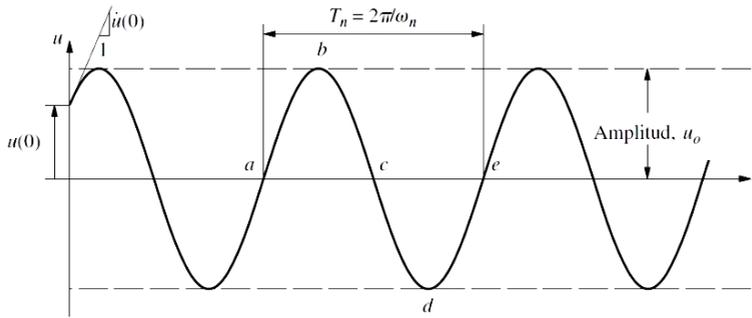


Figura 2.2. Respuesta de un sistema de 1 g.d.l., en vibración libre y sin amortiguamiento [70]

Se trata de una respuesta oscilatoria, con amplitud constante en el tiempo.

2.2.4.2 VIBRACIONES LIBRES CON AMORTIGUAMIENTO

La ecuación del movimiento en este caso es (2.7):

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = 0 \quad (2.7)$$

La solución es de la forma $x(t) = C e^{st}$. Sustituyendo en (2.7) y realizando cálculos, se obtiene la forma de la solución, y que realmente es una solución doble (2.8):

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = 0 \rightarrow m s^2 + c s + k = 0 \rightarrow$$

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (2.8)$$

Se define el amortiguamiento crítico como el valor de c para el cual la raíz de la Ecuación (2.8) tiene valor cero, que corresponde con el valor de la Ecuación (2.9):

$$c_{crít} = 2m\omega_n = 2\sqrt{km} \quad (2.9)$$

En función del amortiguamiento crítico, se define la razón o coeficiente de amortiguamiento, según la Ecuación (2.10):

$$\xi = \frac{c}{c_{crít}} \quad (2.10)$$

Se pueden clasificar los sistemas en función de la respuesta, si ésta es real o imaginaria. En función del valor de ξ , se tiene la siguiente clasificación, y las correspondientes soluciones para cada caso:

- Sistema sobreamortiguado: $\xi > 1$

La solución para este caso es (2.11):

$$s_{1,2} = \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \cdot \omega_n \rightarrow$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left(C_1 e^{\sqrt{\xi^2 - 1} \omega_n t} + C_2 e^{-\sqrt{\xi^2 - 1} \omega_n t} \right) \quad (2.11)$$

- Sistema con amortiguación crítica: $\xi = 1$

Para este caso la solución del sistema es (2.12):

$$s_{1,2} = -\omega_n \rightarrow$$

$$x(t) = (C_1 + C_2) e^{-\omega_n t} = C e^{-\omega_n t} \quad (2.12)$$

- Sistema subamortiguado: $\xi < 1$

La solución para este caso es (2.13):

$$s_{1,2} = \left(-\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2} \right) \cdot \omega_n \rightarrow$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left(C_1 e^{i\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t} + C_2 e^{-i\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t} \right) \quad (2.13)$$

Si se define $\omega_d = \sqrt{1-\xi^2} \omega_n$ como la frecuencia amortiguada, la solución queda según (2.14):

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left(C_1 e^{i\omega_d t} + C_2 e^{-i\omega_d t} \right) = C e^{-\xi\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \phi) \quad (2.14)$$

La forma de la respuesta para cada uno de estos sistemas está representada en la Figura 2.3 [71]:

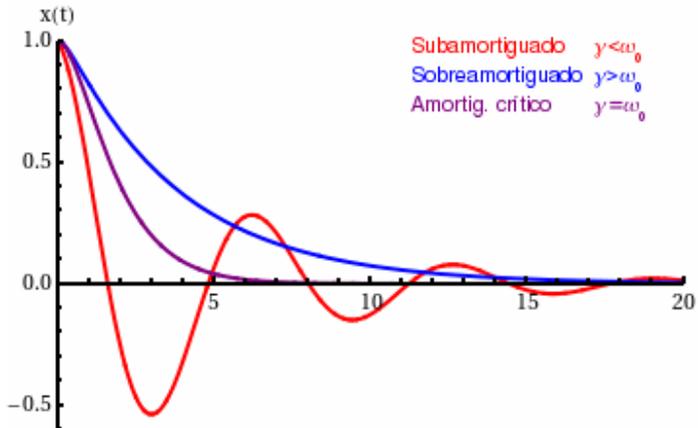


Figura 2.3. Respuesta de un sistema sobreamortiguado (azul), de un sistema con amortiguamiento crítico (morado) y de un sistema subamortiguado (rojo) [71]

Las respuestas de los tres casos se amortiguan, pero se observa que para el sistema subamortiguado aparece además un movimiento oscilatorio, de

hecho, esta respuesta es la superposición de una exponencial negativa y un movimiento ondulatorio.

Las respuestas reales de los sistemas mecánicos se clasifican dentro de los sistemas subamortiguados, de ahí la importancia del estudio de este caso.

2.2.4.3 VIBRACIONES FORZADAS ARMÓNICAS SIN AMORTIGUAMIENTO

La ecuación del movimiento está representada en la Ecuación (2.15):

$$m \ddot{x}(t) + k x(t) = F \cos(\omega t) \quad (2.15)$$

La solución es suma de la solución homogénea más la particular. La solución homogénea ya ha sido estudiada en el apartado 2.2.4.1, lo que queda por conocer es la solución particular.

La solución particular tiene la forma (2.16):

$$x_p(t) = C \cos(\omega t) = \delta_{est} \underbrace{\frac{1}{1-r^2}}_{C/\delta_{est}} \cos(\omega t) \quad (2.16)$$

donde $\delta_{est} = \frac{F}{k}$ es la respuesta estática, y $r = \frac{\omega}{\omega_n}$, la división entre la frecuencia de la fuerza y la frecuencia natural del sistema.

El valor de $\frac{C}{\delta_{est}}$ se denomina función de respuesta en frecuencia (FRF). Su valor corresponde con la amplitud de la respuesta dinámica dividida por la amplitud de la respuesta en estática, y sirve para conocer en qué valor se amplifica la respuesta dinámica frente a la estática.

La representación de la respuesta en frecuencia respecto al parámetro $r = \frac{\omega}{\omega_n}$, se encuentra representada en la Figura 2.4.

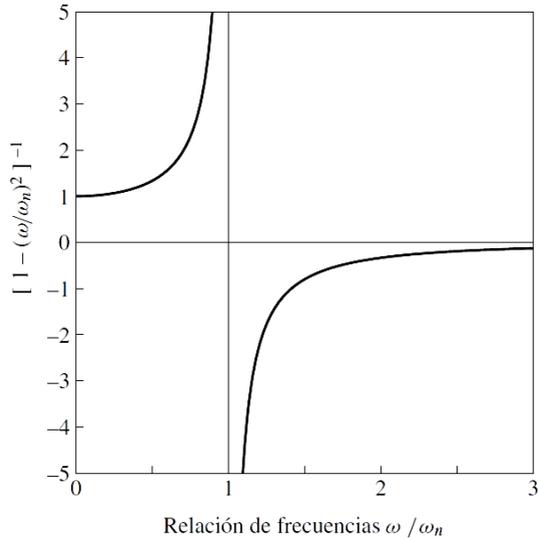


Figura 2.4. Función de respuesta en frecuencia [70]

En la Figura 2.5 se grafica la respuesta del sistema ante una fuerza armónica de frecuencia igual a la frecuencia natural del sistema, esto es $\omega = \omega_n$.

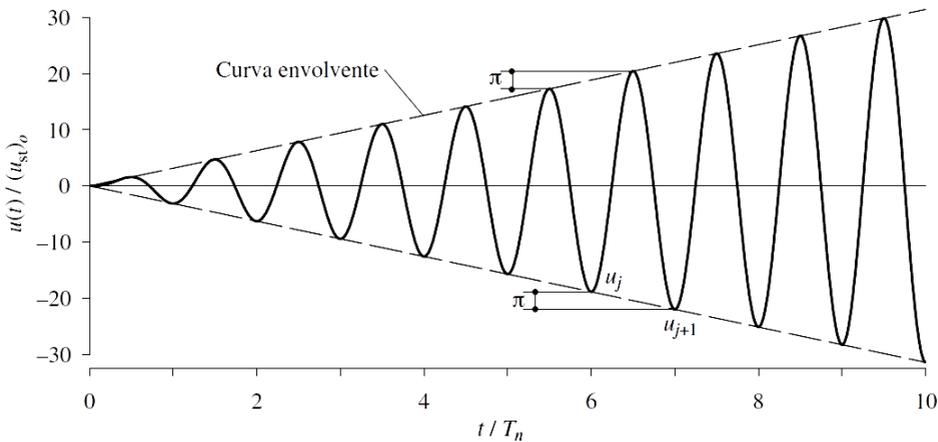


Figura 2.5. Respuesta de un sistema forzado armónico sin amortiguamiento, ante una fuerza sinusoidal de frecuencia $\omega = \omega_n$ [70]

Se observa que, cuando la frecuencia de oscilación de la fuerza armónica es la misma que la frecuencia natural del sistema, la respuesta se amplifica, se hace cada vez más grande. Para $\omega = \omega_n$, la función de respuesta en frecuencia no tiene solución y su valor tiende a infinito.

2.2.4.4 VIBRACIONES FORZADAS ARMÓNICAS CON AMORTIGUAMIENTO

En este caso la ecuación del movimiento es (2.17):

$$m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = F(t) = Fe^{i\omega t} \quad (2.17)$$

Y la forma de la solución particular, que es la que interesa conocer, es (2.18):

$$x_p(t) = Ce^{i\omega t} \quad (2.18)$$

Sustituyendo la forma de la solución (2.18) en la Ecuación (2.17), y realizando cálculos, se obtiene (2.19):

$$x_p(t) = \delta_{est} |H(i\omega)| e^{i\omega t - i\phi} \quad (2.19)$$

Donde los valores de los distintos términos de la solución están recogidos en las expresiones (2.20):

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{est} = \frac{F}{k} \\ H(i\omega) = \frac{1}{(1-r^2) + i2\xi r} \\ |H(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}, \quad \phi = \arctg \frac{2\xi r}{1-r^2} \\ r = \frac{\omega}{\omega_n} \end{array} \right. \quad (2.20)$$

En la Figura 2.6 está representada la función de respuesta en frecuencia, $|H(i\omega)|$, también denominada factor de amplificación dinámica, y el ángulo

de desfase, ϕ , respecto al valor de $r = \frac{\omega}{\omega_n}$.

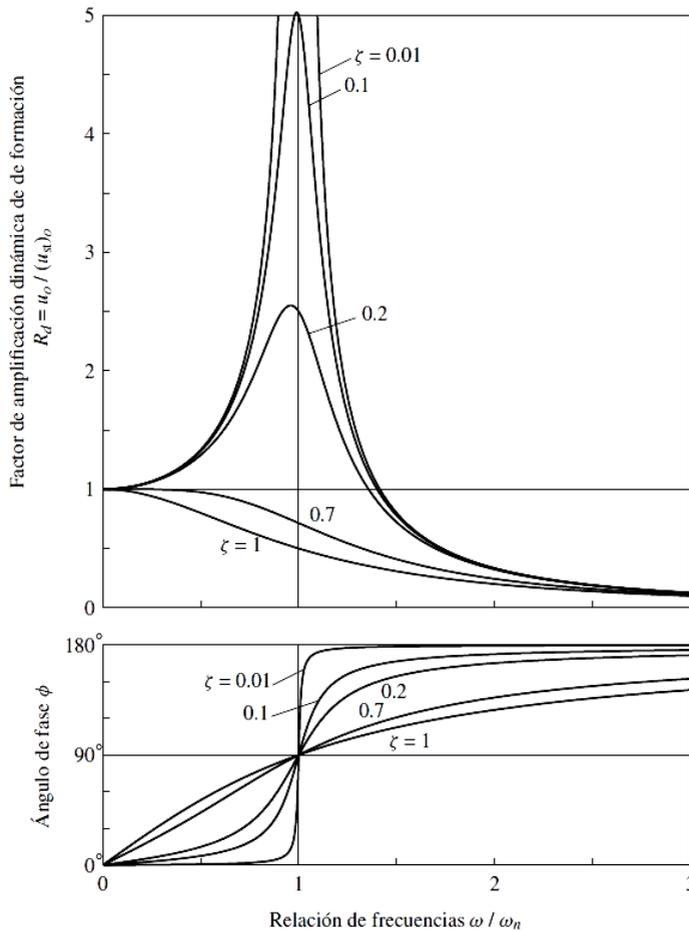


Figura 2.6. Factor de amplificación dinámica y ángulo de desfase [70]

En la Figura 2.7 se grafica la respuesta de un sistema forzado armónico con amortiguamiento para el caso $\omega = \omega_n$, esto es, ante una fuerza armónica con frecuencia de oscilación igual a la frecuencia natural del sistema.

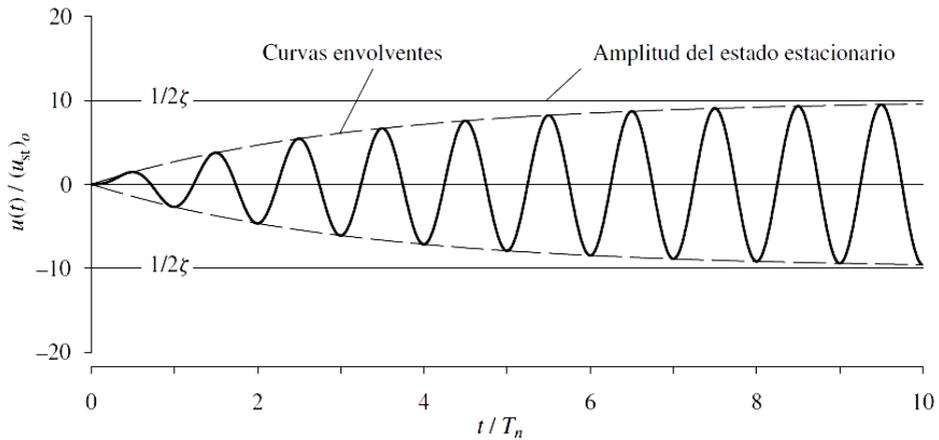


Figura 2.7. Respuesta de un sistema forzado armónico con amortiguamiento [70]

Como se puede observar en la Figura 2.7, cuando la frecuencia de oscilación de la fuerza armónica es la misma que la frecuencia natural del sistema, la respuesta se amplifica y se hace cada vez más grande. Las envolventes de la respuesta para este caso se tratan de curvas, a diferencia del caso del sistema sin amortiguamiento, donde las envolventes eran líneas rectas (Figura 2.5).

La función de respuesta en frecuencia presenta un pico cuando $\omega = \omega_n$ (Figura 2.6), más grande cuanto más pequeño es el valor del coeficiente de amortiguamiento. En este caso la respuesta no tiende a infinito, como consecuencia del amortiguamiento, pero sí es de valor muy grande.

2.2.5 SISTEMAS DE N G.D.L.: MÉTODOS DE CÁLCULO

La ecuación general de un sistema de n grados de libertad en comportamiento dinámico es la siguiente (2.21):

$$[m]\{\ddot{x}(t)\} + [c]\{\dot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{F(t)\} \quad (2.21)$$

donde los términos $[m]$, $[c]$ y $[k]$ son matrices de tamaño $n \times n$, y los términos $\{x(t)\}$, $\{\dot{x}(t)\}$ y $\{\ddot{x}(t)\}$ son vectores de n componentes. A diferencia de los términos de la ecuación de comportamiento en dinámica de un sistema de 1 g.d.l., Ecuación (2.3), que son elementos de una componente.

En función que estén presentes los distintos términos en la ecuación del comportamiento general (2.21), se tienen los distintos casos de movimientos, análogos al sistema de 1 g.d.l. Estos casos están representados en las expresiones (2.22):

-Vibración libre

$$\text{-Sin amortiguamiento} \rightarrow [m]\{\ddot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = 0$$

$$\text{-Con amortiguamiento} \rightarrow [m]\{\ddot{x}(t)\} + [c]\{\dot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = 0 \quad (2.22)$$

-Vibración forzada

$$\text{-Sin amortiguamiento} \rightarrow [m]\{\ddot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{F(t)\}$$

$$\text{-Con amortiguamiento} \rightarrow [m]\{\ddot{x}(t)\} + [c]\{\dot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{F(t)\}$$

2.2.6 VIBRACIÓN LIBRE NO AMORTIGUADA. ANÁLISIS MODAL

El análisis modal es un método de cálculo para obtener las frecuencias naturales de vibración, y los modos de vibración de un sistema dinámico.

Consiste en resolver la Ecuación (2.23), que representa un sistema libre sin amortiguamiento, de n g.d.l.

$$[m]\{\ddot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = 0 \quad (2.23)$$

La forma de la solución del sistema anteriormente descrito es (2.24):

$$\begin{aligned}\{x(t)\} &= \{\phi\} e^{i\omega t} \\ \{\dot{x}(t)\} &= i\omega \{\phi\} e^{i\omega t} \\ \{\ddot{x}(t)\} &= -\omega^2 \{\phi\} e^{i\omega t}\end{aligned}\quad (2.24)$$

Sustituyendo las expresiones de (2.24) en (2.23), se obtiene la expresión (2.25):

$$([D] - \omega^2 [I])\{\phi\} = 0 \quad (2.25)$$

donde $[D] = [m]^{-1}[k]$ se denomina matriz dinámica.

La resolución de la expresión (2.25) consiste en resolver el sistema homogéneo de tamaño $n \times n$ (siendo n los g.d.l. del sistema). Se trata de un problema de autovalores y autovectores, y para que tenga solución, el determinante de la matriz del sistema tiene que ser igual a 0:

$$\text{Det} |[D] - \omega^2 [I]| = 0$$

Realizando este cálculo se obtienen las frecuencias naturales de vibración, ω_i . Con las distintas frecuencias, ω_i , se pueden calcular los vectores ϕ_i , que son los autovectores del sistema, y que corresponden con los modos de vibración. Estos representan la deformada de cada frecuencia natural.

$$\begin{cases} \omega_i \equiv \text{Frecuencias naturales de vibración, con } \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n \\ \{\phi_i\} \equiv \text{Modos de vibración} \\ \text{con } i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (2.26)$$

En la Figura 2.8 están representados los 3 primeros modos de vibración de una viga empotrada-libre.

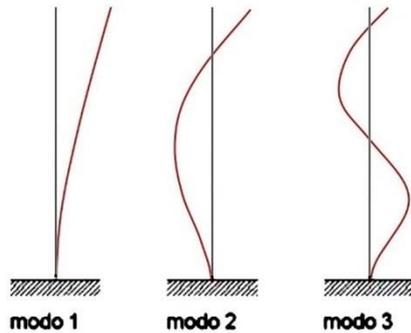


Figura 2.8. 3 primeros modos de vibración de una viga empotrada-libre
[71]

2.2.7 VIBRACIÓN FORZADA. MÉTODO DE SUPERPOSICIÓN MODAL

Los modos de vibración cumplen la propiedad de ser ortogonales respecto de las matrices de masa y rigidez. Si el vector $\{\phi\}$ representa un modo de vibración, se cumple las expresiones de (2.27):

$$\begin{aligned}
 \text{-Para modos distintos, } i \neq j: & \begin{cases} \{\phi_i\}^T [m] \{\phi_j\} = 0 \\ \{\phi_i\}^T [k] \{\phi_j\} = 0 \end{cases} \\
 \text{-Para modos iguales, } i = j: & \begin{cases} \{\phi_i\}^T [m] \{\phi_i\} = M_i \\ \{\phi_i\}^T [k] \{\phi_i\} = \omega_i^2 M_i = K_i \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Usando esta propiedad de ortogonalidad, y definiendo la matriz modal como la formada por los distintos modos de vibración colocados en columna, se pueden expresar la matriz de masa y rigidez de forma diagonal. En las ecuaciones de (2.28) están indicadas las operaciones correspondientes.

$$\begin{aligned}
 [\phi] &= [\{\phi_1\} \quad \{\phi_2\} \quad \cdots \quad \{\phi_n\}] \equiv \text{Matriz modal} \\
 \left\{ \begin{aligned}
 [\phi]^T [m] [\phi] &= [M] \equiv \text{Matriz diagonal} \\
 [\phi]^T [k] [\phi] &= [K] \equiv \text{Matriz diagonal} \\
 [\phi]^T [c] [\phi] &= \alpha [\phi]^T [m] [\phi] + \beta [\phi]^T [k] [\phi] = \\
 &\quad \alpha [M] + \beta [K] = [C] \equiv \text{Matriz diagonal}
 \end{aligned} \right. \quad (2.28)
 \end{aligned}$$

La independencia de los modos de vibración permite obtener el desplazamiento de un sistema dinámico como una combinación lineal de estos modos. Con esto se puede realizar la descomposición modal (2.29):

$$\{x(t)\} = [\phi] \{y(t)\} \quad (2.29)$$

donde las componentes del vector $\{x(t)\}$ son las coordenadas naturales, y las del vector $\{y(t)\}$ son las coordenadas modales.

Si se aplica la propiedad de ortogonalidad y la descomposición modal en un sistema forzado con amortiguación, se obtiene un sistema desacoplado, donde aparecen matrices diagonales.

Partiendo de la ecuación de comportamiento de un sistema forzado con amortiguación (2.30):

$$[m] \{\ddot{x}(t)\} + [c] \{\dot{x}(t)\} + [k] \{x(t)\} = \{F(t)\} \quad (2.30)$$

y usando la propiedad de ortogonalidad y la descomposición modal, se obtiene un sistema desacoplado, donde aparecen matrices diagonales. El desarrollo matemático está realizado en las expresiones (2.31):

$$\{x(t)\} = [\phi]\{y(t)\} \rightarrow \{\dot{x}(t)\} = [\phi]\{\dot{y}(t)\} \rightarrow \{\ddot{x}(t)\} = [\phi]\{\ddot{y}(t)\} \Rightarrow$$

$$[m][\phi]\{\ddot{y}(t)\} + [c][\phi]\{\dot{y}(t)\} + [k][\phi]\{y(t)\} = \{F(t)\}$$

Premultiplicando por la matriz modal $[\phi]$,

y teniendo en cuenta las relaciones:

(2.31)

$$\begin{cases} [\phi]^T [m] [\phi] = [M] \\ [\phi]^T [k] [\phi] = [K] \\ [\phi]^T [c] [\phi] = \alpha [M] + \beta [K] = [C] \end{cases} \Rightarrow$$

Se obtiene el sistema desacoplado:

$$[M]\{\ddot{y}(t)\} + [C]\{\dot{y}(t)\} + [K]\{y(t)\} = [\phi]^T \{F(t)\}$$

Con la expresión final de (2.31), se ha obtenido un sistema desacoplado de n sistemas de 1 g.d.l. Centrándonos en un grado de libertad genérico i, la ecuación a resolver es (2.32):

$$M_i \ddot{y}_i(t) + C_i \dot{y}_i(t) + K_i y_i(t) = \{\phi_i\}^T \{F(t)\} \quad (2.32)$$

donde

$$\begin{cases} M_i = \{\phi_i\}^T [m] \{\phi_j\} \\ K_i = \{\phi_i\}^T [k] \{\phi_j\} = \omega_i^2 M_i \\ C_i = \alpha M_i + \beta K_i \end{cases}$$

Si se divide la Ecuación (2.32) entre M_i , y teniendo en cuenta la razón o

coeficiente de amortiguamiento $\xi = \frac{C_i}{2M_i\omega_i}$, se tiene la ecuación de

comportamiento para el g.d.l. n (2.33):

$$\ddot{y}_i(t) + 2\xi\omega_i\dot{y}_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) = \frac{\{\phi_i\}^T}{\{\phi_i\}^T [m] \{\phi_j\}} \{F(t)\} \quad (2.33)$$

Por tanto, la resolución de un problema dinámico de n g.d.l. es equivalente a realizar:

- Un análisis modal con el que se determinan las frecuencias naturales y los modos de vibración.
- La resolución de n problemas de 1 g.d.l.

La solución de la ecuación correspondiente al g.d.l. n , es la suma de la solución homogénea, equivalente a un sistema de vibración libre con amortiguación de 1 g.d.l., más la solución particular (2.34):

$$y_i(t) = \underbrace{y_i(t)|_h}_{\text{Sol. homogénea}} + \underbrace{y_i(t)|_p}_{\text{Sol. particular}} \quad (2.34)$$

Las expresiones de la solución homogénea y particular son (2.35):

$$\begin{aligned} y_i(t)|_h &= e^{-\xi_i \omega_i t} (A_i \cdot \cos \omega_{id} t + B_i \cdot \text{sen } \omega_{id} t) \\ \text{con } \omega_{id} &= \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \\ y_i(t)|_p &= \frac{1}{M_i \omega_{id}} \int_{\tau=0}^{\tau=t} f(\tau) \cdot e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \text{sen } \omega_{id} (t-\tau) \cdot d\tau, \\ \text{con } f(\tau) &= \{\phi_i\}^T \{F(t)\} \end{aligned} \quad (2.35)$$

2.2.8 VIBRACIÓN FORZADA ARMÓNICA CON AMORTIGUAMIENTO. ANÁLISIS ARMÓNICO

El análisis armónico es un método de cálculo para el estudio de una vibración forzada armónica con amortiguamiento. La ecuación de comportamiento a considerar está representada en (2.36):

$$[m]\{\ddot{x}(t)\} + [c]\{\dot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{F\} e^{i\omega t} \quad (2.36)$$

Teniendo en cuenta la forma de la solución (2.37):

$$\begin{cases} \{x(t)\} = \{X\} e^{i\omega t} \\ \{\dot{x}(t)\} = \{X\} i\omega e^{i\omega t} \\ \{\ddot{x}(t)\} = -\{X\} \omega^2 e^{i\omega t} \end{cases} \quad (2.37)$$

y sustituyendo en (2.36) y realizando cálculos, se obtiene (2.38):

$$[-\omega^2 [M] + i\omega [C] + [K]] \{X\} = \{F\} \rightarrow [Z(i\omega)] \{X\} = \{F\} \quad (2.38)$$

donde $[Z(i\omega)] = [-\omega^2 [M] + i\omega [C] + [K]]$.

Considerando que $F_j = 0$, excepto para el g.d.l. k , que corresponde con el término F_k , y realizando cálculos en la expresión (2.38), se obtiene (2.39):

$$\begin{aligned} [Z(i\omega)] \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_k \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ F_k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_k \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = [Z(i\omega)]^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ F_k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \\ & \begin{pmatrix} X_1 / F_k \\ \vdots \\ X_k / F_k \\ \vdots \\ X_n / F_k \end{pmatrix} = [Z(i\omega)]^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.39)$$

En un sistema de n g.d.l., se puede determinar las funciones de respuesta en frecuencia (FRF), como:

$$\frac{X_j}{F_k} = [H_{jk}(i\omega)] \tag{2.40}$$

donde $[H(i\omega)] = [Z(i\omega)]^{-1}$, siendo $[Z(i\omega)]$ la impedancia del sistema.

Si se representa la respuesta en frecuencia del sistema respecto a la frecuencia, para cada frecuencia natural de vibración la respuesta es de valor muy grande, lo cual se traduce en la aparición de un pico.

Un ejemplo es la Figura 2.9, donde está representada la FRF experimental y la calculada con elementos finitos, tanto inicial como ajustada.

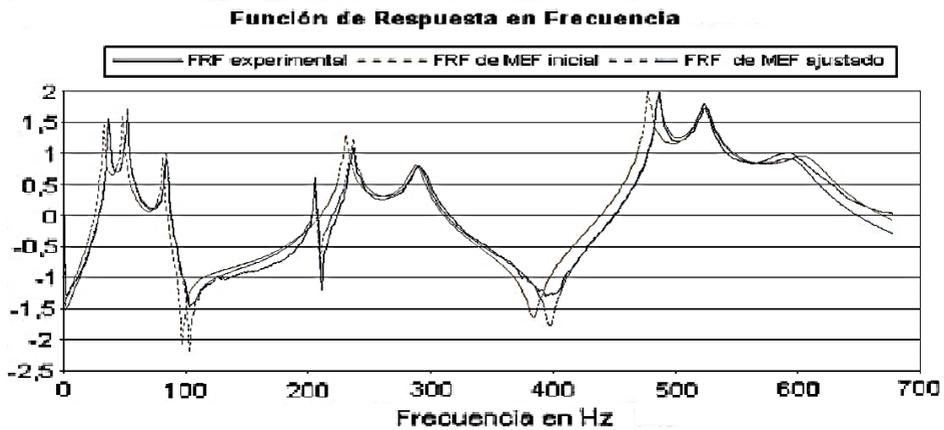


Figura 2.9. Ejemplo de función de respuesta en frecuencia [72]

2.3 ECUACIONES DE COMPORTAMIENTO DE LA MEMBRANA

2.3.1 MEMBRANA SIN TENSIÓN: CASO PLACA

Se considera que una placa es un cuerpo perfectamente elástico, homogéneo, isótropo y con un espesor pequeño en comparación de sus otras dimensiones.

La ecuación diferencial clásica que determina el movimiento transversal w de una placa viene dada por la Ecuación (2.41) [33]:

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.41)$$

donde D es la rigidez a flexión de la placa, definida por la siguiente Ecuación (2.42):

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.42)$$

E es el módulo de Young del material, ρh es la densidad por unidad de área de la placa, ρ es la densidad por unidad de volumen, h es el espesor de la placa, ν es el módulo de Poisson, t es el tiempo y $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$, donde ∇^2 es el operador de Laplace.

La expresión del operador de Laplace expresado en coordenadas polares, coordenadas usadas en el caso de membranas circulares, es la siguiente (2.43):

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2.43)$$

La solución para una placa en vibración libre se puede expresar como la

Ecuación (2.44) [33]:

$$w = W \cos pt \quad (2.44)$$

donde p es la frecuencia de vibración de la placa, expresada en radianes por unidad de tiempo, y W es función sólo de las coordenadas de posición.

Sustituyendo la Ecuación (2.44) en (2.41) se obtiene la siguiente expresión (2.45)

$$(\nabla^4 - k^4)W = 0; \text{ donde } k^4 = \frac{\rho h p^2}{D} \quad (2.45)$$

donde k es un parámetro definido como se ha determinado en (2.45).

Por lo general, es usual factorizar la Ecuación (2.45), quedando la Ecuación (2.46):

$$(\nabla^2 + k^2)(\nabla^2 - k^2)W = 0 \quad (2.46)$$

Usando la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales, la solución completa de la Ecuación (2.46) puede obtenerse superponiendo las soluciones de las expresiones siguientes (2.47):

$$\begin{cases} \nabla^2 W_1 + k^2 W_1 = 0 \\ \nabla^2 W_2 - k^2 W_2 = 0 \end{cases} \quad (2.47)$$

Si se expresa W según las componentes de Fourier en la variable θ se tiene la Ecuación (2.48):

$$W(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(r) \cos n\theta + \sum_{n=0}^{\infty} W_n^*(r) \sin n\theta \quad (2.48)$$

Sustituyendo la Ecuación (2.48) en (2.47), se puede obtener la solución general de la Ecuación (2.49) en coordenadas polares, cuya expresión matemática es:

$$W(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n J_n(kr) + B_n Y_n(kr) + C_n I_n(kr) + D_n K_n(kr)] \cos n\theta + \sum_{n=0}^{\infty} [A_n^* J_n(kr) + B_n^* Y_n(kr) + C_n^* I_n(kr) + D_n^* K_n(kr)] \sin n\theta \quad (2.49)$$

donde J_n y Y_n son las funciones de Bessel de orden n del 1° y 2° tipo respectivamente, I_n y K_n son las funciones modificadas de Bessel de orden n del 1 y 2° tipo respectivamente, y los coeficientes A_n , B_n , C_n , D_n , A_n^* , B_n^* , C_n^* y D_n^* determinan la forma del modo y se obtienen a partir de las condiciones de contorno.

Para el caso de una placa circular, usando coordenadas polares en el centro de la placa, la Ecuación (2.49) para un típico modo queda como sigue (2.50):

$$W_n = [A_n J_n(kr) + C_n I_n(kr)] \cos n\theta \quad (2.50)$$

donde el subíndice n corresponde con el número de diámetros nodales.

El problema de vibración de la placa circular fue resuelto por Kirchhoff [73]. La solución exacta implica el uso de las ecuaciones de Bessel, como se ha visto anteriormente.

Para el caso de una placa circular empotrada en el borde (Figura 2.10), las condiciones de contorno son de desplazamiento cero y giro cero en el borde de la misma. Estas ecuaciones están escritas en (2.51):

$$\begin{cases} w(a) = 0 \\ \frac{\partial w(a)}{\partial r} = 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

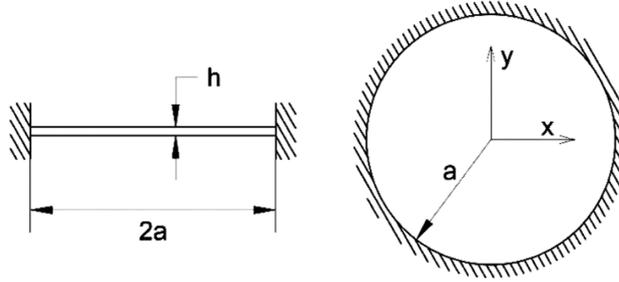


Figura 2.10. Placa circular empotrada

Sustituyendo las condiciones de contorno de la placa empotrada en la Ecuación (2.50), y buscando la solución no trivial, se llega a la Ecuación (2.52):

$$J_n(\lambda)I_{n+1}(\lambda) + I_n(\lambda)J_{n+1}(\lambda) = 0 \quad (2.52)$$

Donde $\lambda = ka$ son los autovalores de la ecuación, y determinan las frecuencias de resonancia.

Sustituyendo el parámetro k en la expresión del cuadrado del valor de los autovalores, haciendo cálculos y despejando el valor de p , se obtiene la expresión de las frecuencias de resonancia para este caso particular.

$$\lambda^2 = k^2 a^2 = a^2 \sqrt{\frac{\rho h p^2}{D}} = pa \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \rightarrow p = \frac{\lambda^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (2.53)$$

Los valores de λ^2 están determinados en la Tabla 2.1 [33]. En la tabla, los valores de n se refieren al número de diámetros nodales y s al número de círculos nodales de la frecuencia natural correspondiente.

Tabla 2.1. Valores de λ^2 para una placa circular empotrada [33]

s	λ^2 para valores de n y s							
	n=0	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7
0	10.2158	21.26	34.88	51.04	69.6659	90.7390	114.2126	140.0561
1	39.771	60.82	84.58	111.01	140.1079	171.8029	206.0706	242.8782
2	89.104	120.08	153.81	190.30	229.5186	271.4283	316.0015	363.2097
3	158.183	199.06	242.71	289.17	338.4113	390.3896		
4	247.005	297.77	351.38	407.72				
5	355.568	416.20	479.65	545.97				
6	483.872	554.37	627.75	703.95				
7	631.914	712.30	795.52	881.67				
8	799.702	889.95	983.07	1079.0				
9	987.216	1087.4	1190.4	1296.2				

s	λ^2 para valores de n y s							
	n=8	n=9	n=10	n=11	n=12	n=13	n=14	n=15
0	168.2445	198.7561	231.5732	266.6790	304.0601	343.7038	385.5996	
1	282.1977	324.0036	368.2734					

Otros autores calcularon las frecuencias de resonancia de placas y membranas usando otros procedimientos. Timoshenko [32] usó el cálculo de la energía cinética y potencial de flexión de la placa para obtener las frecuencias naturales.

Para el caso de placas circulares, el potencial de flexión en coordenadas polares se puede calcular con la Ecuación (2.54) [32]:

$$V = \pi D \int_0^a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 r dr \quad (2.54)$$

donde V es el potencial de flexión.

Por otro lado, la expresión de la energía cinética es (2.55) [32]:

$$E_c = \frac{\pi \gamma h}{g} \int_0^a \dot{w}^2 r dr \quad (2.55)$$

donde E_c representa la energía cinética, $\frac{\gamma h}{g}$ es la masa por unidad de área de la placa, siendo γ el peso por unidad de volumen y g la aceleración de la gravedad.

Obteniendo las expresiones de las frecuencias de resonancia mediante la ecuación diferencial de vibración de la placa para cada caso, se obtiene la Ecuación (2.56):

$$p = \frac{\alpha}{a^2} \sqrt{\frac{gD}{\gamma h}} = \frac{\alpha}{a^2} \sqrt{\frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)\rho}} \quad (2.56)$$

Esta expresión es equivalente a la Ecuación (2.53), donde $\frac{\gamma h}{g} = \rho h$ es la masa por unidad de área de la placa, ρ es la densidad y $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ es

la rigidez a flexión de la placa. Además $\alpha = \lambda^2$, es una constante diferente para cada frecuencia natural, que depende del número de diámetros nodales, n , y del número de círculos nodales, s , de la frecuencia natural correspondiente. Sus valores están en la Tabla 2.1 [33].

En la Figura 2.11 pueden verse las formas de deformación para los 9 primeros modos de vibración, y los correspondientes valores de n y s para estos modos:

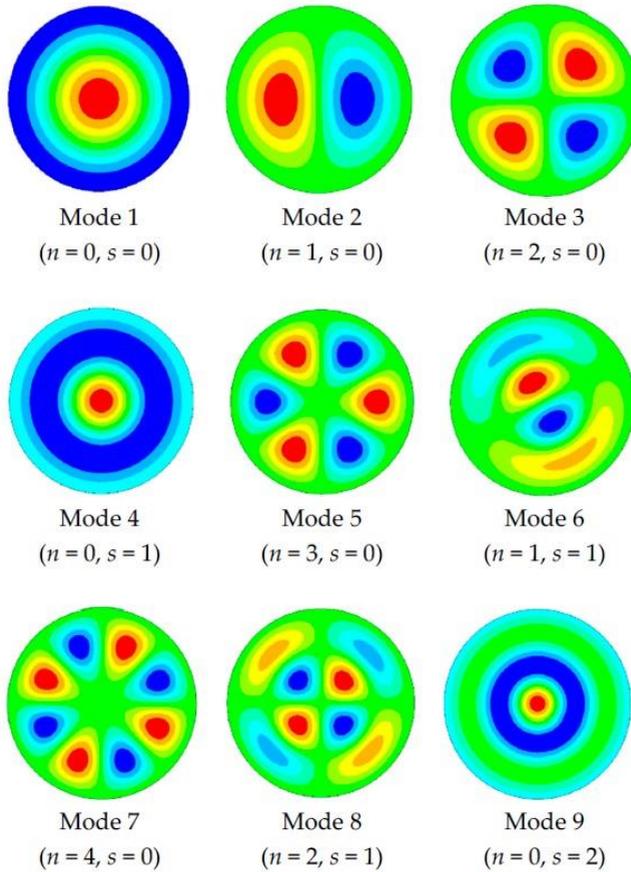


Figura 2.11. Formas de deformación de los primeros 9 modos de vibración de una membrana circular

2.3.2 MEMBRANA CON TENSIÓN: CASO MEMBRANA

Una membrana se considera como una lámina perfectamente flexible e infinitamente delgada, de material y espesor uniforme. Además, está sometida a una tensión radial en su plano, de tal valor, que se puede despreciar la fluctuación de esta tensión debida a las pequeñas deflexiones durante la vibración, pero el comportamiento de la misma se encuentra en el régimen elástico.

El estudio de las ecuaciones que rigen la vibración de una membrana circular ha sido estudiada por gran cantidad de autores, entre ellos Rayleigh [31], y en los estudios de este autor está basado el desarrollo teórico de este apartado.

La ecuación diferencial que rige el desplazamiento transversal de la membrana w es (2.57):

$$-T\nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho h} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.57)$$

Siendo T la tensión radial aplicada en el plano de la membrana por unidad de longitud en el borde.

Centrándonos en el caso de una membrana circular apoyada en su borde, la ecuación del movimiento hay que expresarla en coordenadas polares.

Además introduciendo el parámetro $c^2 = \frac{T}{\rho h}$ se llega a la Ecuación (2.58):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.58)$$

Considerando además el parámetro $k = \frac{p}{c}$, la ecuación diferencial (2.58) se queda de la siguiente forma (2.59):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + k^2 w = 0 \quad (2.59)$$

El desplazamiento w es sólo una función de r y θ , y expandiendo w en serie de Fourier, la expresión queda como (2.60):

$$w = w_o + w_1 \cos(\theta + \alpha_1) + w_2 \cos 2(\theta + \alpha_2) + \dots \quad (2.60)$$

En el cual w_o, w_1, \dots son funciones de la coordenada r , pero no de la coordenada θ . Si se sustituye la Ecuación (2.60) en la expresión (2.59), se obtiene la Ecuación (2.61):

$$\sum \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_n}{\partial r} + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) w_n \right) \cos n(\theta + \alpha_n) = 0 \quad (2.61)$$

Realizando operaciones, los términos de (2.61) pueden separarse según la expresión (2.62):

$$\frac{\partial^2 w_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_n}{\partial r} + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) w_n = 0 \quad (2.62)$$

Recurriendo a la notación de las funciones de Bessel, la expresión de la componente normal del desplazamiento de vibración puede ser escrito como la Ecuación (2.63):

$$w = \sum \sum J_n(kr) (\Phi \cos n\theta + \Psi \sin n\theta) \quad (2.63)$$

donde Φ y Ψ son constantes.

La ecuación de la condición de contorno implica la Ecuación (2.64):

$$J_n(ka) = 0 \quad (2.64)$$

Como para el caso de placa circular, estudiado en el apartado 2.3.1, Timoshenko [32] obtuvo la expresión de las frecuencias de resonancia para una membrana circular usando el cálculo de la energía cinética y potencial asociadas a la vibración de la membrana.

Usando la ecuación diferencial de vibración de la placa para cada caso, se obtiene la expresión para obtener las frecuencias de resonancia (2.65):

$$p = \frac{\alpha}{a} \sqrt{\frac{gT}{\omega}} \quad (2.65)$$

donde $\omega = \rho gh$ es el peso por unidad de área, $T = \sigma h$ es la tensión por unidad de longitud en el contorno, y σ es la tensión por unidad de superficie. Teniendo en cuenta la relación anterior, la Ecuación (2.65) se puede expresar como la siguiente (2.66):

$$p = \frac{\alpha}{a} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \quad (2.66)$$

α es una constante diferente para cada frecuencia natural, que depende del número de diámetros nodales, n , y del número de círculos nodales, s , de la frecuencia natural calculada. Sus valores están en la Tabla 2.2.

Tabla 2.2. Valores de α para una membrana circular [31]

s	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
1	2.404	3.832	5.135	6.379	7.586	8.780
2	5.520	7.016	8.417	9.760	11.064	12.339
3	8.654	10.173	11.620	13.017	14.373	15.700
4	11.792	13.323	14.796	16.224	17.616	18.982
5	14.931	16.470	17.960	19.410	20.827	22.220
6	18.071	19.616	21.117	22.583	24.018	25.431
7	21.212	22.760	24.270	25.749	27.200	28.628
8	24.353	25.903	27.421	28.909	30.371	31.813

El parámetro α es similar al del caso de la placa, pero el valor numérico de los mismos es diferente. Cabe destacar que en la Tabla 2.2, dada por el autor [31], el parámetro s empieza en valor 1 en vez de 0, como ocurre para el caso placa (Tabla 2.1).

2.3.3 MEMBRANA CON CIERTO NIVEL DE TENSIÓN: CASO INTERMEDIO

Wah [60] estudió la vibración de placas circulares sometidas a un cierto nivel de tensión o compresión radial, para el caso apoyado y empotrado en el borde. El desarrollo de este apartado está basado en los estudios de este autor.

Considerando una placa circular sometida a una tensión radial uniforme en su plano T , la ecuación diferencial que determina el desplazamiento transversal al mismo es la siguiente (2.67):

$$\nabla^4 w - \frac{T}{D} \nabla^2 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.67)$$

El desplazamiento w puede escribirse según la Ecuación (2.68):

$$w = R(r)\Theta(\theta)\sin pt \quad (2.68)$$

donde R es una función sólo de la variable r , y Θ es una función sólo de la coordenada θ .

Sustituyendo la Ecuación (2.68) en (2.67), se obtiene la expresión (2.69):

$$\left(\nabla^2 + \frac{\alpha^2}{a^2} \right) \left(\nabla^2 - \frac{\beta^2}{a^2} \right) R\Theta = 0 \quad (2.69)$$

donde los valores de los parámetros α^2 y β^2 están determinados en las ecuaciones de (2.70):

$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{Ta^2}{2D} \left[\left(1 + \frac{4p^2\rho D}{T^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \\ \beta^2 = \frac{Ta^2}{2D} \left[\left(1 + \frac{4p^2\rho D}{T^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \end{cases} \quad (2.70)$$

La solución general de la ecuación diferencial que rige el movimiento (2.67), puede ser escrita de la forma siguiente (2.71):

$$w = \left[A_n J_n \left(\frac{\alpha r}{a} \right) + B_n I_n \left(\frac{\beta r}{a} \right) \right] (\cos n\theta + \lambda_n \sin n\theta) \sin pt \quad (2.71)$$

donde A_n , B_n y λ_n son constantes arbitrarias. Los parámetros α^2 y β^2 , además de cumplir las ecuaciones (2.70), tienen que cumplir la relación de (2.72):

$$\beta^2 - \alpha^2 = \frac{Ta^2}{D} \quad (2.72)$$

Para el caso particular de la placa circular empotrada en su borde, que debe satisfacer las condiciones de contorno de desplazamiento y giro cero a lo largo de todo su borde, (condiciones definidas en (2.51)), usando estas condiciones e introduciéndolas en (2.71), se obtiene las ecuaciones (2.73):

$$\begin{cases} A_n J_n(\alpha) + B_n I_n(\beta) = 0 \\ A_n [nJ_n(\alpha) - J_{n+1}(\alpha)] + B_n [nI_n(\beta) + \beta I_{n+1}(\beta)] = 0 \end{cases} \quad (2.73)$$

Introduciendo el parámetro $\frac{T}{T^*} = \phi$, donde $T^* = 14.68 \frac{D}{a^2}$, y sustituyendo en (2.72) se obtiene (2.74):

$$\beta^2 - \alpha^2 = 14.68\phi \quad (2.74)$$

Los valores de tensión T que corresponden a valores negativos del parámetro ϕ , corresponden a compresión radial aplicada en la placa, mientras que valores positivos de ese parámetro implican tracción radial. En concreto, el valor de T para el cual $\phi = -1$, corresponde a la carga de pandeo de la placa comprimida.

La expresión que determina las frecuencias naturales para la placa circular empotrada en sus bordes, sujeto a un cierto nivel de tensión o compresión, es la siguiente (2.75)

$$p = \frac{\alpha}{a^2} \left(\frac{Ta^2}{D} + \alpha^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.75)$$

La frecuencia de la placa sometida a tensión radial se aproxima a la de la membrana si se cumple la condición de la Ecuación (2.76):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha^2 D}{a^2 T} \right) \ll 1 \quad (2.76)$$

Los valores de los parámetros α y β para el caso de la placa empotrada en su borde, vienen dados en la Tabla 2.3 [60], en función del parámetro ϕ , del número de diámetros nodales, n , y del número de círculos nodales, s , de la frecuencia natural correspondiente.

Tabla 2.3. Valores de α y β para una placa circular empotrada [60]

ϕ	s	λ^2 para valores de n y s								
		$n=0$			$n=1$			$n=2$		
		α	β	$\alpha\beta$	α	β	$\alpha\beta$	α	β	$\alpha\beta$
2.00	0	2.31	3.71	8.55	3.71	4.71	17.47	5.07	5.84	29.55
	1	5.46	6.18	33.75	6.93	7.51	52.05	8.30	8.79	72.97
	2	8.61	9.09	78.28	10.17	10.57	107.54	11.60	11.95	138.62
1.50	0	2.30	3.40	7.81	3.70	4.47	16.55	5.07	5.66	28.62
	1	5.46	6.01	32.79	6.93	7.37	51.07	8.30	8.67	71.97
	2	8.61	8.97	77.27	10.17	10.47	106.52	11.60	11.87	137.67
1.00	0	2.28	3.07	6.99	3.69	4.22	15.57	5.06	5.46	27.62
	1	5.46	5.83	31.80	6.92	7.22	49.94	8.30	8.55	70.96
	2	8.61	8.73	76.34	10.17	10.37	105.50	11.60	11.78	136.65
0.50	0	2.26	2.68	6.05	3.68	3.96	14.55	5.06	5.26	26.64
	1	3.45	5.64	30.78	6.92	7.07	48.92	8.30	8.43	69.93
	2	8.61	8.73	75.21	10.17	10.27	104.49	11.60	11.69	135.60
0.25	0	2.24	2.46	5.52	3.67	3.81	13.98	5.06	5.16	26.12
	1	5.45	5.55	30.25	6.92	7.00	48.41	8.30	8.36	69.39
	2	8.61	8.67	74.69	10.17	10.22	103.94	11.60	11.64	135.02
0	0	2.22	2.22	4.94	3.67	3.67	13.47	5.06	5.06	25.60
	1	5.45	5.45	29.72	6.92	6.92	47.89	8.30	8.30	68.89
	2	8.61	8.61	74.15	10.17	10.17	103.43	11.60	11.60	134.56
-0.25	0	2.20	1.94	4.27	3.66	3.51	12.86	5.06	4.96	25.07
	1	5.45	5.35	29.17	6.92	6.84	47.36	8.30	8.24	68.36
	2	8.61	8.55	73.62	10.17	10.12	102.90	11.60	11.56	134.16
-0.50	0	2.16	1.60	3.46	3.65	3.35	12.23	5.06	4.85	24.53
	1	5.45	5.25	28.62	6.91	6.76	46.78	8.30	8.17	67.83
	2	8.61	8.49	73.09	10.17	10.07	102.37	11.60	11.51	133.52
-1.00	0	2.05	0	0	3.64	3.01	10.95	5.06	4.63	23.41
	1	5.45	5.05	27.49	6.91	6.60	45.60	8.30	8.04	67.76
	2	8.61	8.36	72.00	10.17	9.96	101.30	11.60	11.41	132.36

2.4 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

El método de los elementos finitos es un método numérico bien conocido y ampliamente usado en el ámbito de la mecánica de medios continuos. Los conceptos básicos y la formulación sobre este método pueden consultarse en la amplia bibliografía que hay al respecto [65–69].

Con este método de cálculo se reduce un sistema real de infinitos grados de libertad, a otro con n grados de libertad, cuyo comportamiento sea similar al sistema original, al menos en aquellos aspectos de estudio que se pretende representar. Al final se pasa de un sistema continuo a uno discontinuo, con n g.d.l.

Cuanto mayor sea el número de grados de libertad considerado, más se acercará el modelo considerado al sistema real. Pero el grado de discretización debe ser un equilibrio entre el coste computacional y la precisión buscada con el modelo. La discretización del modelo se determina con el nivel de densidad de mallado, factor que es de suma importancia para el buen resultado del método.

Otra condición que se necesita introducir en el programa para la total resolución, son las condiciones de contorno.

En este trabajo se utiliza el programa ANSYS v19 para aplicar el método de elementos finitos, y obtener la vibración estructural de una membrana excitada por medios acústicos. Se aplicará el análisis modal y armónico de ciertas geometrías de membranas. El cálculo teórico de ambos análisis se ha explicado en los apartados 2.2.6 y 2.2.8, respectivamente.

ANSYS tiene dos interfaces gráficas de usuario, con las que se puede realizar la construcción, el análisis y la visualización de modelos y resultados.: ANSYS Workbench y ANSYS Mechanical APDL.

- ANSYS Workbench: Esta interface está diseñada para trabajar utilizando principalmente el ratón para seleccionar los elementos del menú, y el teclado para incluir valores de parámetros y nombrar objetos.
- ANSYS Mechanical APDL: En esta interface se puede trabajar usando el ratón para seleccionar elementos del menú, o se puede escribir comandos APDL en un cuadro de entrada. Ésta es la interface utilizada para la realización de este trabajo, escribiendo los comandos en el cuadro de entrada.

2.4.1 TIPO DE ELEMENTOS UTILIZADOS

Entre los tipos de elementos definidos en ANSYS para las simulaciones realizadas, hay que distinguir entre: los elementos usados para definir el fluido (aire) y los usados para definir los sólidos (membrana).

En el caso del análisis modal, la única geometría introducida en el programa ha sido el elemento membrana, al que se le ha impuesto condiciones de contorno de empotramiento, y al que se le ha asignado el tipo de elemento SHELL181.

Para el caso del análisis armónico, se han introducido varias geometrías, entre ellas está la membrana, al que se le ha asignado el tipo de elemento SOLID185 y el aire de alrededor. Para simular el aire, se ha definido una esfera alrededor de la membrana, a cuyo interior se le ha asignado el tipo de

elemento FLUID30, y a la superficie exterior de esa esfera se le ha asignado el tipo de elemento FLUID130.

2.4.1.1 FLUID30: ELEMENTO DE FLUIDO ACÚSTICO 3D

FLUID30 es un elemento acústico de bloque 3D lineal definido por ocho nodos, sin nudos laterales medios. Las posibles configuraciones geométricas del elemento están representadas en la Figura 2.12, e incluyen un bloque (hexaedro), una cuña, una pirámide y un tetraedro.

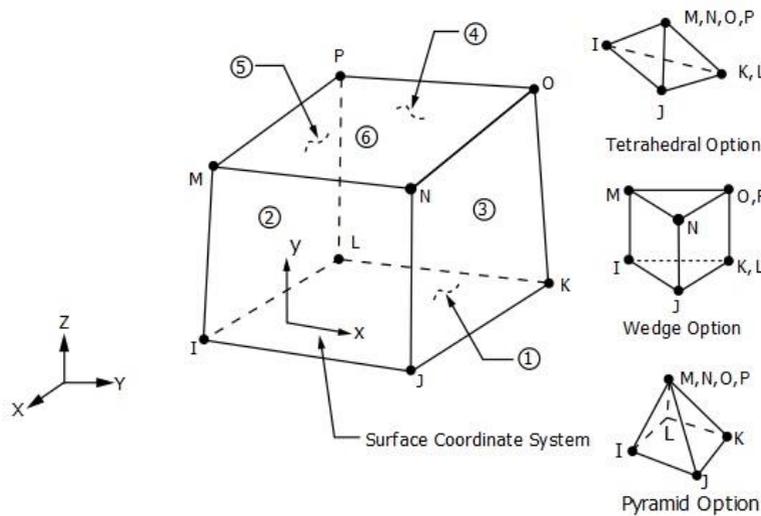


Figura 2.12. Configuraciones geométricas del elemento FLUID30 [74]

Cada nodo tiene tres grados de libertad de traslación a lo largo de los ejes: 'x', 'y' y 'z', y un grado de libertad de presión, en total, cuatro grados de libertad. Este elemento es capaz de modelar la interacción entre fluido y estructura, y los tres grados de libertad traslacionales sólo son aplicables en los nodos de la interface fluido-estructura.

2.4.1.2 FLUID130: ELEMENTO ACÚSTICO INFINITO 3D

El elemento FLUID130 es un elemento 3D destinado a proporcionar un límite acústico infinito alrededor de una malla de elementos acústicos 3D, que incluyen el FLUID30, entre otros, utilizado en nuestro caso para el interior de la esfera de aire. Con este elemento las ondas de presión acústicas salientes se absorben con poca reflexión en el fluido.

La Figura 2.13 muestra la geometría del elemento FLUID130, que consiste en un cuadrilátero o una forma triangular degenerada.

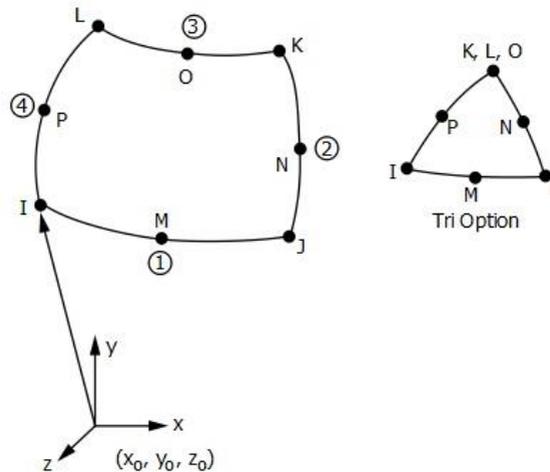


Figura 2.13. Configuraciones geométricas del elemento FLUID130 [74]

El elemento se define con cuatro nodos si se conecta a los elementos FLUID30, como es nuestro caso, ya que no tienen nodo en el lado medio, o con 8 si se conectan con elementos que sí tienen ese nodo en el lado medio. Cada nodo del elemento FLUID130 tiene un único grado de libertad de presión.

El elemento debe localizarse en el límite esférico de un dominio de fluido acústico, mallado con elementos FLUID30, FLUID220 y FLUID221, con

radio RAD y centro ubicado en el centro de la estructura o cerca de ella. La Figura 2.14 muestra un ejemplo de uso de los elementos FLUID130.

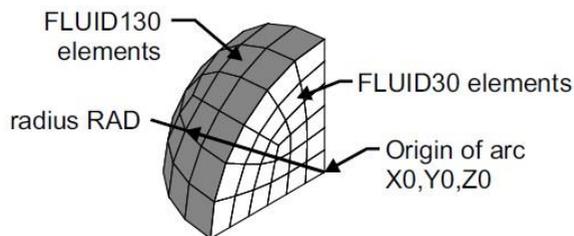


Figura 2.14. Elementos FLUID130 en el exterior de un volumen esférico de elementos FLUID30 [68]

2.4.1.3 SOLID185: ELEMENTO PARA ESTRUCTURAS SÓLIDAS 3D

Es un elemento que se utiliza para modelar estructuras sólidas 3D. Está definido por ocho nodos, con tres grados de libertad de traslación en las tres direcciones nodales 'x', 'y' y 'z'.

El elemento tiene las propiedades de plasticidad, hiperelasticidad, rigidez por tensión, fluencia, gran deflexión y gran capacidad de deformación. Con este elemento se puede simular comportamientos mixtos como materiales elastoplásticos casi incompresibles y materiales hiperelásticos totalmente incompresibles.

En la Figura 2.15 está representado la geometría estructural del elemento.

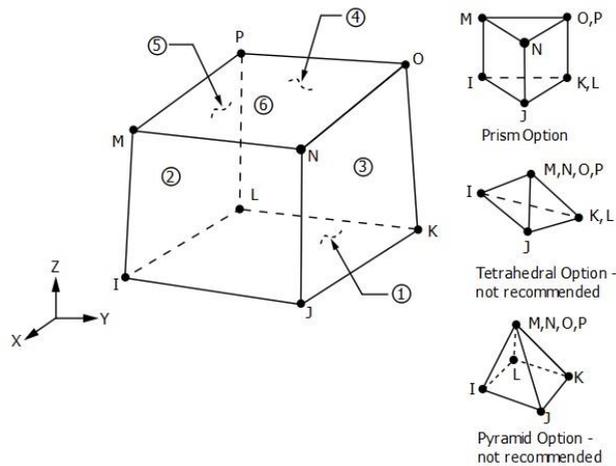


Figura 2.15. Geometría estructural del elemento SOLID185 [74]

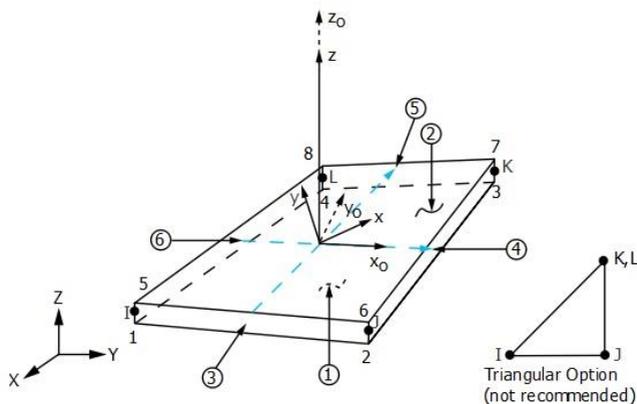
2.4.1.4 SHELL181: ELEMENTO PARA ESTRUCTURAS DE CAPA

Este elemento es adecuado para el análisis de estructuras de espesor pequeño a moderadamente grueso. Es un elemento que tiene cuatro nodos, con seis grados de libertad cada nodo: las traslacionales en las direcciones: ‘x’, ‘y’ y ‘z’, y las rotacionales en los ejes: ‘x’, ‘y’ y ‘z’.

El uso del elemento SHELL181 es ideal para aplicaciones lineales, de gran rotación y/o no lineales de gran deformación. En el caso de análisis no lineales se tiene en cuenta el cambio de grosor.

El comportamiento de este elemento permite deformaciones de la membrana en la simulación, sin embargo, los cambios de curvatura en un incremento de tiempo se consideran pequeños.

La Figura 2.16 muestra la geometría del elemento SHELL181, donde se puede ver las ubicaciones de los nodos y del sistema de coordenadas del elemento. Este elemento está definido por cuatro nodos, en la figura: I, J, K y L.



x_0 = Element x-axis if ESYS is not provided.

x = Element x-axis if ESYS is provided.

Figura 2.16. Geometría del elemento SHELL181 [74]

2.4.2 INTERACCIÓN FLUIDO-ESTRUCTURA

En Howard [68] se explica, de forma extensa, los diversos métodos posibles para llevar a cabo el acoplamiento vibro-acústico mediante la interacción fluido-estructura. En los siguientes apartados se resume los conceptos y las ecuaciones más relevantes de la interacción fluido-estructura, desde el punto de vista de elementos finitos.

2.4.2.1 ELEMENTOS ACÚSTICOS SOMETIDOS A PRESIÓN

En un elemento finito, la presión acústica p se puede escribir como la Ecuación (2.77):

$$p = \sum_{i=1}^m N_i p_i \quad (2.77)$$

donde N_i es un conjunto de funciones lineales, p_i es la presión acústica en el nodo i y m es el número de nodos del que consta el elemento.

Por otro lado, para elementos acústicos sometidos a presión, la ecuación de elementos finitos sin amortiguamiento en un fluido está representada en (2.78):

$$[m_f]\{\ddot{p}\} + [k_f]\{p\} = \{F_f\} \quad (2.78)$$

donde $[m_f]$ es la matriz de masa de fluido equivalente, $[k_f]$ es la matriz de rigidez de fluido equivalente, $\{F_f\}$ es el vector de cargas aplicadas al fluido, $\{p\}$ es el vector de presiones acústicas nodales desconocidas, y $\{\ddot{p}\}$ es el vector que representa la segunda derivada de la presión acústica con respecto al tiempo.

Hay varios elementos acústicos en ANSYS que se basan en la formulación de presión, entre ellos el FLUID30, usado en este trabajo para definir el interior del volumen de aire en el análisis armónico.

2.4.2.2 ECUACIONES MATRICIALES DEL PROBLEMA DE INTERACCIÓN FLUIDO-ESTRUCTURA

Los elementos sometidos a presión pueden conectarse a elementos estructurales mediante el acoplamiento de los mismos. Cuando la presión acústica actúa sobre una estructura hace que vibre, y viceversa, una estructura que vibra hace que se genere sonido en un fluido.

En este apartado se van a describir las ecuaciones matriciales que intervienen en un problema de interacción fluido-estructura, para el método de elementos finitos, con el fin de entender cómo se conectan las respuestas del fluido y la estructura.

La ecuación que define el movimiento de la estructura, sin considerar el amortiguamiento, es (2.79):

$$[m_s]\{\ddot{x}\} + [k_s]\{x\} = \{F_s\} \quad (2.79)$$

donde $[m_s]$ es la matriz de masa estructural, $[k_s]$ es la matriz de rigidez estructural, $\{F_s\}$ es el vector de cargas estructurales aplicadas, $\{x\}$ es el vector de desplazamientos nodales y $\{\ddot{x}\}$ es el vector aceleración de los nodos.

En la interface entre la estructura y los elementos acústicos se produce una interacción entre el fluido y la estructura, la presión acústica ejerce una fuerza sobre la estructura y el movimiento de la estructura produce una presión. Desde el punto de vista de las ecuaciones, para explicar el acoplamiento entre la estructura y el fluido acústico, se agregan una serie de términos adicionales a las ecuaciones de movimiento de la estructura y del fluido, así estas ecuaciones quedan como (2.80) y (2.81):

$$[m_s]\{\ddot{x}\} + [k_s]\{x\} = \{F_s\} + [R]\{p\} \quad (2.80)$$

$$[m_f]\{\ddot{p}\} + [k_f]\{p\} = \{F_f\} - \rho_0[R]^T \{\ddot{x}\} \quad (2.81)$$

donde ρ_0 es la densidad del fluido y $[R]$ es la matriz de acoplamiento que representa el área de superficie efectiva asociada con cada nodo en la interface fluido-estructura.

Expresando las ecuaciones (2.80) y (2.81) en forma matricial, e incluyendo los efectos del amortiguamiento, se llega a la Ecuación (2.82):

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ \rho_0 R^T & m_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{p} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s & 0 \\ 0 & c_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_s & -R \\ 0 & k_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_s \\ F_f \end{Bmatrix} \quad (2.82)$$

donde $[c_s]$ y $[c_f]$ son las matrices de amortiguamiento estructural y acústico, respectivamente.

Para análisis armónicos, esta ecuación se puede reducir a una expresión sin diferenciales, como la Ecuación (2.83):

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m_s + j\omega c_s + k_s & -R \\ -\omega^2 \rho_0 R^T & -\omega^2 m_f + j\omega c_f + k_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_s \\ F_f \end{Bmatrix} \quad (2.83)$$

La matriz del sistema (2.83) no es simétrica, y su uso implica un mayor recurso computacional, y por tanto más tiempo de cálculo. Se puede convertir a la matriz de este sistema en simétrica, utilizando una variable de transformación para las presiones nodales, tal como indica la Ecuación (2.84):

$$p = \dot{q} = j\omega q \quad (2.84)$$

Sustituyendo este cambio de variable en la Ecuación (2.83), se llega a (2.85), donde la matriz del sistema sí es simétrica. Su uso implica un ahorro computacional y de tiempo.

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m_s + j\omega c_s + k_s & -j\omega R \\ -j\omega R^T & \frac{\omega^2 m_f}{\rho_0} - \frac{j\omega c_f}{\rho_0} - \frac{k_f}{\rho_0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_s \\ \frac{j}{\omega \rho_0} F_f \end{Bmatrix} \quad (2.85)$$

Por último, hay que destacar que, aunque es posible utilizar elementos acústicos con grados de libertad tanto de presión como de desplazamiento

para todo el campo acústico, computacionalmente es mejor utilizarlo sólo en la interface fluido-estructura para reducir el tiempo de resolución del problema. Los elementos acústicos con sólo el grado de libertad de presión, se utilizarían en el resto del campo acústico.

CAPÍTULO 3

Estudio de la respuesta de la membrana. Comportamiento con tensión



CAPÍTULO 3: Estudio de la respuesta de la membrana. Comportamiento con tensión

3.1 INTRODUCCIÓN

El comportamiento dinámico de membranas delgadas ha sido muy estudiado por autores muy conocidos, y está ampliamente cubierto en la bibliografía [31,32], como ya se ha indicado anteriormente en este trabajo, en el capítulo 1 de introducción. Hay dos comportamientos extremos, el caso placa en el que no hay tensión aplicada, y el caso membrana en el que hay tensión aplicada en el plano de la misma, y donde la tensión domina el movimiento.

Al comportamiento intermedio entre estos dos casos extremos se le ha prestado menos atención en la bibliografía. Wah [60] dio una solución analítica para membranas circulares apoyadas y empotradas, pero sólo para ciertos estados de tensión, y no para todo el rango de respuesta entre los dos comportamientos.

Uno de los motivos por el que se ha prestado menos atención al caso intermedio es que la mayoría de las situaciones reales que se dan en ingeniería relacionadas con el comportamiento de las membranas, está enmarcada en uno de los casos extremos. Aunque también existen situaciones que pueden responder a un caso intermedio.

Ejemplos de campos de estudio donde es necesario el conocimiento de la vibración de membranas sometidos a tensión son los instrumentos musicales de percusión, el uso de membranas en microelectrónica (como pueden ser sensores o dispositivos MEMS), o el estudio de la membrana timpánica. Para este último caso, hay autores que consideran que la membrana timpánica está sometida a cierto nivel de tensión.

Para evaluar la influencia de la tensión en el comportamiento dinámico de una membrana circular, se ha realizado un estudio numérico usando el método de elementos finitos, con el programa ANSYS v19. Para ello se ha estudiado la respuesta de la membrana desde su comportamiento como placa, esto es, sin tensión aplicada en su plano, hasta el comportamiento de membrana, en el que hay tensión aplicada en el plano de la misma, y ésta es la que rige su respuesta. De esta forma se cubre todo el rango de respuesta entre los dos casos extremos, y en el que hay solución analítica sólo para ciertos valores de tensión.

Por último, en este capítulo se hablará de las conclusiones obtenidas con el estudio realizado, destacando las más significativas.

3.2 MÉTODO NUMÉRICO. ANÁLISIS DE ELEMENTOS FINITOS

Se ha realizado un análisis numérico con el programa de elementos finitos ANSYS v19, programando los modelos usados mediante rutinas APDL. El objetivo del análisis es evaluar el comportamiento de membranas con tensión. En el programa se ha modelado membranas con geometría circular, y con condiciones de empotramiento en todo su contorno.

En cuanto al mallado, el tipo de elemento usado ha sido tipo SHELL, en concreto SHELL181. El elemento seleccionado es uno de cuatro nodos con seis grados de libertad en cada nodo (traslaciones en las direcciones 'x', 'y' y 'z', y rotaciones alrededor de los ejes 'x', 'y' y 'z') adecuado para analizar estructuras de capa fina a moderadamente gruesa, y con el que se consigue una convergencia más rápida en el cálculo.

La densidad de la malla se establece para minimizar el error numérico del método. El parámetro de tamaño de elemento mínimo utilizado se refiere al radio de la membrana, de esta forma, podemos asegurar una densidad de malla constante para todas las simulaciones, independientemente del tamaño de la membrana. Se seleccionó un valor de 160 divisiones de radio. Según estudios realizados con anterioridad por Gonzalez-Herrera [58], se trata de un tamaño de elemento adecuado para el tipo de elemento utilizado.

Se han usado dos materiales distintos en las simulaciones, un material es el acero, y el otro es un material con características equivalentes a las del tímpano.

Para el caso del acero, la geometría simulada ha sido de 1 m de diámetro, con diferentes espesores: 10 mm, 1 mm, 0.1 mm, 0.01 mm y 0.001 mm. En cuanto a las propiedades utilizadas son: densidad de 7850 kg/m^3 , coeficiente de Poisson 0.30 y módulo de Young 210 GPa.

En el caso del material equivalente al tímpano, el diámetro utilizado es de 1 cm, espesor de 0.05 mm, densidad de 1200 kg/m^3 , coeficiente de Poisson 0.30 y el módulo de Young 32 MPa.

En los modelos de ANSYS se realizaron simulaciones de dos situaciones diferentes:

- Simulación sin carga.
- Simulación con carga radial en el plano de la membrana, que se traduce en un pretensado [58,61]. El pretensado de la membrana se introduce mediante una deformación radial impuesta, lo cual produce un desplazamiento radial y genera el esfuerzo radial deseado en la membrana. Este esfuerzo se traduce en un nivel de tensión en la membrana.

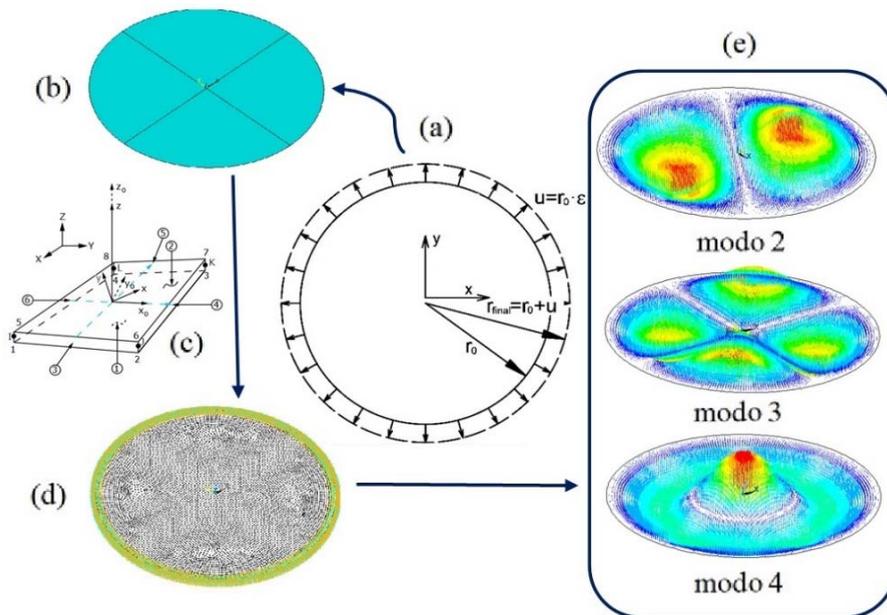


Figura 3.1. Simulación modal de elementos finitos de una membrana circular. (a) Esquema de deformación impuesta. (b) Geometría. (c) Tipo de elemento. (d) Mallado. (e) Algunas soluciones de desplazamiento: modos 2, 3 y 4

En la Figura 3.1 se muestra un esquema de la simulación de elementos finitos. En ella se muestra un esquema de la deformación radial impuesta en el contorno (Figura 3.1a), la geometría del área del círculo (Figura 3.1b), el mallado de esta geometría (Figura 3.1d) y el elemento de capa usado (Figura

3.1c), donde se muestra la geometría, las ubicaciones de los nodos y el sistema de coordenadas del elemento.

Una vez que se ha definido el modelo en el programa, se realiza un análisis modal para obtener las frecuencias naturales y las formas modales. En la Figura 3.1e están representadas algunas de las formas modales, en concreto los modos 2, 3 y 4. Las zonas coloreadas representan el desplazamiento de traslación total de cada nodo del modelo.

En los casos simulados con pretensado, se realiza un análisis estático previo al análisis modal. Para simular los modelos con deformación, se han impuesto 56 valores diferentes de deformación radial en el perímetro de la membrana circular. Estos valores de deformación están en el rango entre 10^{-8} a $2 \cdot 10^{-2}$, concretamente todos los valores de deformación impuestos, en orden ascendente, son los siguientes:

10^{-8} , $2 \cdot 10^{-8}$, $3 \cdot 10^{-8}$, $4 \cdot 10^{-8}$, $5 \cdot 10^{-8}$, $6 \cdot 10^{-8}$, $7 \cdot 10^{-8}$, $8 \cdot 10^{-8}$, $9 \cdot 10^{-8}$, 10^{-7} , $2 \cdot 10^{-7}$, $3 \cdot 10^{-7}$, $4 \cdot 10^{-7}$, $5 \cdot 10^{-7}$, $6 \cdot 10^{-7}$, $7 \cdot 10^{-7}$, $8 \cdot 10^{-7}$, $9 \cdot 10^{-7}$, 10^{-6} , $2 \cdot 10^{-6}$, $3 \cdot 10^{-6}$, $4 \cdot 10^{-6}$, $5 \cdot 10^{-6}$, $6 \cdot 10^{-6}$, $7 \cdot 10^{-6}$, $8 \cdot 10^{-6}$, $9 \cdot 10^{-6}$, 10^{-5} , $2 \cdot 10^{-5}$, $3 \cdot 10^{-5}$, $4 \cdot 10^{-5}$, $5 \cdot 10^{-5}$, $6 \cdot 10^{-5}$, $7 \cdot 10^{-5}$, $8 \cdot 10^{-5}$, $9 \cdot 10^{-5}$, 10^{-4} , $2 \cdot 10^{-4}$, $3 \cdot 10^{-4}$, $4 \cdot 10^{-4}$, $5 \cdot 10^{-4}$, $6 \cdot 10^{-4}$, $7 \cdot 10^{-4}$, $8 \cdot 10^{-4}$, $9 \cdot 10^{-4}$, 10^{-3} , $2 \cdot 10^{-3}$, $3 \cdot 10^{-3}$, $4 \cdot 10^{-3}$, $5 \cdot 10^{-3}$, $6 \cdot 10^{-3}$, $7 \cdot 10^{-3}$, $8 \cdot 10^{-3}$, $9 \cdot 10^{-3}$, 10^{-2} , $2 \cdot 10^{-2}$.

La deformación impuesta se relaciona con el valor de la tensión generada mediante las ecuaciones de la elasticidad. Las relaciones entre la deformación y la tensión están desarrolladas según las expresiones (3.1):

Se trata de un caso de tensión plana: $\sigma_z=0$

Y además se cumple: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$

Usando la ley de Hooke, se calcula la relación entre la tensión y la deformación: (3.1)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) = \frac{\sigma}{E}(1 - \nu) \rightarrow \sigma = \frac{E \varepsilon}{(1 - \nu)}$$

Todas las simulaciones se realizan bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones, y no es necesario introducir ningún comportamiento plástico en el modelo.

3.3 CASOS DE ESTUDIO

3.3.1 MEMBRANA DE ACERO

En la primera parte de este apartado, se presentan los resultados correspondientes a la membrana de acero de 1 m de diámetro y 1 mm de espesor.

Por una parte, se han calculado las frecuencias naturales para los casos de placa y para los casos de membrana sometida a los diferentes niveles de deformación, que se traduce en distintos niveles de tensión, usando las ecuaciones de la teoría clásica y, por otra parte, se han obtenido los resultados de las frecuencias mediante la simulación con el programa ANSYS v19. Las relaciones entre estos diferentes parámetros se han calculado y graficado para establecer la influencia del pretensado en el comportamiento del caso seleccionado.

Las frecuencias naturales analíticas del comportamiento placa, a partir de ahora F_{ANP} , se han calculado usando la Ecuación (2.56). La expresión para el cálculo de esta frecuencia en Hz es (3.2):

$$F = \frac{p}{2\pi} = \frac{\alpha}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)\rho}} \quad (3.2)$$

Se han calculado las frecuencias naturales analíticas del comportamiento membrana, a partir de ahora F_{ANM} , usando la Ecuación (2.66). La expresión para calcular esta frecuencia en Hz es (3.3):

$$F = \frac{p}{2\pi} = \frac{\alpha}{2\pi a} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \quad (3.3)$$

Por otro lado, también se han obtenido las frecuencias del modelo de elementos finitos, a partir de ahora denotadas por F_{FEM} .

Se han obtenido las nueve primeras frecuencias naturales analíticas para el comportamiento de la membrana, F_{ANM} , las frecuencias de simulación, F_{FEM} , y la relación entre las frecuencias analíticas y de simulación, F_{ANM}/F_{FEM} . Estos datos se muestran en la Tabla 3.1, para los valores de deformación de 10^{-7} , 10^{-5} y 10^{-3} . Estos valores de deformación seleccionados se pueden considerar como valores de deformación baja, media y alta.

Tabla 3.1. Relación F_{ANM}/F_{FEM} para los nueve primeros modos y deformaciones seleccionadas

	VALOR DE DEFORMACIÓN								
	10^{-7}			10^{-5}			10^{-3}		
	F_{ANM}	F_{FEM}	F_{ANM}/F_{FEM}	F_{ANM}	F_{FEM}	F_{ANM}/F_{FEM}	F_{ANM}	F_{FEM}	F_{ANM}/F_{FEM}
Modo 1	1.496	10.310	0.145	14.959	19.038	0.786	149.593	151.958	0.984
Modo 2	2.385	21.338	0.112	23.845	32.984	0.723	238.452	242.399	0.984
Modo 3	3.195	34.918	0.092	31.953	48.318	0.661	319.533	325.372	0.982
Modo 4	3.435	39.797	0.086	34.349	53.474	0.642	343.491	349.922	0.982
Modo 5	3.969	51.022	0.078	39.694	65.587	0.605	396.943	404.962	0.980
Modo 6	4.366	60.791	0.072	43.658	75.669	0.577	436.582	445.791	0.979
Modo 7	4.721	69.600	0.068	47.205	84.984	0.555	472.051	482.680	0.978
Modo 8	5.238	84.469	0.062	52.376	100.146	0.523	523.761	536.317	0.977
Modo 9	5.385	88.983	0.061	53.851	104.728	0.514	538.509	551.689	0.976

Observando los datos de la Tabla 3.1, los resultados analíticos para el caso membrana y los resultados numéricos se aproximan a medida que aumenta el valor de la deformación impuesta.

En la Figura 3.2 está representada la relación F_{ANM}/F_{FEM} para los nueve primeros modos de vibración, y para los diferentes niveles de deformación impuesta, que suponen diferentes niveles de tensión.

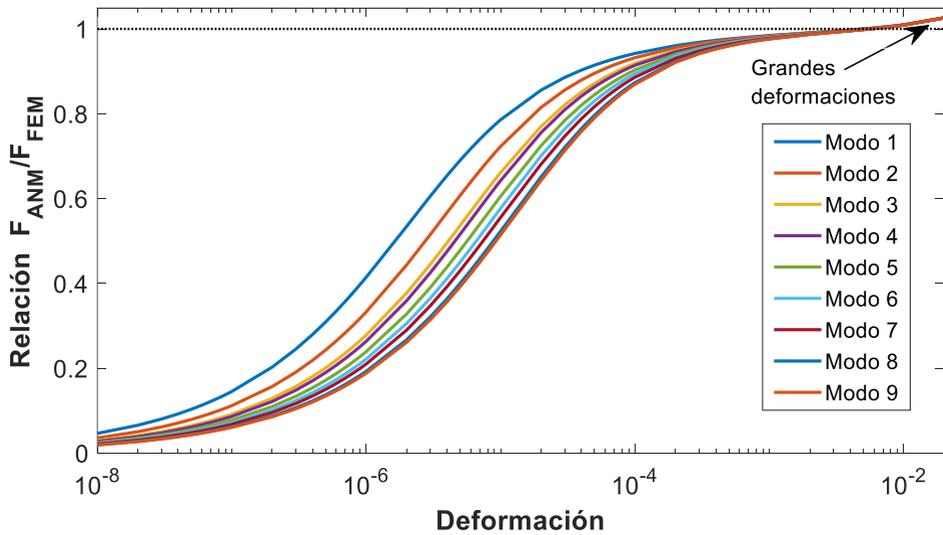


Figura 3.2. Relación F_{ANM}/F_{FEM} en función de la deformación, para los primeros nueve modos de vibración

En la Figura 3.2 se observa que, para valores pequeños de deformación, las frecuencias calculadas y simuladas se alejan mucho, estando la relación entre frecuencias alejada de 1. Esto significa que el comportamiento como membrana, y por tanto la Ecuación (3.3), no se cumple en ese rango. También se observa que la relación entre frecuencias aumenta con la deformación impuesta hasta alcanzar el valor de 1, para deformaciones cercanas a 10^{-2} . Para estos casos se cumple la Ecuación (3.3) y el comportamiento de la membrana. Este resultado se cumple para los primeros nueve modos de vibración representados en la Figura 3.2.

Los valores de las nueve primeras frecuencias analíticas calculadas con la Ecuación (3.2), que corresponde con el comportamiento placa, F_{ANP} , el de las frecuencias numéricas obtenidas con ANSYS, F_{FEM} , y la relación entre ambas frecuencias, están dadas en la Tabla 3.2. En este caso, se ha incluido

los resultados obtenidos sin deformación, y para los tres valores de deformación seleccionados: 10^{-7} , 10^{-5} y 10^{-3} .

Tabla 3.2. Relación F_{ANP}/F_{FEM} para los nueve primeros modos y deformaciones seleccionadas

	VALOR DE DEFORMACIÓN								
	0		10^{-7}		10^{-5}		10^{-3}		
	F_{ANP}	F_{FEM}	F_{ANP}/F_{FEM}	F_{FEM}	F_{ANP}/F_{FEM}	F_{FEM}	F_{ANP}/F_{FEM}	F_{FEM}	F_{ANP}/F_{FEM}
Modo 1	10.179	10.179	1.000	10.310	0.987	19.038	0.535	151.958	0.067
Modo 2	21.184	21.185	1.000	21.338	0.993	32.984	0.642	242.399	0.087
Modo 3	34.755	34.754	1.000	34.918	0.995	48.318	0.719	325.372	0.107
Modo 4	39.629	39.634	1.000	39.797	0.996	53.474	0.741	349.922	0.113
Modo 5	50.857	50.853	1.000	51.022	0.997	65.587	0.776	404.962	0.126
Modo 6	60.602	60.622	1.000	60.791	0.997	75.669	0.801	445.791	0.136
Modo 7	69.417	69.426	1.000	69.600	0.997	84.984	0.817	482.680	0.144
Modo 8	84.277	84.296	1.000	84.469	0.998	100.146	0.842	536.317	0.157
Modo 9	88.785	88.810	1.000	88.983	0.998	104.728	0.848	551.689	0.161

La Figura 3.3 grafica la relación F_{ANP}/F_{FEM} en función de la deformación impuesta, para los primeros nueve modos de vibración.

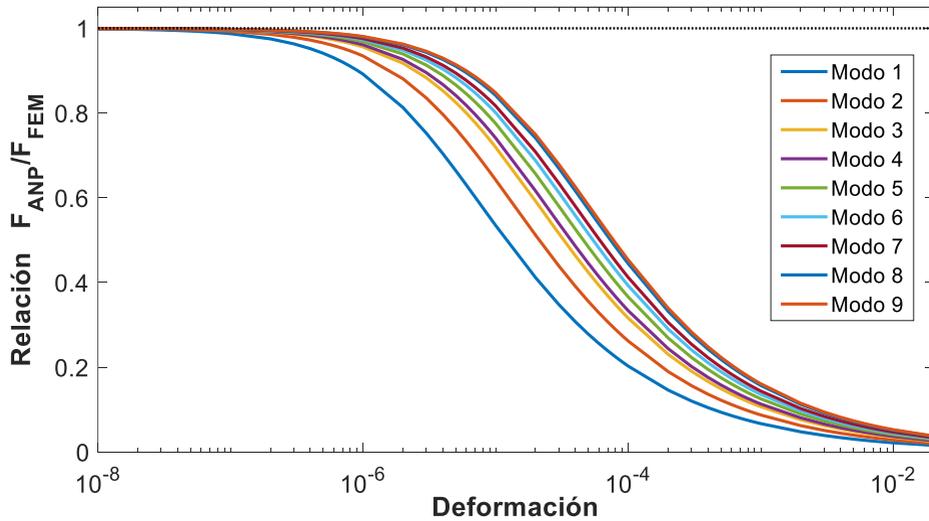


Figura 3.3. Relación F_{ANP}/F_{FEM} en función de la deformación, para los nueve primeros modos de vibración

Observando las gráficas de la Figura 3.3 en el rango de bajos niveles de deformación, la relación entre las frecuencias es muy cercana a la unidad, lo cual significa que para este rango de deformación el comportamiento es de placa. Esta relación disminuye al aumentar la deformación impuesta, alejándose del comportamiento placa.

Las figuras 3.2 y 3.3 son útiles para identificar los valores de deformación para los cuales la solución se aleja de las dos soluciones clásicas. En la Figura 3.3 se observa que para valores de deformación por debajo de 10^{-6} , el comportamiento de placa dada por Ecuación (3.2), es válida. En ese rango se puede decir que la deformación no es significativa, y el comportamiento de la flexión es dominante. Por otro lado, en la Figura 3.2 se observa que para valores de deformación por encima de 10^{-3} , los resultados obtenidos están cercanos al comportamiento de membrana, dada por la Ecuación (3.3). Se puede decir que en esta zona la rigidez de la membrana es despreciable,

y es la tensión la que rige el movimiento. Entre los rangos extremos se observa una zona de transición, donde no se cumple ninguna de las dos soluciones válidas.

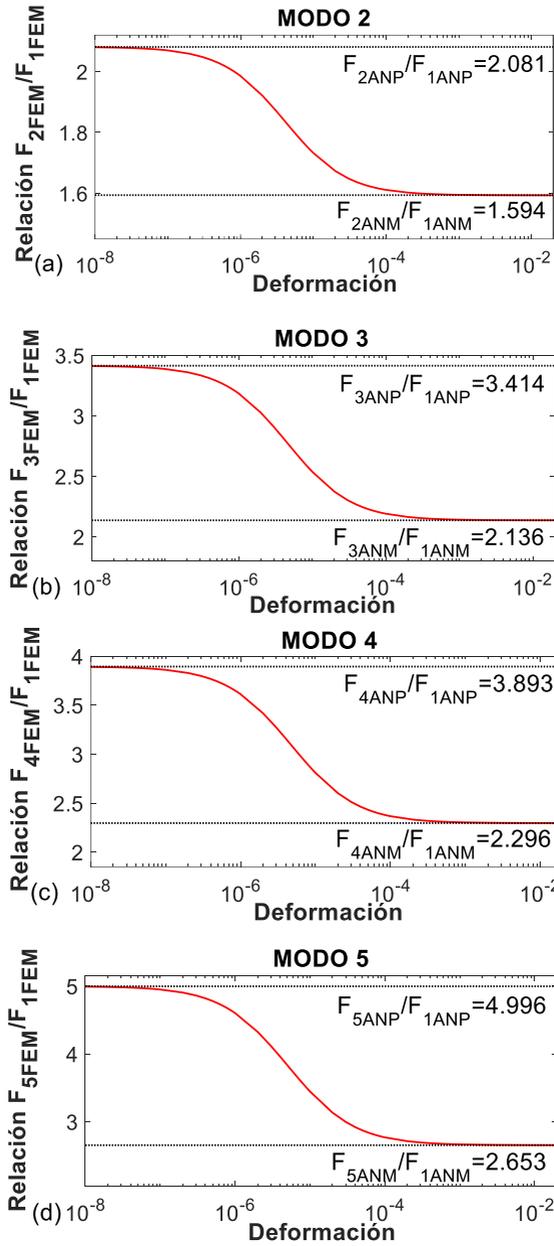
Otro parámetro interesante que se puede estudiar es la relación entre la frecuencia natural de los modos y la frecuencia del primer modo, tanto para el caso placa como para el caso membrana (F_{nANP}/F_{1ANP} y F_{nANM}/F_{1ANM}). Este ha sido un parámetro útil para evaluar la presencia de predeformación con datos experimentales [58]. Si los modos naturales de vibración se calculan analíticamente con la Ecuación (3.2) o (3.3), y se calcula la relación entre las distintas frecuencias divididas por la frecuencia del primer modo, los resultados son constantes, y corresponden con la relación entre las constantes α de los casos de placa y membrana. Estos valores están representados en la Tabla 3.3.

Tabla 3.3. Relación F_{nANP}/F_{1ANP} y F_{nANM}/F_{1ANM} para las primeras nueve frecuencias naturales para el caso de placa y membrana

	CASO PLACA		CASO MEMBRANA
F_{2ANP}/F_{1ANP}	2.081	F_{2ANM}/F_{1ANM}	1.594
F_{3ANP}/F_{1ANP}	3.414	F_{3ANM}/F_{1ANM}	2.136
F_{4ANP}/F_{1ANP}	3.893	F_{4ANM}/F_{1ANM}	2.296
F_{5ANP}/F_{1ANP}	4.996	F_{5ANM}/F_{1ANM}	2.653
F_{6ANP}/F_{1ANP}	5.954	F_{6ANM}/F_{1ANM}	2.918
F_{7ANP}/F_{1ANP}	6.819	F_{7ANM}/F_{1ANM}	3.156
F_{8ANP}/F_{1ANP}	8.279	F_{8ANM}/F_{1ANM}	3.501
F_{9ANP}/F_{1ANP}	8.722	F_{9ANM}/F_{1ANM}	3.600

En la Figura 3.4 se ha representado la relación F_n/F_1 para los valores de deformación calculados mediante el método de elementos finitos, para los

primeros nueve modos de vibración. Esta figura sirve para evaluar, por separado la respuesta de estos modos.



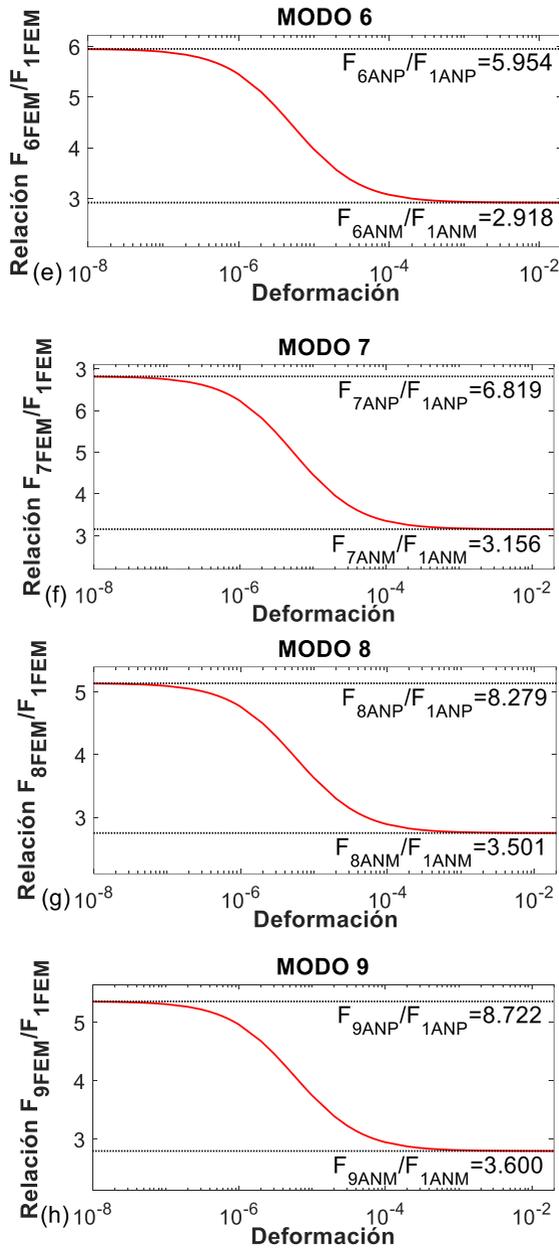


Figura 3.4. Relación F_n/F_1 para las frecuencias naturales de los modos 2 a 9 obtenidas con ANSYS

En todos los gráficos de la Figura 3.4 se observa la misma tendencia. Para deformaciones bajas, la relación numérica tiende a la relación obtenida con el comportamiento placa, mientras que, para deformaciones altas, la relación tiende hacia la obtenida con el comportamiento membrana. Todos los gráficos presentan asíntotas horizontales en las zonas de menores y mayores deformaciones, cuyo valor coincide con las relaciones entre las frecuencias analíticas de los casos placa y membrana. La zona de transición también se observa claramente para todos los gráficos de esta figura.

La respuesta de esta zona de transición fue estudiada por Wah [60]. La ecuación dada por este autor para calcular las frecuencias naturales viene dada por la Ecuación (2.75). La expresión para obtener la frecuencia en Hz es la siguiente (3.4):

$$F = \frac{p}{2\pi} = \frac{\alpha}{2\pi a^2} \left(\frac{Ta^2}{D} + \alpha^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.4)$$

donde α es un parámetro que depende de $\phi = \frac{T}{T^*}$, donde $T^* = 14.68 \frac{D}{a^2}$.

Sus valores están dados en la Tabla 2.3.

La Tabla 3.4 incluye las frecuencias naturales dadas por Wah (F_{WAH}), para los diferentes valores de deformación proporcionados por este autor. Los valores de deformación están relacionados con el parámetro adimensional ϕ , también dado en la tabla. Además, se incluye las frecuencias numéricas obtenidas por elementos finitos (F_{FEM}) y la relación entre ambas frecuencias (F_{WAH}/F_{FEM}).

Tabla 3.4. Relación F_{WAH}/F_{FEM} para los nueve primeros modos y valores de deformación relacionados con ϕ

	DEFORMACIÓN								
	0			$9.410 \cdot 10^{-7}$			$1.882 \cdot 10^{-6}$		
	F_{WAH}	F_{FEM}	F_{WAH}/F_{FEM}	F_{WAH}	F_{FEM}	F_{WAH}/F_{FEM}	F_{WAH}	F_{FEM}	F_{WAH}/F_{FEM}
Modo 1	10.203	10.179	1.002	11.319	11.346	0.998	12.398	12.395	1.000
Modo 2	21.176	21.185	1.000	22.565	22.581	0.999	23.917	23.890	1.001
Modo 3	34.921	34.754	1.005	36.468	36.261	1.006	37.932	37.704	1.006
Modo 4	39.674	39.634	1.001	41.085	41.141	0.999	42.547	42.595	0.999
Modo 6	60.157	60.622	0.992	61.804	62.196	0.994	63.245	63.732	0.992
Modo 8	84.521	84.296	1.003	86.146	85.915	1.003	87.735	87.503	1.003
Modo 9	88.795	88.810	1.000	90.417	90.429	1.000	92.003	92.019	1.000
	$3.764 \cdot 10^{-6}$			$5.646 \cdot 10^{-6}$			$7.528 \cdot 10^{-6}$		
	F_{WAH}	F_{FEM}	F_{WAH}/F_{FEM}	F_{WAH}	F_{FEM}	F_{WAH}/F_{FEM}	F_{WAH}	F_{FEM}	F_{WAH}/F_{FEM}
Modo 1	14.214	14.244	0.998	15.870	15.861	1.001	17.312	17.313	1.000
Modo 2	26.315	26.302	1.001	28.486	28.496	1.000	30.505	30.523	0.999
Modo 3	40.763	40.429	1.008	43.236	42.972	1.006	45.508	45.365	1.003
Modo 4	45.402	45.358	1.001	47.910	47.958	0.999	50.356	50.420	0.999
Modo 6	66.142	66.695	0.992	69.029	69.529	0.993	71.615	72.249	0.991
Modo 8	90.991	90.595	1.004	93.754	93.583	1.002	96.769	96.476	1.003
Modo 9	95.077	95.119	1.000	98.405	98.120	1.003	101.435	101.031	1.004

El parámetro adimensional ϕ viene dado para los valores de diámetros nodales, n , y círculos nodales, s , entre los valores 0 y 2. Para modos con n y/o s mayor que 2, las frecuencias naturales no se pueden obtener con la ecuación proporcionada por Wah. Por este motivo, entre los nueve primeros modos, no se pueden obtener el de los modos 5º y 7º con la ecuación dada por este autor, y por eso sus valores no aparece en la Tabla 3.4. A pesar de estas limitaciones, usar estos resultados es útil para validar los resultados numéricos.

Calculando las relaciones F_{ANM}/F_{WAH} y F_{ANP}/F_{WAH} para todos los casos de Wah, los resultados son muy similares a las relaciones F_{ANM}/F_{FEM} y F_{ANP}/F_{FEM} . La Figura 3.5 incluye las figuras 3.2 y 3.3, y los puntos de Wah.

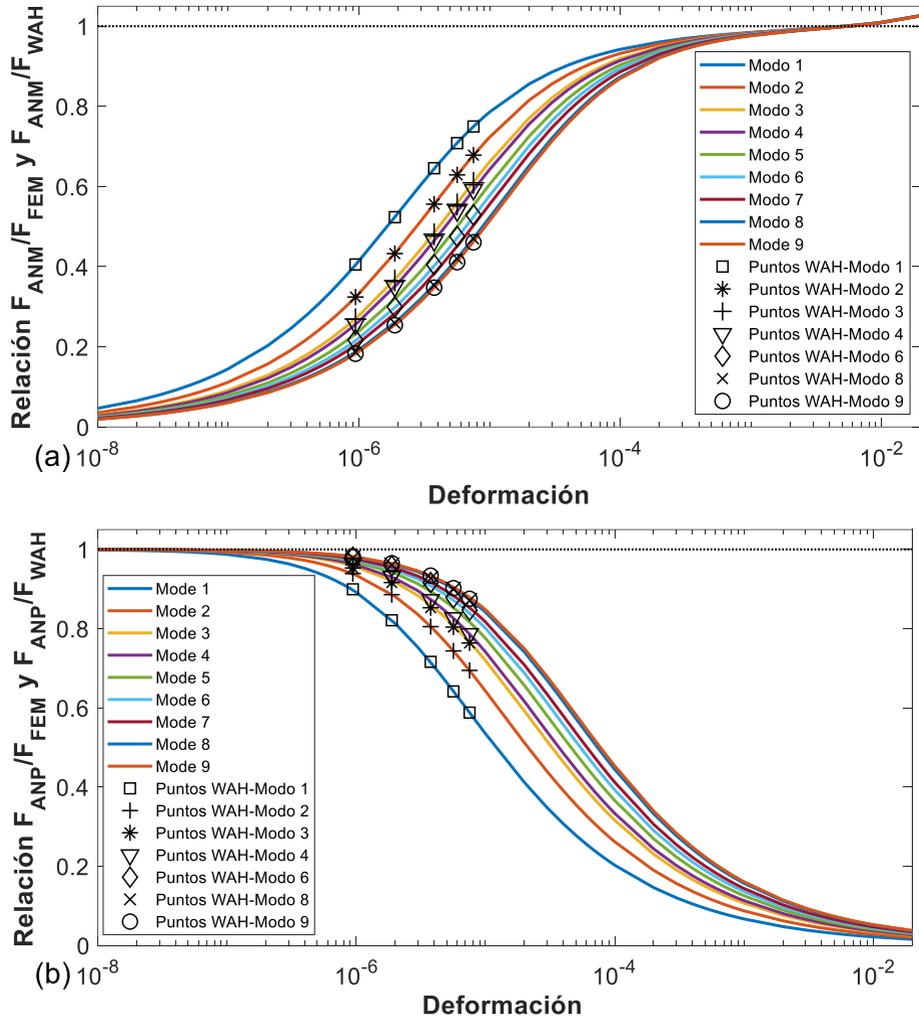


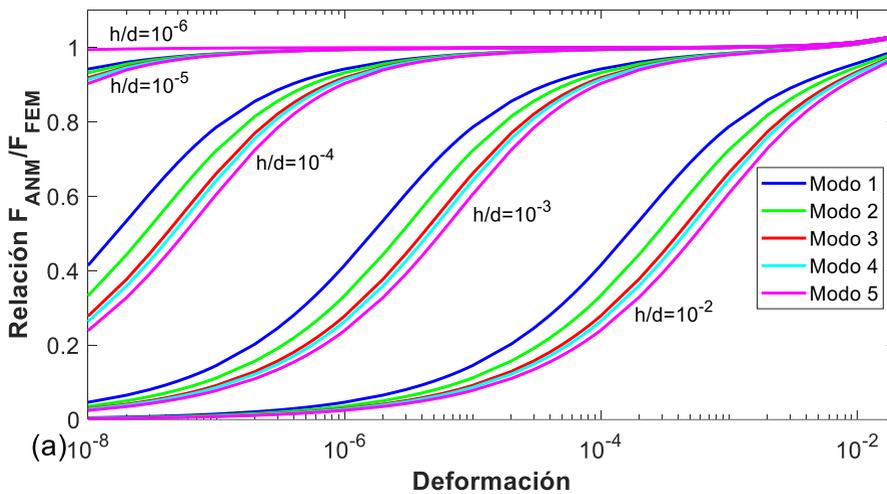
Figura 3.5. Puntos de Wah superpuestos en los gráficos de relaciones F_{ANM}/F_{FEM} (a) y F_{ANP}/F_{FEM} (b)

La principal limitación de la solución dada por Wah es que los modos de vibración sólo se pueden calcular para un pequeño rango de deformación.

Como se observa en la Figura 3.5, el rango cubierto por la solución de Wah no cubre toda la zona de transición entre el comportamiento placa-membrana. Esta limitación se resuelve usando el método de elementos finitos, con el que se puede calcular todos los modos de vibración y en cualquier rango de deformación.

Se han repetido los cálculos para el caso de la membrana con diferentes espesores, y con el mismo diámetro, propiedades de material y niveles de deformación que para el caso descrito anteriormente. Los espesores seleccionados han sido: 10 mm, 1 mm (caso de referencia anterior), 0,1 mm, 0,01 mm y 0,001 mm.

En la Figura 3.6 se han representado las relaciones F_{ANM}/F_{FEM} y F_{ANP}/F_{FEM} para los cinco primeros modos de vibración.



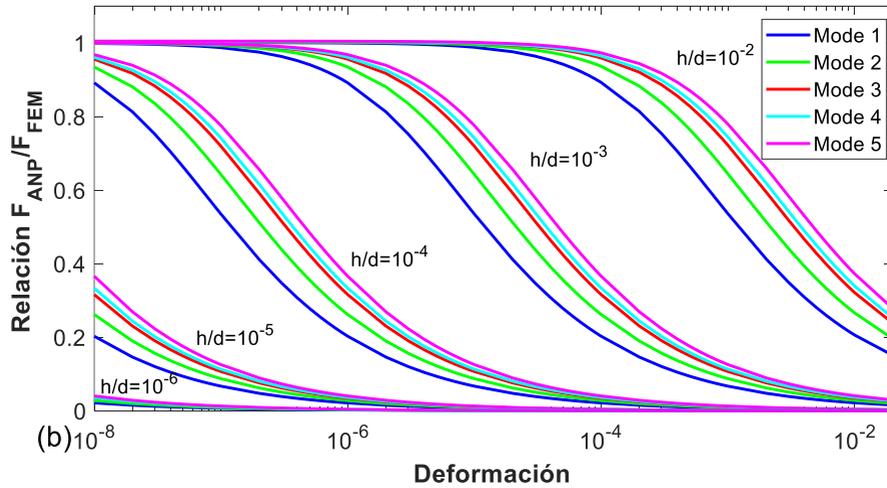


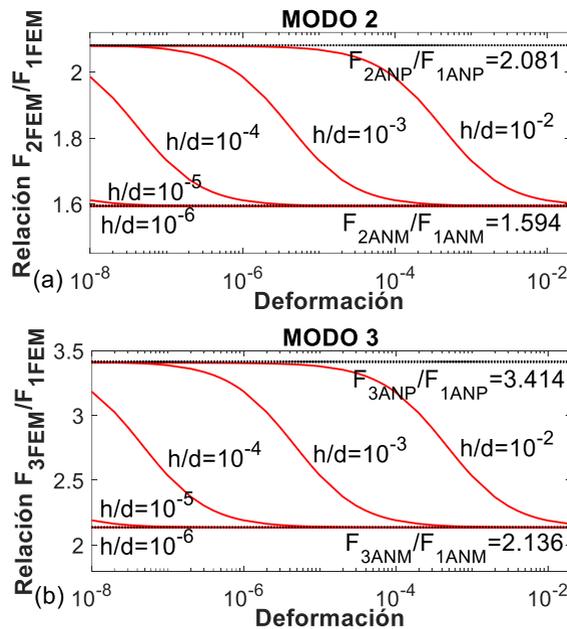
Figura 3.6. Relaciones F_{ANM}/F_{FEM} (a) y F_{ANP}/F_{FEM} (b) en función de la deformación ensayada para las cinco primeros modos y valores de espesor/diámetro (h/d): 10^{-2} , 10^{-3} , 10^{-4} , 10^{-5} y 10^{-6}

Como en el caso anteriormente estudiado, en los gráficos de la Figura 3.6 se observa la misma tendencia: para deformaciones pequeñas se cumple el comportamiento placa, y para deformaciones grandes el comportamiento membrana. En todos también se observa una zona de transición entre estos dos comportamientos. Esta zona de transición se mueve a valores de deformación más pequeños para relaciones de espesor/diámetro más pequeñas.

También se puede observar que las curvas obtenidas tienen la misma forma, desplazadas un orden de magnitud 10^2 en deformación. Estudiando la relación entre la solución placa y membrana, considerando sólo los parámetros geométricos y eliminando el efecto de las propiedades materiales, esta relación depende de $(h/d)/\varepsilon^{1/2}$. Esto está en concordancia con el desplazamiento de las curvas de 10^2 en deformación.

Otra cuestión a destacar es que, en ciertas relaciones espesor/diámetro, el comportamiento de membrana se observa con muy baja tensión aplicada. Se puede decir que estos casos son hipersensibles a la tensión aplicada, y para bajos niveles de tensión ya se observa el comportamiento membrana.

Se ha obtenido la relación F_n/F_1 para los resultados de elementos finitos de los cinco primeros modos de vibración, y para los diferentes valores de espesor/diámetro (h/d) calculados: 10^{-2} , 10^{-3} , 10^{-4} , 10^{-5} y 10^{-6} . En la Figura 3.7 están representadas esta relación respecto a la deformación. Como también se observaba en la Figura 3.6, la zona de transición se traslada a menores deformaciones o tensión aplicada, cuanto menor es la relación espesor/diámetro.



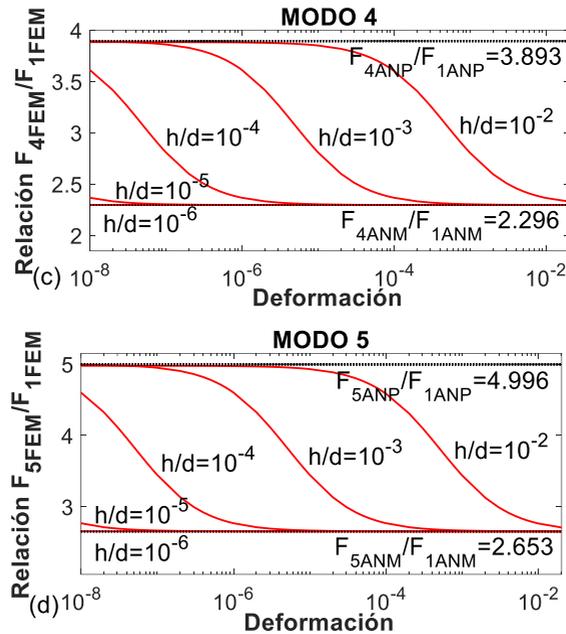


Figura 3.7. Relación F_n/F_1 para las primeras cinco frecuencias naturales obtenidas con elementos finitos y valores de espesor/diámetro (h/d): 10^{-2} , 10^{-3} , 10^{-4} , 10^{-5} y 10^{-6}

A parte del estudio teórico realizado hasta aquí para los distintos casos geométricos estudiados, se pueden calcular los valores de deformación para los cuales las soluciones exactas de placa y membrana presentan un cierto error. En la Figura 3.8 se representa, en función de la relación geométrica h/d para los diferentes casos estudiados, el valor de deformación para un error del 2% y 5%. En ambos ejes se ha utilizado escala logarítmica. El error se ha calculado como $((F_{ANP}-F_{FEM})/F_{ANP}) \cdot 100$ para los casos placa, y $((F_{ANM}-F_{FEM})/F_{ANM}) \cdot 100$ para los casos membrana.

Las soluciones discretas obtenidas por la ecuación dada por Wah, también se han representado en la gráfica. Como se ha comentado anteriormente y

se puede observar en la Figura 3.8, estas soluciones no cubren toda la zona de transición entre los dos comportamientos.

En esta figura se puede identificar, de forma clara, una zona con comportamiento de placa para valores de deformaciones por debajo de un valor determinado, otra con comportamiento de membrana puro, y una zona intermedia de transición entre estas soluciones.

Considerando una situación real, se debe considerar que el material no es infinitamente elástico. Para incluir esta consideración en la Figura 3.8, se ha representado la deformación correspondiente para el límite elástico del acero. Si consideramos un límite elástico aproximado para el material de 400 MPa, se puede aceptar que la deformación correspondiente está aproximadamente en el valor de $1.5 \cdot 10^{-3}$. Este valor se ha utilizado como límite máximo real en la Figura 3.8, agregando una línea horizontal que representa ese límite. Esta referencia, junto con las líneas de error trazadas, se pueden utilizar para evaluar en qué situación se encuentra un caso real.

Para explicar mejor las situaciones reales que se pueden presentar, se va a analizar tres situaciones diferentes: el caso de la membrana de espesor 1 cm ($h/d=10^{-2}$), la de espesor de 1 mm ($h/d=10^{-3}$) y la de espesor de 0,1 mm ($h/d=10^{-4}$).

- Caso de membrana de espesor 1 cm ($h/d=10^{-2}$): Este caso se puede considerar el de una membrana gruesa, para el cual se puede ver que la solución placa es válida para casi todos los valores de deformación. Sólo para valores de deformación muy altos, cercanos a la plasticidad, el comportamiento intermedio es relevante.

- Caso de membrana de espesor 1 mm ($h/d=10^{-3}$): Este caso se puede considerar el de una membrana delgada, para el cual la zona de transición se encuentra en un amplio rango de comportamiento, con deformación del orden del 0.1 % del límite elástico. En este caso ninguna de las dos soluciones es válida, y se debe estudiar el efecto de la deformación en su comportamiento.
- Caso de membrana de espesor 0.1 mm ($h/d=10^{-4}$): Este caso se puede considerar el caso de una membrana muy delgada. Para este caso, la solución placa sólo es válida para valores muy bajos de deformación. Se puede considerar que el comportamiento es de hipersensibilidad, donde para valores muy pequeños de deformación implica que la membrana tenga un comportamiento en la zona de transición. Una vez superado ese valor, el comportamiento es el de una membrana pura. Realmente este caso para este material no se trata de una situación real. Pero para otros casos de materiales con otras propiedades, puede ocurrir que esta zona de transición sea muy relevante, y no se pueda utilizar la teoría de placas. En este grupo se pueden incluir casos reportados en el diseño de MEMS y el comportamiento de la membrana timpánica de mamíferos.

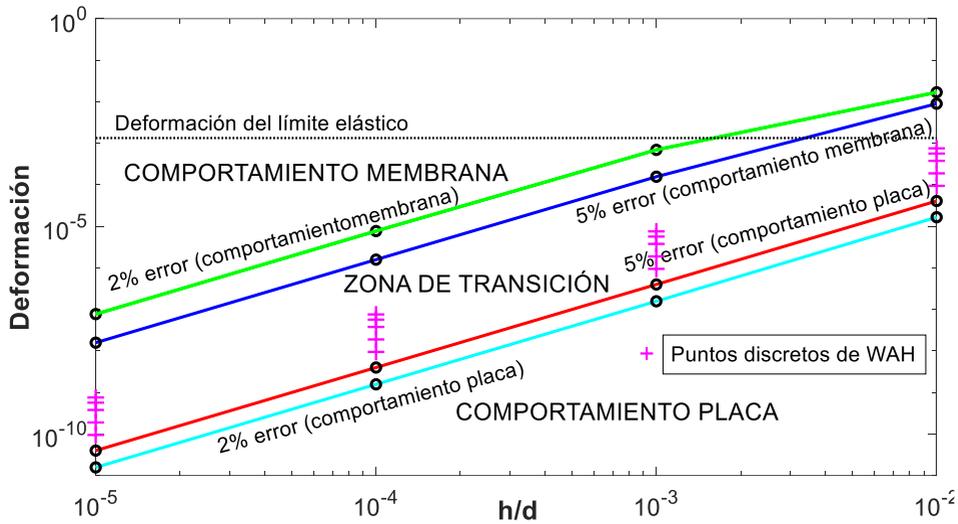


Figura 3.8. Valor de deformación para soluciones con error del 2% y 5%, y diferentes valores de h/d : 10^{-5} , 10^{-4} , 10^{-3} y 10^{-2}

3.3.2 MEMBRANA EQUIVALENTE DEL TÍMPANO

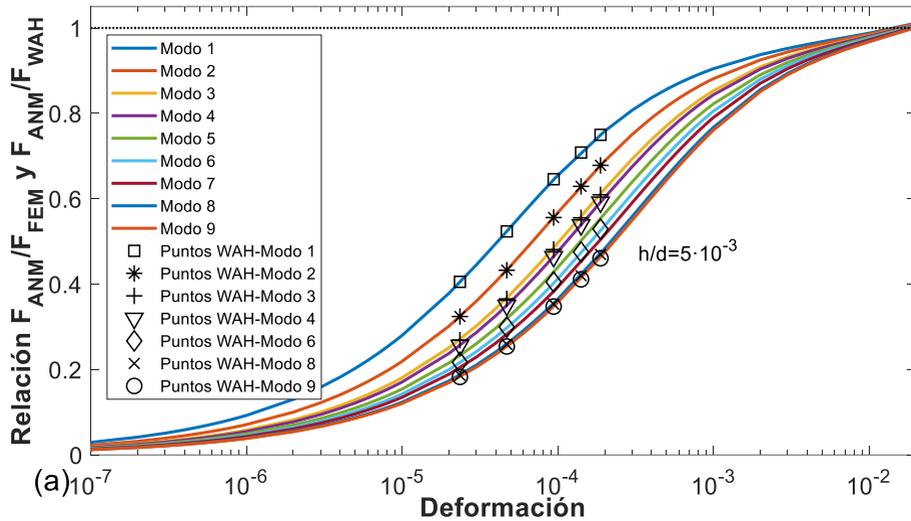
En este apartado se va a estudiar una membrana con geometría y propiedades mecánicas similares a las del tímpano humano. Para su estudio se va a considerar una membrana circular de 1 cm de diámetro.

Realmente, la membrana timpánica tiene forma ovalada, con un diámetro mayor que oscila entre 0.9 y 1 cm, y el menor entre 0.8 y 0.9 cm. Además, tiene forma cónica y está unido a un elemento rígido, que es el martillo, en su parte central, que es el umbo. No obstante, el modelo circular considerado en este estudio puede considerarse válido para evaluar el efecto de la deformación en la membrana timpánica.

El grosor medio del tímpano es de 50 micras, y este es el espesor considerado en el estudio, siendo la relación entre el espesor y el diámetro la siguiente: $h/d=5 \cdot 10^{-3}$. Las propiedades mecánicas consideradas son:

densidad 1200 kg/m^3 , coeficiente de Poisson 0.3 y módulo de Young 32 MPa, que son propiedades aceptadas comúnmente como una buena estimación para la membrana timpánica [59].

Las relaciones F_{ANM}/F_{FEM} y F_{ANP}/F_{FEM} se han representado en la Figura 3.9, en función de la deformación aplicada, para los nueve primeros modos de vibración. Además, a los gráficos de estas relaciones se han superpuesto las relaciones F_{ANM}/F_{WAH} y F_{ANP}/F_{WAH} para los puntos discretos de Wah. Se observa que estos últimos cocientes coinciden con las primeras, ya que las frecuencias obtenidas con la ecuación de Wah son similares a las calculadas con ANSYS.



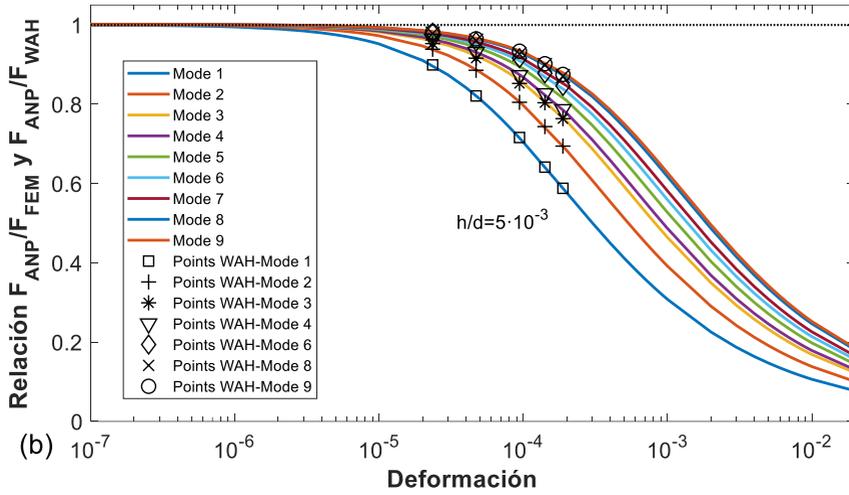


Figura 3.9. Relaciones F_{ANM}/F_{FEM} (a), F_{ANP}/F_{FEM} (b) y puntos Wah (a) y (b) superpuestos en los gráficos en función de las deformaciones ensayadas, s probadas para los nueve primeros modos

En la Figura 3.10 se han representado los primeros cinco modos de vibración calculados con el método de elementos finitos, referidos al primero, para la membrana equivalente del tímpano que se está estudiando en este apartado.

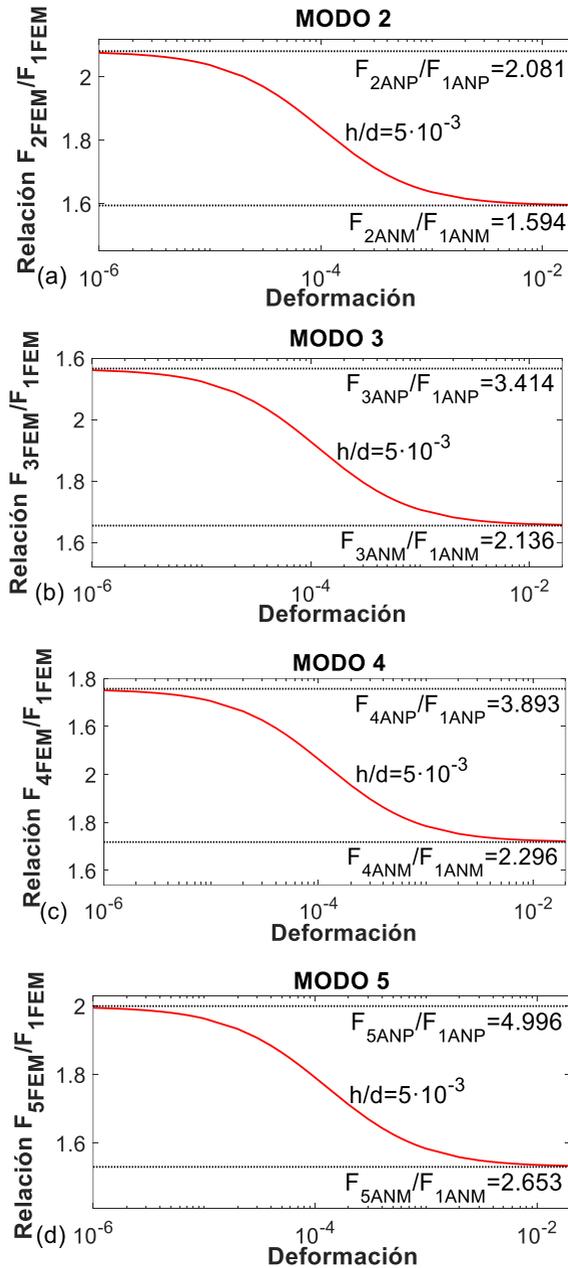


Figura 3.10. Relación F_n/F_1 para las cinco primeras frecuencias naturales obtenidas con ANSYS

En las gráficas de las figuras 3.9 y 3.10 se observa el mismo comportamiento que para el caso del acero, en bajos valores de deformaciones el comportamiento es similar al de placa, y a medida que aumenta la deformación aplicada se acerca cada vez al comportamiento membrana.

El tímpano es un material con menor rigidez a tracción que el acero, y por este motivo los valores de tensión relacionados con la deformación por la cual se inicia el comportamiento de transición de placa a membrana tienen un menor valor.

Entre las distintas investigaciones sobre la estimación de las propiedades mecánicas de la membrana timpánica, existe una cierta controversia. La mayoría de los resultados se han obtenidos mediante pruebas de tensión en pequeñas muestras [12,14], cuyos resultados oscilan entre 20 y 40 MPa. Otros estudios han utilizado técnicas de nanoindentación, con los que se han obtenido valores más pequeños, en el rango de 3 MPa [75]. En otros tipos de estudios [28] se sugiere que el módulo elástico debería estar en el rango entre 0.1 y 0.3 GPa. Estos valores más altos podrían deberse a la sobreestimación por la presencia de tensión en la membrana timpánica, que desaparece en la realización de las pruebas estáticas. En otras investigaciones se demuestra que los datos experimentales pueden ajustarse a modelos numéricos con multitud de combinaciones de deformación y valores del módulo elástico [59], y que son muy sensibles a pequeños valores de deformación. Estos resultados están en sintonía con los obtenidos en la Figura 3.9.

Que la membrana timpánica esté sometida a un cierto nivel de tensión se ha planteado como hipótesis desde hace mucho tiempo [10,11], y en la actualidad es una cuestión de discusión en la investigación auditiva.

3.4 CONCLUSIONES

En este capítulo se ha evaluado la influencia de la tensión en membranas usando el método de elementos finitos, y comparando estos resultados con los comportamientos clásicos de placa, membrana y con la solución intermedia dada por el autor Wah [60]. Los hallazgos principales se pueden resumir en los siguientes puntos:

- Se ha identificado el rango donde son aplicables las teorías clásicas, y se ha identificado una zona de transición en la que no se puede aplicar ni la teoría de placas ni la de membranas.
- Se ha demostrado que la teoría de Wah [60] es válida para describir el comportamiento de una parte de esta zona de transición, aunque no cubre la totalidad de la misma. Se ha completado esta zona con resultados de los métodos de elementos finitos, conectando con los resultados extremos de la solución de placa y membrana.
- Se han identificado algunas relaciones geométricas de espesor/diámetro de membranas con gran hipersensibilidad a un bajo nivel de tensión. Algunas de estas configuraciones están presentes en problemas reales, como puede ser la membrana timpánica del sistema auditivo de los humanos o mamíferos.

Después de los hallazgos encontrados, se llega a la conclusión que es necesario tener en cuenta su efecto en problemas de membranas sometidas a baja tensión. Pero no es fácil tenerlo en consideración, ya que no suele

haber información para establecer correctamente su valor. Una vez que se consigue obtener la estimación de la tensión, hay que incorporarlo al modelo para tener en cuenta su efecto. No es fácil este proceso, ya que una pequeña desviación puede provocar cambios significativos en la respuesta.

Uno de los campos donde es relevante este efecto es el estudio de la membrana timpánica. Entre los estudios de este campo, se acepta comúnmente que la membrana timpánica está sometida a un bajo nivel de tensión, por este motivo normalmente su presencia se ha considerado despreciable en los modelos estudiados, pero después de realizar este estudio, el efecto de la tensión debería ser evaluado y considerado.

Otro campo a considerar es la fabricación de microdispositivos con elementos de membrana. En este caso, la presencia de tensión se debe al proceso de fabricación, y el origen de la deformación puede ser diverso, entre ellos pueden estar: el calentamiento y enfriamiento de los materiales, la contracción del material, etc., que son difíciles de esclarecer y cuantificar.

Después de analizar estos resultados, se puede señalar una posible aplicación de los mismos. La correlación obtenida entre la deformación y las frecuencias naturales permiten tener la opción de determinar el nivel de deformación de un sistema de membranas, desde un punto de vista experimental. Ajustando las frecuencias de vibración experimentales y numéricas, se podría realizar una estimación del nivel de tensión, si se consigue limitar las incertidumbres del modelo, como pueden ser las propiedades mecánicas y geométricas del mismo.

Por último, destacar que los resultados presentados en el presente capítulo han dado como resultado la publicación del artículo denominado “Study of

the Dynamic Behaviour of Circular Membranes with Low Tensión” en la revista “Applied Sciences” [61], con fecha de publicación el 5 de noviembre de 2019.

CAPÍTULO 4

Estudio de los principales parámetros que influyen en la respuesta de la membrana. Diseño del experimento

CAPÍTULO 4: Estudio de los principales parámetros que influyen en la respuesta de la membrana. Diseño del experimento

4.1 INTRODUCCIÓN

La metodología propuesta en este trabajo para determinar las propiedades mecánicas de una membrana, en concreto el módulo de Young, está basada en la respuesta dinámica de la misma. El rango de presión sonora que llegue a la membrana, deber ser tal que garantice que la respuesta sea lineal y elástica, y esté garantizado el comportamiento en pequeñas deformaciones.

Sin embargo, conocer cómo va a ser exactamente la respuesta de la membrana no es un proceso sencillo. La respuesta se ve afectada por muchos factores, cuya influencia sobre la respuesta de la membrana es necesario estudiar para conocer las frecuencias de resonancia y modos de vibración que se presentan en la misma. Además, se produce una interacción entre las ondas sonoras y la respuesta de la membrana. Esto se trata de un problema complejo, que requiere un estudio profundo y minucioso.

Para tener controlada la respuesta de la membrana, y evitar fuentes de incertidumbre, se han estudiado los principales parámetros que influyen en su respuesta. Para ello se han realizado simulaciones numéricas con el método de elementos finitos usando el software ANSYS v19.

Por una parte, en el anterior capítulo ya se estudió la influencia de la deformación o la tensión radial en la respuesta [60,61]. En este capítulo se va a describir el estudio numérico realizado para evaluar la influencia de los principales parámetros que participan en la respuesta de la membrana.

Entre los principales parámetros a estudiar se encuentran: la posición de la fuente de sonido, la geometría de la muestra, la presión sonora en la fuente, los puntos de medida de la muestra y la amortiguación considerada.

Por último, se hablará de las conclusiones obtenidas en el capítulo.

4.2 HIPÓTESIS EN EL EXPERIMENTO

Se va a considerar que el experimento cumple una serie de hipótesis, entre las que se encuentran:

- La muestra usada no tiene material añadido.
- La prueba no es destructiva y se puede repetir el ensayo con la misma muestra.
- La presión sonora que le llega a la membrana, provoca una vibración en el régimen de pequeñas deformaciones y pequeños desplazamientos.
- La configuración del experimento debe permitir detectar suficientes frecuencias de resonancia para aplicar las correlaciones necesarias para determinar el módulo de Young.
- El ensayo debe reproducir un comportamiento dinámico en la muestra que permita contrastarla con una solución analítica.
- El experimento debe ser fácil de reproducir con los medios actualmente disponibles en un laboratorio estándar.

4.3 CONFIGURACIÓN DEL EXPERIMENTO

En la Figura 4.1 se puede ver una descripción esquemática de la prueba experimental que se propone en este trabajo. Se trata de una configuración sencilla, en la cual se tiene una membrana circular, sujeta en su borde por un deflector o baffle, consiguiendo condiciones de contorno de empotramiento en el borde. La fuente de sonido se coloca a una distancia 'd' del centro de la membrana, y con un ángulo ' θ ' entre el plano de la membrana y el eje de la fuente de sonido, tal como se muestra en la figura.

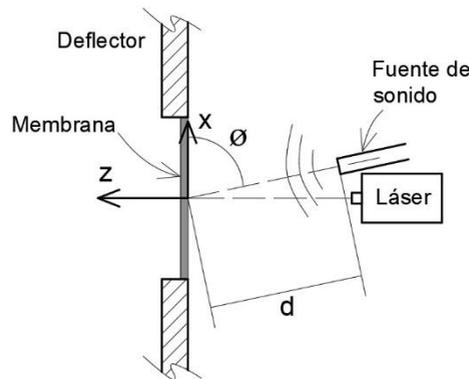


Figura 4.1. Configuración del ensayo

La forma geométrica seleccionada para los especímenes que se usen en el experimento es la circular, que se trata de una forma común y fácil de reproducir en el dispositivo de soporte. La parte circular de la muestra queda libre.

El sonido generado llega en forma de presión a la membrana, y provoca en la misma una respuesta armónica. La membrana vibra, apareciendo en su respuesta frecuencias de resonancia.

Con el objetivo de identificar estas frecuencias, en el experimento se miden las velocidades de un número de puntos seleccionados, mediante un

vibrómetro láser Doppler. De esta forma se tiene la respuesta armónica de los puntos medidos de la membrana.

Por otro lado, teniendo en cuenta la relación teórica entre las frecuencias de resonancia y propiedades mecánicas del material (módulo de Young, coeficiente de Poisson, densidad y geometría) para una membrana circular, con condiciones de contorno de empotramiento y sin estar sujeto a carga, se puede obtener el valor del módulo de Young. La ecuación que determina estas relaciones, está en el capítulo 2 de este trabajo, Ecuación (2.56).

En este capítulo se van a estudiar los diferentes parámetros que influyen en las frecuencias de resonancia que aparecen en la respuesta de la membrana, como respuesta dinámica a la excitación generada en el experimento. Entre estos parámetros se encuentran: la distancia y disposición de la fuente de excitación, la geometría de la membrana, el amortiguamiento, los puntos de medida, entre otros.

Para ello se van a realizar simulaciones numéricas con el método de elementos finitos usando el software ANSYS v19, con distintas configuraciones del experimento, cambiando los parámetros a estudiar.

4.4 MÉTODO NUMÉRICO. ANÁLISIS DE ELEMENTOS FINITOS

En el estudio numérico se ha considerado una membrana de 1 cm de diámetro, valor asimilable al diámetro del tímpano, y con distintos espesores.

Las propiedades mecánicas tomadas han sido las de un material tipo plástico, con: densidad de 1200 kg/m^3 , módulo de Young de 2 GPa y

coeficiente de Poisson de valor 0.35. Se simula el material con características de isotropía, y con comportamiento elástico y lineal.

Aunque el estudio se realiza con una configuración específica de materiales y geometría, los resultados son fácilmente extrapolables a configuraciones similares de otros materiales y con órdenes de magnitud parecidos.

Para los distintos casos se han realizado dos tipos de análisis: un análisis modal y un análisis armónico. Con el análisis modal se obtienen los modos de vibración, y con el análisis armónico se obtiene la respuesta de la membrana en forma de velocidad de los puntos de la misma, como respuesta a la excitación recibida. Se estudia la influencia de los distintos parámetros en la respuesta de la membrana, y cómo varían las frecuencias armónicas respecto de las modales.

- **ANÁLISIS MODAL**

Se han modelado membranas circulares con condiciones de empotramiento en el borde, para realizar el análisis modal de las mismas.

Con este análisis se obtienen los modos de vibración y las formas modales.

- **ANÁLISIS ARMÓNICO**

Para este análisis se modelan dos volúmenes claramente diferenciados, uno correspondiente a la membrana del material, y otro que se refiere al aire que rodea a la misma. Entre estos dos volúmenes hay que establecer una capa de transición, que permita el acoplamiento fluido-estructura. Simular numéricamente el acoplamiento vibroacústico se trata de un problema complejo.

Con este análisis lo que se obtiene es la respuesta de la membrana en forma de velocidad, de los diferentes nodos definidos en el análisis.

Los tipos de elementos usados en el programa ANSYS, han sido: SOLID185 para el sólido, que es la membrana, FLUID30 para los elementos acústicos, que son el volumen del aire, y FLUID130 para la esfera que encierra el aire, y con el que se simula esta superficie como infinita. Respecto al elemento sólido, el elemento fluido incorpora las traslaciones en las tres coordenadas del espacio, 'x', 'y' y 'z', más la presión como grado de libertad, aunque los grados de libertad de movimiento sólo se han considerado activos en las inmediaciones de la membrana, para de esta manera reducir el coste computacional.

En cuanto a los tamaños de los tipos de elementos simulados, para la membrana (tipo de elemento SOLID185) se ha usado un tamaño referido al espesor de la membrana, de valor 3 veces el espesor, tamaño suficiente para conseguir una convergencia en los resultados. Para los elementos fluidos, el tamaño mínimo está definido según el tamaño del elemento sólido usado para mallar la membrana, y el máximo se ha tomado un valor entorno a la longitud de onda de la frecuencia máxima simulada (15 kHz) dividida por 10. Son valores aceptables de tamaños de elementos para las simulaciones.

En cuanto a las propiedades de los materiales, como se ha comentado con anterioridad, para la membrana se ha tomado: densidad de 1200 kg/m^3 , módulo de Young de 2 GPa y coeficiente de Poisson de valor 0.35. Para el aire se ha considerado: densidad de 1.21 kg/m^3 , velocidad del sonido en el aire de 343 m/s y presión de referencia de 20·MPa. Como coeficiente de

absorción se ha tomado 0.01, y como coeficiente de amortiguamiento se han considerado distintos valores: 1%, 5%, 10%, 20%, 30% y 40%.

El rango de frecuencias simulado ha sido desde 50 Hz hasta 15 kHz, con incrementos de 50 Hz. El rango máximo de audición del oído humano es de hasta 20 kHz.

Para la posición y disposición de la fuente de sonido, se han considerado diferentes casos. Para el ángulo formado entre el eje de la fuente de sonido y el plano de la membrana, ángulo ' θ ' (ver Figura 4.1), se han considerado dos valores diferentes: 90° y 45°. La distancia de la fuente de sonido ' d ' considerada ha sido de 1 y 5 cm. También se realizan simulaciones con presiones distintas en la fuente de sonido: 1 Pa y 0.1 Pa

En la Figura 4.2 se representa en elementos finitos los distintos volúmenes simulados en el análisis armónico: la membrana, el volumen del aire y la fuente de sonido. Las zonas de color verde indican las zonas en los que se ha impuesto condiciones de contorno de empotramiento. En la imagen se puede distinguir la relación entre los tamaños de elementos necesaria respecto a la membrana.

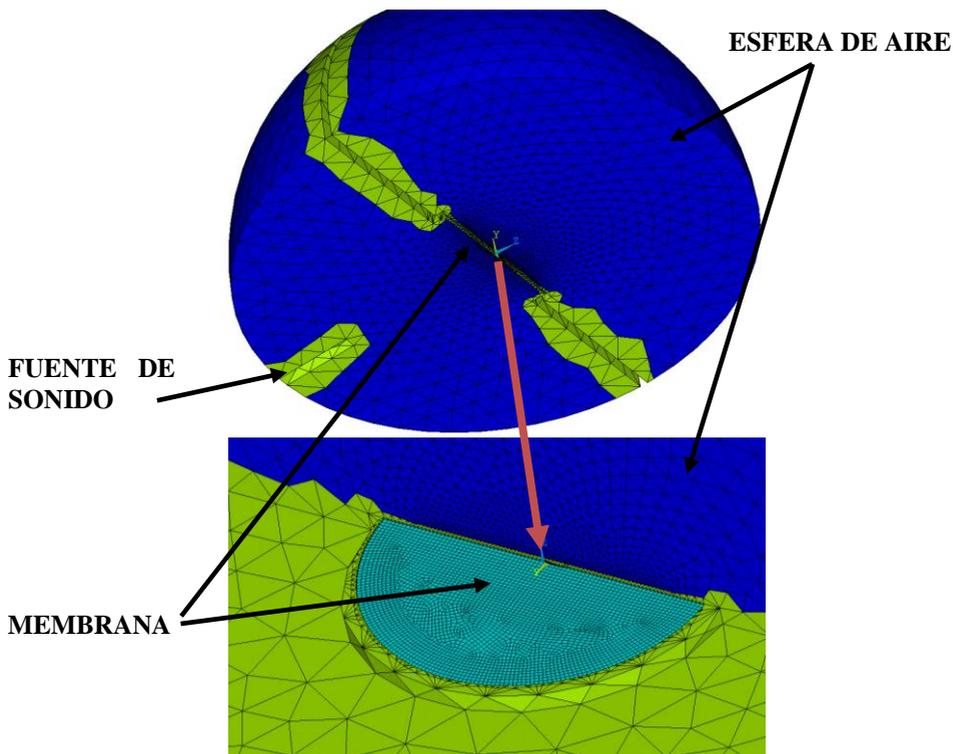


Figura 4.2. Modelo de malla de la simulación numérica de la respuesta vibroacústica de una membrana delgada

En las simulaciones se introducen las condiciones de contorno, de empotramiento en los bordes de la membrana, y de volumen infinito en las áreas externas de los volúmenes del aire.

Además, el problema presenta simetría, con lo cual sólo se ha modelado parte del mismo, considerando las correspondientes condiciones de simetría en el modelado.

4.5 ESTUDIO DE LA INFLUENCIA DE LOS DIFERENTES PARÁMETROS EN LA RESPUESTA DE LA MEMBRANA

La forma de la deformada de la membrana es diferente para cada modo de vibración. En la Figura 4.3 (similar a la Figura 2.11 pero con proyección 3D) se muestra la forma de los primeros 9 modos de vibración de una membrana circular, con los diámetros nodales, n , y círculos nodales, s , para cada modo.

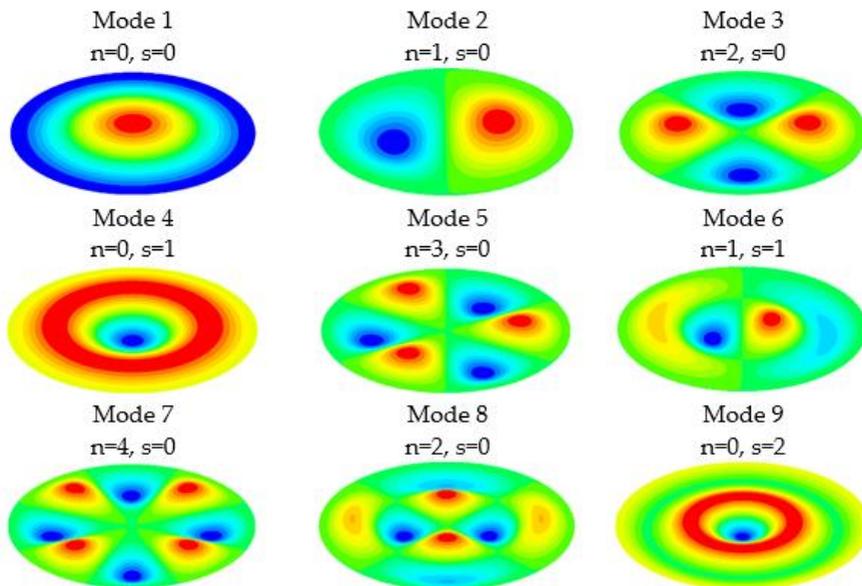


Figura 4.3. Deformada de los primeros 9 modos de vibración de una membrana circular

En los distintos modos de vibración hay puntos de la membrana con grandes desplazamientos respecto a otros, y esos puntos van cambiando respecto al modo considerado. Esta cuestión debe tenerse en cuenta en la elección de los puntos a medir en el ensayo, ya que la elección de estos puntos determinará los modos que se pueden detectar en la medición. Por este

motivo el experimento debe excitar convenientemente los modos de vibración que se quiere detectar, para conseguir el objetivo del mismo.

Se ha realizado un extenso estudio numérico con el software ANSYS v19 de elementos finitos, para estudiar la influencia de los parámetros sobre los modos de vibración. Esta metodología permitirá determinar los puntos a medir más adecuados en el ensayo, así como la posición y el ángulo de la fuente de sonido. Como aparece en la Figura 4.1, la fuente de sonido se coloca a una distancia ‘d’ del centro de la membrana, y a un ángulo ‘ θ ’, entre el plano de la membrana y el eje de la fuente de sonido.

En los distintos casos estudiados, se va a comparar la respuesta armónica de la membrana con la modal, para estudiar la influencia de la combinación de los diferentes parámetros.

Se van a representar diferentes funciones de respuesta de frecuencia, FRF, en velocidad, respecto a la presión que se aplica en la fuente de sonido. La presión en la superficie de la membrana se trata de una distribución de presión espacial a lo largo de la superficie de la misma y no se puede medir, de ahí que el parámetro que se usa como entrada es la presión en la fuente de sonido.

La Figura 4.4 presenta los resultados para las membranas de 40, 60 y 100 μm de espesor para el centro de la membrana y para un rango de frecuencia entre 0.5 y 15 kHz, con incrementos de 50 Hz. La fuente de sonido se ha tomado a una distancia ‘d’ de 1 cm y un ángulo ‘ θ ’ de 90°, y el valor del amortiguamiento es del 1%. La excitación que provoca la respuesta de la membrana es una onda sonora procedente de la fuente con una presión sonora de 1 Pa.

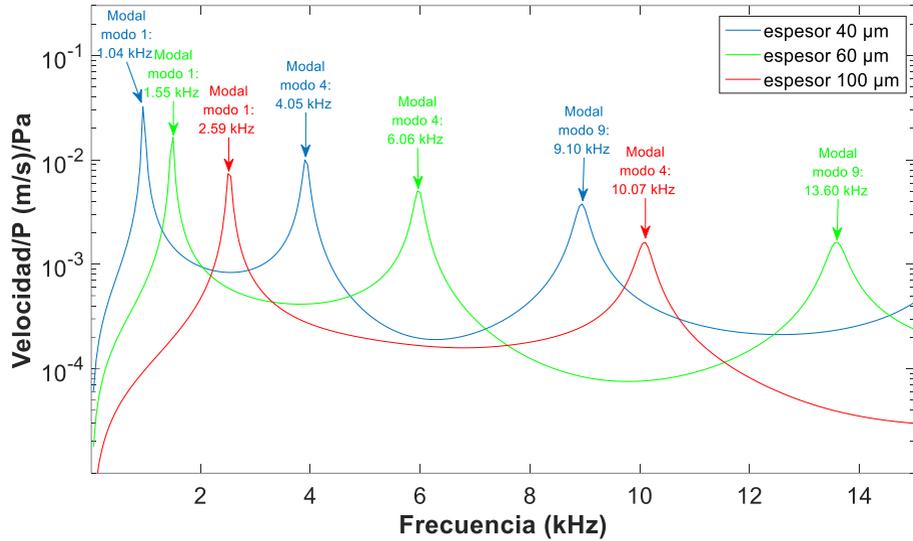


Figura 4.4. Velocidad del centro de la membrana de 40 μm (azul), 60 μm (verde) y 100 μm (rojo) μm de espesor, con fuente de sonido a 90°, y d=1 cm

En la Figura 4.4 se observa que, para el centro de la membrana y los tres espesores simulados, en la respuesta solo aparecen los modos de simetría axial, modos 1, 4 y 9. Las frecuencias donde aparecen los picos son muy cercanos a las frecuencias de los modos mencionados.

También se ha simulado el caso de la membrana de 40 μm de espesor, con valor del amortiguamiento de 1%, la presión de la fuente sonora de 1 Pa y colocada a una distancia ‘d’ de 5 cm y dos valores del ángulo ‘ø’: 90° y 45°. En la Figura 4.5 está representada la velocidad del punto central de la membrana para un rango de frecuencia entre 0.5 y 15 kHz.

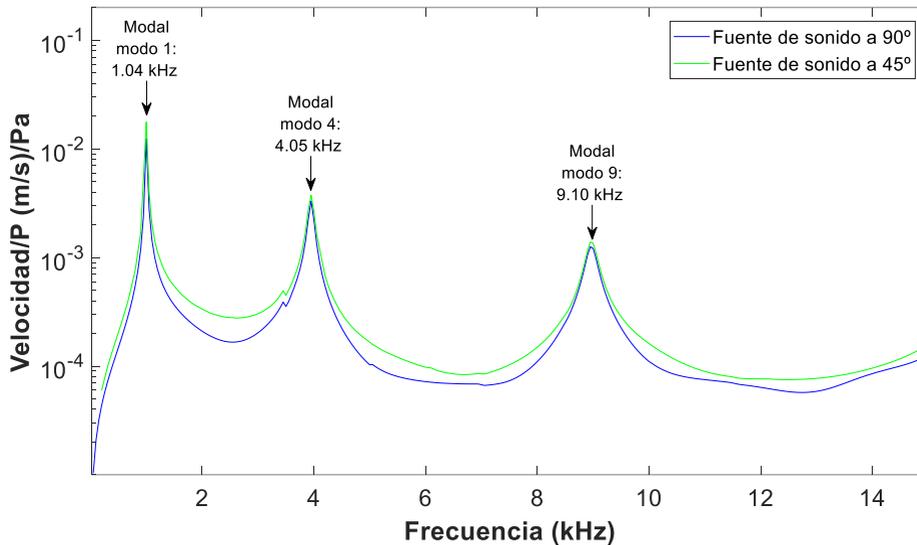


Figura 4.5. Velocidad del centro de la membrana de $40 \mu\text{m}$ de espesor, con la fuente de sonido a 90° (azul) y 45° (verde), y $d=5 \text{ cm}$

Mirando la respuesta del centro de la membrana y para las dos posiciones de la fuente en la Figura 4.5, se observa que solo aparecen los modos de simetría axial, modos 1, 4 y 9. Con esto se observa que no hay influencia significativa de la posición de la fuente para el punto central.

Comparando las respuestas de la membrana de $40 \mu\text{m}$ de espesor en las figuras 4.4 y 4.5, cuya diferencia en la configuración de la simulación es la distancia de la fuente de sonido a la membrana, se observa que en la respuesta aparecen los mismos modos, los modos de simetría axial 1, 4 y 9.

Para las mismas simulaciones anteriormente descritas, en las que se ha basado la Figura 4.5, se ha graficado la respuesta de un punto de la membrana con coordenadas $y=0 \text{ cm}$, $x=\text{radio}/2$. La respuesta de este punto para las dos posiciones de la fuente ha sido representada en la Figura 4.6.

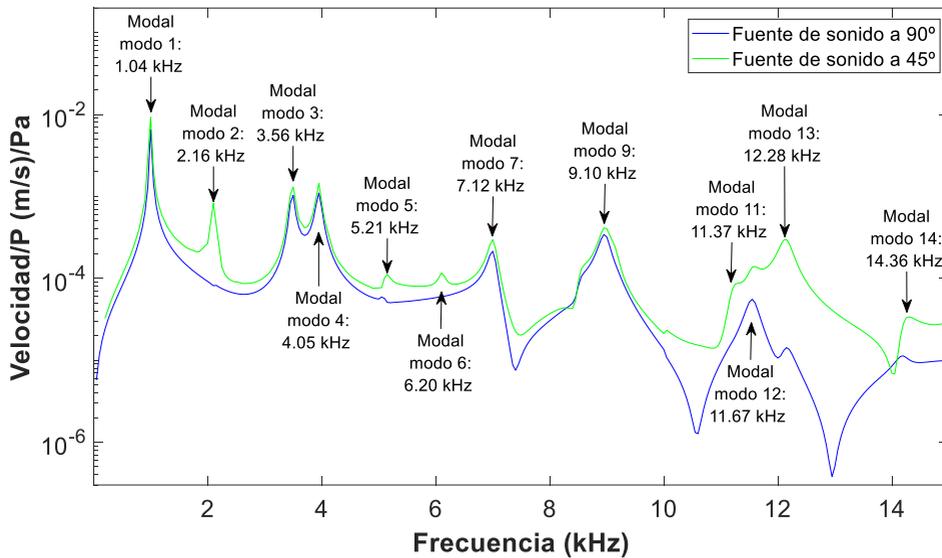


Figura 4.6. Velocidad del punto de coordenadas $y=0$, $x=\text{radio}/2$ de la membrana de $40\ \mu\text{m}$ de espesor, con la fuente de sonido a 90° (azul) y 45° (verde), y $d=5\ \text{cm}$

En la Figura 4.6 se observa que para el punto de coordenadas $y=0$ y $x=\text{radio}/2$, en la respuesta de la membrana están presentes más modos de vibración. Para el caso de la posición de la fuente a 45° se puede ver que casi todos los modos modales aparecen. Por tanto, para esta geometría controlada, la selección de la posición de la fuente permite involucrar más o menos modos en la respuesta de la membrana. La necesidad de involucrar más o menos modos va a depender de los datos a necesitar para realizar la correlación de las propiedades mecánicas en cada espécimen.

Para estudiar la influencia de la presión de la fuente, se ha simulado una membrana de $60\ \mu\text{m}$, con la fuente colocada a una distancia ' d ' de $1\ \text{cm}$, un ángulo ' ϑ ' de 90° , la presión de la fuente sonora de $1\ \text{Pa}$ y $0.1\ \text{Pa}$ y amortiguamiento de 1% . En la Figura 4.7 está representada la respuesta en

velocidad del centro de la membrana para estos dos valores de presión de la fuente.

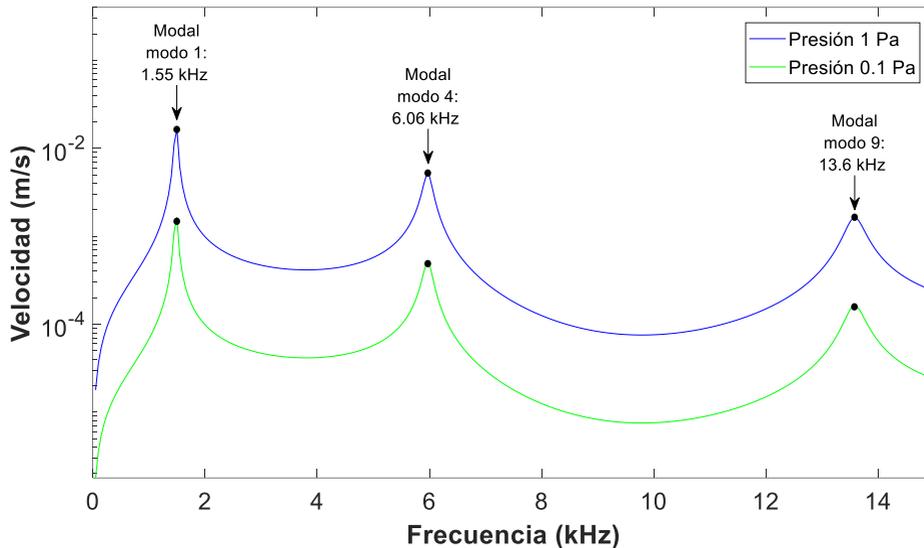


Figura 4.7. Velocidad del centro de la membrana de 60 μm de espesor, con presión de la fuente de sonido de 1 Pa (azul) y 0.1 Pa (verde), y $d=1$ cm

Se observa que la respuesta de la membrana es similar y las frecuencias de resonancia aparecen en los mismos valores de frecuencias para los dos casos de presión estudiados, como era de esperar.

Para estudiar la influencia del amortiguamiento en la respuesta, se han simulado membranas de espesores 40 μm y 60 μm de espesor, con la fuente de sonido a una distancia 'd' de 1 cm, un ángulo ' \varnothing ' de 90° y la presión de la fuente sonora de 1 Pa. En las figuras 4.8 y 4.9 se ha graficado la velocidad del punto central de las membranas, para un rango de frecuencia entre 0.5 y 15 kHz, y distintos valores de amortiguamiento: 1%, 5%, 10%, 20%, 30% y 40%.

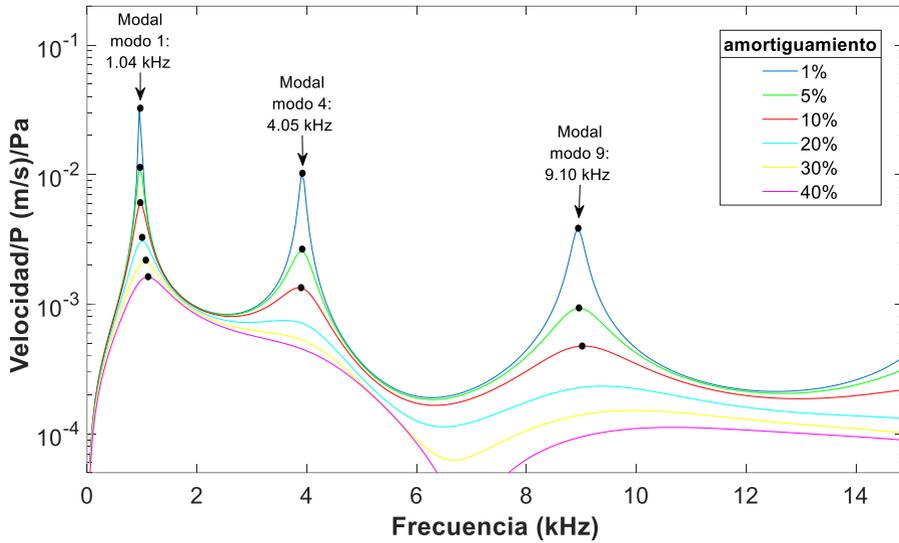


Figura 4.8. Velocidad del punto central de la membrana de 40 μm . Posición de la fuente a 90° , $d=1$ cm y valores de amortiguamiento: 1% (azul), 5% (verde), 10% (rojo), 20% (cian), 30% (amarillo) y 40% (magenta)

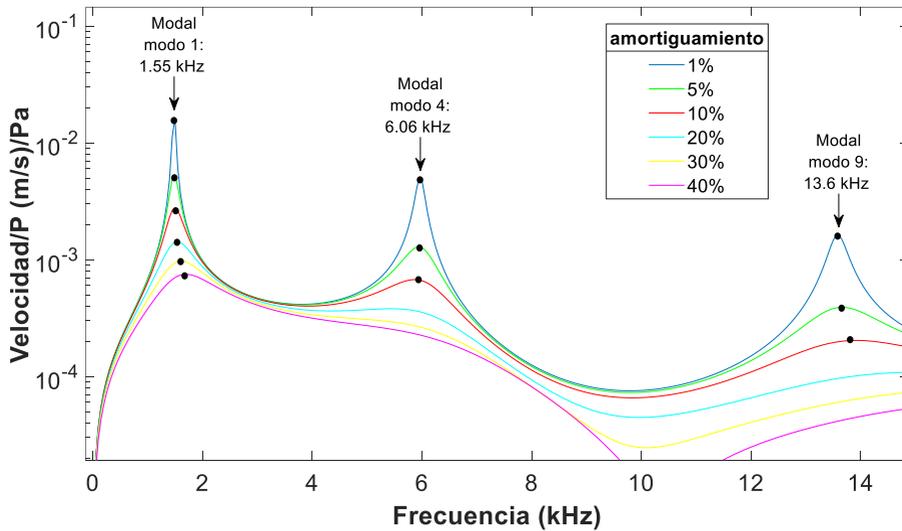


Figura 4.9. Velocidad del punto central de la membrana de 60 μm . Posición de la fuente a 90° , $d=1$ cm y valores de amortiguamiento: 1% (azul), 5% (verde), 10% (rojo), 20% (cian), 30% (amarillo) y 40% (magenta)

Mirando las figuras 4.8 y 4.9, se observa que los picos se vuelven más suaves para mayores valores de amortiguamiento, como se esperaba. Pero además de esto, los valores de las frecuencias en las que aparecen los picos, generalmente, se desplazan hacia la derecha aumentando por tanto la frecuencia donde se produce. Con esta circunstancia se puede concluir que la frecuencia de resonancia armónica aumenta al aumentar el amortiguamiento. Por otra parte, para un cierto valor de amortiguamiento suficientemente alto, no es posible determinar dónde se encuentra el pico de la gráfica visualmente. En las dos figuras mencionadas se detectan 3 modos para un amortiguamiento más pequeño del 20% (1%, 5% y 10%), y para este amortiguamiento del 20% y mayores (30% y 40%), sólo se detecta visualmente el 1º modo de vibración. Se tendría que reconfigurar el ensayo para visualizar los picos que no están presentes, que se podría hacer cambiando la posición de la fuente, el nivel de presión, etc. Simulaciones como ésta, ayudan a anticipar el número de frecuencias potenciales para cada tipo de muestra y configuración del ensayo.

En las figuras 4.10 y 4.11 se ha representado la velocidad de puntos de la superficie de una membrana de 40 μm , a una distancia 'd' de 5 cm, ángulo de la fuente ' \varnothing ' de 90°, 1 Pa de presión y amortiguamiento de 1%, con esto se puede detectar el movimiento de los puntos. En la Figura 4.10 se ha representado algunos puntos de esta membrana para visualizar mejor las frecuencias de resonancia. En la Figura 4.11 se representan todos los puntos de la misma.

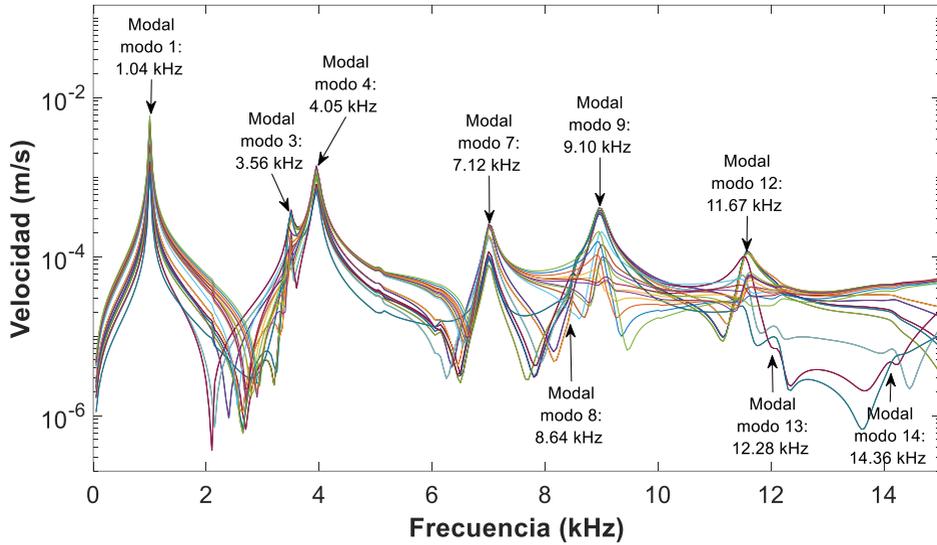


Figura 4.10. Respuesta superficial de algunos puntos para la membrana de $40\ \mu\text{m}$, ángulo de fuente de 90° , 1 Pa de presión en la fuente y $d=5\ \text{cm}$

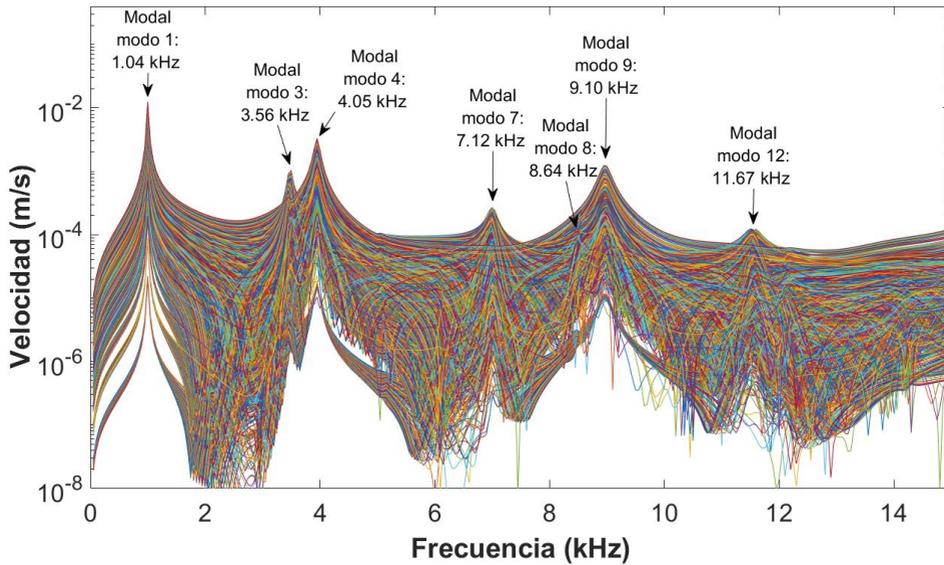


Figura 4.11. Respuesta superficial de todos los puntos para la membrana de $40\ \mu\text{m}$, ángulo de fuente de 90° , 1 Pa de presión en la fuente y $d=5\ \text{cm}$

Para determinar los puntos posibles que pueden ser detectables por un Vibrómetro Láser Doppler estándar, se ha considerado un valor de $2 \cdot 10^{-5}$ m/s como velocidad mínima para una buena detección de movimiento por parte del láser. Para esta velocidad mínima establecida en una membrana de $40 \mu\text{m}$, a una distancia 'd' de 5 cm, ángulo de la fuente de 90° y 1 Pa de presión en la fuente, se ha representado en la Figura 4.12 los puntos de la superficie de esta membrana que cumplen la condición de ser detectados por este láser estándar.

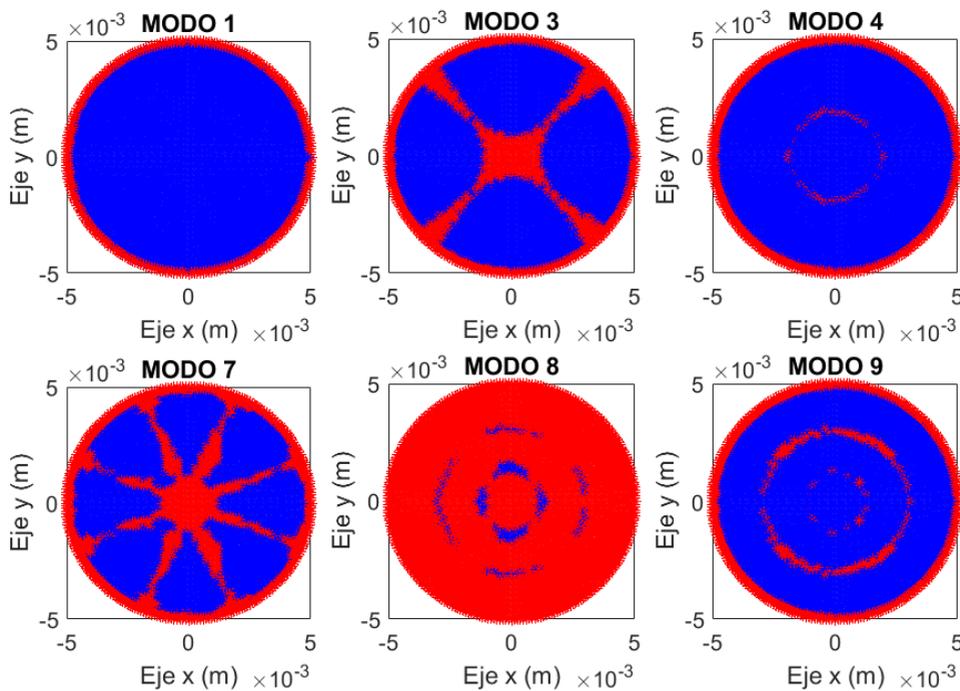


Figura 4.12. Puntos candidatos de la superficie de la membrana para la membrana con un espesor de 40 micras y con un ángulo de 90° , y $d=5$ cm.
Modos 1, 3, 4, 7, 8 y 9

Con la configuración considerada en la Figura 4.12, los primeros seis modos que se pueden observar son los modos 1, 3, 4, 7, 8 y 9. Esta rutina nos

permite determinar los modos de vibración que se pueden captar en el ensayo, combinando la configuración la posición de la fuente con la sensibilidad del láser en cada experimento.

4.6 DISEÑO DEL EXPERIMENTO

Para determinar la configuración del ensayo, también hay que tener en cuenta que se busca un ensayo lo más sencillo posible, fácil de realizar y de replicar, para poder captar con un láser estándar los modos de vibración necesarios y relacionar estos con las propiedades mecánicas de la membrana, para determinar así el módulo de Young del material.

Considerando las configuraciones que se han tenido en cuenta, la influencia de los diferentes parámetros estudiados y buscando la sencillez en la configuración del ensayo, y la facilidad de réplica de la misma como cuestiones importantes, se concluye que la mejor configuración del ensayo se consigue colocando la fuente de sonido a una distancia del centro de la membrana, y con un ángulo ' θ ' de 90 °. De esta forma nos aseguramos que se presenta en la respuesta de la membrana los modos de simetría axial, 1, 4, 9.... Estos modos son fáciles de reproducir en la respuesta de la membrana y de captar por un láser estándar, y son los más fáciles de identificar al presentar la deformada de estos modos simetría axial.

4.7 CONCLUSIONES

En este capítulo se ha realizado un estudio numérico de diferentes configuraciones del experimento para estudiar los distintos parámetros que participan en la respuesta dinámica de la membrana, y de esta manera poder determinar la mejor configuración para captar los modos de vibración

necesarios para relacionar las propiedades mecánicas con los modos de la respuesta.

Teniendo en cuenta la configuración básica del ensayo representada en la Figura 4.3, los parámetros estudiados que pueden influir en la respuesta dinámica de la membrana y por tanto en los modos de vibración presentes en la misma, ha sido la distancia ‘d’ al centro de la membrana, el ángulo ‘ θ ’ entre el plano de la membrana y el eje de la fuente de sonido, la presión en la fuente de sonido y el valor del amortiguamiento de la membrana.

Después de evaluar y estudiar los resultados obtenidos, se ha llegado a la conclusión que, desde un punto de vista teórico, la mejor configuración del experimento se consigue colocando la fuente de sonido a una distancia del centro de la membrana, y con un ángulo ‘ θ ’ de 90 °, esto es, de forma perpendicular a la superficie de la misma.

Que los desplazamientos de la membrana sean más o menos grandes dependerá de la presión en la fuente, y la distancia de la misma a la membrana. Estos parámetros deben ser tales que la respuesta sea elástica y lineal.

Por último, destacar que el contenido de este capítulo se encuentra incluido en parte del artículo titulado “A Novel Methodology to Obtain the Mechanical Properties of Membranes by Means of Dynamic Tests” [76], publicado el 2 de marzo de 2022 en la revista “Membranes”.

CAPÍTULO 5

Cálculo de las frecuencias de resonancia. Método de ajuste circular

CAPÍTULO 5: Cálculo de las frecuencias de resonancia. Método de ajuste circular

5.1. INTRODUCCIÓN

La relación entre las frecuencias naturales y la función de respuesta en frecuencia, FRF, se puede obtener de la observación visual de los picos máximos de la respuesta armónica de la membrana. Se trata de un procedimiento intuitivo para el cálculo de los modos de vibración, válido en el estudio de problemas con un bajo amortiguamiento y con el fin de conocer entorno a qué valor de frecuencia se encuentran los modos de resonancia. La Figura 5.1 es un ejemplo de función de respuesta en frecuencia, donde los picos de la gráfica aparecen en las frecuencias de resonancia.

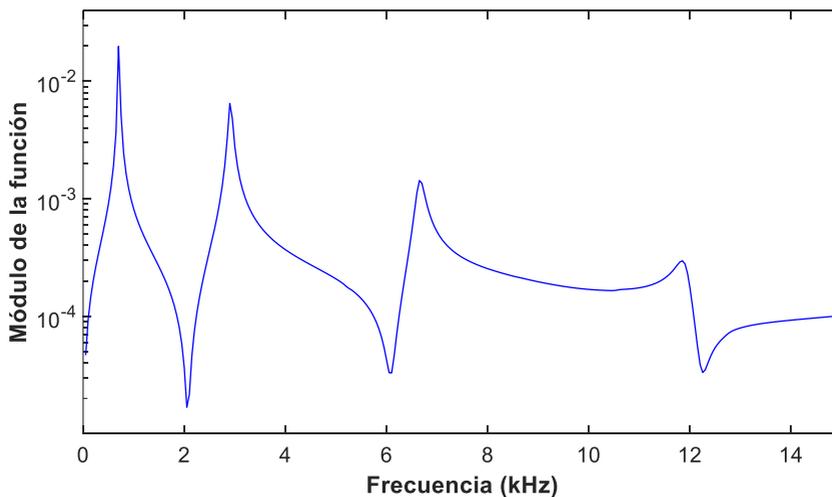


Figura 5.1. Función de respuesta en frecuencia (FRF), representación del módulo frente a la frecuencia

El uso de las FRF para el cálculo de las frecuencias de resonancia, tiene la limitación de que está influenciado por el nivel de discretización en frecuencia y por la capacidad de interpretación del gráfico.

Si se quiere mayor exactitud en el cálculo de los modos de vibración, o si nos encontramos con el caso de un problema con mayor amortiguamiento y complejidad, hay que recurrir a técnicas de ajuste numérico de curvas para identificar las frecuencias de resonancia y no usar el método de la observación.

En este capítulo se va a presentar el método de ajuste circular tradicional para el cálculo de los modos de vibración y amortiguamiento, y se basa en el uso del diagrama de Nyquist [62,77,78]. Se trata de un método simple, pero válido para identificar las frecuencias de resonancia, paso necesario para el propósito de este trabajo.

Se va a recurrir al estudio numérico de la membrana mediante el software de elementos finitos ANSYS v19, que sirva como ejemplo de la aplicación del método, y comparar las frecuencias de resonancia obtenidas con el análisis modal y las FRF, con los resultados obtenidos con el uso del diagrama de Nyquist.

Para el cálculo de los parámetros implicados en el método de ajuste circular, se usa el programa Matlab R2019b.

Con la aplicación de este método se pretende salvar la limitación de la magnitud de entrada considerada en las funciones de respuesta en frecuencia (FRF). Como no se puede medir la fuerza aplicada en la membrana, en las FRF se utiliza la presión sonora de la fuente de sonido como magnitud de

entrada. Con estos estudios previos comprobaremos que esta limitación puede salvarse usando este método.

También se van a comparar la forma del diagrama para diferentes valores de amortiguamiento, concluyendo cuál es el efecto obtenido.

Al final del capítulo se hablará de las conclusiones obtenidas.

5.2. MÉTODO DEL AJUSTE CIRCULAR

El método del ajuste circular se basa en el diagrama de Nyquist [62,77,78]. En este diagrama se grafica una función compleja, representando la parte imaginaria de la función en el eje ‘y’ de ordenadas y la parte real en el eje ‘x’ de abscisas. Con esta representación se construye una gráfica en la que están representadas cada una de las componentes de los vectores de la función correspondiente a cada una de las frecuencias, aunque el valor de las frecuencias no aparezca. La gráfica obtenida es a la que se denomina diagrama de Nyquist y es con la que se trabaja en el método de ajuste circular.

En este diagrama se aprecia la presencia de un modo natural de vibración porque la función adquiere forma de circunferencia. El tamaño y la posición de la circunferencia depende de los parámetros que caracteriza ese modo, como son la frecuencia natural, el amortiguamiento... y también del resto de los modos existentes en dicha función.

La Figura 5.2 es un ejemplo de la representación de un diagrama de Nyquist de una función de respuesta en frecuencia.

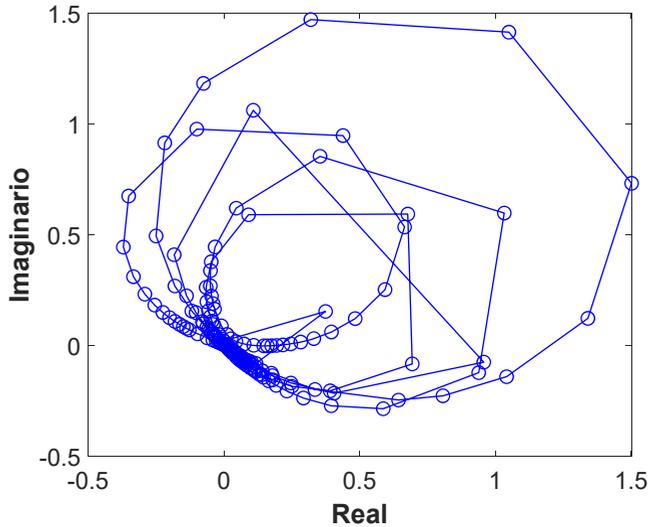


Figura 5.2. Diagrama de Nyquist de una función de respuesta en frecuencia

El método consiste en ajustar una circunferencia por mínimos cuadrados en el plano complejo. Para que el método sea válido deben cumplirse una serie de hipótesis, como son: que el amortiguamiento sea pequeño, y que los modos estén desacoplados.

Se parte de la función de respuesta en frecuencia expresada en desplazamiento, cuya expresión matemática está expresada en la Ecuación (5.1), para un grado de libertad:

$$H(\omega) = \frac{U_k + iV_k}{i\omega - \alpha_k - i\nu_k} + R_k + iI_k \quad (5.1)$$

Los distintos términos de la Ecuación (5.1) representan los siguientes parámetros:

- ν_k : Es la frecuencia natural del modo k.
- α_k : Es el coeficiente de amortiguamiento del modo k.

- $U_k + iV_k$: Es el residuo del modo correspondiente.
- $R_k + iIk$: Es una constante que representa la influencia del resto de modos.

Realmente, una función de respuesta en frecuencia de un grado de libertad se presenta con un polinomio de 2º orden en el denominador, y al descomponer esa fracción en suma de fracciones simples, se obtienen dos fracciones. Una de estas fracciones representa la influencia del valor positivo de la frecuencia natural, y la otra el valor negativo. Para este caso, la influencia de la parte correspondiente al valor negativo se considera despreciable, y por eso en la expresión (5.1) sólo aparece la parte de la frecuencia positiva y el denominador es de un orden.

El proceso de ajuste consiste en determinar los parámetros necesarios para caracterizar la circunferencia que representa la función anterior.

Separando la Ecuación (5.1) en parte real y parte imaginaria, se obtiene la siguiente expresión (5.2):

$$H(\omega) = \left(\frac{-\alpha_k U_k + (\omega - \nu_k) V_k}{\alpha_k^2 + (\omega - \nu_k)^2} + R_k \right) + i \left(-\frac{(\omega - \nu_k) U_k + \alpha_k V_k}{\alpha_k^2 + (\omega - \nu_k)^2} - I_k \right) \quad (5.2)$$

Esta ecuación expresada en función de una circunferencia de centro con coordenadas (x_c, y_c) y radio r , está representada en la Ecuación (5.3):

$$\left(\operatorname{Re}(H(\omega)) - x_c \right)^2 + \left(\operatorname{Im}(H(\omega)) - y_c \right)^2 = r^2 \quad (5.3)$$

donde las coordenadas del centro de la circunferencia y el radio, se pueden calcular en función de los parámetros de la expresión (5.2), según las expresiones de (5.4):

$$\begin{cases} x_c = R_k - \frac{U_k}{2\alpha_k} \\ y_c = I_k - \frac{V_k}{2\alpha_k} \\ r = \frac{\sqrt{U_k^2 + V_k^2}}{2\alpha_k} \end{cases} \quad (5.4)$$

En la Figura 5.3 se puede ver la influencia de los distintos parámetros en la circunferencia, como puede ser en el tamaño, posición y orientación de la circunferencia.

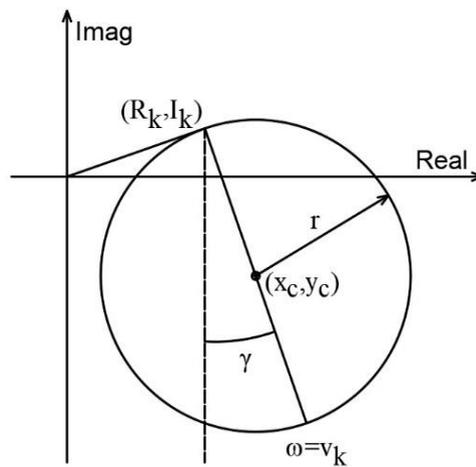


Figura 5.3. Parámetros en la circunferencia

A continuación, se detalla la influencia que los distintos términos que aparecen en la ecuación de la función de respuesta en frecuencia expresada en desplazamiento, tienen sobre los parámetros de la circunferencia. Estos son los siguientes:

- U_k y V_k : Influyen en el tamaño y la posición de la circunferencia, así como en la inclinación del diámetro central que pasa por la frecuencia de resonancia, ν_k .
- α_k : Influye en el tamaño y la posición de la circunferencia.
- R_k y I_k : Influyen en la posición de la circunferencia.

El valor del ángulo γ se calcula según la Ecuación (5.5):

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{U_k}{V_k} \quad (5.5)$$

Los distintos parámetros se pueden determinar relacionando, de una manera adecuada, todas las condiciones mencionadas anteriormente.

5.2.1. DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA EN DESPLAZAMIENTO

Partiendo del diagrama de Nyquist, se selecciona una parte de la función de respuesta. Esta porción de la función se selecciona de una manera visual, por un lado, localizando la posición de un pico en la función, y por otro, escogiendo la parte de la función que adopta forma de circunferencia.

Una vez escogida la parte de la función a utilizar, el siguiente paso es ajustar la circunferencia de esa parte de la función. Para ello se calcula las coordenadas del centro y el radio de la misma.

Se parte de la ecuación de la circunferencia, expresada en la Ecuación (5.6):

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad (5.6)$$

El valor de las coordenadas del centro y radio en función de los parámetros a , b y c de la Ecuación (5.6), están en las expresiones (5.7):

$$\begin{cases} x_c = -\frac{a}{2} \\ y_c = -\frac{b}{2} \\ r = \sqrt{x_c^2 + y_c^2 - c} \end{cases} \quad (5.7)$$

Calculando los valores de los parámetros a , b y c , queda determinada la circunferencia. Estos parámetros se van a calcular minimizando la función de error cuadrático que se obtiene sustituyendo en la ecuación de la circunferencia (5.6) las parejas de coordenadas (x, y) y sumándolas. La función correspondiente al error cuadrático está representada en la ecuación siguiente (5.8):

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=0}^n (x_i^2 + y_i^2 + ax_i + by_i + c)^2 \quad (5.8)$$

Se deriva el error cuadrático en función de los valores a calcular: a , b y c , y se igualan a cero, para minimizar el error de la función. Con esta operación se obtienen 3 ecuaciones con 3 incógnitas a calcular. Estas ecuaciones están expresadas en (5.9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a} &= \sum_{i=0}^n 2(x_i^2 + y_i^2 + ax_i + by_i + c)x_i = 0 \\ \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial b} &= \sum_{i=0}^n 2(x_i^2 + y_i^2 + ax_i + by_i + c)y_i = 0 \\ \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial c} &= \sum_{i=0}^n 2(x_i^2 + y_i^2 + ax_i + by_i + c) = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Expresándolo en forma matricial, se obtendría la expresión (5.10):

$$\begin{bmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i y_i & \sum x_i \\ \sum x_i y_i & \sum y_i^2 & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum y_i & n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sum (x_i^2 + y_i^2) x_i \\ -\sum (x_i^2 + y_i^2) y_i \\ -\sum (x_i^2 + y_i^2) \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtienen los parámetros a , b y c , y con estos se obtienen los valores de x_c , y_c y r , y así quedaría caracterizada la circunferencia.

Para localizar la frecuencia natural de vibración que está representada en el diagrama de Nyquist mediante una circunferencia, se va a usar el ángulo formado por dos vectores cuyo origen es el centro de la circunferencia y sus puntos finales dos puntos consecutivos de ésta. Este ángulo se va a denominar a partir de ahora ρ . Se puede demostrar que el punto de la circunferencia donde $\omega = \nu_k$, esto es que la frecuencia es la de resonancia, el valor de $\frac{\partial \rho}{\partial \omega}$ alcanza un máximo.

Si se aproxima la derivada $\frac{\partial \rho}{\partial \omega}$ por incrementos en el numerador y denominador, $\frac{\Delta \rho}{\Delta \omega}$, y aprovechando además que, en general, las funciones de respuesta en frecuencia se obtienen con incrementos de frecuencias ω constantes, con un muestreo del valor del incremento del ángulo ρ a lo largo de todos los puntos considerados, se puede observar en qué intervalo se encuentra situado la frecuencia de resonancia ν_k , que coincidirá con el intervalo donde el ángulo sea mayor.

Para calcular el ángulo entre dos vectores consecutivos, definidos desde el centro de la circunferencia hasta el punto correspondiente del diagrama de Nyquist, se puede usar el producto escalar entre dos vectores. En (5.11) aparecen las dos expresiones del producto escalar, y de ellos se puede obtener la expresión del ángulo ρ , que está indicada en la Ecuación (5.12).

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \rho \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y \end{aligned} \right\} \cos \rho = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \quad (5.11)$$

$$\rho = \arccos \frac{a_x b_x + a_y b_y}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \quad (5.12)$$

En la Figura 5.4 se observa cómo se van tomando los vectores de puntos consecutivos, cambiando de punto a punto hasta recorrer la circunferencia completa. En este punto, ya está determinada la circunferencia, se conoce tanto el centro como el radio de la misma. En esta figura, se representa en concreto, un ejemplo de ángulo entre dos vectores consecutivos en el diagrama de Nyquist.

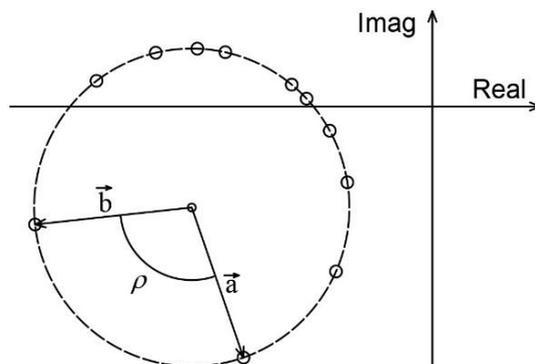


Figura 5.4. Ejemplo de ángulo entre dos vectores consecutivos en el diagrama de Nyquist

Aplicando la Ecuación (5.12) para calcular el ángulo entre dos puntos consecutivos, existe una indeterminación para el caso que el ángulo sea mayor de 180° . En esta situación en concreto, la función arco coseno nos devolvería el valor del ángulo menor de 180° y que posee el mismo valor para la función coseno. Pero esta indeterminación no tiene importancia a la hora de determinar el intervalo, porque este ángulo seguiría siendo el máximo. Lo que sí variaría es el valor del ángulo, que sería $2\pi-\rho$. En la Figura 5.5 se observa con más claridad lo comentado en este párrafo.

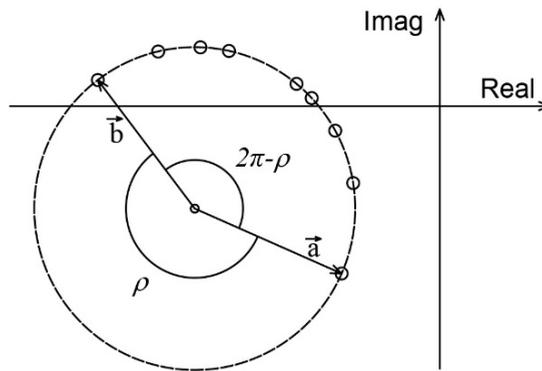


Figura 5.5. Ejemplo de dos vectores consecutivos con ángulo mayor de 180°

Para interpretar los resultados y corregir las indeterminaciones que vayan apareciendo, como que el ángulo entre dos vectores sea menor o mayor de 180° , se pueden realizar una serie de cálculos.

Para conocer si el sentido de giro entre los vectores que unen el centro de la circunferencia con los puntos consecutivos de la circunferencia, es horario o antihorario, la comprobación se puede realizar con el producto vectorial de estos dos vectores. Si este producto es positivo, el sentido es antihorario, y si es negativo, horario.

Otra cuestión a conocer es si el ángulo entre dos vectores es menor o mayor de 180° . Para ello se puede usar el producto vectorial entre los vectores que aparecen en la Figura 5.6, donde el 1º vector \vec{a} es el formado entre el centro de la circunferencia y el 1º punto, y el 2º vector \vec{b} es el definido entre el 2º punto y el 1º.

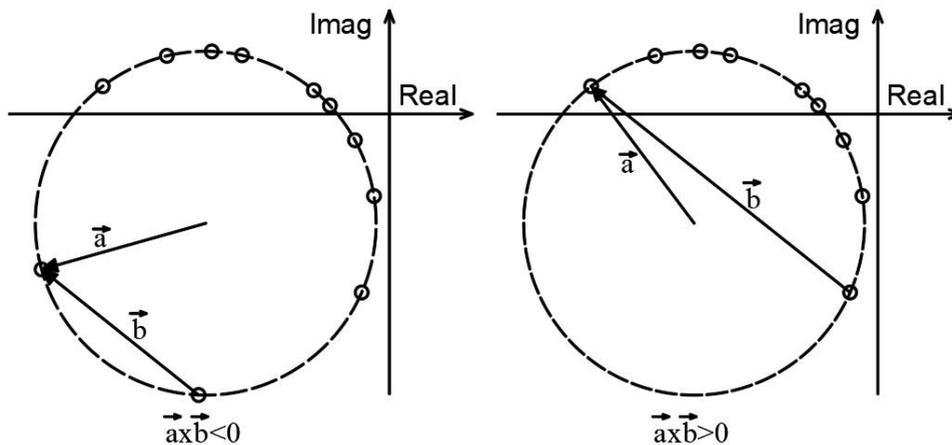


Figura 5.6. Signo del producto vectorial de los vectores a y b

En función del signo que se obtenga del resultado de la operación y del sentido de giro, se conoce si el ángulo entre los dos vectores es menor o mayor de 180° . En la Figura 5.6 se observa que, para un mismo sentido de giro, en el 1º caso el signo es negativo, y para el 2º caso es positivo.

Una de las cuestiones a comprobar es si el intervalo seleccionado, en el cual se encuentra la frecuencia de resonancia, es alguno de los extremos. En el caso que así fuera, se podría estar en alguna de los siguientes casos:

- Que se haya cometido un error al seleccionar el intervalo de estudio y se tenga que seleccionar de nuevo para escoger la zona donde se encuentra el pico correspondiente a la frecuencia natural.

- Que existan dos modos de vibración muy cercanos, y a la hora de tomar el intervalo correspondiente no se haya podido incluir dos puntos que rodeen a la frecuencia que se está buscando. Esto ocurre para el caso de modos acoplados, y que supone una limitación de este método. En este caso es imposible determinar el valor de la frecuencia natural buscada.

Una vez localizado el intervalo con el ángulo mayor, se sabe entre qué dos frecuencias está la frecuencia natural. Para localizar su valor, hay varios criterios que se pueden usar. El que se ha escogido en este trabajo, ha sido el de hallar una proporción entre los intervalos adyacentes, comprobando que, en general, da buenos resultados [77,78].

Este procedimiento consiste en calcular el valor de las distancias que hay entre cada extremo del intervalo y los puntos adyacentes a estos puntos extremos. Una vez obtenidas estas distancias, y tomando como referencia uno de los puntos extremos de este intervalo máximo, se calcula la proporción P que sirve para obtener el ángulo ρ' , que es el ángulo entre ese punto extremo de referencia y la frecuencia de resonancia ν_k . Las relaciones entre estos parámetros están representadas en la Figura 5.7.

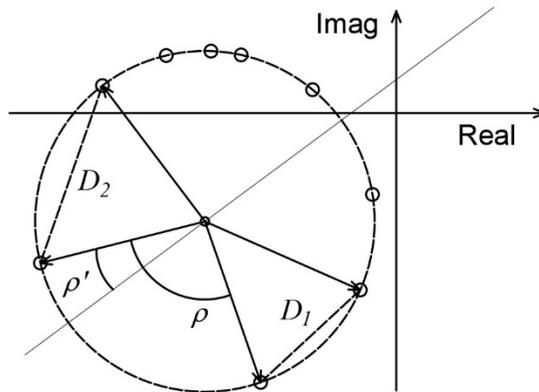


Figura 5.7. Cálculo de la proporción P para la determinación de la frecuencia de resonancia ν_k

El cálculo del ángulo ρ' está determinado en las expresiones (5.13):

$$\rho' = P \cdot \rho; \quad P = \frac{D_1}{D_1 + D_2} \quad (5.13)$$

Para calcular la frecuencia de resonancia se usa la Ecuación (5.14):

$$\nu_k = \omega_{\text{Ref}} - \Delta\omega' = \omega_{\text{Ref}} - \Delta\omega \cdot P \quad (5.14)$$

La recta trazada en la Figura 5.7, que ayuda a calcular el ángulo ρ' y el punto de la circunferencia cuya frecuencia corresponde con ν_k (frecuencia de resonancia), sirve también para calcular la constante $R_k + iI_k$, que corresponde con el punto diametralmente opuesto al de ν_k . En la Figura 5.8 aparecen los puntos mencionados.

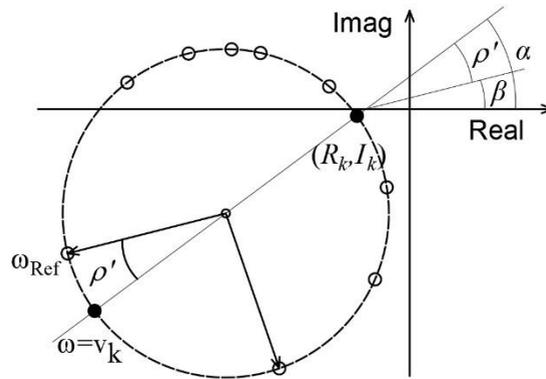


Figura 5.8. Puntos en la circunferencia

En esta figura también se muestra gráficamente cómo se puede obtener la pendiente de la recta. De forma analítica se calcularía de la forma que aparece en las ecuaciones (5.15) y (5.16):

$$\beta = \arccos \frac{Ref_x - x_c}{\sqrt{(Ref_x - x_c)^2 + (Ref_y - y_c)^2}} \quad (5.15)$$

$$\alpha = \beta + \rho' \quad (5.16)$$

Por otro lado, para calcular el valor del amortiguamiento, se puede utilizar la Ecuación (5.17):

$$\rho = 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega - v_k}{-\alpha_k v_k} \quad (5.17)$$

Despejando el valor del amortiguamiento α_k de la ecuación anterior, se obtiene la Ecuación (5.18) para determinar su valor:

$$\alpha_k = -\frac{\omega - v_k}{v_k \operatorname{tg} \frac{\rho}{2}} \quad (5.18)$$

Para calcular el valor del amortiguamiento, α_k , de una forma más exacta, se puede usar el promedio de los amortiguamientos calculados para todos los intervalos donde el ángulo ρ sea menor de 90° .

Otras expresiones para calcular el amortiguamiento histerético, η_k , están representadas en las expresiones (5.19) y (5.20), y los distintos parámetros que aparecen están representados en la Figura 5.9 [62]:

$$\tan\left(\frac{\theta_b}{2}\right) = \frac{1 - (w_b / w_r)^2}{\eta_r} \rightarrow \eta_r = 2\alpha_k = \frac{1 - (w_b / w_r)^2}{\tan\left(\frac{\theta_b}{2}\right)} \quad (5.19)$$

$$\tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right) = \frac{(w_a / w_r)^2 - 1}{\eta_r} \rightarrow \eta_r = 2\alpha_k = \frac{(w_b / w_r)^2 - 1}{\tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right)} \quad (5.20)$$

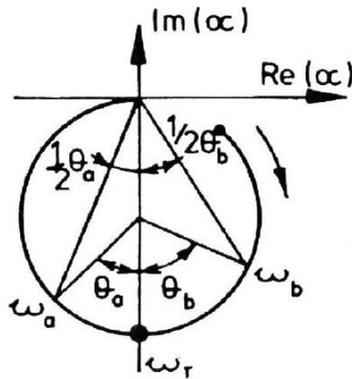


Figura 5.9. Propiedades del círculo modal [62]

La relación entre la amortiguación histerética, η_k , y la amortiguación viscosa, α_k , está representada en la Ecuación (5.21):

$$\eta_r = 2\alpha_k \quad (5.21)$$

Por último, una vez que se ha calculado el amortiguamiento α_k , se puede calcular fácilmente los valores de U_k y V_k a través de las ecuaciones (5.22) y (5.23):

$$U_k = 2\alpha_k(R_k - x_c) \quad (5.22)$$

$$V_k = 2\alpha_k(I_k - y_c) \quad (5.23)$$

5.3. APLICACIÓN DEL MÉTODO DEL AJUSTE CIRCULAR A UNA SIMULACIÓN NUMÉRICA

En este apartado se va a aplicar el método del ajuste circular a un caso de simulación armónica realizada con el programa ANSYS v19, para que sirva de ejemplo, y para ver, de una forma práctica, la viabilidad del método.

El caso al que se le va a aplicar este método es para el caso de una membrana de 1 cm de diámetro y espesor de 40 μm , para el punto central de la membrana. Las propiedades mecánicas consideradas han sido: densidad de 1200 kg/m^3 , módulo de Young de 2 GPa y coeficiente de Poisson de valor 0.35. El rango de frecuencia se ha tomado entre 0.5 y 15 kHz, con un incremento entre las frecuencias simuladas de 50 Hz, lo que hace un total de 300 frecuencias simuladas. La fuente de sonido se ha tomado a una distancia 'd' de 1 cm y un ángulo ' ϑ ' de 90°, y la excitación que provoca la respuesta de la membrana es una onda sonora procedente de la fuente con una presión sonora de 1 Pa. Se ha realizado la simulación para diferentes casos de amortiguamiento: 1%, 5%, 10% y 20%.

Se va a comparar las frecuencias de resonancia obtenidas con las FRF en velocidad, con las frecuencias modales y con las calculadas al aplicar el

método del ajuste circular. De esta forma se va a comprobar la fiabilidad del método para los casos estudiados.

5.3.1. MEMBRANA DE 40 MICRAS DE ESPESOR

En 1º lugar, se va a estudiar el caso de amortiguación de 1%. Después se comparará los resultados con los casos de amortiguamiento 5%, 10% y 20%.

La respuesta en frecuencia en velocidad, para el caso de la simulación de la membrana de 40 μm y un amortiguamiento de 1%, está representada en la Figura 5.10.

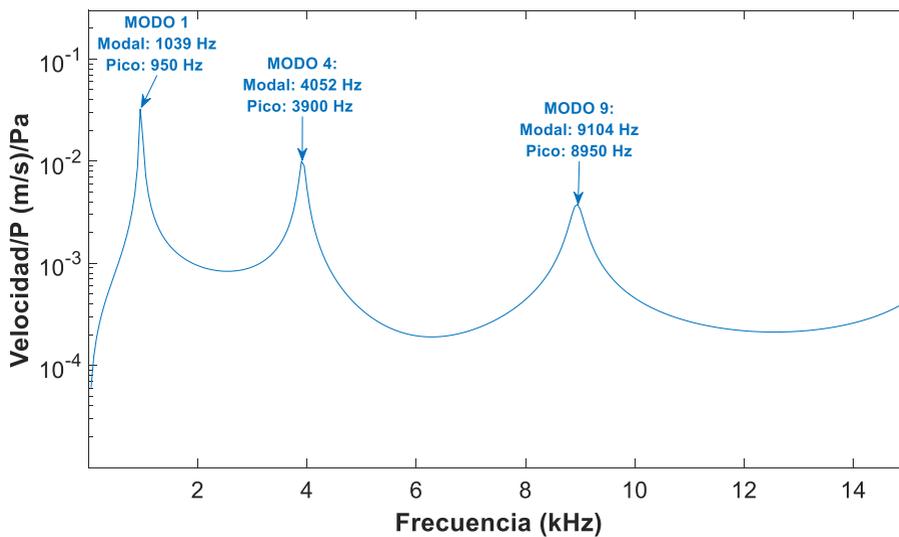


Figura 5.10. Función de respuesta en frecuencia del centro de la membrana de 40 μm de espesor y amortiguamiento de 1%. Valores de las frecuencias modales y frecuencias de pico

Según se observa en la Figura 5.10, se pueden detectar 3 modos de vibración en el rango de frecuencia simulado, de 0.5 Hz a 15 kHz, que corresponden con los modos 1, 4 y 9.

El siguiente paso es realizar el diagrama de Nyquist en desplazamiento para este caso de estudio. En la Figura 5.11 está representado este diagrama, para las 300 frecuencias simuladas (de 0.5 Hz a 15 kHz, con intervalos de 50 Hz), lo que da a lugar un total de 300 puntos a representar en la gráfica correspondiente.

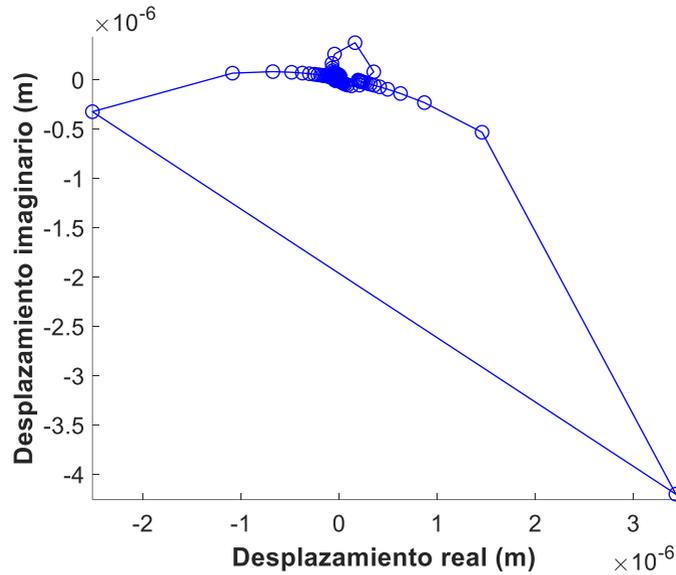


Figura 5.11. Diagrama de Nyquist en desplazamiento del centro de la membrana de 40 μm de espesor y amortiguamiento de 1%

En la Figura 5.11 se puede observar que los puntos correspondientes a frecuencias más bajas, pueden formar una circunferencia. En la Figura 5.12 se hace un zoom de la imagen para poder ver los puntos correspondientes a frecuencias más grandes.

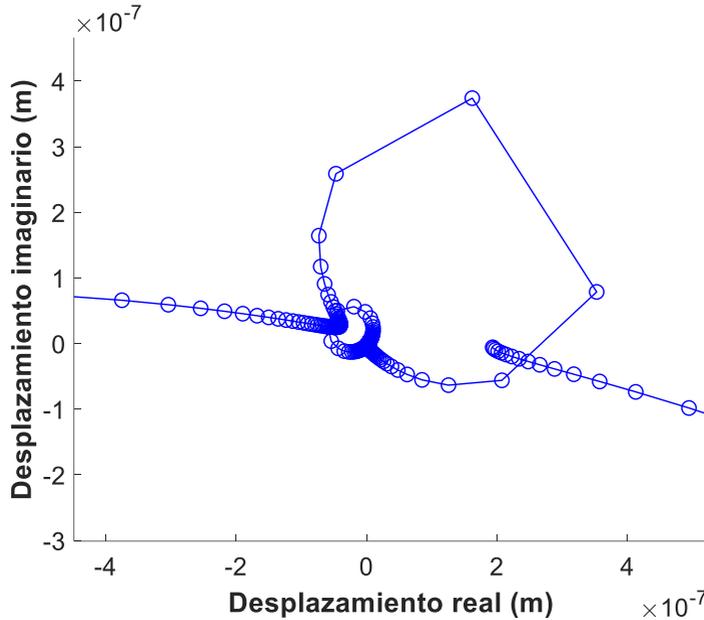


Figura 5.12. Zoom en el diagrama de Nyquist en desplazamiento del centro de la membrana de $40\ \mu\text{m}$ de espesor y amortiguamiento de 1%

Observando las figuras 5.11 y 5.12, se determina los puntos de las gráficas podrían formar 3 circunferencias, que deberían corresponder con los 3 modos de vibración que se observa en la Figura 5.10.

Seleccionando el rango adecuado para el cálculo de cada circunferencia, se pueden calcular los parámetros que definen cada una de ellas. En la Figura 5.13 están representadas las distintas circunferencias de cada modo.

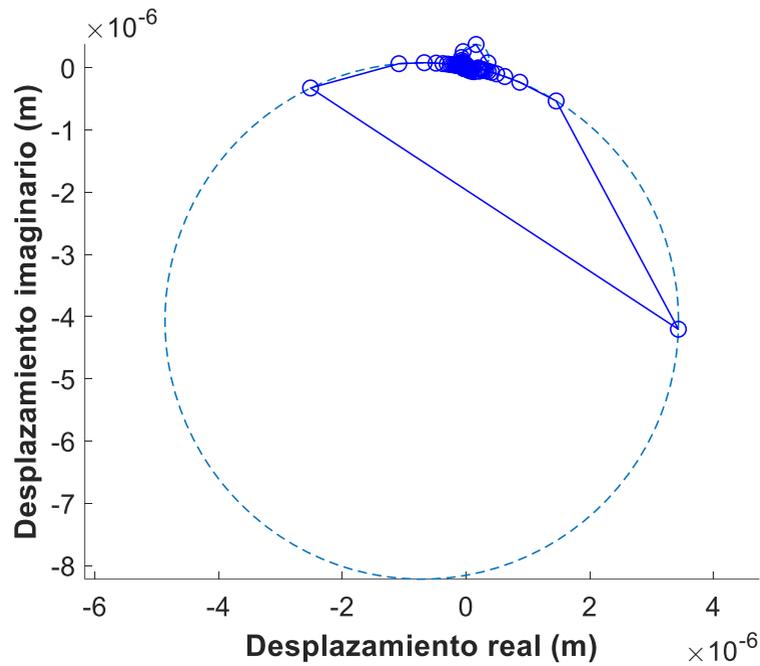


Figura 5.13. Circunferencias superpuestas en diagrama de Nyquist en desplazamiento del centro de la membrana de $40\ \mu\text{m}$ de espesor y amortiguamiento de 1%

En la Figura 5.14 se hace un zoom de la Figura 5.13, para poder distinguir las circunferencias de los modos más altos.

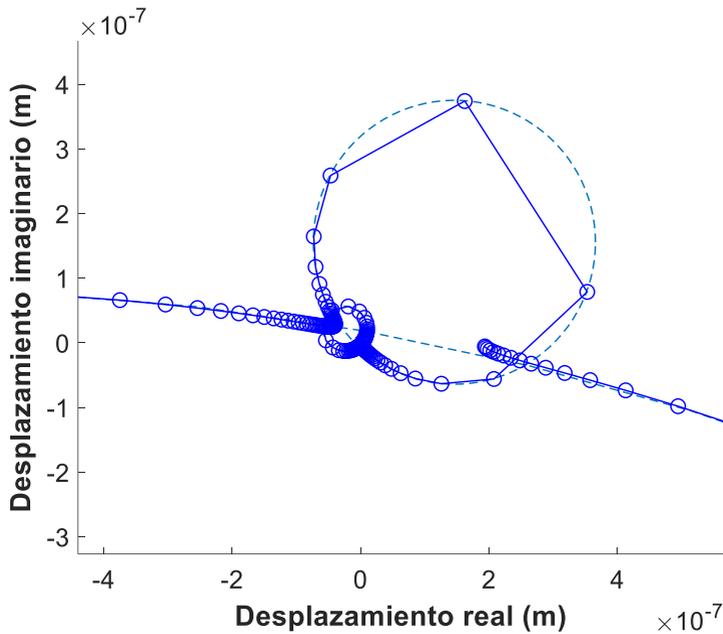


Figura 5.14. Zoom en el diagrama de Nyquist en desplazamiento, con las circunferencias superpuestas, del centro de la membrana de 40 μm de espesor y amortiguamiento de 1%

Una vez seleccionados los puntos para calcular cada circunferencia asociada a cada modo de vibración, se pueden calcular los distintos parámetros asociados al cálculo de las frecuencias de resonancia de cada uno. En la Tabla 5.1 están reflejados los parámetros calculados, así como las frecuencias de resonancia obtenidas al aplicar el ajuste circular a cada una de las 3 circunferencias. Estos parámetros se han calculado con el programa Matlab R2019b.

Tabla 5.1. Parámetros del método circular para el centro de la membrana de 40 μm de espesor y amortiguamiento de 1%

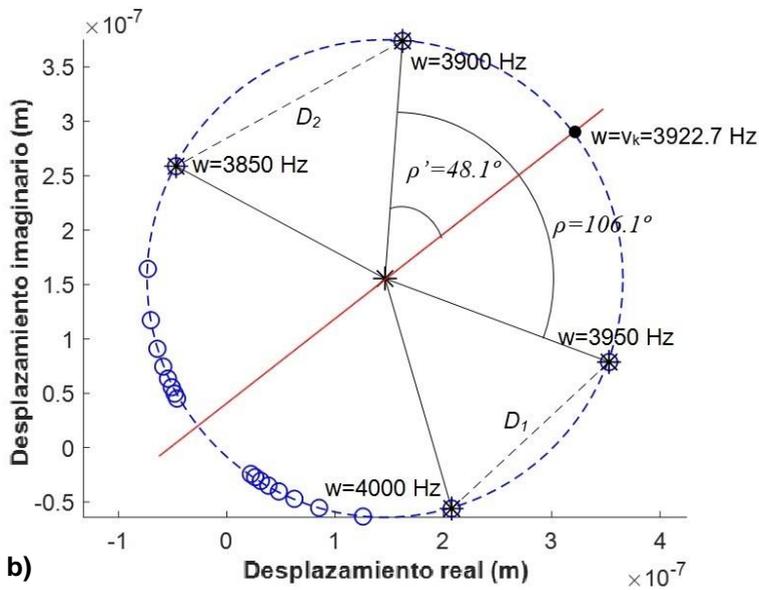
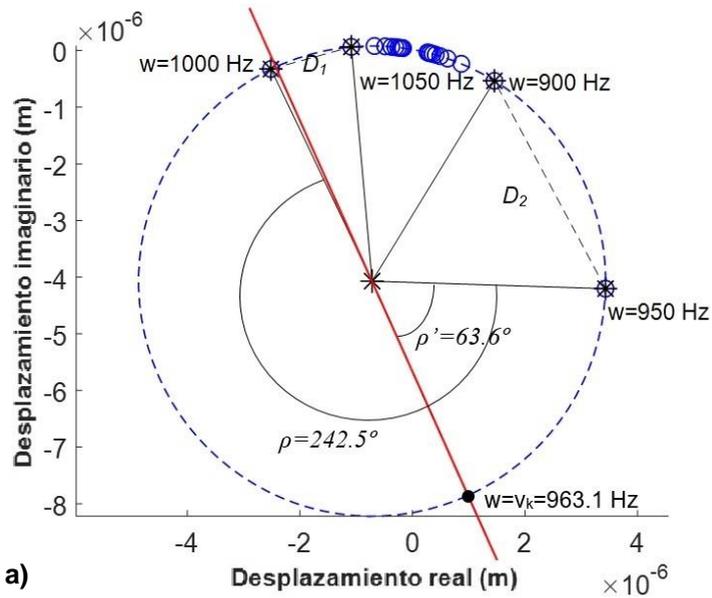
	Rango puntos usados	Rango frecuencias (Hz)	Centro (x,y) (m)	Radio (m)	Intervalo frecuencias con mayor ángulo (Hz)	Parámetro 'P'	Frecuencia resonancia ν_k (Hz)
Circunferencia modo 1	10-29	500-1450	(-7.1693·10 ⁻⁰⁷ , -4.069·10 ⁻⁰⁶)	4.15·10 ⁻⁰⁶	950-1000	0.2621	963.1
Circunferencia modo 4	69-88	3450-4400	(1.4600·10 ⁻⁰⁷ , 1.5552·10 ⁻⁰⁷)	2.1964·10 ⁻⁰⁷	3900-3950	0.4536	3922.7
Circunferencia modo 9	170-189	8500-9450	(-2.4467·10 ⁻⁰⁸ , 2.1879·10 ⁻⁰⁸)	3.4705·10 ⁻⁰⁸	8900-8950	0.4649	8926.8

En la Tabla 5.2 se puede ver una comparación de las frecuencias de resonancia del modal, con los detectados visualmente mediante la función de respuesta en frecuencia (Figura 5.10) y los calculados con el método del ajuste circular.

Tabla 5.2. Comparación de las frecuencias de resonancia, para el centro de la membrana de 40 μm de espesor y amortiguamiento de 1%

	Frecuencia resonancia modal (Hz)	Frecuencia resonancia FRF (Hz)	Frecuencia resonancia ajuste circular (Hz)
Modo 1	1039	950	963.1
Modo 4	4052	3900	3922.7
Modo 9	9104	8950	8926.8

En la Figura 5.15 están representadas las circunferencias calculadas para los modos 1 (a), 4 (b) y 9 (c), con los puntos usados para sus cálculos y los parámetros obtenidos.



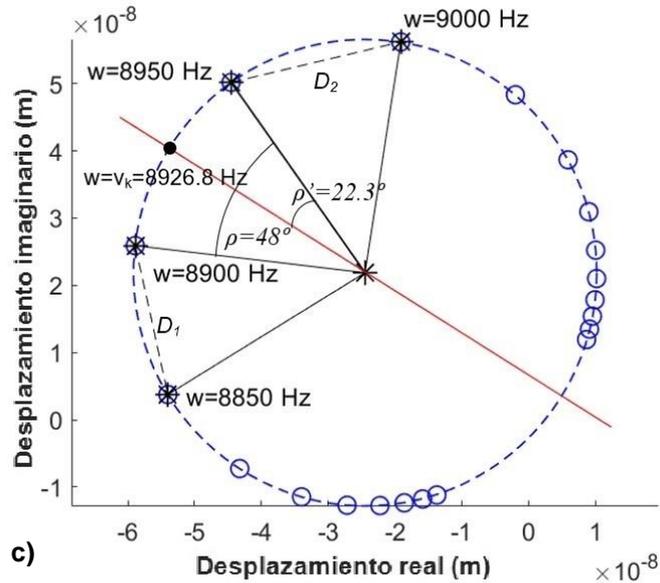


Figura 5.15. Circunferencias correspondientes con el modo 1 (a), modo 4 (b) y modo 9 (c), para el centro de la membrana de 40 μm de espesor y amortiguamiento de 1%

Ahora se van a comparar los resultados obtenidos para el caso de 1% de amortiguamiento con los casos de 5%, 10% y 20% de amortiguamiento.

En la Figura 5.16 están representadas la respuesta en frecuencia en velocidad para la membrana de 40 μm y amortiguamientos de 1%, 5%, 10% y 20 %. Estas respuestas ya han sido representadas en la Figura 4.8, aquí se recuerda su representación.

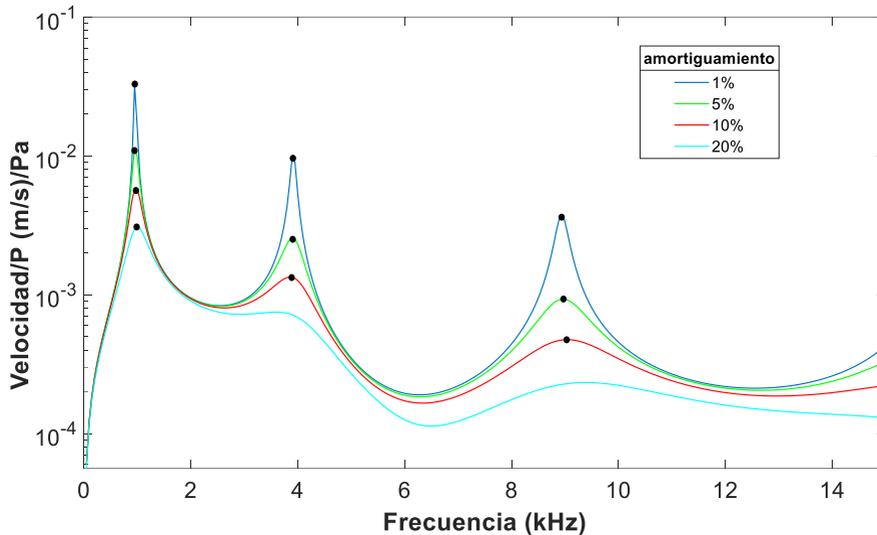


Figura 5.16. Función de respuesta en frecuencia del centro de la membrana de 40 μm de espesor y amortiguamiento de 1%, 5%, 10% y 20%

Como ya se ha comentado en el capítulo 4 y se puede observar en la Figura 5.16, los picos se vuelven más suaves a mayores amortiguamientos, como era de esperar, y además las frecuencias picos, generalmente, se desplazan hacia la derecha, aumentando su valor al aumentar el amortiguamiento. Por otro lado, para un cierto valor de amortiguamiento no es posible determinar visualmente dónde se encuentra el pico y por tanto el valor de la frecuencia natural.

En la Tabla 5.3 se recogen los valores de las frecuencias obtenidas visualmente de las funciones de respuesta en frecuencia, en función de los amortiguamientos estudiados.

Tabla 5.3. Frecuencias de resonancia de la respuesta en frecuencia del centro de la membrana de 40 μm de espesor y amortiguamientos de 1%, 5%, 10% y 20%

	Amortiguamiento	Frecuencia de resonancia FRF (Hz)
Modo 1	1%	950
	5%	950
	10%	950
	20%	1000
Modo 4	1%	3900
	5%	3900
	10%	3850
	20%	No se distingue
Modo 9	1%	8950
	5%	8950
	10%	9050
	20%	No se distingue

En la Tabla 5.4 están incluidos los parámetros del método circular para el centro de la membrana de 40 μm de espesor y amortiguamiento de 5%, 10% y 20%. También se ha incluido estos parámetros para el 1% de amortiguamiento para comparar todos los casos.

Tabla 5.4. Parámetros del método circular para el centro de la membrana de 40 μm de espesor y amortiguamiento de 1%, 5%, 10% y 20%

	Rango Puntos usados	Rango frecuencias (Hz)	Centro (x,y) (m)	Radio (m)	Intervalo frecuencias con mayor ángulo (Hz)	Parámetro 'P'	Frecuencia resonancia ν_k (Hz)
AMORTIGUAMIENTO 1%							
Circunferencia modo 1	10-29	500-1450	$(-7.1693 \cdot 10^{-07},$ $-4.0696 \cdot 10^{-06})$	$4.1500 \cdot 10^{-06}$	950-1000	0.2621	963.1
Circunferencia modo 4	69-88	3450-4400	$(1.4600 \cdot 10^{-07},$ $1.5552 \cdot 10^{-07})$	$2.1964 \cdot 10^{-07}$	3900-3950	0.4536	3922.7
Circunferencia modo 9	170-189	8500-9450	$(-2.4467 \cdot 10^{-08},$ $2.1879 \cdot 10^{-08})$	$3.4705 \cdot 10^{-08}$	8900-8950	0.4649	8926.8
AMORTIGUAMIENTO 5%							
Circunferencia modo 1	10-29	500-1450	$(-1.7315 \cdot 10^{-07},$ $-9.4654 \cdot 10^{-07})$	$9.8187 \cdot 10^{-07}$	950-1000	0.4141	970.7
Circunferencia modo 4	69-88	3450-4400	$(2.5118 \cdot 10^{-08},$ $4.1812 \cdot 10^{-08})$	$5.6212 \cdot 10^{-08}$	3900-3950	0.4965	3924.8
Circunferencia modo 9	170-189	8500-9450	$(-5.2551 \cdot 10^{-09},$ $5.0487 \cdot 10^{-09})$	$9.2557 \cdot 10^{-09}$	8900-8950	0.4960	8925.2
AMORTIGUAMIENTO 10%							
Circunferencia modo 1	10-29	500-1450	$(-9.1136 \cdot 10^{-08},$ $-4.7730 \cdot 10^{-07})$	$5.0635 \cdot 10^{-07}$	950-1000	0.4744	973.7
Circunferencia modo 4	69-88	3450-4400	$(5.7989 \cdot 10^{-09},$ $2.3076 \cdot 10^{-08})$	$3.2248 \cdot 10^{-08}$	3900-3950	0.4998	3925.0
Circunferencia modo 9	170-189	8500-9450	$(-2.2079 \cdot 10^{-09},$ $2.3352 \cdot 10^{-09})$	$5.1874 \cdot 10^{-09}$	8900-8950	0.4984	8925.1
AMORTIGUAMIENTO 20%							
Circunferencia modo 1	10-29	500-1450	$(-4.7943 \cdot 10^{-08},$ $-2.3416 \cdot 10^{-07})$	$2.6048 \cdot 10^{-07}$	950-1000	0.4925	975.4
Circunferencia modo 4	75-100	3750-5000	$(-2.1988 \cdot 10^{-09},$ $1.3188 \cdot 10^{-08})$	$1.8418 \cdot 10^{-08}$	3900-3950	0.4978	3924.9
Circunferencia modo 9	170-230	8500-11500	$(-7.5354 \cdot 10^{-10},$ $1.0799 \cdot 10^{-09})$	$2.7194 \cdot 10^{-09}$	8900-8950	0.4997	8925.0

Se observa con los datos obtenidos que, en general, las frecuencias de resonancia aumentan al aumentar el valor del amortiguamiento. Esta característica es más importante para el modo 1, que es el modo dominante. En la Figura 5.17 están representadas el diagrama de Nyquist para los diferentes amortiguamientos estudiados: 1%, 5%, 10% y 20%.

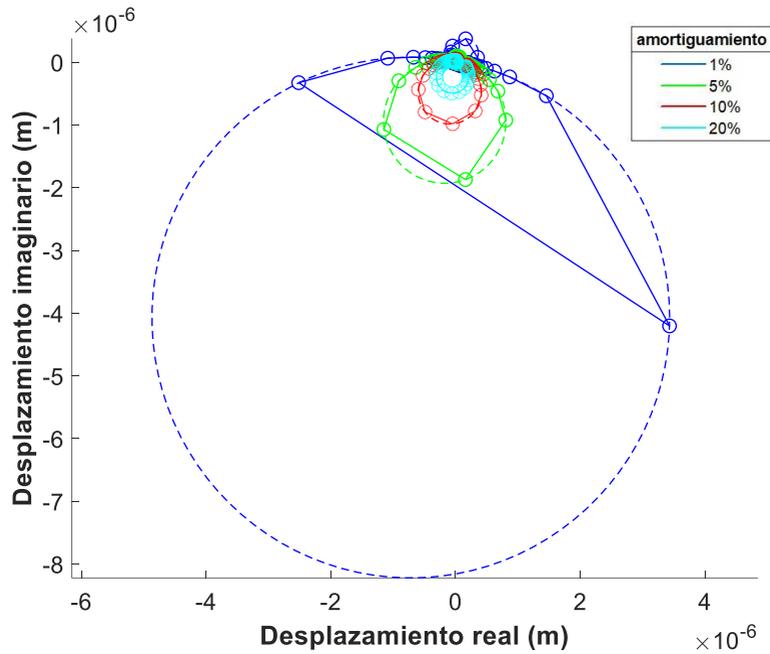


Figura 5.17. Diagrama de Nyquist en desplazamiento del centro de la membrana de $40 \mu\text{m}$ de espesor y amortiguamientos de 1%, 5%, 10% y 20%. Circunferencias del ajuste circular superpuestas

En la Figura 5.18 se hacen varios zooms de la Figura 5.17, para poder distinguir las circunferencias de los modos más altos.

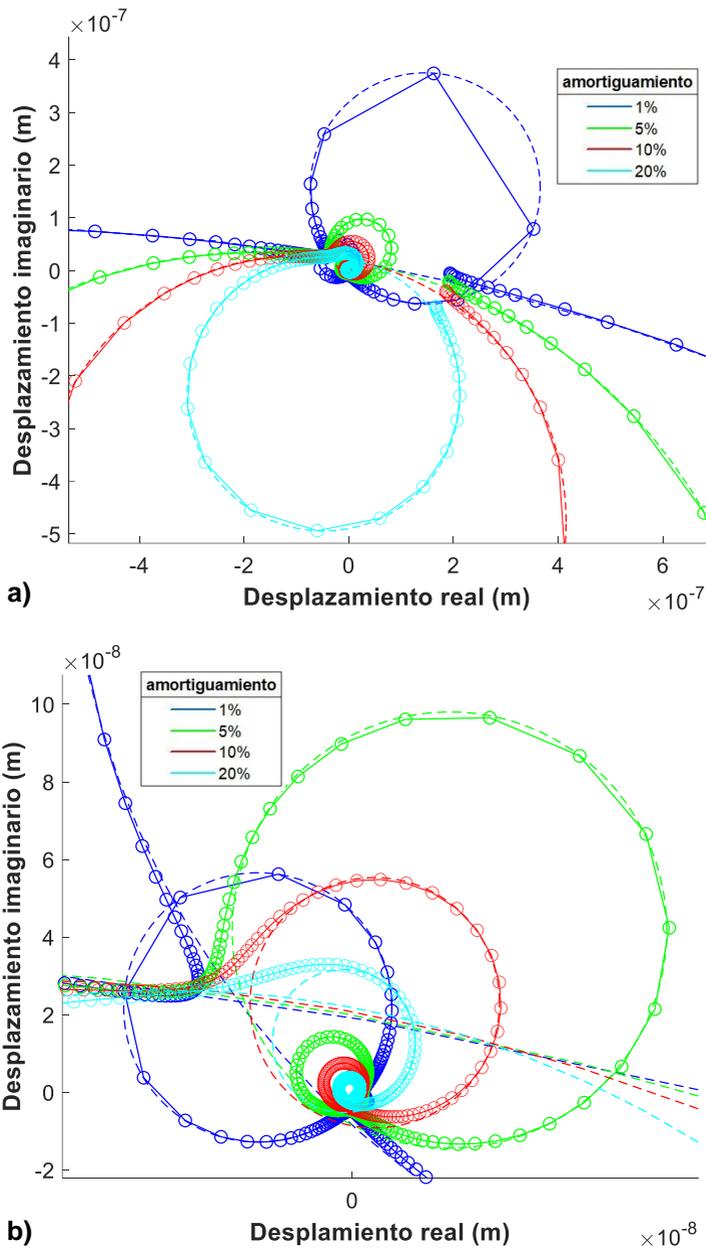


Figura 5.18. Zooms en el diagrama de Nyquist en desplazamiento, con las circunferencias superpuestas, del centro de la membrana de $40 \mu\text{m}$ de espesor y amortiguamiento de 1%, 5%, 10% y 20%

En las figuras 5.17 y 5.18 se observa que las circunferencias correspondientes a los distintos modos de vibración calculados según el método de ajuste circular, disminuyen de tamaño al aumentar el amortiguamiento. Las zonas de transición entre las circunferencias se mantienen para los distintos amortiguamientos, pero no su tamaño, que al aumentar el amortiguamiento disminuye.

5.4. CONCLUSIONES

En este capítulo se ha explicado el método de ajuste circular, con el fin de calcular los parámetros relacionados con los modos de vibración, como puede ser la frecuencia de resonancia. Este método se basa en el uso del diagrama de Nyquist en desplazamiento.

Se ha explicado el procedimiento y cómo calcular los distintos parámetros que entran en juego en el método, para terminar calculando la frecuencia de resonancia.

Se ha recurrido al estudio numérico de un caso de membrana con características determinadas, mediante el programa de elementos finitos ANSYS v19. Las simulaciones numéricas han servido como aplicación del método de ajuste circular, y para comparar las frecuencias de resonancias obtenidas con los distintos amortiguamientos simulados. También se han comparado los resultados de las frecuencias modales con los valores obtenidos visualmente de las funciones de respuesta en frecuencia en velocidad y con calculados con el método del ajuste circular.

Se observan que los valores de frecuencias de resonancia obtenidas con el método circular están muy cercanos a los valores modales y a los obtenidos

con las FRFs, con la ventaja, respecto al uso de las FRFs, que no se ciñen a los valores discretos de frecuencias simulados en el armónico.

Además, se salva la limitación que tiene las FRFs con el uso de la presión de la fuente de sonido. Se calcula las frecuencias de resonancia con independencia de la presión de referencia.

En los distintos casos estudiados con valores de amortiguación diferentes, los modos de vibración aumentan al aumentar el amortiguamiento, hecho que con la visualización de los picos en las FRFs no tiene por qué apreciarse. Esta característica se da de una forma más clara en el primer modo de vibración, que es el modo más dominante en la respuesta de la membrana.

Además, para al aumentar el valor del amortiguamiento y para un cierto valor del mismo, no se distingue los picos en las FRFs, con lo cual no se puede conocer de forma visual cuál es la frecuencia natural correspondiente. Estos valores sí son posibles de obtener con el método del ajuste circular, lo cual supone otra ventaja de este método.

CAPÍTULO 6

Aplicación del método a un ensayo real



CAPÍTULO 6: Aplicación del método a un ensayo real

6.1. INTRODUCCIÓN

En este apartado se aplica el método del ajuste circular, explicado en el capítulo 5, a los datos de ensayos reales realizados a distintas muestras de membranas.

De acuerdo con la configuración del experimento definida en el apartado 4.3, se ha realizado un experimento real cuya finalidad es la medición de la respuesta de distintas muestras de membranas. Se describe los distintos aparatos utilizados en el experimento, tanto los de sujeción como de medición, y la disposición de los mismos.

En las pruebas experimentales entran en juego muchos aspectos, especialmente cuando es necesaria la manipulación de muestras pequeñas, la magnitud a medir es pequeña y el montaje presenta muchos parámetros a considerar. El objetivo principal del presente trabajo es comprobar la validez en la práctica de la suposición realizada.

Una vez obtenidos los datos experimentales y tratados de una forma adecuada, se les aplica el método del ajuste circular para obtener las frecuencias de resonancia de los distintos modos presentes en la respuesta. Comparando la respuesta real con la teórica que se debería presentar, se puede obtener el módulo de Young. Este parámetro es la propiedad

mecánica más importante que define el comportamiento mecánico del material y su obtención es la finalidad de este trabajo. El cálculo de la respuesta teórica a esperar de las membranas se encuentra explicado en el capítulo 2.

El objetivo de este capítulo es probar la validez en la práctica de la relación teórica entre las propiedades mecánicas del material y las frecuencias de resonancia.

Finalmente se explican los resultados obtenidos y se sacan las conclusiones pertinentes.

6.2. RESULTADOS EXPERIMENTALES

En este apartado se van a exponer los resultados del experimento realizado. También se van a determinar los parámetros que entran en juego y que influyen en los datos obtenidos.

6.2.1. CONFIGURACIÓN DEL EXPERIMENTO

Basándonos en la teoría y en los datos numéricos, la correlación para relacionar las propiedades mecánicas del material con el parámetro de frecuencia correspondiente es sencillo, pero para comprobar si realmente se cumple, debe probarse para el caso de datos experimentales reales.

Esta relación sencilla y directa en la teoría, puede que no sea tan directa en caso de experimentos reales. En el caso experimental entra en juego muchos aspectos que hay que tener en consideración, especialmente cuando las muestras usadas son pequeñas, la magnitud a medir también es pequeña y en el montaje influyen muchos parámetros que se tienen que considerar.

De acuerdo con la configuración del experimento descrita en el capítulo 4, se han realizado varios experimentos que se van a explicar a continuación.

Estos experimentos han sido realizados por el tutor y director de la presente tesis, Dr. Antonio González Herrera, en la Universidad de Loma Linda de California, en EE.UU., concretamente en el centro médico Loma Linda Healthcare System.

La configuración de los experimentos realizados se muestra en la Figura 6.1.

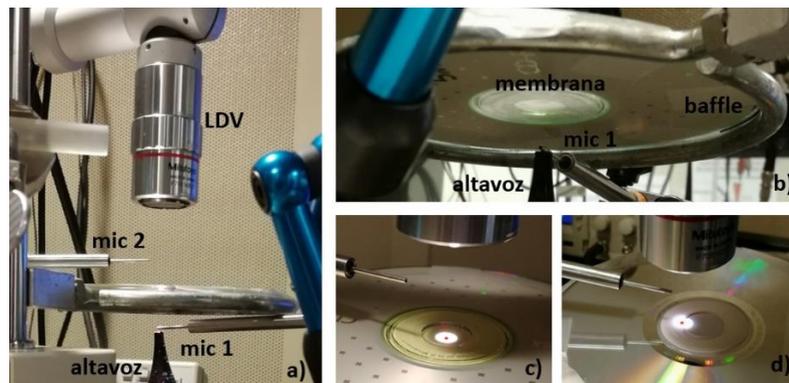


Figura 6.1. Disposición de los diferentes elementos en el experimento (a) y (b). Medición en el centro de la membrana (c). Medición en un punto de apoyo (d)

Según se muestra en la figura, la membrana está sujeta por una estructura que tiene la función de actuar como baffle. La membrana está colocada en posición horizontal y el altavoz se coloca debajo de la membrana, a una distancia de 1 cm. Se realiza la medición de distintos puntos, mostrados en la Figura 6.1. Estos puntos son el centro de la membrana y el borde externo, cuya medición sirve como punto de control. Se mide la velocidad de los puntos con un vibrómetro Láser Doppler colocado en el lado opuesto al altavoz, (lado superior de la membrana). Además, se han utilizado dos

micrófonos de ultrasonidos Sokolich, uno para calibrar la presión del sonido del altavoz y poder monitorear el nivel de presión del sonido a la salida del mismo (micrófono 1) y otro para captar la transmisión del sonido a través de la membrana (micrófono 2). El primero se usa como señal de entrada en las mediciones realizadas, mientras que los datos del segundo altavoz no se usan en el presente trabajo.

El sonido del altavoz induce movimiento en la membrana. La velocidad de ciertos puntos de la misma se ha medido a partir de dos líneas perpendiculares que pasan por el centro de la misma, con una resolución de ubicación de 0.2 mm. Para ello se ha utilizado un vibrómetro Láser Doppler, LDV, de la marca Polytec y modelo OFV-5000. Los programas usados como estímulo y adquisición se escribieron en Matlab y en el TDT Visual Design Studio, con una frecuencia de muestreo del sistema TDT de 200 kHz. Los tonos puros, de 1-2 segundos de duración, se generaron por un sistema III de Tucker Davis Technology (TDT).

A la hora de almacenar los datos, se eliminaron los primeros 4.096 puntos de la respuesta de forma de onda, para evitar el transitorio, y se promedió el tiempo de la forma de onda restante, normalmente en 50 segmentos de tiempo. Posteriormente, las respuestas se analizaron mediante la transformada de Fourier en Matlab. El barrido de frecuencias fue de 0.5 a 15 kHz, en intervalos de 500 Hz.

El material utilizado para la realización de los experimentos ha sido parafilm, que es un material de membrana comúnmente usado en laboratorios para sellar recipientes. Su grosor y propiedades mecánicas lo hacen ideal para este experimento ya que presenta ciertas similitudes con las

propiedades de la membrana timpánica. Según los datos del fabricante, el espesor del material es de aproximadamente 130 micras, y su densidad es de 992 kg/m^3 . Respecto al módulo de elasticidad, no se tiene información sobre el mismo.

Las muestras que se han preparado han sido de tres membranas circulares de 5, 10 y 15 mm de diámetro. La membrana se sujeta entre dos discos, con el orificio correspondiente al diámetro deseado, tal como se muestra en la Figura 6.1. Estos discos actúan como baffles o deflectores, tal que la presión sonora sólo empuja en uno de los lados de la membrana.

Se ha medido la velocidad del punto central de la membrana, y también en el sistema de apoyo, que va a servir como medición de control. La presión sonora se aplica a una distancia aproximada de 1 cm, con un ángulo ' θ ' de 90° , que corresponde a la configuración más simple posible, como ya se determinó en el capítulo 4, y que lleva a una respuesta simétrica axial teórica en la membrana circular. En cuanto a las frecuencias de excitación, el valor oscila entre 0 y 10 kHz para las membranas de 10 y 15 mm de diámetro, y entre 0 y 15 kHz para el caso de 5 mm, ya que sus frecuencias de resonancia son más altas, de ahí el motivo de usar frecuencias mayores en el intervalo. La frecuencia de muestreo es de 47.7 Hz para todos los experimentos.

6.2.2. RESULTADOS OBTENIDOS

Los resultados de los diferentes diámetros de membrana estudiados han sido graficados en la Figura 6.2. En esta figura se representa la función de transferencia de la velocidad del centro de la membrana dividida por la presión sonora del altavoz, que ha sido medida por el micrófono 1. También se han graficado los resultados correspondientes a la base o apoyo. Los

resultados de la base que se usarán para interpretar los resultados de la membrana, como se explicará más adelante. Para el caso de la base, los resultados se han ampliado un valor de 10 para que sea visible su respuesta frente a la de la membrana, y se facilite la comparación de ambas.

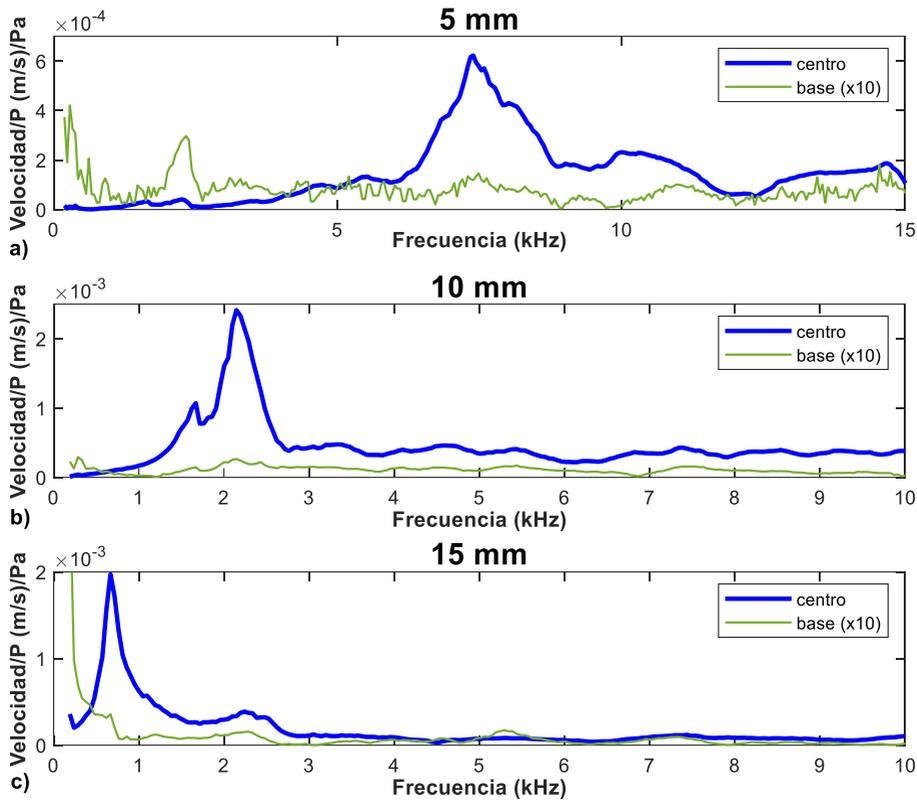


Figura 6.2. Función de transferencia en velocidad de las membranas. Respuestas de las membranas de diámetros: 5 mm (a), 10 mm (b) y 15 mm (c), para la posición central (curva azul) y la posición de la base (curva verde). Respuestas de la posición de la base aumentada 10 veces

En la Figura 6.2 se puede identificar un máximo en cada una de las gráficas, máximo que podemos interpretar que está vinculado a las frecuencias naturales. Para cada diámetro se puede distinguir claramente una primera

frecuencia de resonancia clara, con valores de 7360 Hz para el diámetro de 5 mm de 2124 Hz para la membrana de 10 mm de diámetro, y para la de 15 mm de diámetro de 667 Hz. Sin embargo, no se puede distinguir claramente ningún otro máximo a frecuencias más altas. Si se quiere identificar modos de vibración más altos se debe recurrir a otros procedimientos que el meramente visual, como puede ser métodos de ajustes de curvas, en particular, el método de ajuste circular que ha sido explicado en el capítulo 5. Además, se va a probar que los valores obtenidos como frecuencias de resonancia, que han sido detectadas de una forma visual, resultan ser erróneas.

6.2.3. RESULTADOS DEL AJUSTE CIRCULAR APLICADO A LOS DATOS EXPERIMENTALES

6.2.3.1. TRATAMIENTO DE LOS DATOS EXPERIMENTALES

Tal y como se ha explicado en el capítulo 5, el método del ajuste circular se basa en el uso del diagrama de Nyquist, donde la presencia de un modo natural de vibración se puede identificar como una circunferencia en la representación en este diagrama.

Esta característica se cumple para un sistema mecánico, donde la FRF se define como el desplazamiento dividido por la fuerza aplicada al cuerpo. En nuestro caso no podemos medir la fuerza aplicada, sólo tenemos el dato de la presión sonora a la salida de la fuente de sonido, que corresponde con la del micrófono 1, por lo que el uso de esta metodología podría ser cuestionable. Como se va a ver en este experimento, esta limitación se puede

superar y conseguir con una gran precisión los valores de las frecuencias de resonancia presentes en la respuesta.

En la Figura 6.3 se representa el diagrama de Nyquist para los mismos resultados que en la Figura 6.2, en términos de desplazamientos. En esta figura se observa que las formas circulares están presentes claramente en todos los casos, tanto para el centro de la membrana como para la posición de la base o apoyo.

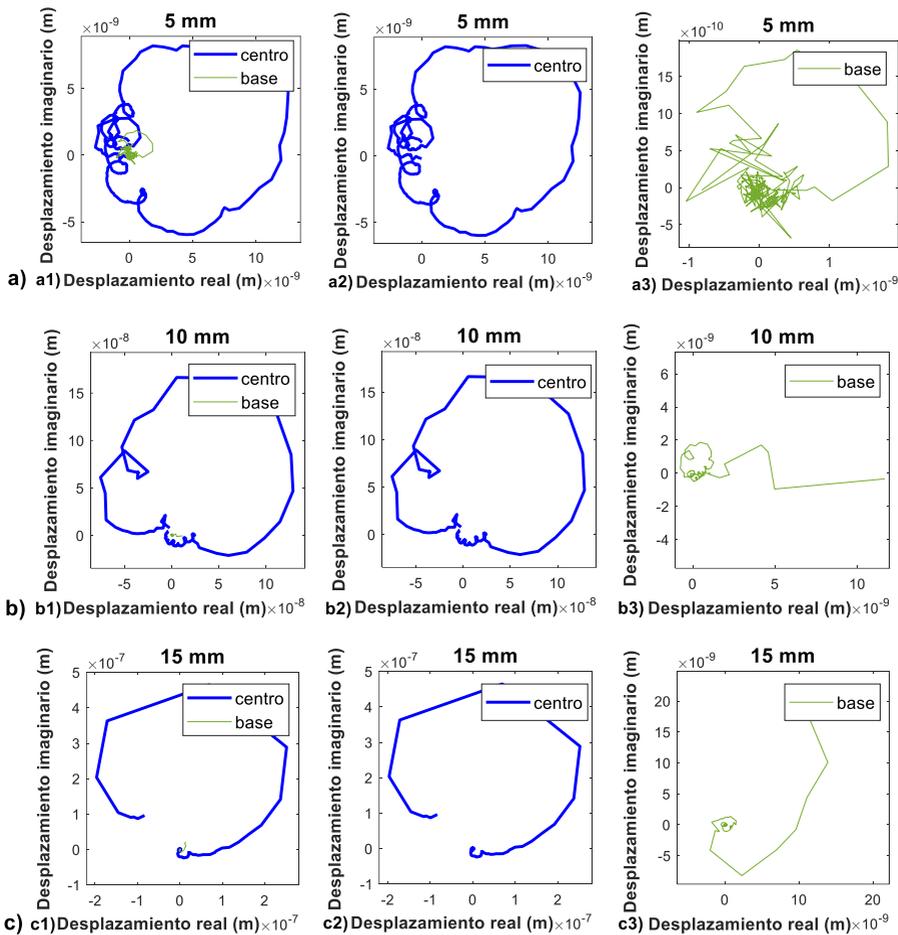


Figura 6.3. Diagrama de Nyquist para la membrana de diámetro 5 mm (a), 10 mm (b) y 15 mm (c), y para la posición central (azul) y la posición de la base (verde)

Se ha aplicado el método del ajuste circular para las respuestas de las membranas de 5, 10 y 15 mm que aparecen en la Figura 6.3, tanto para el centro de la misma, como para la posición de la base. El objetivo es identificar frecuencias de resonancia presentes en las distintas respuestas de los puntos considerados.

El procedimiento que se ha seguido ha sido el mismo que el visto en el capítulo 5, se ha identificado los diferentes rangos de puntos en el diagrama que generan las distintas circunferencias, se ha calculado el centro y radio de las mismas, así como los parámetros necesarios ya vistos en el capítulo mencionado, hasta el cálculo de las frecuencias de resonancia. Cálculos que se han realizado con el programa Matlab R2019b.

En las tablas 6.1 y 6.2 se muestran los valores de las frecuencias más significativas obtenidas para el centro de la membrana y la posición de la base (situado en el borde), respectivamente.

Tabla 6.1. Frecuencias de resonancia detectadas por el método de ajuste circular en el centro de la membrana (Hz), para los diámetros de 5, 10 y 15 mm

Diámetro 5 mm	Diámetro 10 mm	Diámetro 15 mm
2312	1552*	648.5*
4602	2124	2545*
6652*	3322*	3210*
7366	4087	5031
9985	4649	7934*
10848	5415*	8179
12709	5973*	8373*
13472	6132*	8757
14662	6649*	
	7366	
	7612*	
	8173	
	8685	
	9272*	

Tabla 6.2. Frecuencias de resonancia detectadas por el método de ajuste circular en el punto de apoyo (Hz), para los diámetros de 5, 10 y 15 mm

Diámetro 5 mm	Diámetro 10 mm	Diámetro 15 mm
2439	2124	2240
4492	3933	4594
5396	4599	5315
7116	7366	7320
9669	8179	8173
10751	8798	8752
12771	9853	9225
13572		9798
14677		

Al observar las frecuencias de resonancias obtenidas, hay que destacar que hay un gran número de frecuencias detectadas en la base o el borde del

dispositivo de soporte. Algunas de estas frecuencias están también presentes en el centro de la membrana y otras no lo están.

En la Figura 6.4 se han representado la respuesta del centro y de la base de cada membrana ensayada (5mm, 10 mm y 15 mm) en términos de aceleración, en vez de en velocidad, como se ha hecho en la Figura 6.2. El motivo de usar la aceleración en vez de la velocidad, es que la respuesta es más alta en frecuencias más grandes, lo cual permite observar mejor la respuesta, principalmente en frecuencias mayores. Para que las frecuencias obtenidas al aplicar el método del ajuste circular se distingan de una mejor forma, a la Figura 6.4 se han agregado líneas verticales en los valores de esas frecuencias, de color rojo para el centro de la membrana, y gris para el borde. En este caso, como se utilizó en la Figura 6.2, la respuesta de la base se ha aumentado un valor de 10, para poder distinguirla mejor.

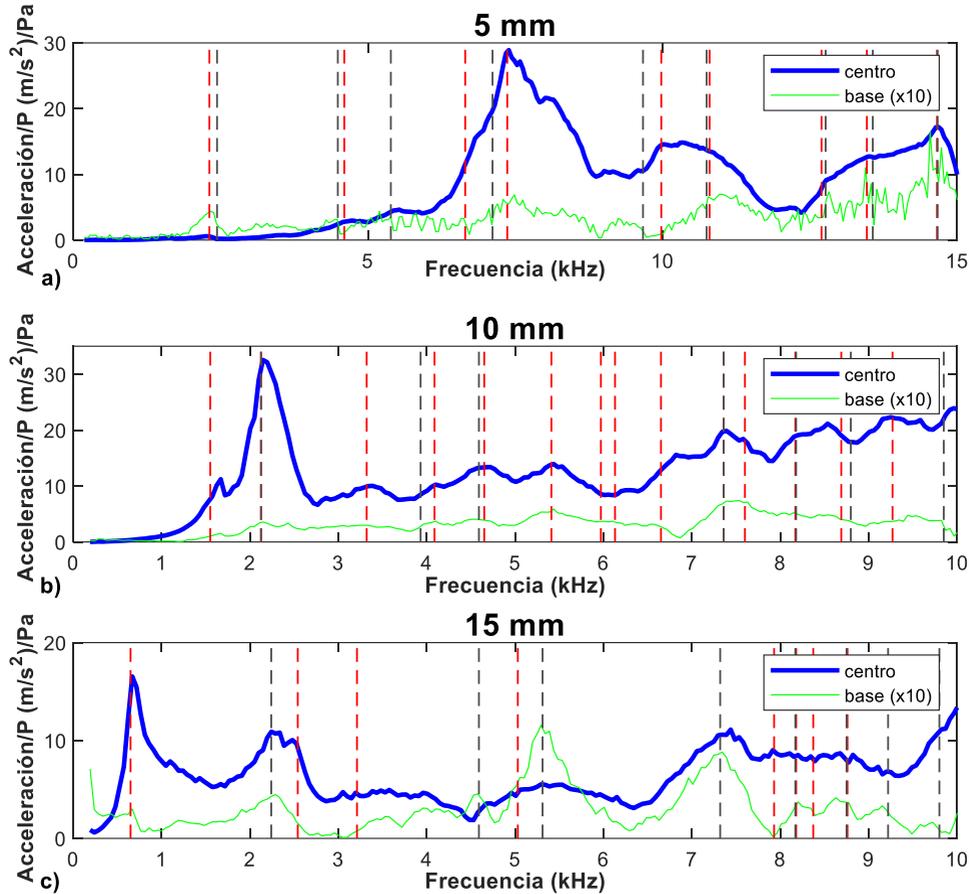


Figura 6.4. Función de transferencia en aceleración de las membranas. Respuestas de las membranas de diámetros: 5 mm (a), 10 mm (b) y 15 mm (c), para la posición central (azul) y la posición de la base (verde). Respuestas de la posición de la base aumentada 10 veces. Frecuencias de resonancia añadidas en el centro (líneas rojas) y en la base (líneas grises)

6.2.3.2. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES

Analizando los datos representados en la Figura 6.4, se pueden determinar las capacidades y limitaciones de la metodología que se ha propuesto en los

ensayos. Hay una serie de cuestiones destacables, entre otras se encuentran las siguientes:

- Utilizando el método del ajuste circular, se han detectado un gran número de frecuencias, más números de las esperadas, considerando el modelo numérico del problema (ver Figura 2.11 del capítulo 2 o Figura 4.3 del capítulo 4.3). Con la configuración del ensayo, como se ha comentado anteriormente en el presente trabajo, los modos presentes en la respuesta deberían ser los de simetría axial, pero en algunos casos aparecen más modos.
- Algunas frecuencias coinciden aproximadamente con el pico observado en la función de respuesta en frecuencia, y esto ocurre tanto en la respuesta del centro de la membrana, como en la base.
- Hay frecuencias que aparecen donde no hay un máximo claro en la FRF.
- Cuando las frecuencias calculadas con el método del ajuste circular están cerca de los picos, no coinciden exactamente en valor.

Para comprender estos aspectos que se han destacado, es necesario realizar una evaluación cuidadosa de los mismos, y extraer de esta forma datos que sean útiles para el propósito de este trabajo.

Lo primero que hay que destacar entre los distintos aspectos que se han observado en el experimento, es la presencia de frecuencias de resonancia en el soporte de la membrana. En el diseño del experimento este aspecto no estaba contemplado y se esperaba que la influencia de este soporte en la vibración de la membrana fuera despreciable. En realidad, la magnitud de la vibración del apoyo es muy pequeña, de hecho, en las figuras su respuesta

se ha ampliado diez veces para poder compararla con la de la membrana, pero sí tiene influencia en la respuesta de la membrana y su presencia en el experimento no puede ser despreciada.

En la Figura 6.4 se puede observar que en la respuesta de la membrana y en la respuesta de la base están presentes las mismas frecuencias de resonancia, o frecuencias muy cercanas. Este solapamiento en la vibración de los dos elementos significa que la membrana vibra en respuesta a una entrada mecánica, que es debida al desplazamiento de la base, en vez de la entrada acústica, que sería la del sonido.

Observando las frecuencias de resonancia de la base, que están dadas en la Tabla 6.2 para los tres diámetros de membranas ensayadas, se puede observar cómo hay frecuencias que están presentes en los tres experimentos con valores similares. Estas frecuencias están entorno a los siguientes valores: 2200, 4500, 7300 y 9750 Hz. La presencia de estas frecuencias en todos los experimentos, es probable que se deba a que el comportamiento dinámico estructural de todo el sistema que forma el experimento esté relacionado con las frecuencias naturales de este sistema. Este efecto no es deseable, y el diseño de experimentos futuros se deberían realizar para minimizar este fenómeno.

Aunque este efecto no sea deseable y no se consideró inicialmente en el diseño del experimento, no se trata de una limitación real. Estas frecuencias se pueden ignorar y considerar como frecuencias naturales de la membrana sólo el resto de las frecuencias. En realidad, éste es el objetivo del experimento, identificar las frecuencias de resonancia de la membrana.

Observando la Tabla 6.1, donde están todas las frecuencias naturales encontradas para los tres diámetros de membranas, y descartando las frecuencias de vibración del sistema, la primera frecuencia a considerar sería de 6652 Hz para el diámetro de 5 mm, 1552 Hz para el diámetro de 10 mm y 648 Hz para el diámetro de 15 mm.

También es importante destacar que estas frecuencias no coinciden exactamente con los picos máximos observados en la respuesta de las membranas graficadas en las figuras 6.2 y 6.4. Para la membrana de 15 mm la diferencia es pequeña, (648 Hz frente a 667 Hz) y se debe a la influencia del amortiguamiento, efecto que se estudió en los capítulos 4 y 5. Para los otros dos casos, las frecuencias de resonancia del sistema estructural del ensayo enmascaran las frecuencias naturales de la membrana, y esto puede conducir a una mala interpretación de los datos, al poder considerar como frecuencias naturales de la membrana valores que realmente no lo son. Después de los resultados obtenidos en este experimento, la medición de la estructura de soporte debe ser una cuestión indispensable para estudiar su influencia y poder obtener resultados adecuados.

Después de los resultados obtenidos al aplicar el método de ajuste circular a los resultados experimentales, hay que destacar la capacidad que tiene este método para detectar adecuadamente las frecuencias naturales, valores que algunas veces es imposible de detectar visualmente en la respuesta.

6.2.3.3. CÁLCULO DE LAS PROPIEDADES MECÁNICAS DEL MATERIAL (MÓDULO DE YOUNG)

Una vez descartadas las frecuencias naturales presentes en el apoyo, tenemos las frecuencias naturales de la membrana. Estas frecuencias están marcadas en la Tabla 6.1 con un asterisco, y son las que se van a utilizar para evaluar las propiedades mecánicas del material.

En el experimento se tiene un conocimiento bastante preciso de los parámetros que participan en el cálculo de las frecuencias naturales de la membrana, como son la densidad del material, el diámetro y espesor del material, y el parámetro que se va a identificar es el módulo de Young (E). Como el material es el mismo para los tres diámetros de membrana, el valor calculado debe ser el mismo, o similar, para los tres casos. En cuanto el módulo de Poisson se ha tomado un valor de 0.35, que es un valor aceptable para este caso.

Para determinar el módulo de Young, se han calculado las frecuencias naturales para las membranas, variando el módulo de Young, en un rango de 0.26 a 0.44 GPa, y los resultados se han graficado en la Figura 6.5. La expresión para el cálculo de las frecuencias de resonancia en Hz está representada en la Ecuación (3.2). Aquí recordamos su expresión, (6.1):

$$F = \frac{P}{2\pi} = \frac{\alpha}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)\rho}} \quad (6.1)$$

Se observa que las frecuencias se incrementan al aumentar el valor del módulo de Young. La relación entre las frecuencias de resonancia obtenidas en función del módulo de Young está representada en la Figura 6.5 mediante

líneas negras. Además, también se ha añadido a esta figura las frecuencias obtenidas experimentalmente con líneas horizontales, de color rojo para el centro de la membrana, y gris para la base.

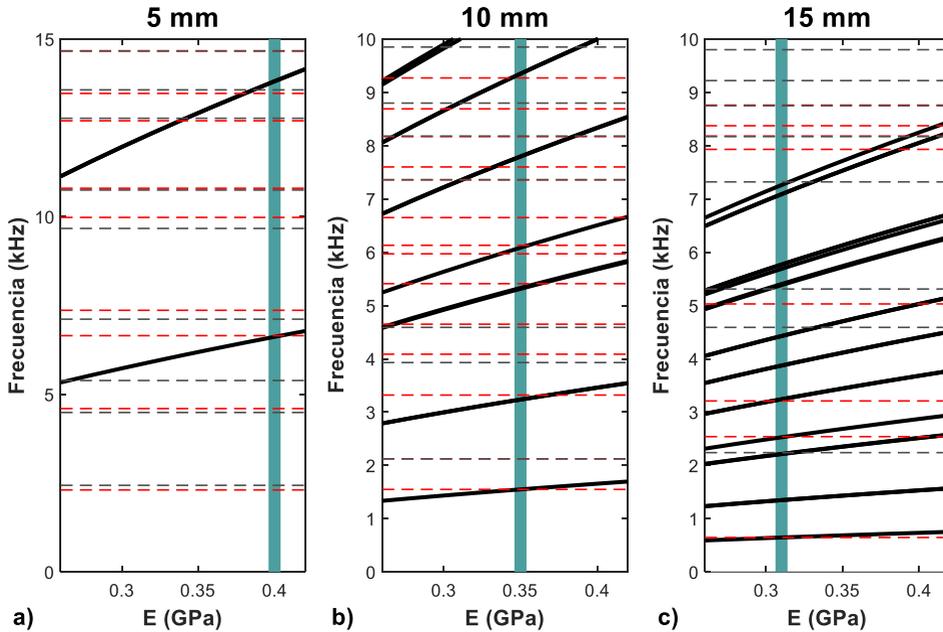


Figura 6.5. Determinación del módulo de Young para las membranas de diámetro 5 mm (a), 10 mm (b) y 15 mm (c)

El procedimiento a seguir para determinar el módulo de Young va a ser identificar el valor de E como el punto de intersección entre las líneas de las frecuencias naturales de la membrana (sin considerar las que aparecen también en la base), con la línea que representa el valor de E para un modo. Este procedimiento se repite para las tres membranas ensayadas. A continuación, se va a comentar los distintos puntos obtenidos para cada membrana, así como el valor de E obtenido.

- Membrana de 5 mm: Para este caso sólo se tiene un dato de frecuencia para identificar el valor de E . Con esta primera frecuencia natural se

obtiene un valor de $E=0.4$ GPa. Para este valor de E aparece un segundo punto de cruce con la segunda frecuencia natural a 13.4 kHz, pero no se puede considerar válido porque esta frecuencia natural también aparece en la vibración de la base. En resumen, en este caso se puede estimar sólo un valor de E , y no se tiene un segundo punto para validar el resultado obtenido. El pequeño tamaño de la membrana hace que tenga una gran rigidez, y por tanto las frecuencias de resonancias son muy altas, difíciles de medir en la práctica y, en consecuencia, con menos posibilidades para obtener resultados.

- Membrana de 10 mm: En este caso hay más frecuencias en el rango del experimento y hay más puntos de intersección válidos. Se tienen datos para obtener la intersección para los modos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Para todos los casos el punto obtenido es ligeramente diferente, pero se puede tomar el valor de $E=0.35$ GPa con un error menor al 5 %. Como ya se comentó cuando se estudió y se decidió la configuración del experimento, al presentar éste simetría axial, sólo se esperaba obtener los modos 1 y 4, así que se ha obtenido más información de la esperada. Aunque el experimento pretendía tener simetría axial, en la práctica es muy complejo garantizarla, tanto por la dificultad de posicionar la fuente de sonido como por eliminar efectos ambientales que rompan la simetría. Como consecuencia los resultados son más complejos de analizar, pero a su vez permiten obtener una mayor información. Seguramente la explicación para haber encontrado más modos es que no se consiguió la simetría axial total en este experimento.

Se ha demostrado que éste es el mejor montaje experimental para obtener el valor de E.

- Membrana de 15 mm: Para este caso hay intersecciones válidas con los modos: 1, 4 y 5, y se obtiene un valor de $E=0.31$ GPa. En el rango de bajas frecuencias se han detectado menos frecuencias naturales que para la membrana de 10 mm, probablemente porque en el experimento se consiguió centrar más correctamente, y por este motivo no se tiene información de los modos 2 y 3. Sí se ha detectado una gran cantidad de frecuencias para el rango de frecuencias más altas, pero para este rango es difícil de hacer distinción entre las frecuencias de la base y las frecuencias de la membrana.

En la Tabla 6.3 se han comparado las primeras seis frecuencias de resonancia, que se han considerado válidas del centro de la membrana, calculadas con el método del ajuste circular, y las frecuencias analíticas calculadas con el valor de E obtenido para cada membrana: $E=0.4$ GPa para la membrana de 5 mm de diámetro, $E=0.35$ GPa para la membrana de 10 mm de diámetro y $E=0.31$ GPa para la membrana de 15 mm de diámetro.

Tabla 6.3. Comparación entre las frecuencias de resonancia detectadas por el método de ajuste circular válidas y las calculadas analíticas, en el centro de la membrana, para las membranas de 5 mm, 10 mm y 15 mm

	Frecuencias diámetro 5 mm (Hz)		Frecuencias diámetro 10 mm (Hz)		Frecuencias diámetro 15 mm (Hz)	
	Ajuste circular	E=0.4 GPa	Ajuste circular	E=0.35 GPa	Ajuste circular	E=0.31 GPa
Modo 1	6652*	6618	1552*	1548	648.5*	647
Modo 2	-	13772	3322*	3221	-	1347
Modo 3	-	22595	5415* 5973*	5284	-	2210
Modo 4	-	25764	6132* 6649*	6025	2545*	2520
Modo 5	-	33064	7612*	7732	3210*	3234
Modo 6	-	39399	9272*	9214	-	3854

Una vez obtenido un valor de E para cada membrana, hay que destacar la variabilidad en los resultados, ya que el módulo de Young está en un rango amplio de valores, entre 0.31 y 0.4 GPa. Una de las razones de esta variabilidad probablemente es la heterogeneidad en el material (parafilm), así para distintas muestras se puede tener propiedades mecánicas algo diferentes, dando lugar a diferentes respuestas. Este aspecto se podría aclarar en el futuro realizando pruebas adicionales. Esto es inherente al material.

Hay otros factores que pueden intervenir en estas discrepancias, que dependen de la configuración del ensayo, y que es interesante analizar para limitarlas en futuros experimentos.

Lo primero que hay que destacar es que no se puede otorgar la misma validez a todos los experimentos. Después de analizar los resultados, los de la membrana de 10 mm han sido los más adecuados para este ensayo.

Para la membrana de 5 mm de diámetro sólo se tiene un dato para estimar el valor de E , así que, si hay alguna desviación no es posible detectarla. El rango de frecuencias del experimento ha resultado ser corto para esta membrana. Además, se debe considerar la influencia de pequeñas incertidumbres sobre los parámetros conocidos, como son: la geometría (diámetro y espesor), densidad, etc. Si pensamos en el modelo numérico, nos centramos en la influencia del diámetro y de las condiciones de contorno hay que considerar que en el modelo numérico hay que introducir un diámetro exacto y condiciones de contorno ideales, en este caso de empotramiento en el borde. Estas dos condiciones están íntimamente ligadas y son difíciles de distinguir en el experimento real, especialmente para tamaños de membranas más pequeños. Para diámetros más pequeños, pequeñas variaciones o errores en la estimación del tamaño del diámetro conducen a un amplio rango de incertidumbre en el valor de E . Para hacernos una idea de esta incertidumbre, se va a considerar un error de 0.5 mm en el valor del diámetro para los tres casos de estudios, con este dato el rango de incertidumbre sería del 10% para la membrana de 5 mm y del 3% para la membrana de 15 mm. Los valores de las frecuencias naturales son inversamente proporcionales al cuadrado de este parámetro, como se puede ver en la Ecuación (6.1). En este experimento una incertidumbre de 0.5 mm en el valor del diámetro es una estimación creíble, debido a las dificultades prácticas para colocar la muestra sobre el soporte.

Otro aspecto a considerar es la frecuencia de muestreo de los datos, que ha sido igual para todos los ensayos, de 47.7 Hz. Calculando la ratio $f1/\Delta f$, se tiene una idea del nivel de discretización de la FFT, siendo esta discretización la peor en el caso de 15 mm. Este hecho se puede observar en el diagrama de Nyquist, representado en la Figura 6.3, donde se puede identificar de forma más fácil los círculos con los diámetros menores de 15 mm.

Después de analizar los distintos parámetros e incertidumbres que pueden afectar a los resultados obtenidos, se puede concluir para este caso, que el rango de valores más fiable para el módulo de Young es entre 0.31 y 0.35 GPa, y probablemente más cercano a 0.35 GPa.

6.3. CONCLUSIONES

Se ha utilizado un experimento real, basado en la configuración teórica estudiada en el presente trabajo, para probar una nueva metodología con la que obtener las propiedades mecánicas de una membrana, en concreto el módulo de Young, y comprobar así la validez del procedimiento.

Se han considerado tres configuraciones diferentes, y los tres han proporcionado información de utilidad para probar la eficacia del método. También con los tres se han podido evaluar la influencia de los parámetros que entran en juego, y determinar los puntos clave en los que se puede mejorar.

Para cada configuración se identificó un módulo de Young, observando cierta variabilidad en los resultados. Aunque los valores obtenidos de E han tenido una cierta variación, se ha considerado que el procedimiento general

es válido. Las dificultades encontradas en los ensayos experimentales han revelado aspectos clave que deben ser tenidos en cuenta en el diseño de futuros experimentos.

Entre otros parámetros, se ha destacado y explicado la influencia del error en el tamaño de la muestra sobre las incertidumbres de los resultados obtenidos. También se ha destacado como las vibraciones del sistema de soporte contaminan la respuesta de la membrana.

También se ha demostrado que el uso de técnicas clásicas de ajuste de curvas FRF puede ser aplicable en este experimento, incluso cuando la entrada medida no es la fuerza aplicada a la estructura, sino la presión del sonido a cierta distancia.

Por último, el método circular ha demostrado su utilidad, encontrándose con su uso frecuencias naturales que a simple vista no son observables en la FRF.

Destacar que el contenido de este capítulo se encuentra incluido en parte del artículo titulado “A Novel Methodology to Obtain the Mechanical Properties of Membranes by Means of Dynamic Tests” [76], publicado el 2 de marzo de 2022 en la revista “Membranes”.

CAPÍTULO 7

Conclusiones

CAPÍTULO 7: Conclusiones

7.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se recogen las conclusiones principales de la investigación del presente trabajo. Muchas de estas conclusiones se han adelantado en los resúmenes y conclusiones de los capítulos anteriores.

Se van a recopilar las conclusiones desde un punto de vista global, destacando las mejoras obtenidas sobre el conocimiento del problema estudiado.

Las conclusiones se van a exponer agrupadas en función de los objetivos planteados al inicio del trabajo, en el capítulo 1, empezando por los objetivos secundarios, y terminando con el objetivo principal.

Al final del capítulo se sugieren las posibles líneas de trabajo futuras que pueden ser de interés.

7.2. SOBRE LOS PRINCIPALES PARÁMETROS QUE INFLUYEN EN LA RESPUESTA DE LA MEMBRANA

Inicialmente, en el presente trabajo se ha realizado un estudio teórico del campo de la dinámica, incluyendo conceptos y parámetros fundamentales en esta materia. Se empieza por sistemas de 1 g.d.l., considerando los posibles tipos de vibraciones: libres y forzadas, sin y con amortiguamiento. Seguidamente se incluye los sistemas de n g.d.l., y los distintos métodos de cálculo: modal y armónico.

Después se realiza un estudio teórico del comportamiento de la membrana, recopilando las ecuaciones teóricas que definen su movimiento, particularizando para el caso de la membrana circular, y con condiciones de contorno de empotramiento. Se estudia el caso placa, donde es la flexión la que domina el movimiento, el caso membrana sometida a tensión en su plano, donde es ésta la que domina el movimiento, y el caso intermedio de una membrana sometida a un cierto nivel de tensión en el plano, y cuyo movimiento es un caso intermedio entre los dos casos extremos.

Para completar este estudio, se evalúa la influencia de la tensión en membranas, usando el método de elementos finitos mediante el programa ANSYS v19. Se considera la membrana sometida a distintos niveles de tensión, para estudiar cómo cambia la respuesta, y compararla con las soluciones analíticas conocidas.

Recurriendo también a un estudio numérico, se han realizado simulaciones armónicas para estudiar otros parámetros que influyen en la respuesta de la membrana, como la distancia de la fuente de sonido a la membrana y su disposición frente a ésta, la presión sonora de la fuente, los puntos a medir en la membrana, y la amortiguación presente en el problema.

Con este estudio se concluye que es importante determinar los parámetros que influyen en la respuesta, para tenerla muy acotada y determinada en el ensayo a realizar. En función de los parámetros seleccionados, aparecen en la respuesta de la membrana distintas frecuencias de resonancia.

Por este motivo, es aconsejable realizar modelos numéricos previos con las características reales del ensayo, para acotar los parámetros y determinar la respuesta teórica antes de realizar el ensayo real.

7.3. SOBRE EL USO DEL MÉTODO DE AJUSTE CIRCULAR PARA IDENTIFICAR LOS MODOS DE LA RESPUESTA

En el capítulo 5 se ha explicado el método de ajuste circular, el cual se basa en el uso del diagrama de Nyquist en desplazamiento. Se ha explicado cómo calcular los distintos parámetros que participan en el método, entre ellos la frecuencia de resonancia.

Se ha aplicado este método a simulaciones numéricas de un caso de membrana circular, y para diferentes valores de amortiguamiento. Se obtienen los distintos parámetros del ajuste, entre ellos las frecuencias de resonancia. Comparando los resultados con las frecuencias modales y las obtenidas visualmente de las FRFs, el método resulta adecuado para obtener los modos de vibración. Para los casos con amortiguamiento suficientemente alto donde no es posible distinguir visualmente las frecuencias de resonancia en las FRFs, este método resulta muy útil para realizar su cálculo, lo cual supone una ventaja de este método.

7.4. SOBRE LA APLICACIÓN DEL MÉTODO A UN ENSAYO EXPERIMENTAL REAL

Se ha aplicado el método del ajuste circular a los tres ensayos realizados, con la finalidad de calcular el módulo de Young del material ensayado. Para poder calcularlo, ha sido necesario, por un lado, el conocimiento teórico de la respuesta de la membrana para poder calcular las frecuencias teóricas de vibración, en función de la geometría de la muestra, las condiciones de contorno y las propiedades mecánicas del material, y por otro lado, conocer la respuesta de la membrana en el ensayo experimental.

Se ha aplicado el ensayo experimental a 3 membranas de: 5 mm, 10 mm y 15 mm de diámetro. En esos ensayos se mide la velocidad de dos puntos, del centro de la membrana, y de un punto de apoyo situado en el borde. Después de estudiar las FRFs de estos dos puntos, y de aplicar el método de ajuste circular, se calculan las frecuencias de vibración presentes en las respuestas. Se observa que aparecen frecuencias de vibración en el apoyo, seguramente asociadas a las frecuencias naturales del conjunto. Algunas de estas frecuencias están presentes también en la membrana, y otras no. Este hecho determina la vibración del soporte afecta a la respuesta de la membrana, y su influencia en la misma hay que tenerla en cuenta.

Para calcular el módulo de Young de las tres muestras ensayadas, se compara el valor teórico del módulo de Young en función de la frecuencia con las frecuencias de vibración obtenidas para cada membrana, descartando aquellas frecuencias que coinciden o están muy cerca de las frecuencias del apoyo. Con este procedimiento se calcula diferentes valores del módulo de Young, que se encuentran en un rango entre 0.31 y 0.4 GPa.

Después de analizar los resultados de las tres membranas, se concluye que los correspondientes a la membrana de 10 mm han sido los más adecuados para este ensayo. Para la membrana de 5 mm sólo se obtiene un dato de frecuencia válido, así no se tiene más valores para contrastar. Para la membrana de 15 mm se encuentra más frecuencias que usar que para el diámetro de 5 mm, pero con una gran cantidad en el rango de frecuencias más alto y difíciles de distinguir de las frecuencias de la base. Además, también se observa que la peor discretización se hace para esta membrana de 15 mm. Para esta membrana de 10 mm es para la que se obtiene más valores de frecuencias válidos que usar para identificar el valor de E,

seguramente porque se ha conseguido la simetría axial total en este experimento, y los resultados obtenidos para esta membrana se consideran los más fiables.

Se determina que el módulo de Young se encuentra en el rango entre 0.31 y 0.35 GPa, valores obtenidos para las membranas de 15 mm y 10 mm, más probablemente cercano al valor de 0.35 GPa, que es el que se obtiene con la membrana de 10 mm.

Así se concluye que se ha desarrollado un procedimiento válido para el cálculo del módulo de Young del material de una membrana, partiendo del conocimiento teórico de su respuesta, y determinando un ensayo adecuado para obtener esa respuesta de forma experimental y compararlas.

7.5. SOBRE EL DISEÑO DEL ENSAYO

Después de estudiar la respuesta teórica de la membrana y los posibles modos de vibración presentes en la misma, se busca una configuración de ensayo que sea lo más fácil de realizar, y donde la respuesta de la membrana sea la más previsible y sencilla posible. Éste es el principal objetivo del trabajo.

En el experimento se deben excitar convenientemente los modos de vibración que se quiera detectar, para conseguir el objetivo buscado. De entre los modos de vibración de la membrana, se busca que aparezcan los que tienen una simetría axial, los modos 1, 4, 9..., que presentan una deformación con simetría axial respecto al centro de la membrana.

Los distintos elementos a considerar que tienen que estar presentes en el ensayo son:

- La membrana del material seleccionado, que es la muestra a ensayar.
- Un elemento que sirva de soporte, para sujetar a la membrana y conseguir condiciones de empotramiento en el borde.
- Una fuente de sonido para excitar la respuesta en la membrana, que en este caso es un altavoz.
- Un micrófono para calibrar la presión del sonido del altavoz. En el experimento real realizado en el trabajo se usa otro micrófono más, colocado en el lado opuesto de la membrana, para captar la transmisión del sonido a través de la misma. Los datos de este segundo micrófono se han usado en el presente trabajo.
- Un vibrómetro láser para medir la velocidad de los puntos elegidos.

El altavoz y el micrófono se colocan en uno de los lados de la membrana. El altavoz se coloca a una cierta distancia 'd' del centro de la misma, y con su eje perpendicular al plano de la misma, esto es, con un ángulo ' \varnothing ' de 90°. En el ensayo experimental se ha tomado 1 centímetro de distancia entre el altavoz y el centro de la membrana.

Los puntos medidos en el experimento han sido el centro de la membrana, y también un punto en el borde externo, cuya medición sirve como punto de apoyo. El rango de frecuencias a medir es de 0.5 a 15 kHz.

Con el estudio teórico y numérico, y el ensayo experimental realizado, se prueba que en la respuesta de la membrana está presente de los modos con simetría axial buscados, e incluso en algunos casos aparecen más

frecuencias de las buscadas, que servirán para ratificar los resultados obtenidos.

Al tratar los resultados obtenidos del experimento, se llega a la conclusión que es muy importante medir el punto de apoyo. En el apoyo se produce una vibración que contamina la respuesta de la membrana, y que por tanto es muy importante considerar. Seguramente los modos de vibración presentes en el apoyo corresponden con las frecuencias naturales del sistema completo.

El trabajo se centra en el cálculo del módulo de Young, ya que es la característica mecánica más importante en un material. La otra característica mecánica que influye en las frecuencias de resonancia es el módulo de Poisson, pero su influencia es muy pequeña, de ahí que se desestime su cálculo.

En cuanto a las limitaciones del experimento, el campo de trabajo del material debe ser en régimen elástico, tal como se indicó en las hipótesis del experimento, con lo que la configuración del ensayo debe ser tal que lo garantice.

7.6. LÍNEAS FUTURAS DE TRABAJO

El presente trabajo está incluido en una línea de investigación que busca caracterizar las propiedades mecánicas de los materiales tipo membranas, materiales tipo film, como es la membrana timpánica. Estos materiales son difíciles de caracterizar por las propiedades intrínsecas de estos tipos de materiales. Para ello se busca un ensayo no destructivo, en el que la muestra queda intacta, y se puede usar en ocasiones sucesivas.

Dentro de las líneas futuras relacionadas con este trabajo, y de las cuestiones destacables que se puede tener en cuenta en estudios posteriores, se pueden que destacar las siguientes:

- Considerar la posible influencia del conjunto en la respuesta de la membrana. En el ensayo experimental, por precaución, además de medir la respuesta de la membrana se midió la del apoyo, y en el tratamiento de datos se considera la respuesta de los dos elementos y se observa que el conjunto del experimento puede influir en la respuesta de la membrana. Por eso es necesario tenerlo presente en futuros experimentos.
- Realizar mediciones en otros puntos de la membrana, y/o variar la orientación de la fuente (ángulo ' θ ' distinto de 90°). En estos casos aparecerían más modos de vibración en la respuesta y más datos para validar los resultados obtenidos.
- Obtener el parámetro del amortiguamiento relacionado con la respuesta dinámica de la membrana. El amortiguamiento influye en la respuesta dinámica, por un lado suaviza la respuesta, y por otro lado, desplaza el valor de las frecuencias de resonancia aumentando su valor, como se ha visto en los capítulo 4 y 5. En las FRFs de las membranas ensayadas se observa un pico muy claro para los tres casos, pero el resto son difíciles de distinguir. Esto puede ser debido, entre otras cuestiones, a que el valor del amortiguamiento sea más alto del inicialmente considerado.

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA

1. Ding, X.; Ko, W.H.; Mansour, J.M. Residual stress and mechanical properties of boron-doped p+-silicon films. *Sensors Actuators A. Phys.* **1990**, *23*, 866–871, doi:10.1016/0924-4247(90)87048-N.
2. Benson-Martin, J.; Zammaretti, P.; Bilic, G.; Schweizer, T.; Portmann-Lanz, B.; Burkhardt, T.; Zimmermann, R.; Ochsenbein-Kölble, N. The Young's modulus of fetal preterm and term amniotic membranes. *Eur. J. Obstet. Gynecol. Reprod. Biol.* **2006**, *128*, 103–107, doi:10.1016/j.ejogrb.2005.12.011.
3. Ye, X.Y.; Zhang, J.H.; Zhou, Z.Y.; Yang, Y. Measurement of Young's modulus and residual stress of micromembranes. In Proceedings of the MHS'96 Proceedings of the Seventh International Symposium on Micro Machine and Human Science; IEEE, 1996; pp. 125–129.
4. Tabata, O.; Kawahata, K.; Sugiyama, S.; Igarashi, I. Mechanical property measurements of thin films using load-deflection of composite rectangular membrane. *Micromechanics MEMS Class. Semin. Pap. to 1990* **1997**, *20*, 667–671, doi:10.1109/9780470545263.sect14.
5. Petersen, K.E.; Guarnieri, C.R. Young's modulus measurements of thin films using micromechanics. *J. Appl. Phys.* **1979**, *50*, 6761–6766.

6. Kiewewetter, L.; Zhang, J.M.; Houdeau, D.; Steckenborn, A. Determination of Young's moduli of micromechanical thin films using the resonance method. *Sensors Actuators A. Phys.* **1992**, *35*, 153–159, doi:10.1016/0924-4247(92)80154-U.
7. Tabib-Azar, M.; Wong, K.; Ko, W. Aging phenomena in heavily doped (p+) micromachined silicon cantilever beams. *Sensors Actuators A. Phys.* **1992**, *33*, 199–206, doi:10.1016/0924-4247(92)80167-2.
8. Ma, S.; Wang, S.; Iacopi, F.; Huang, H. A resonant method for determining the residual stress and elastic modulus of a thin film. *Appl. Phys. Lett.* **2013**, *103*, doi:10.1063/1.4813843.
9. Dos Santos, E.A.; Rehder, G.P. Study of the young's modulus in microstructures through the resonance frequency technique for applications in commercial CMOS processes. *Mater. Res.* **2017**, *20*, 81–84, doi:10.1590/1980-5373-MR-2017-0439.
10. Kirikae, I. *The Structure and Function of Middle Ear*; Tokio University Press, 1960;
11. Von Békésy, G. *Experiments in Hearing*; McGraw-Hill: New York, 1960;
12. Decraemer, W.F.; Maes, M.A.; Vanhuyse, V.J. An elastic stress-strain relation for soft biological tissues based on a structural model. *J. Biomech.* **1980**, *13*, 463–468, doi:10.1016/0021-9290(80)90338-3.
13. Zahnert, T.; Hüttenbrink, K.-B.; Mürbe, D.; Bornitz, M. Experimental investigations of the use of cartilage in tympanic

- membrane reconstruction. *Otol. Neurotol.* **2000**, *21*, 322–328.
14. Cheng, T.; Dai, C.; Gan, R.Z. Viscoelastic Properties of Human Tympanic Membrane. *Ann. Biomed. Eng.* **2007**, *35*, 305–314, doi:10.1007/s10439-006-9227-0.
 15. Allardyce, B.J.; Rajkhowa, R.; Dilley, R.J.; Xie, Z.; Campbell, L.; Keating, A.; Atlas, M.D.; von Unge, M.; Wang, X. Comparative acoustic performance and mechanical properties of silk membranes for the repair of chronic tympanic membrane perforations. *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.* **2016**, *64*, 65–74, doi:10.1016/j.jmbbm.2016.07.017.
 16. Huang, G.; Daphalapurkar, N.P.; Gan, R.Z.; Lu, H. A method for measuring linearly viscoelastic properties of human tympanic membrane using nanoindentation. *J. Biomech. Eng.* **2008**, *130*, doi:10.1115/1.2838034.
 17. Daphalapurkar, N.P.; Dai, C.; Gan, R.Z.; Lu, H. Characterization of the linearly viscoelastic behavior of human tympanic membrane by nanoindentation. *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.* **2009**, *2*, 82–92, doi:10.1016/j.jmbbm.2008.05.008.
 18. Buytaert, J.A.N.; Aernouts, J.E.F.; Dirckx, J.J.J. Indentation measurements on the eardrum with automated projection moiré profilometry. *Opt. Lasers Eng.* **2009**, *47*, 301–309, doi:10.1016/j.optlaseng.2008.01.002.
 19. Aernouts, J.; Couckuyt, I.; Crombecq, K.; Dirckx, J.J.J. Elastic characterization of membranes with a complex shape using point indentation measurements and inverse modelling. *Int. J. Eng. Sci.*

- 2010**, 48, 599–611, doi:10.1016/j.ijengsci.2010.02.001.
20. Hesabgar, S.M.; Marshall, H.; Agrawal, S.K.; Samani, A.; Ladak, H.M. Measuring the quasi-static Young's modulus of the eardrum using an indentation technique. *Hear. Res.* **2010**, 263, 168–176, doi:10.1016/j.heares.2010.02.005.
21. Wu, D.; Chen, Y.; Manna, S.; Talley, K.; Zakutayev, A.; Brennecke, G.L.; Ciobanu, C. V.; Constantine, P.; Packard, C.E. Characterization of Elastic Modulus Across the (Al_{1-x}Sc_x)N System Using DFT and Substrate-Effect-Corrected Nanoindentation. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control* **2018**, 65, 2167–2175, doi:10.1109/TUFFC.2018.2862240.
22. Poilane, C.; Delobelle, P.; Lexcellent, C.; Hayashi, S.; Tobushi, H. Analysis of the mechanical behavior of shape memory polymer membranes by nanoindentation, bulging and point membrane deflection tests. *Thin Solid Films* **2000**, 379, 156–165, doi:10.1016/S0040-6090(00)01401-2.
23. Gaboriaud, F.; Parcha, B.S.; Gee, M.L.; Holden, J.A.; Strugnell, R.A. Spatially resolved force spectroscopy of bacterial surfaces using force-volume imaging. *Colloids Surfaces B Biointerfaces* **2008**, 62, 206–213, doi:https://doi.org/10.1016/j.colsurfb.2007.10.004.
24. Longo, M.; De Santo, M.P.; Esposito, E.; Fuoco, A.; Monteleone, M.; Giorno, L.; Jansen, J.C. Force spectroscopy determination of Young's modulus in mixed matrix membranes. *Polymer (Guildf)*. **2018**, 156, 22–29, doi:https://doi.org/10.1016/j.polymer.2018.09.043.

25. Et-Thakafy, O.; Guyomarc'h, F.; Lopez, C. Young modulus of supported lipid membranes containing milk sphingomyelin in the gel, fluid or liquid-ordered phase, determined using AFM force spectroscopy. *Biochim. Biophys. Acta - Biomembr.* **2019**, *1861*, 1523–1532, doi:<https://doi.org/10.1016/j.bbamem.2019.07.005>.
26. Tng, K.H.; Antony, A.; Wang, Y.; Leslie, G.L. 11 - Membrane ageing during water treatment: Mechanisms, monitoring, and control. In *Advances in Membrane Technologies for Water Treatment*; Basile, A., Cassano, A., Rastogi, N.K., Eds.; Woodhead Publishing Series in Energy; Woodhead Publishing: Oxford, 2015; pp. 349–378 ISBN 978-1-78242-121-4.
27. Du, S.; Qiang, Y.; Liu, J. Erythrocyte Membrane Failure by Electromechanical Stress. *Appl. Sci.* **2018**, *8*, doi:10.3390/app8020174.
28. Fay, J.; Puria, S.; Decraemer, W.F.; Steele, C. Three approaches for estimating the elastic modulus of the tympanic membrane. *J. Biomech.* **2005**, *38*, 1807–1815, doi:10.1016/j.jbiomech.2004.08.022.
29. Luo, H.; Dai, C.; Gan, R.Z.; Lu, H. Measurement of young's modulus of human tympanic membrane at high strain rates. *J. Biomech. Eng.* **2009**, *131*, doi:10.1115/1.3118770.
30. ASTM Standard Test Method for Measuring Vibration-Damping Properties of Materials. *Annu. B. ASTM Stand.* 2005.
31. Rayleigh, L. *Theory of Sounds*; C.J. Clay, M.A.: London, 1877;

32. Timoshenko, S. *Vibration problems in engineering*; New York, 1928;
33. Leissa, A.W. *Vibration of Plates*; Washington, D. C., 1969;
34. Poisson, S.D. L'équilibre et le mouvement des corps élastiques. *Mémoires l'académie R. des Sci. l'institut Fr.* **1828**, 8, 357–570, doi:10.1016/0309-1740(79)90012-3.
35. Kirchhoff, G. 4. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. *J. fur die Reine und Angew. Math.* **1850**, doi:10.1515/crll.1850.40.51.
36. Airey, J.R.; Bc, B. *The Vibrations of Circular Plates and their Relation to Bessel Functions*; 1911;
37. Itao, K.; Crandall, S.H. Natural modes and natural frequencies of uniform, circular, free-edge plates. *J. Appl. Mech. Trans. ASME* **1979**, 46, 448–453, doi:10.1115/1.3424569.
38. Amabili, M.; Pasqualini, A.; Dalpiaz, G. Natural frequencies and modes of free-edge circular plates vibrating in vacuum or in contact with liquid. *J. Sound Vib.* **1995**, doi:10.1006/jsvi.1995.0618.
39. Leissa, A.W.; Narita, Y. Natural frequencies of simply supported circular plates. *J. Sound Vib.* **1980**, doi:10.1016/0022-460X(80)90598-2.
40. Azimi, S. Free vibration of circular plates with elastic edge supports using the receptance method. *J. Sound Vib.* **1988**, doi:10.1016/0022-460X(88)90332-X.
41. Leissa, A.W.; Laura, P.A.; Gutierrez, R.H. Transverse vibrations of circular plates having nonuniform edge constraints. *J. Acoust. Soc.*

- Am.* **1979**, *66*, 180–184, doi:10.1121/1.383059.
42. Narita, Y.; Leissa, A.W. Transverse vibration of simply supported circular plates having partial elastic constraints. *J. Sound Vib.* **1980**, doi:10.1016/0022-460X(80)90557-X.
43. Narita, Y.; Leissa, A.W. Flexural vibrations of free circular plates elastically constrained along parts of the edge. *Int. J. Solids Struct.* **1981**, doi:10.1016/0020-7683(81)90048-2.
44. Amabili, M.; Pierandrei, R.; Frosali, G. Analysis of vibrating circular plates having non-uniform constraints using the modal properties of free-edge plates: Application to bolted plates. *J. Sound Vib.* **1997**, doi:10.1006/jsvi.1997.1054.
45. Eastep, F.E.; Hemmig, F.G. Natural frequencies of circular plates with partially free, partially clamped edges. *J. Sound Vib.* **1982**, doi:10.1016/0022-460X(82)90483-7.
46. Kwak, M.K. Vibration of circular plates in contact with water. In Proceedings of the American Society of Mechanical Engineers (Paper); Publ by ASME, 1991; pp. 1–4.
47. Hernández, E. Approximation of the Vibration Modes of a Plate and Shells Coupled With a Fluid. **2006**, doi:10.1115/1.2173675.
48. McIntyre, M.E.; Schumacher, R.T.; Woodhouse, J. On the oscillations of musical instruments. *J. Acoust. Soc. Am.* **1983**, *74*, 1325–1345, doi:10.1121/1.390157.
49. Alm, J.F.; Walker, J.S. Time-Frequency Analysis of Musical Instruments. *SIAM Rev.* **2002**, *44*, 457–476,

- doi:10.1137/S00361445003822.
50. Fletcher, N.; Rossing, T. *The Physics of Musical Instruments*; New York, 1998; ISBN 10:0-387-98374-0.
 51. Von Helmholtz, H.; Ellis, A.J. *On the sensations of tone as a physiological basis of the theory of music*; 1895;
 52. Suzuki, H.; Yamaguchi, N.; Izumi, H. Theoretical and experimental studies on the resonance frequencies of a stretched circular plate: Application to Japanese drum diaphragms. *Acoust. Sci. Technol.* **2009**, *30*, 348–354, doi:10.1250/ast.30.348.
 53. Lee, J.; Wang, Z.; He, K.; Shan, J.; Feng, P.X.L. High frequency MoS₂ nanomechanical resonators. *ACS Nano* **2013**, *7*, 6086–6091, doi:10.1021/nn4018872.
 54. Sammoura, F.; Smyth, K.; Bathurst, S.; Kim, S.G. An analytical analysis of the sensitivity of circular piezoelectric micromachined ultrasonic transducers to residual stress. *IEEE Int. Ultrason. Symp. IUS* **2012**, 580–583, doi:10.1109/ULTSYM.2012.0144.
 55. Chen, K.-S.; Ou, K.-S. Modification of curvature-based thin-film residual stress measurement for MEMS applications. *J. Micromechanics Microengineering* **2002**, *12*, 917–924, doi:10.1088/0960-1317/12/6/324.
 56. Tang, Y.J.; Chen, J.; Huang, Y.B.; Li, D.C.; Wang, S.S.; Li, Z.H.; Zhang, W.D. Ultra-sensitive, highly reproducible film stress characterization using flexible suspended thin silicon plates and local curvature measurements. *J. Micromechanics Microengineering*

- 2007, 17, 1923–1930, doi:10.1088/0960-1317/17/10/001.
57. Griffin, B.A.; Williams, M.D.; Wang, G.; Sankar, B. V; Cattafesta, L.N.; Sheplak, M. The electromechanical behavior of piezoelectric thin film composite diaphragms possessing in-plane stresses. *J. Micromechanics Microengineering* **2017**, 27, 045017, doi:10.1088/1361-6439/aa62b3.
58. Gonzalez-Herrera, A.; Olson, E.S. A study of sound transmission in an abstract middle ear using physical and finite element models. *J. Acoust. Soc. Am.* **2015**, 138, 2972–2985, doi:10.1121/1.4934515.
59. Caminos, L.; Garcia-Manrique, J.; Lima-Rodriguez, A.; Gonzalez-Herrera, A. Analysis of the Mechanical Properties of the Human Tympanic Membrane and Its Influence on the Dynamic Behaviour of the Human Hearing System. *Appl. Bionics Biomech.* **2018**, 2018, 1–12, doi:10.1155/2018/1736957.
60. Thein, W. Vibration of Circular Plates. *J. Acoust. Soc. Am.* **1962**, 34, 275–281, doi:10.1121/1.1928110.
61. Lima-Rodriguez, A.; Gonzalez-Herrera, A.; Garcia-Manrique, J. Study of the dynamic behaviour of circular membranes with low tension. *Appl. Sci.* **2019**, 9, doi:10.3390/app9214716.
62. Ewins, D.J. Ewins D. J., Modal Testing - Theory and Practice.pdf. *Book* 1995, 269-.
63. Paz, M. *Dinámica estructural: teoría y cálculo*; Reverté, 2021; ISBN 8429191011.
64. Timoshenko, S.; Woinowsky Krieger, S. *Theory of Plates and Shells*;

- New York, 1941; Vol. 148; ISBN 0070647798.
65. de Navarra, E.O.I.; Oñate, E.; Ingeniería, C.I. de M.N. en; Zienkiewicz, O.C. *Cálculo de Estructuras Por el Método de Elementos Finitos: Análisis Estático Lineal*; Centro Internacional de Metodos Numericos en Ingenieria, 1991; ISBN 9788487867002.
66. Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L.; Zhu, J.Z. *The finite element method: its basis and fundamentals*; Elsevier, 2005; ISBN 008047277X.
67. Thompson, M.K.; Thompson, J.M. *ANSYS mechanical APDL for finite element analysis*; Butterworth-Heinemann, 2017; ISBN 0128131101.
68. Howard, C.; Cazzolato, B. *Acoustic analyses using Matlab and Ansys*; CRC press, 2014; ISBN 1482223279.
69. Rao, S.S. *The finite element method in engineering*; Butterworth-heinemann, 2017; ISBN 0128143649.
70. Chopra, A.K. *Dinámica de estructuras 4ta Edition*; 2014; Vol. 4; ISBN 9786073222396.
71. Rivero Rubio, A. *Estudio del comportamiento mecano-acústico de una membrana sometida a presión sonora*, Trabajo fin de grado, Universidad de Málaga, Málaga, 2017.
72. Velasto López, J.F. *Sistema de ajuste numérico-experimental en el Análisis Dinámico Estructural*, Proyecto fin de carrera, Universidad de Málaga, Málaga, 2000.
73. Kirchhoff, G. *Gesammelte abhandlungen*; Ambrosius Barth, 1882; Vol. 2;.

74. ANSYS v19. (2019).
75. Aernouts, J.; Aerts, J.R.M.; Dirckx, J.J.J. Mechanical properties of human tympanic membrane in the quasi-static regime from in situ point indentation measurements. *Hear. Res.* **2012**, *290*, 45–54, doi:10.1016/j.heares.2012.05.001.
76. Lima-Rodriguez, A.; Garcia-Manrique, J.; Dong, W.; Gonzalez-Herrera, A. A Novel Methodology to Obtain the Mechanical Properties of Membranes by Means of Dynamic Tests. *Membr.* **2022**, *12*.
77. Carrascosa, L.I.; Busturia, J.M.; Gimenez, J.G. GLOBAL EXPERIMENTAL MODAL ANALYSIS. A COMPARISON OF DIFFERENT METHODS. In Proceedings of the Proceedings of the 3rd International Modal Analysis Conference.; Union Coll: Centro de Estudios e Investigaciones Técnicas de Guipuzcoa Barrio Ibaeta, San Sebastian, Spain, 1985; Vol. 1, pp. 311–321.
78. González Herrera, A. *Sistema de análisis dinámico experimental de estructuras*, Proyecto fin de carrera, Universidad de Málaga, Málaga, 1995.