Escuela Internacional de Doctorado EIDUNED

TESIS DOCTORAL

2020

TOMA DE DECISIONES EN GRUPO EN AMBIENTES MULTICRITERIO, HETEROGÉNEOS Y LINGÜÍSTICOS

EDWIN ALBERTO CALLEJAS

PROGRAMA DE DOCTORADO EN INGENIERÍA DE SISTEMAS Y CONTROL

DR. FRANCISCO JAVIER CABRERIZO LORITE

DR. CARLOS CERRADA SOMOLINOS

Universidad Nacional de Educación a Distancia

Toma de decisiones en grupo en ambientes multicriterio, heterogéneos y lingüísticos

Tesis doctoral presentada por Edwin Alberto Callejas
dentro del Programa de Doctorado en Ingeniería de Sistemas y Control

Dirigida por Dr. Francisco Javier Cabrerizo Lorite
y Dr. Carlos Cerrada Somolinos

El doctorando	El director	El director
Edwin Alberto Callejas	Fco. Javier Cabrerizo Lorite	Carlos Cerrada Somolinos

Madrid, junio de 2020

La vida está llena de decepciones y satisfacciones ... disfruta y aprende de cada una de ellas, Daniel.

Resumen

El uso de información lingüística en toma de decisiones implica que haya que recurrir a la computación con palabras, metodología que asume valores lingüísticos como elementos de cómputo. En los últimos años ha surgido una nueva metodología para trabajar con información lingüística que tiene como base el paradigma de la computación granular. Su ventaja reside en que tanto la distribución como la semántica asociadas a los valores o términos lingüísticos, en lugar de tener que establecerse *a priori*, se definen mediante la optimización de un cierto criterio. En esta memoria presentamos un nuevo modelo construido sobre la base de la computación granular, aunque diferente a los actualmente propuestos en la literatura, que pueda aplicarse en procesos de toma de decisiones en grupo desarrollados en entornos multicriterio, heterogéneos y lingüísticos. Para modelar de forma más realista estos procesos de decisión, el modelo planteado tiene en cuenta que cada criterio utilizado para evaluar las distintas alternativas del problema tiene una importancia diferente. También considera que las preferencias de cada invididuo del grupo tienen un distinto nivel de importancia en cada criterio. Este nuevo modelo formaliza los valores lingüísticos como intervalos para hacerlos operacionales mediante un proceso de optimización en el que se trata de maximizar un criterio compuesto por dos aspectos que son de especial relevancia cuando trabajamos con un proceso de toma de decisiones en grupo. Estos dos aspectos son el consenso alcanzado entre los individuos del grupo y la consistencia individual de cada individuo de este. El resultado es que este nuevo modelo permite obtener soluciones con mayor consenso y consistencia cuando se usa información lingüística en entornos multicriterio y heterogéneos, algo fundamental en este tipo de procesos de decisión.

Reconocimientos

En primer lugar, quiero expresar mi más sentido agradecimiento a Carlos Cerrada Somolinos y Francisco Javier Cabrerizo, mis directores de tesis, sin cuyo apoyo, dedicación y confianza depositada en mi, esta memoria no hubiera sido finalizada.

A Francisco Armando Zepeda y Jorge Armando Aparicio por su trascendental apoyo en la gestión de este proceso, el cual es el cumplimiento de una meta colectiva. Gracias por su confianza en mí, así también a todos los compañeros de la UTEC que me han mostrado su apoyo en este proceso.

También quiero agradecer a mi familia, especialmente a mis padres, a mi esposa y a mis hermanos.

Índice general

Índice de figuras . . . . **xi**

Índice de tablas . . . . **xiii**

1 Introducción **1**

1.1 Planteamiento 1

1.2 Objetivos 6

1.3 Estructura de la memoria 7

2 El proceso de toma de decisiones en grupo **9**

2.1 El proceso de toma de decisiones 10

2.2 Características de los procesos de toma de decisiones 13

2.2.1 El ambiente de decisión 13

2.2.2 El número de criterios 15

2.2.3 El número de individuos 17

2.2.4 Importancia asociada a los criterios y a las preferencias de los individuos 18

2.3 Esquema de los procesos de toma de decisiones en grupo 19

2.3.1 Consenso 21

2.3.2 Selección 26

2.4 Representación de preferencias 29

2.4.1 Dominio de información de las preferencias 30

2.4.2 Estructura de representación de las preferencias 32

2.5 Cuantificadores lingüísticos y mayoría difusa 41

2.6 Consistencia 44

3 Modelos de computación con palabras en toma de decisiones 51
3.1 La metodología de la computación con palabras 52
3.2 Computación con palabras en toma de decisiones 56
3.3 Modelos semánticos de computación con palabras 59
3.3.1 Modelos basados en funciones de pertenencia 60
3.3.2 Modelos basados en conjuntos difusos de tipo 2 61
3.4 Modelos de computación con palabras basados en escalas cualitativas 62
3.4.1 Modelos basados en escalas cualitativas ordinales 63
3.4.2 Modelos basados en funciones de escalas lingüísticas . . . 71
3.4.3 Modelo de semántica individual personalizada 75
3.5 Modelos de computación con palabras basados en expresiones lingüísticas complejas 76

4 Un modelo de toma de decisiones en grupo en un contexto multicriterio, heterogéneo y lingüístico 79
4.1 Planteamiento inicial y obtención de preferencias 83
4.2 Granulación de la información lingüística 84
4.2.1 Criterio de optimización 85
4.2.2 Proceso de optimización 86
4.3 Proceso de selección 96
4.3.1 Etapa de agregación 96
4.3.2 Etapa de explotación 98
4.4 Estudio experimental 100
4.4.1 Obtención de preferencias 102
4.4.2 Granulación de la información lingüística 104
4.4.3 Proceso de selección 107
4.5 Discusión 111
4.5.1 Distribución uniforme de los intervalos 111
4.5.2 Rendimiento del modelo para distintos valores de γ 111
4.5.3 Proceso de consenso 113
4.5.4 Modelos de computación con palabras 114

5 Conclusiones y líneas de investigación futuras 117
5.1 Conclusiones 117
5.2 Líneas de investigación futuras 120

Publicaciones 123

Bibliografía 125

Índice de figuras

2.1 Problema de decisión de adquirir un automóvil 11
2.2 Problema de decisión de elegir un alimento 12
2.3 Problema de decisión de votar en unas elecciones 12
2.4 Esquema de un proceso de toma de decisiones en grupo 20
2.5 Procesos de consenso y de selección 21
2.6 Etapas de agregación y explotación del proceso de selección . . . 28

3.1 Ejemplo de granulación de un ordenador 52
3.2 Ejemplo de la variable lingüística «altura» 55
3.3 Computador perceptivo para evaluaciones subjetivas 55
3.4 Etapas para resolver un problema de decisión 57
3.5 Esquema de evaluación en una revista 58
3.6 Proceso de retraslación 61
3.7 Ejemplo de 2-tupla lingüística 66
3.8 Ejemplo del modelo basado en términos lingüísticos virtuales . . . 67

4.1 Partícula asociada a un vector de puntos de corte 90
4.2 Valores de la función de aptitud devueltos por el algoritmo de optimización por enjambre de partículas 106
4.3 O_1 para distintos valores de γ 112
4.4 O_2 para distintos valores de γ 113

Índice de tablas

2.1 Proceso de toma de decisiones con un único criterio 16
2.2 Proceso de toma de decisiones multicriterio 16
2.3 Proceso de toma de decisiones con un único individuo 17
2.4 Proceso de toma de decisiones en grupo 18

≪La vida es como andar en bicicleta.

Para mantener el equilibrio debes estar

en movimiento≫

Albert Einstein

CAPÍTULO

1

Introducción

1.1 Planteamiento

Las personas y los animales poseen cierta capacidad de decisión que condiciona su comportamiento a la hora de enfrentarse a diversas situaciones. Sin embargo, la principal característica que diferencia a las personas con respecto a los animales es la complejidad con la que desarrollamos la toma de decisiones [13], la cual podemos definir como el proceso cognitivo basado en escoger la alternativa que consideramos más adecuada de entre una colección posible de estas.

En la vida diaria nos enfrentamos asiduamente a procesos de toma de decisiones. Por ejemplo, elegir el restaurante o supermercado en el que comprar la comida para el almuerzo, elegir el tipo de comida a consumir en el almuerzo o elegir el tipo de camisa que nos pondremos para una ocasión particular. No obstante, en muchos de los procesos de toma de decisiones la decisión la adopta un grupo de personas, y no solo una de ellas. Imaginemos, por ejemplo, un grupo de amigos que deben decidir qué película ver de entre las disponibles en una sala de cine determinada. Este tipo de proceso de decisión, en el que un conjunto de personas deben elegir la mejor alternativa, se denomina toma de decisiones en grupo [30, 63, 122].

Las investigaciones realizadas en psicología social sobre el rendimiento grupal sugieren, por una parte, que el grupo tiende a ser más eficaz que la agregación directa de las elecciones de los integrantes individuales del grupo y, por otra parte, que el grupo toma mejores decisiones que el individuo más capacitado de este [242]. Sin embargo, el hecho de que múltiples individuos estén involucrados en la elección de la mejor alternativa implica consideraciones adicionales que hay que tener en cuenta antes de elegir la alternativa adecuada. Por ejemplo, el nivel de acuerdo alcanzado entre los integrantes del grupo antes de tomar la decisión. Así, cuando las decisiones las adoptan un grupo de individuos se recomienda que efectúen un proceso de consenso [16, 180], donde todos los integrantes del grupo razonan y argumentan sus motivos para adoptar tal decisión a fin de lograr un acuerdo suficientemente aceptable, en la medida de lo posible, para todos. En esencia, el consenso tiene por objeto obtener el consentimiento, no necesariamente el acuerdo, de los encargados de adoptar las decisiones, dando cabida a las opiniones de todas las partes interesadas para lograr la mejor decisión. Esta decisión será beneficiosa para todo el grupo y no solo para individuos particulares, los cuales pueden dar su consentimiento a algo que no fue su primera elección debido a que, por ejemplo, desean cooperar con el grupo. Este consentimiento, sin embargo, no significa que cada uno de los responsables involucrados en la toma de decisiones esté totalmente conforme con la decisión adoptada [16]. En resumen, el hecho de llegar a un acuerdo no significa que todos los integrantes del grupo estén completamente de acuerdo, algo bastante difícil cuando los grupos están formados por personas inteligentes y creativas.

Los procesos de toma de decisiones en grupo suelen estar compuestos por dos procesos bien diferenciados: el proceso de consenso [90] (también conocido como consenso topológico) y el proceso de selección [18] (también conocido como consenso algebraico). Ambos procesos se suceden de forma secuencial para obtener la alternativa solución. El proceso de consenso, en el que los individuos del grupo argumentan y razonan sus opiniones con el objetivo de alcanzar el máximo nivel de acuerdo, se lleva a cabo en primer lugar. En todo momento, se obtiene el grado de acuerdo existente, de forma que si este es satisfactorio, se da por finalizado el proceso de consenso para, en segundo lugar, dar inicio al proceso de selección, cuyo objetivo es la obtención de la mejor alternativa considerando las opiniones que han proporcionado los individuos del grupo. En caso contrario, se insta a los individuos a que discutan de nuevo y modifiquen sus opiniones con el fin de acercar posturas. Así, podemos definir la toma de decisiones en grupo como el procedimiento iterativo y dinámico donde un grupo de individuos van modificando sus opiniones iniciales hasta que sus posturas sobre la mejor decisión son lo suficientemente próximas. Cuando esto ocurre, se efectúa el proceso de selección para saber cuál es la solución de consenso.

Para representar adecuadamente un proceso de toma de decisiones en grupo debemos tener en cuenta diferentes aspectos. Entre ellos, podemos destacar los siguientes:

- La estructura de representación utilizada para modelar las opiniones de los individuos que participan en el proceso de toma de decisiones. Millet analizó diferentes estructuras de representación de preferencias y llegó a la conclusión de que las estructuras basadas en comparación entre pares de alternativas, como las relaciones de preferencia, son las más precisas [145]. Así, otras estructuras de representación no basadas en comparación entre pares, como los órdenes de preferencia y la selección de un subconjunto de alternativas, permiten modelar menor cantidad de información y con menos granularidad. Sin embargo, su simplicidad implica que los individuos que no estén familiarizados con su uso aprendan a utilizarlas de forma efectiva. Vemos por tanto, que el proceso de decisión se ve afectado en gran medida por la estructura de representación utilizada.

- La consistencia de los individuos que participan en el proceso de toma de decisiones. Que los distintos individuos que participan en el problema tengan opiniones diversas es recomendable, incluso cuando estas sean opuestas. Esto lleva a estudiar en profundidad el problema y a la discusión entre los individuos. Sin embargo, la contradicción entre las opiniones propias de un mismo individuo [37], algo que suele ocurrir cuando se utilizan estructuras de representación basadas en comparación entre pares de alternativas [117], no están bien vistas, ya que pueden dar lugar a decisiones poco fiables. En general, los individuos que expresan opiniones inconsistentes entre sí no suelen tener buena consideración por el resto del grupo y, por tanto, es un aspecto que debe considerarse cuando se representa un problema de toma de decisiones en grupo.

- El dominio de representación utilizado para representar las opiniones de los individuos que intervienen en el proceso de toma de decisiones. Al principio, se utilizaban valores numéricos para representar las opiniones de los individuos, pero, como este tipo de proceso de decisión se centra en seres humanos, los cuales presentan una inherente subjetividad, imprecisión y vaguedad a la hora de expresar sus opiniones, la teoría de conjuntos difusos ha permitido desarrollar nuevos modelos que permiten representar mejor las opiniones de los individuos [246]. Como la información expresada por los seres humanos es inherentemente no numérica, las evaluaciones, juicios, preferencias, opiniones, etc., suelen expresarse lingüísticamente. El empleo del lenguaje natural es una forma más adecuada, realista y flexible de representar las opiniones de los individuos. No obstante, su uso ha implicado el desarrollo de modelos lingüísticos basados en computación con palabras [74, 119, 120, 263].

- Criterios analizados para evaluar las posibles alternativas en un proceso de toma de decisiones. Muchos de los modelos de toma de decisiones en grupo asumen que los individuos evalúan las alternativas en su conjunto. Sin embargo, es más realista y ofrece más información evaluar las alternativas según diferentes criterios. Pensemos, por ejemplo, que una determinada marca de coche puede ser la mejor respecto al precio, pero no así respecto a la seguridad. En tal caso, estaríamos enfrentándonos a un proceso de toma de decisiones en grupo multicriterio [28, 63, 147, 151].

- Heterogeneidad en los procesos de toma de decisiones en grupo. Existen diferentes contextos en los procesos de toma de decisiones en grupo que podemos clasificar como heterogéneos. Un primer contexto heterogéneo aparece cuando, en el mismo proceso de toma de decisiones en grupo, distintos individuos utilizan diferentes estructuras de representación para expresar sus opiniones [92, 166]. Un segundo contexto heterogéneo aparece cuando, en el mismo proceso de toma de decisiones en grupo, distintos individuos emplean diferentes dominios de representación para expresar sus opiniones

[167, 189]. Un tercer contexto heterogéneo aparece cuando, en el mismo proceso de toma de decisiones en grupo, los individuos tienen diferentes niveles de conocimiento sobre el problema, de forma que se les asignan diferentes niveles de importancia [19, 114] (lo mismo puede suceder con los criterios en el caso de estar ante un proceso de toma de decisiones multicriterio, es decir, habrá unos criterios cuya importancia será mayor a la hora de evaluar las alternativas).

El estudio y análisis de los anteriores aspectos se torna esencial en el momento de desarrollar modelos de toma de decisiones en grupo. Por un lado, asumiendo que los individuos emplean habitualmente el lenguaje natural para expresar sus opiniones, la mayoría de los modelos de toma de decisiones en grupo utilizan modelos lingüísticos basados en computación con palabras para representar las opiniones de los individuos [74, 133, 263], por ejemplo, el modelo basado en funciones de pertenencia [248, 249, 250], el modelo basado en escalas cualitativas ordinales [76, 77], el modelo basado en 2-tuplas [85, 131], o el modelo basado en números difusos discretos [134], por citar algunos. Recientemente, han surgido nuevos modelos lingüísticos basados en la granulación de la información para trabajar con información lingüística [19, 22, 163]. La granulación de la información es un concepto clave dentro del paradigma de la computación granular [185, 252], definiéndose como el proceso de convertir ciertas entidades en gránulos de información [185, 261]. A diferencia de en los modelos anteriores, en los que tanto la semántica como la distribución de los términos lingüísticos se establecen *a priori*, en los modelos basados en computación granular la distribución y la semántica de los términos lingüísticos se obtienen a través de un proceso de optimización en el que se maximiza (o minimiza) un cierto criterio de optimización (por ejemplo, el nivel de consistencia o el nivel de consenso). Sin embargo, en los modelos propuestos en [19, 22, 163], los individuos que participan en la toma de decisiones proporcionan comparaciones entre pares de alternativas para evaluar la preferencia de una alternativa sobre otra en su totalidad. Pero, como hemos mencionado, es más realista evaluar la preferencia de una alternativa sobre otra según diferentes criterios. Además, los modelos de toma de decisiones en grupo multicriterio no solo deberían tener en cuenta que los individuos y los criterios puedan tener diferentes niveles de importancia, sino que las opiniones de un individuo concreto puedan tener diferente nivel de importancia en cada criterio particular. Pensemos, por ejemplo, que queremos evaluar una biblioteca teniendo en cuenta los servicios que ofrece [20]. Está claro que la opinión de un profesor debe ser más importante cuando evalúa el catálogo de revistas digitales de investigación que ofrece la biblioteca que cuando evalúa el espacio comunitario para el estudio y aprendizaje en grupo. Esto debe ser así ya que un profesor suele utilizar bastante las revistas digitales que ofrece la biblioteca para sus investigaciones, mientras que es infrecuente que utilice los espacios comunitarios que proporciona la biblioteca, algo que, sin embargo, los estudiantes sí que suelen utilizar y que, por tanto, deben tener más importancia a la hora de evaluar ese criterio.

Nuestra hipótesis de partida es que es posible mejorar, por un lado, los actuales modelos lingüísticos basados en computación granular al tener en cuenta tanto diferentes criterios en el proceso de granulación de la información como diferentes niveles de importancia en las opiniones de un mismo individuo para distintos criterios, y, por otro lado, los modelos de decisión multicriterio al utilizar el modelo lingüístico basado en computación granular y tener en cuenta también diferentes niveles de importancia en las opiniones de un mismo individuo para distintos criterios a la hora de obtener la decisión final. Esto dará lugar a modelos más consistentes, realistas y coherentes con los entornos reales de decisión.

1.2 Objetivos

El objetivo general de esta memoria es el desarrollo de un nuevo modelo de toma de decisiones en grupo en contextos multicriterio, lingüísticos y heterogéneos. Este objetivo general se logrará mediante la consecución de los siguientes objetivos específicos:

- Desarrollar un nuevo proceso de granulación de la información que tenga en cuenta que se utilizan distintos criterios para evaluar las alternativas, que estas tienen distintos niveles de importancia y que las opiniones de los individuos tienen diferentes niveles de importancia para distintos criterios. Este proceso de granulación utilizará la consistencia y el consenso como criterios de optimización a la hora de formar los gránulos de información.

- Desarrollar un nuevo método para calcular el consenso entre los individuos que participan en un problema de toma de decisiones en grupo multicriterio. Este método tendrá que considerar que los criterios tienen distintos niveles de importancia y que las opiniones de los individuos tienen diferentes niveles de importancia en distintos criterios.

- Desarrollar un nuevo método de selección de alternativas para problemas de toma de decisiones en grupo multicriterio en los que se utiliza el modelo lingüístico basado en computación granular desarrollado anteriormente. Este nuevo método de selección de alternativas tendrá que tener en cuenta también que los criterios tienen diferentes niveles de importancia y que las opiniones de los individuos tienen diferentes niveles de importancia en distintos criterios.

1.3 Estructura de la memoria

Esta memoria se estructura en cinco capítulos con el fin de alcanzar los objetivos planteados. A continuación, describimos brevemente cada uno de ellos:

- En el capítulo 1, hemos planteado el problema que queremos estudiar y resolver, nuestra hipótesis de partida y los objetivos que perseguimos con el desarrollo de esta memoria.

- En el capítulo 2, introducimos los procesos de toma de decisiones y sus características, destinando un especial interés al esquema general de los procesos de toma de decisiones en grupo. Además, se presentan en mayor profundidad los diferentes aspectos que se tienen en cuenta a la hora de trabajar con estos procesos de decisión, así como distintos métodos y herramientas que se han desarrollado para abordarlos.

- En el capítulo 3, exponemos las principales etapas para modelar un proceso de toma de decisiones en grupo en contextos lingüísticos. Además, describimos los principales modelos lingüísticos que se han desarrollado para la computación con palabras en el área de la toma de decisiones.

- En el capítulo 4, describimos en detalle el nuevo modelo de toma de decisiones en grupo en contextos multicriterio, lingüísticos y heterogéneos que hemos desarrollado. Además, se ilustra su funcionamiento en un estudio experimental y se discuten y analizan sus posibles ventajas y limitaciones.
- En el capítulo 5, indicamos los principales resultados y las conclusiones más importantes obtenidas a partir de la investigación llevada a cabo a lo largo de toda esta memoria. Además, esbozamos algunas líneas de investigación futuras.

Esta memoria finaliza con las publicaciones derivadas de la investigación desarrollada y con una colección bibliográfica de los artículos, libros, capítulos de libro, publicaciones en congresos, etc., más importantes en el área de investigación que hemos estudiado.

```
#include <stdio.h>
int main()
{
   printf("Hello, world!!!");
   return 0;
}
```

Dennis Ritchie

CAPÍTULO

2

El proceso de toma de decisiones en grupo

Un proceso bastante usual que podemos encontrar en prácticamente la totalidad de las actividades realizadas por los humanos es la toma de decisiones. Este proceso se fundamenta en escoger la mejor alternativa de entre una colección posible de ellas para realizar una actividad o resolver un problema. Por tanto, analizar los procesos de toma de decisiones y las características asociados a estos es fundamental para solucionar esta clase de problemas de decisión.

Este capítulo tiene por objetivo que el lector se introduzca tanto en los procesos de toma de decisiones en grupo, aquellos en los que intervienen dos o más individuos y cuyo fin es obtener una solución conjunta, como en los aspectos que se deben considerar para modelar correctamente este tipo de problemas de decisión. Para ello, comenzamos introduciendo el significado de la toma de decisiones así como algunos ejemplos para ilustrarlo en la sección 2.1. A continuación, en la sección 2.2, recordamos distintas características asociadas a los procesos de toma de decisiones. En la sección 2.3, describimos el esquema general de los procesos de toma de decisiones en grupo. Finalmente, revisamos distintos aspectos que se deben valorar cuando se modelan este tipo de procesos como, por ejemplo, el dominio y la estructura de representación de las preferencias (sección 2.4), el concepto de mayoría y los cuantificadores lingüísticos (sección 2.5) y el concepto de consistencia relacionado con las preferencias de los individuos (sección 2.6).

2.1 El proceso de toma de decisiones

En la naturaleza del ser humano está el tomar decisiones constantemente. Cotidianamente nos encontramos inmersos en situaciones en donde debemos seleccionar una ruta de acción o una alternativa en función del escenario particular en el que estemos [63, 195]. Por ejemplo, decidir qué ruta de buses seleccionar para alcanzar un destino o qué comer en la cena con la familia. Por tanto, es lógico que el estudio de procesos de toma de decisiones sea importante en campos de investigación como la ingeniería, la economía y la inteligencia artificial, por mencionar alguno de ellos, y no solamente en teoría de la decisión.

Cada vez que se nos plantea un proceso de toma de decisiones a este le acompañan múltiples alternativas o cursos de acción, los cuales presentan un conjunto de consecuencias que hacen que dudemos de su capacidad o idoneidad. En consecuencia, un proceso clásico de toma de decisiones está compuesto por [32]:

- Uno o varios objetivos que deben ser resueltos.
- Una serie de posibles decisiones o alternativas para lograr tales objetivos.
- Una serie de estados de la naturaleza o factores que establecen el entorno donde el problema de decisión es desarrollado.
- Una serie de consecuencias o valores de utilidad que se asocian al par formado por cada uno de los estados de la naturaleza y cada una de las alternativas.

Se observa de esta forma que los procesos de toma de decisiones necesitan de un estudio del problema al que nos enfrentamos así como de las distintas alternativas. De acuerdo con Keeney y Raiffa [108], la finalidad de la toma de decisiones es ayudar a los individuos a llevar a cabo de forma racional decisiones complejas y difíciles. Esto conlleva la necesidad de desarrollar modelos y métodos que representen exactamente cada problema y permitan analizar con criterios objetivos las distintas alternativas. La cuestión es, no obstante, que los procesos de toma de decisiones no se solucionan siempre mediante un proceso totalmente racional. Estos procesos están influenciados por factores subjetivos y externos que hacen que la solución varíe si las condiciones en las que se desarrolla el problema se ven modificadas. Vamos ahora a mostrar distintos ejemplos de procesos de toma de decisiones reales cuyo desarrollo puede estar afectado por diversos factores tanto subjetivos como externos:

- Adquisición de un automóvil (Figura 2.1). A la hora de comprar un automóvil tenemos que elegir entre un conjunto de estos cuyas características suelen ser similares. A la hora de tomar la decisión sobre qué automóvil adquirir existen factores externos que nos pueden influir sobre qué automóvil adquirir. Por ejemplo, la ayuda ofrecida por el vendedor o la existencia de alguna oferta son factores clave que pueden determinar qué automóviles se venden bien. Este es también un claro ejemplo donde hay que lidiar con la incertidumbre, ya que es lógico que el cliente no tenga toda la información suficiente sobre las características particulares de cada automóvil.

Figura 2.1. Problema de decisión de adquirir un automóvil.

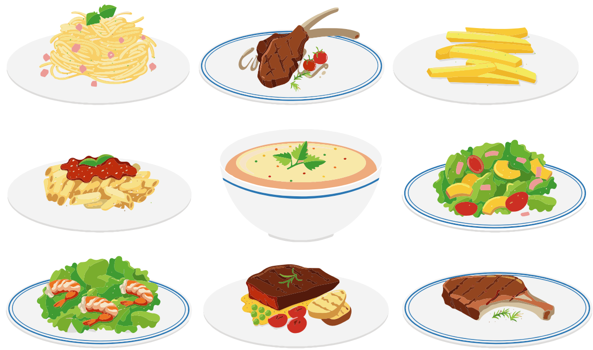

Figura 2.2. Problema de decisión de elegir un alimento.

- Alimento para el almuerzo (Figura 2.2). Satisfacer una necesidad fisiológica como el comer es algo muy habitual en la vida diaria. La selección del alimento a ingerir no siempre depende de factores racionales (propiedades nutritivas del alimento, necesidades alimenticias del individuo, etc.) sino que factores subjetivos y externos como, por ejemplo, los gustos personales, el aspecto del alimento, etc., pueden influenciar la decisión que se adopte.

- Votación en las elecciones (Figura 2.3). En este caso, se debe elegir a quién votar entre distintos candidatos. Este es también un claro ejemplo en el que factores muy subjetivos (afinidad con el candidato, presencia, seguridad en su discurso) influencian seriamente a quién damos nuestro voto.

Figura 2.3. Problema de decisión de votar en unas elecciones.

El problema es que los procesos de toma de decisiones en ambientes reales (como estos que hemos mostrado) no son iguales a los procesos de toma de decisiones básicos. Es decir, los entornos reales presentan alternativas, restricciones y objetivos imprecisos. Por tanto, se necesita dotar a los procesos de decisión clásicos de herramientas que permitan modelar y trabajar correctamente con esta incertidumbre. Con este fin, el profesor Lotfi Asker Zadeh presentó en el año 1965 la teoría de conjuntos difusos [246], la cual posibilita modelar y tratar de forma práctica y eficiente la incertidumbre asociada al conocimiento humano. Bellman y Zadeh fueron los primeros que propusieron en 1970 su aplicación para modelar la incertidumbre asociada a la información que se maneja en un proceso de toma de decisiones [9]. Desde entonces ha sido muy empleada debido a su capacidad para establecer un entorno de trabajo flexible que permite modelar la imprecisión tanto cuantitativa como cualitativa asociada a los juicios humanos. Esto ha permitido solventar de forma satisfactoria los problemas asociados a la falta (pérdida) de información.

2.2 Características de los procesos de toma de decisiones

La teoría de la decisión, debido a la diversidad de entornos o contextos de decisión que podrían acontecer en la vida real, define un conjunto de características que posibilitan catalogar los procesos de decisión según distintas perspectivas como, por ejemplo, el ambiente de decisión o el número de individuos que participan. En las siguientes subsecciones revisamos las características definidas por cada una de estas perspectivas.

2.2.1 El ambiente de decisión

El contexto y las características en las que se desarrolla la toma de decisiones definen el ambiente de decisión. Según la teoría clásica de decisión, se distinguen los siguientes [55, 171]:

- Ambiente de certidumbre. Si conocemos con precisión todos los factores y elementos que tienen influencia en un determinado problema, este está definido en un ambiente de certidumbre. Esto permite que, a cada una de las alternativas que hay en el problema, se les pueda asignar un valor preciso de utilidad. Como ejemplo de toma de decisiones en este tipo de ambiente pensemos en la inversión de una cierta cantidad de dinero en un producto financiero del mercado que asegure la inversión realizada. Si conocemos de forma exacta y precisa la rentabilidad asociada a cada producto, su duración y gastos de gestión, tenemos que determinar en qué producto invertir para maximizar nuestra inversión. Dado que los elementos a considerar para tomar la decisión se conocen con exactitud, el problema consiste en estructurar de forma correcta toda la información disponible y determinar el valor de utilidad de las alternativas para seleccionar la que maximice la inversión.

- Ambiente de riesgo. Si está sujeto a las leyes del azar alguno de los factores o elementos que influyen en el problema, este se define en un ambiente de riesgo. Por tanto, debemos recurrir a la teoría de la probabilidad para modelar estos problemas [112]. Como ejemplo de toma de decisiones en este tipo de ambiente pensemos en la inversión en un depósito asociado a resultados deportivos. En seguida aparecen vacilaciones asociadas a los resultados de los equipos. Ahora necesitamos un enfoque diferente para abordar el problema. Por ejemplo, podemos usar una distribución de probabilidad que represente la posible bajada o subida (según los resultados) que tendría un efecto en los valores de utilidad asociados a las diferentes alternativas donde realizar la inversión.

- Ambiente de incertidumbre. Si la información asociada a las alternativas es imprecisa, vaga o incompleta, el problema se define en un ambiente de incertidumbre. Esto conlleva a que los valores de utilidad asociados a las distintas alternativas sean valorados de forma aproximada. La incertidumbre aparece, en este caso, como consecuencia de intentar modelar la imprecisión asociada al pensamiento humano e inherente a los fenómenos cuya naturaleza los hace inciertos. Como ejemplo de toma de decisiones en este tipo de ambiente pensemos en la inversión en bolsa. Ahora, un experto, en base a sus apreciaciones subjetivas, debe valorar fenómenos asociados a la bajada o subida de la cotización en la que se realiza la inversión.

Como ya hemos mencionado en esta memoria, los modelos clásicos de decisión no se adaptan bien al modelado de situaciones donde la incertidumbre tiene su origen en el manejo de información imprecisa. En este caso, los modelos de decisión que tienen su base en la teoría de conjuntos difusos [246], así como en sus extensiones [5, 53, 138, 158, 194], ofrecen mejores resultados.

2.2.2 El número de criterios

Una forma de clasificar los procesos de toma de decisiones es atendiendo al número de criterios (atributos) considerados para obtener el valor de utilidad de las alternativas [47, 63, 147, 195]. De esta forma podemos clasificar los procesos de toma de decisiones en:

- Procesos con un único atributo o criterio. En este caso, cada alternativa se evalúa en su conjunto, con un único valor. La solución será aquella alternativa que obtiene una valoración más alta para resolver el problema de decisión. Como ejemplo de problema de decisión con un único criterio vamos a suponer que un futbolista quiere cambiar de equipo y se le plantean tres posibles equipos a los que poder ir, cada uno ofreciéndole un sueldo distinto (este sería el único atributo). Si solo se tiene en cuenta el sueldo, es muy fácil seleccionar el mejor equipo. En este caso sería aquel que ofrece un sueldo mayor.

  En los procesos de toma de decisiones con un único criterio (atributo) cada alternativa tiene asociado un único valor. Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ la colección de alternativas presentes en el problema de decisión. La Tabla 2.1 muestra una posible representación de la información en este tipo de problemas. Cada entrada u_j representa el valor (preferencia) asociado a la alternativa a_j para el único criterio c.

- Procesos multiatributo o multicriterio. En este caso, cada alternativa se evalúa según dos o más criterios, cada uno con su propio valor. La solución será aquella alternativa que obtiene una valoración más alta, considerando todos los criterios, para resolver el problema de decisión. Como ejemplo de problema de decisión multicriterio vamos a suponer que un futbolista quiere cambiar

Alternativas (a_j)	Criterio (c)
a_1	u_1
a_2	u_2
$\ldots$	$\ldots$
a_n	u_n

Tabla 2.1. Proceso de toma de decisiones con un único criterio.

de equipo y se le plantean tres posibles equipos a los que poder ir, pero, en este caso, cada equipo se caracteriza por tres criterios: posición en el último campeonato, posibilidad de jugar como titular y sueldo. En este caso nos enfrentamos a un problema en el que se deben tener en cuenta varios criterios para tomar la decisión. Por tanto, estamos antes un problema de toma de decisiones multicriterio.

Este tipo de procesos es más difícil de modelar que aquellos en los que solo se analiza un único criterio para conseguir la solución. Ahora, cada criterio tiene la capacidad de dar lugar a una clasificación distinta sobre la colección de alternativas. A partir de estas clasificaciones, tendríamos que determinar algún mecanismo para obtener una clasificación global [215, 238, 239].

En los procesos de toma de decisiones multicriterio (multiatributo) se asume que el número de criterios (atributos) es finito. Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ la colección de alternativas y $C = \{c^1, c^2, \ldots, c^q\}$ el conjunto de criterios asociados al problema de decisión. La Tabla 2.2 muestra una posible representación de la información en esta clase de procesos. Cada entrada u_j^k representa el valor (preferencia) asociado a la alternativa a_j para el criterio c^k.

Alternativas (a_j)	Criterios (c^k)			
	c^1	c^2	$\ldots$	c^q
a_1	u_1^1	u_1^2	$\ldots$	u_1^q
a_2	u_2^1	u_2^2	$\ldots$	u_2^q
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
a_n	u_n^1	u_n^2	$\ldots$	u_n^q

Tabla 2.2. Proceso de toma de decisiones multicriterio.

2.2.3 El número de individuos

El número de individuos que participan en el proceso de toma de decisiones es otro de los aspectos para catalogar esta clase de procesos. Aunque los procesos de toma de decisiones que involucran a varios individuos son más complejos que aquellos que se llevan a cabo individualmente, el hecho de que se tome la decisión de acuerdo con las opiniones de diferentes individuos, los cuales seguramente tendrán distintos puntos de vista, puede dar lugar a una mejor decisión [65, 90, 180].

Dependiendo del número de individuos involucrados, podemos clasificar a esta clase de procesos en dos tipos diferentes:

- Individuales o unipersonales. En este caso, un único individuo es el encargado de tomar la decisión. Es decir, él o ella se encarga de valorar todas las alternativas. Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ la colección de alternativas evaluadas por el individuo dm (abreviatura de *decision maker*, que es como se suele denominar en inglés). La Tabla 2.3 muestra una posible representación de la información en este tipo de problemas. Cada entrada u_j representa el valor (preferencia) proporcionado por el individuo dm sobre la alternativa a_j.

- En grupo o multipersona. En este caso, las decisiones las asumen un grupo de individuos que tratan de lograr una solución de consenso al problema. El número de individuos se asume que es finito. Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ la colección de alternativas y $DM = \{dm^1, dm^2, \ldots, dm^m\}$ el grupo de individuos que evalúan las alternativas presentes en el problema. La Tabla 2.4 muestra una posible representación de la información en este tipo de problemas. Cada entrada u_j^h representa el valor (preferencia) proporcionado por el individuo dm^h para la alternativa a_j.

Alternativas (a_j)	Individuo (dm)
a_1	u_1
a_2	u_2
$\ldots$	$\ldots$
a_n	u_n

Tabla 2.3. **Proceso de toma de decisiones con un único individuo.**

Alternativas (a_j)	Individuos (dm^h)			
	dm^1	dm^2	$\dots$	dm^m
a_1	u_1^1	u_1^2	$\dots$	u_1^m
a_2	u_2^1	u_2^2	$\dots$	u_2^m
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_n	u_n^1	u_n^2	$\dots$	u_n^m

Tabla 2.4. **Proceso de toma de decisiones en grupo.**

Entre los procesos de toma de decisiones multicriterio y en grupo existe cierta similitud. En ambas clases de problemas de decisión existen diversas clasificaciones de las alternativas y se necesita integrarlas en una única clasificación global. La diferencia está en que en los primeros, las clasificaciones definen la importancia de cada alternativa en relación a cada criterio, mientras que en los segundos, las clasificaciones definen la importancia de las alternativas de acuerdo con cada individuo.

2.2.4 Importancia asociada a los criterios y a las preferencias de los individuos

Otro de los aspectos que permiten clasificar los procesos de toma de decisiones es la importancia asociada a cada individuo y a cada criterio [19, 66, 118]:

- Homogéneos. Se considera que las opiniones de los individuos tienen la misma importancia, así como que todos los criterios tienen la misma importancia a la hora de evaluar la alternativa.

- Heterogéneos. Se considera que las opiniones de los individuos tienen distinta importancia, que los criterios tienen distinta importancia a la hora de evaluar la alternativa, o que tanto las opiniones de los individuos como los criterios tienen distinta importancia.

Una forma de modelar este aspecto es asociar un peso a cada individuo y a cada criterio. Estos pesos se interpretan como la importancia del individuo dentro del grupo o su relevancia en relación al conocimiento que tiene sobre el problema de decisión [19, 49], y como la importancia del criterio a la hora de determinar la valoración global de la alternativa [66, 118]. Estos pesos pueden asignarse de distintas formas [34]: alguien externo al grupo los puede asignar directamente o se pueden calcular de forma automática en base a las preferencias proporcionadas por los individuos (por ilustrar esto con un ejemplo, aquellos que expresen preferencias más consistentes obtendrían un peso mayor que aquellos que expresen preferencias ilógicas). Estos pesos pueden interpretarse como un subconjunto difuso, F, con una función de pertenencia, $\mu_F : DM \rightarrow [0,1]$, de tal forma que $\mu_F(dm^h) \in [0,1]$ representa el grado de importancia o relevancia de las preferencias proporcionadas por el individuo dm^h en relación a un determinado proceso de decisión [49, 84].

2.3 Esquema de los procesos de toma de decisiones en grupo

Un proceso de toma de decisiones en grupo es aquel en el que participan múltiples individuos, los cuales actúan colectivamente. Para ello, analizan situaciones o problemas, tienen en cuenta y evalúan distintos cursos de acción y eligen entre las diversas alternativas una o varias soluciones.

La composición y naturaleza de los grupos (propósito, estructura, composición demográfica, tamaño, etc.) así como la experiencia y conocimiento de cada uno de los individuos afectará hasta cierto punto al proceso de toma de decisiones. Además, las contingencias externas a las que puedan enfrentarse los individuos del grupo (presión del tiempo, objetivos en conflicto, etc.) influyen también en el desarrollo y eficacia de los grupos en la toma de decisiones. No obstante, como se comentó en la introducción, las investigaciones realizadas en psicología social sobre el rendimiento grupal sugieren, por una parte, que el grupo tiende a ser más eficaz que la agregación directa de las elecciones de los integrantes individuales del grupo y, por otra parte, que el grupo toma mejores decisiones que el individuo más capacitado de este [242]. Debido a esto, el estudio de procesos de toma de decisiones en grupo es de especial interés dentro del campo de investigación de la teoría de la decisión [25, 106, 188, 190, 192, 214, 243].

Formalmente, un proceso de toma de decisiones en grupo se define como aquel en el que un grupo de individuos (jueces, expertos, tomadores de decisión, etc.)

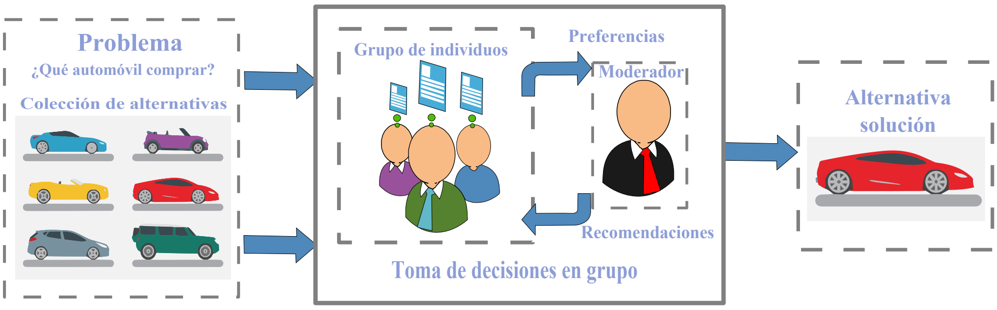

Figura 2.4. Esquema de un proceso de toma de decisiones en grupo.

$DM = \{dm^1, dm^2, \ldots, dm^m\}$ $(m \geq 2)$ exteriorizan sus pensamientos, valoraciones, preferencias, opiniones, etc., sobre una colección de alternativas (opciones, cursos de acción, etc.) $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ $(n \geq 2)$ con el objetivo de seleccionar aquella o aquellas como mejor solución al problema de decisión planteado [30, 43]. La idea es que la alternativa escogida sea la más aceptada por parte del grupo de individuos. Como parte de este proceso, existe la figura del moderador [82, 107], que es aquel individuo que dirige el proceso pero que no participa en la discusión ni en la toma de decisiones. Simplemente se encarga proporcionar en cierto modo ayuda a los individuos para que estos acerquen sus posiciones, logrando así un cierto acuerdo sobre la alternativa que se escogerá como solución del problema (Figura 2.4).

Los procesos de toma de decisiones en grupo suelen dividirse a su vez en dos procesos [18, 26, 63, 89, 90, 91, 142]: el proceso de consenso, al que también se le conoce en la literatura como consenso topológico, y el proceso de selección, que también recibe en la literatura el nombre de consenso algebraico. Ambos procesos se ejecutan secuencialmente para obtener la alternativa solución. El proceso de consenso, en el que los individuos del grupo argumentan y razonan sus opiniones con el objetivo de alcanzar el máximo nivel de acuerdo, se lleva a cabo en primer lugar. Este proceso suele coordinarlo un moderador, cuyo objetivo es dirigir la negociación y ayudar a los individuos a acercar posturas. En todo momento, se obtiene el grado de acuerdo existente, de forma que si este es satisfactorio, se da por concluido este proceso y se inicia el proceso de selección, cuyo objetivo es averiguar cuál es la alternativa solución considerando para ello las preferencias comunicadas por los individuos del grupo. En caso contrario, se insta a los individuos a que discutan

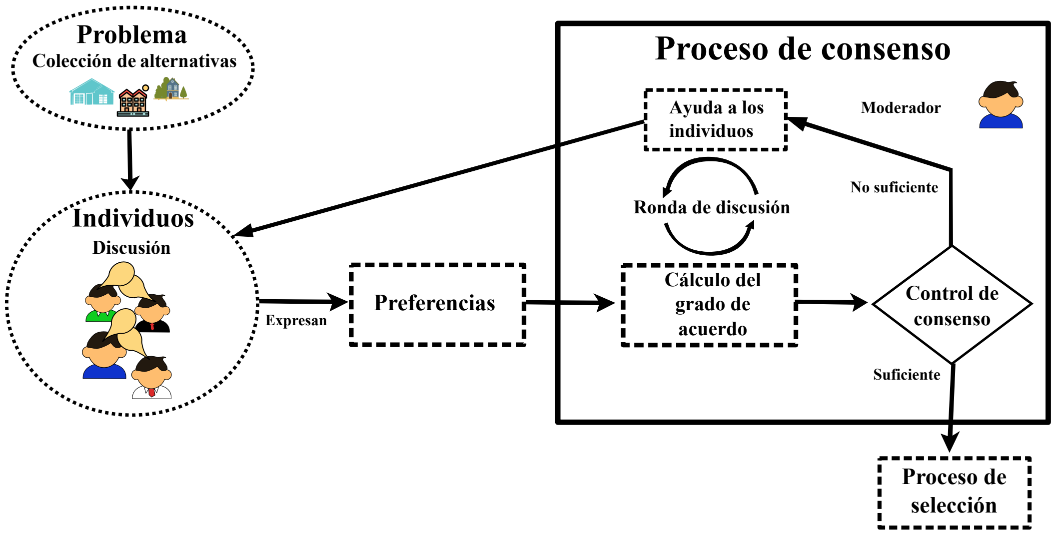

Figura 2.5. Procesos de consenso y de selección.

de nuevo y modifiquen sus opiniones con el fin de acercar posturas. Así, podemos definir la toma de decisiones en grupo como el procedimiento iterativo y dinámico en el cual un grupo de individuos van modificando sus opiniones iniciales hasta que sus posturas sobre la mejor decisión son lo suficientemente próximas. Cuando esto ocurre, se efectúa el proceso de selección para saber cuál es la solución de consenso. La Figura 2.5 representa gráficamente estos procesos.

Dada la importancia de ambos procesos, en las siguientes subsecciones se describen ambos en mayor detalle.

2.3.1 Consenso

La palabra «consenso» se ha empleado durante años, incluso siglos, en distintas áreas y contextos. Este término se refiere usualmente a situaciones en las que hay un conjunto de individuos que expresan sus testimonios, los cuales básicamente se refieren a opiniones sobre alternativas, temas, cursos de acción, etc. Estos individuos pueden ser tanto individuos como tales, grupos pequeños, grupos grandes, e incluso organizaciones, si pueden considerarse uniformes con respecto a las cuestiones examinadas y a los testimonios [16, 90, 180].

Los individuos que trabajan para lograr una sociedad más ecuánime se basan en el consenso para tomar sus decisiones: desde las comunidades locales, las cooperativas, las empresas, los grupos pequeños de voluntarios, a regiones mucho más amplias en diferentes culturas. Dependiendo de distintos factores, como por ejemplo el tamaño del grupo, el proceso puede diferir, pero el principio esencial de cooperación entre los individuos sigue siendo el mismo [70].

El consenso puede tener asociados diferentes significados que dependen del contexto considerado. En primer lugar, podemos relacionar al consenso con el estado de acuerdo entre los individuos de un grupo, en el sentido de que todos exhiben un sentimiento común. Desde este punto de vista y en un sentido estricto, el consenso se ha considerado como un acuerdo total y unánime [11], aunque se ha considerado cuestionable que tal estado sea posible en situaciones del mundo real [103]. En segundo lugar, y relacionado en cierto modo con el significado anterior, el consenso se puede entender como una forma de llegar a un acuerdo. Se trata de una evolución de los testimonios de los individuos del grupo hacia el acuerdo con respecto a estos. Esta evolución puede ser natural o facilitada (moderada) por un individuo especial (moderador) [16, 58]. En tercer lugar, podemos entender el consenso como una forma de tomar decisiones en procesos con muchos individuos. Básicamente, la adopción de decisiones por consenso tiene por objeto obtener el consentimiento, aunque no necesariamente el acuerdo, de los individuos involucrados, dando cabida a los testimonios de las distintas partes interesadas para lograr una decisión que redunde en el beneficio de todo el grupo, y no necesariamente de unos individuos concretos que pueden dar su consentimiento a lo que no era necesariamente su primera opción, sino porque quieren cooperar con el grupo. Sin embargo, el consentimiento total no implica que cada individuo esté plenamente de acuerdo [16]. Por tanto, el consenso se reduce a la cooperación en contraste con la mayoría de las situaciones de toma de decisiones en grupo basadas en votaciones, juegos, etc., las cuales implican competición [170].

Idealmente, el consenso debería hacer referencia a la unanimidad, ya que la alternativa, opción o curso de acción elegido sería más representativo para todo el grupo. Sin embargo, puede ser difícil alcanzar esta unanimidad, en particular en grupos grandes y diversos, como ocurre en el mundo real. Por eso, se han utilizado definiciones de consenso menos estrictas [16, 200]: unanimidad menos uno, es decir, todos los individuos menos uno apoyan la decisión, unanimidad menos dos, es decir, todos menos dos apoyan la decisión, unanimidad menos tres, etc. Además, se pueden emplear algunas medidas como el 80 %, 2/3, etc., e incluso se puede asumir el llamado consenso aproximado que no supone ninguna regla específica, la cual se determinará posteriormente. Observe que todas estas definiciones menos estrictas de consenso siguen siendo claras en su definición y no implican ninguna especificación imprecisa (difusa). Podríamos pensar por tanto en una mayoría difusa ejemplificada por ≪la mayoría≫, ≪casi todos≫, o ≪más de la mitad≫ [100, 101]. De esta forma se podría introducir el concepto de consenso suave como una forma más adecuada de modelar los procesos de toma de decisiones en grupo. Discutiremos en detalle estas especificaciones difusas, en particular los conceptos de mayoría difusa y consenso suave [104], más adelante.

Prácticamente todos los procesos de consenso se desarrollan mediante sucesivas rondas de discusión, es decir, los individuos cambian sus preferencias paso a paso hasta que, posiblemente, se alcanza un consenso [16, 90, 180]. Por supuesto, esto supone que los individuos están comprometidos con esos cambios. En esta unión, uno puede ver claramente dos situaciones. Por un lado, los cambios en las preferencias se producen de una u otra forma y pueden modelarse. Por otro lado, este proceso se modera (facilita) por un individuo especial, conocido como moderador, que dirige las sucesivas rondas de discusión y persuade mediante argumentos racionales a los individuos para que modifiquen sus preferencias, así como de mantener el proceso dentro un período de tiempo razonable [16]. Esta opción de un moderador dirigiendo el proceso de consenso se ha considerado más eficaz y eficiente [90].

Según Saint y Lawson [180], es posible que los individuos que participan en un proceso de toma de decisiones en grupo piensen que sus testimonios se han obviado a la hora de elegir el conjunto solución de alternativas y, por tanto, no se sientan identificados con la solución obtenida. Por tanto, dada la importancia de obtener una solución aceptada por todo el grupo de individuos, el consenso ha alcanzado una gran atención y es prácticamente el objetivo principal de los procesos de toma de decisiones en grupo [42, 45, 90, 156, 165, 257, 224].

Considerando lo que acabamos de exponer, es fácil entender que existen varios problemas relacionados con el proceso de consenso, así como de la esencia misma de su significado:

- En primer lugar, un punto crucial es el significado mismo del consenso. Como se ha mencionado, el consenso se ha definido tradicionalmente como un acuerdo unánime y completo. Diversos investigadores propusieron medidas de consenso asumiendo valores en el intervalo $[0, 1]$, en el que 0 significa ausencia de consenso y 1 consenso total, significando el resto de los valores en $(0, 1)$ diferentes grados de consenso parcial [11]. Sin embargo, esto se consideró poco realista para poder cumplirse en problemas reales y, por tanto, se propusieron definiciones más suaves como por ejemplo «unanimidad menos k» [200]. Aunque estas definiciones cumplieron su propósito, no se consideraron suficientemente adecuadas para reflejar la esencia misma del consenso. Debido a diferencias inherentes, los individuos rara vez llegan a un acuerdo unánime, y aunque así fuera, el proceso de consenso podría requerir demasiado tiempo en problemas reales. Por tanto, se hicieron algunas nuevas consideraciones tanto en la esencia del consenso como en el proceso de alcanzar el consenso. De esta forma, el consenso se puede ver no necesariamente como un acuerdo total y unánime. Podría suceder que los individuos no estén dispuestos a modificar totalmente sus testimonios para que el consenso no sea un acuerdo total, es decir, no podríamos obtener el mismo testimonio para todos, sino un conjunto de testimonios individuales lo suficientemente similares.

- En segundo lugar, nos encontramos con el problema de modelar el proceso de obtención de consenso. Básicamente, nos encontramos con un conjunto de testimonios proporcionados por los individuos, los cuales hacen referencia a las preferencias sobre distintas alternativas. Inicialmente, los testimonios se equipararon a utilidades o resultados de ciertos cursos de acción, probabilidades entre ellos, etc. En general, se asumió que estaban en forma de matriz [36, 64, 72]. Sin embargo, posteriormente, las preferencias se convirtieron en más populares como representación flexible y menos restrictiva [103, 104].

- En tercer lugar, otro de los problemas se relaciona con el manejo de la subjetividad humana. Debido a que el proceso de toma de decisiones, en particular si es de tipo grupal, se centra en seres humanos, con su inherente subjetividad, vaguedad e imprecisión en la expresión de opiniones, la teoría de conjuntos difusos [246] ha permitido desarrollar nuevas herramientas en este campo durante mucho tiempo. La lógica difusa es un instrumento más útil para representar preferencias expresadas por humanos y nos proporciona una representación más general y rica que otros instrumentos como por ejemplo la teoría de la probabilidad. El nacimiento de la lógica difusa y de las relaciones de preferencia difusas [155, 190] (más adelante hablaremos en más detalle de estas) ha cambiado el área de la toma de decisiones en grupo y del consenso. En un ambiente difuso, durante mucho tiempo se ha considerado mucho más prometedor efectuar el proceso de consenso con la ayuda de un agente especial, llamado moderador o facilitador [16, 90, 180], cuya tarea consiste en ayudar a los individuos involucrados mientras cambian sus testimonios hacia el consenso, mediante el argumento racional, la persuasión, etc. Evidentemente, para ello debe contar con el apoyo de cierta información proporcionada por distintos instrumentos y técnicas. La lógica difusa puede desempeñar aquí un papel considerable al proporcionar estos medios para la representación y el procesamiento de información y testimonios imprecisos [9, 90, 106].

Como ya se ha mencionado, hay dos enfoques en la formulación del proceso de consenso. El primero, el tradicional, es el iniciado por Coch y French [36], French [64] y Harary [72] en el que el proceso se modela utilizando el cálculo matricial o las cadenas de Markov para modelar la evolución temporal de los cambios de opinión hacia el consenso. El segundo, más prometedor en la práctica, es aquel en el que hay un moderador. A continuación describimos la segunda forma, ya que es la más utilizada en la literatura [90].

El consenso es un proceso de negociación desarrollado de forma iterativa y compuesto por varias rondas, en las que los individuos aceptan modificar sus testimonios siguiendo el asesoramiento dado por un moderador. Este conoce el grado de acuerdo en cada ronda mediante el cálculo de algunas medidas de consenso. El proceso de consenso suele constar de las siguientes etapas:

1. En primer lugar, se presenta a los individuos el problema a resolver, junto con las diferentes alternativas entre las que tendrán que elegir la mejor.
2. Los individuos discuten y comparten sus conocimientos sobre el problema y las alternativas, a fin de hacer más fácil el procedimiento de expresión de preferencias posteriormente.
3. Los individuos exteriorizan sus testimonios acerca de las alternativas mediante una estructura de representación de preferencias determinada.
4. Los testimonios proporcionados por los individuos se les envían al moderador y este, a partir de ellos, obtiene distintas medidas de consenso que le servirán para saber si el acuerdo alcanzado es o no suficiente.
5. Si este es suficiente, se da por concluido el proceso de consenso y se arranca el proceso de selección. Si no es suficiente, podemos iniciar un mecanismo de recomendación en el que el moderador, con toda la información de que dispone (todos los testimonios, las medidas de consenso, etc.), genera ciertas orientaciones y consejos para que los individuos lleguen más fácilmente a un consenso. Obsérvese que este paso es opcional y no forma parte de todos los modelos de consenso.
6. Finalmente, se da el consejo a los individuos y se termina la primera ronda de negociación. De nuevo, los individuos discuten, argumentan y razonan sus testimonios para acercar posiciones (etapa 2).

2.3.2 Selección

Cuando el proceso de consenso finaliza al alcanzarse el acuerdo necesario o porque este no pueda alargarse más al ser necesario obtener ya una solución al problema, el proceso de selección entra en acción [18, 27, 73, 80, 91].

Entendemos el proceso de selección como aquel que se utiliza para generar la alternativa solución (o el conjunto solución de alternativas) mediante las preferencias (testimonios) proporcionadas sobre las distintas alternativas por los individuos del grupo. Para tal fin, debemos conocer claramente el criterio de conjunto (o global) que se aplicará para seleccionar las alternativas que compondrán el conjunto solución. Tal criterio se suele reducir a comparar las distintas alternativas entre ellas, utilizando usualmente para ello una función, conocida como función de selección, que asocia a cada una de las distintas alternativas un valor conocido como grado de selección, el cual se utiliza para generar un orden parcial entre las alternativas [63, 91, 155].

Entre los esquemas de selección de alternativas encontramos los siguientes:

- Esquema indirecto. Este esquema calcula la solución mediante la preferencia colectiva, la cual modela la preferencia social del grupo de individuos.
- Esquema directo. A diferencia del anterior, este esquema calcula la solución sobre las preferencias individuales de los diferentes individuos directamente.

Tanto si se basan en el esquema indirecto o en el esquema directo, los modelos de selección fundamentan su funcionamiento en distintos grados de selección de alternativas, los cuales determinan la importancia de una alternativa dentro del conjunto y actúan de forma selectiva sobre tal conjunto de alternativas a lo largo de todo el proceso de selección. En la literatura, encontramos los siguientes grados de selección:

- Individuales. Suelen aplicarse en los modelos de selección directos. Se obtienen para cada alternativa a_j de acuerdo con la preferencia del individuo dm^h, el cual se considera que es independiente del resto.
- Colectivos. Suelen aplicarse en los modelos de selección indirectos. A diferencia de los anteriores, se obtienen mediante la preferencia colectiva de los individuos del grupo.
- Sociales. Suelen aplicarse en los modelos de selección directos ya que se usan siempre en conjunto con los grados de selección individuales. Esto se debe a que se calculan al agregar los grados de selección individuales calculados para cada alternativa.

En cualquier caso, independientemente de que el modelo de selección sea directo o indirecto, este se desarrolla en dos etapas conocidas como agregación y explotación [12, 63, 154] (ver Figura 2.6).

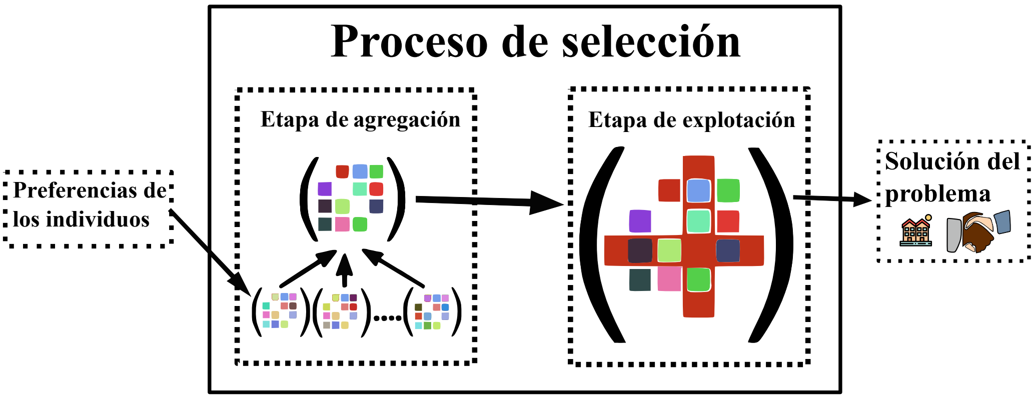

Figura 2.6. Etapas de agregación y explotación del proceso de selección.

2.3.2.1 Agregación

La operación que consiste en convertir una colección de elementos, como por ejemplo las preferencias proporcionadas por un grupo de individuos, en un único elemento representativo de esta se denomina agregación [1, 12, 49, 51, 229].

En los procesos de toma de decisiones en grupo, la etapa de agregación se fundamenta en combinar las unidades de información individuales mediante operadores de agregación en unidades de información colectivas. En particular:

- En los modelos de selección indirectos, las unidades de información individuales hacen referencia al grado de preferencia proporcionado por un individuo para cada alternativa mientras que las unidades colectivas hacen referencia a los grados de preferencia de la preferencia colectiva.

- En los modelos de selección directos, las unidades de información individuales hacen referencia a los grados de selección de alternativas, calculados para cada preferencia individual de un individuo, mientras que las unidades colectivas hacen referencia a los grados de selección sociales.

2.3.2.2 Explotación

La etapa de explotación es el paso final en un proceso de toma de decisiones. Su objetivo es identificar el conjunto solución de alternativas haciendo uso de la información que la etapa de agregación genera. Es decir, la información global sobre las alternativas se emplea en esta etapa para producir una clasificación de estas de mejor a peor como solución al problema.

Para realizar esta etapa necesitamos determinar un criterio de selección que nos posibilite generar una clasificación u orden entre la colección de posibles alternativas. La práctica comúnmente seguida consiste en utilizar una función de selección, la cual asocia a cada una de las distintas alternativas un grado de selección que establece el orden entre ellas. Para ello se emplean funciones de selección que posibilitan calcular la intensidad del grado de selección en cada alternativa. Así, las alternativas con una intensidad mayor formarán parte del conjunto solución de alternativas. Entre las funciones de selección más empleadas podemos destacar [4, 76, 91, 174]:

- Funciones de no dominancia. Definen el grado en el cual una alternativa no es dominada por las restantes.

- Funciones de dominancia. Determinan el grado en el cual una alternativa domina a las restantes. Cuando decimos que una alternativa domina a otra nos referimos a que se prefiere a otra.

Las funciones de selección se clasifican en sociales, colectivas e individuales, dependiendo de cómo se determinen. Además, conviene señalar que, por un lado, en un modelo de selección indirecto la etapa de explotación implica, para cada alternativa, el cálculo de sus grados de selección colectivos partiendo de la preferencia colectiva del grupo de individuos. Por otro, en un modelo de selección directo, la etapa de explotación implica, para cada alternativa, el cálculo de sus grados de selección individuales partiendo de la preferencia de cada individuo.

2.4 Representación de preferencias

En los problemas de toma de decisiones, una de las actividades más importantes es la representación (modelado) de preferencias. Los individuos, en base a sus creencias, experiencias y conocimiento, deben expresar sus preferencias sobre las distintas alternativas para evaluar lo idóneas que son como solución del problema [176].

Los individuos, a la hora de expresar sus preferencias, suelen utilizar modelos de representación que le resulten familiares a sus áreas de trabajo o disciplinas. Así, si los individuos pertenecen a disciplinas técnicas pueden preferir utilizar valoraciones numéricas para expresar sus preferencias. Por el contrario, si pertenecen disciplinas sociales pueden sentirse más cómodos utilizando el lenguaje natural para expresar sus valoraciones. Para modelar las valoraciones existen distintas herramientas que transforman las preferencias proporcionadas por los individuos en representaciones que permiten el tratamiento consistente, racional y matemático de estas [48, 176].

En lo referente al modelado de preferencias en el contexto de la toma de decisiones podemos considerar dos vertientes bien diferenciadas, pero igualmente importantes:

- El dominio de información de las preferencias.
- La estructura de representación de las preferencias.

En las siguientes subsecciones, revisamos ambas vertientes para clarificar las diferencias entre una y otra.

2.4.1 Dominio de información de las preferencias

La elección del dominio de información para comunicar las preferencias en procesos de toma de decisiones en grupo se debe a:

- El nivel de conocimiento de los individuos sobre el problemas y sus alternativas. Dependiendo de su conocimiento y experiencia previa en problemas similares, los individuos pueden optar por dominios más precisos como, por ejemplo, las valoraciones numéricas exactas o dominios más flexibles como, por ejemplo, los intervalos.
- La pertenencia de los individuos a distintas disciplinas. Los individuos tienden a emplear el dominio que les resulte familiar a la clase de información que manejan normalmente. De esta forma, como se ha comentado, los individuos que pertenezcan a disciplinas sociales se inclinarán por el uso de valoraciones no numéricas (por ejemplo, lingüísticas) mientras que aquellos

que pertenezcan a disciplinas técnicas preferirán seguramente emplear valoraciones numéricas.

- Naturaleza cualitativa o cuantitativa de la información. Los fenómenos de naturaleza cualitativa suelen admitir valoraciones lingüísticas mientras que aquellos de naturaleza cuantitativa admiten mejor valoraciones numéricas.

Para que los individuos estén más cómodos en el momento de expresar sus preferencias, y así conseguir que la solución obtenida sea mejor [48], es importante que el modelado de preferencias se adapte al entorno en el que se desarrolla el problema. En la literatura podemos encontrar que los individuos para expresar sus preferencias emplean mayoritariamente tres tipos de dominios de información [87, 140, 201, 258]:

- Numérico. Este dominio modela las preferencias mediante valores numéricos. Para ello, se suelen considerar dos variantes. La primera, es la binaria, y se caracteriza porque utiliza solo dos valores numéricos para valorar cómo de útil es una alternativa. Estos dos valores suelen ser $\{0, 1\}$: el 1 supone una valoración positiva mientras que el 0 indica una valoración negativa. Esta forma de evaluar las alternativas forma parte de la visión clásica y «crisp» de la toma de decisiones ya que solo se permite señalar si una alternativa es buena o mala, pero no da la posibilidad de meter incertidumbre en relación a la bondad o utilidad de las alternativas para resolver el problema. La segunda variante es aquella que permite utilizar un valor numérico comprendido en el intervalo $[0, 1]$ para expresar las preferencias sobre las alternativas [63, 155, 190, 217, 241]. En comparación con el dominio binario, ahora se pueden emplear valoraciones numéricas reales dentro del intervalo $[0, 1]$, las cuales ofrecen la posibilidad de establecer un orden de preferencia entre las diversas alternativas de acuerdo con la utilidad asociada a cada una.

- Intervalar. Este dominio surgió para poder modelar la incertidumbre en los procesos de toma de decisiones, siendo más flexible que el anterior. El uso de intervalos $[a, b]$ $(a < b)$ para valorar las alternativas es en cierto modo eficaz para trabajar con la incertidumbre en problemas de decisión [2, 206, 256]. En las situaciones en las que los individuos no tienen la capacidad de evaluar con precisión las alternativas mediante valores numéricos exactos, el modelado mediante valores intervalares puede ser conveniente, ya que ofrece más seguridad a los individuos y hace que los resultados aunque no sean exactos, sí que estén dentro de unos límites.

- Lingüístico. Cuando los aspectos que se valoran son de naturaleza cualitativa o la información que se tiene es muy imprecisa, es recomendable que los individuos empleen un modelado lingüístico de preferencias [74, 204, 263]. El individuo puede considerar, en estos casos, más conveniente emplear palabras o términos lingüísticos para comunicar sus preferencias sobre las alternativas, en lugar de un valor numérico más o menos preciso. En general, en la mayoría de las situaciones los individuos prefieren utilizar un dominio lingüístico para expresar sus preferencias, en particular si tienen que valorar aspectos relacionados con las percepciones humanas, las cuales en su mayoría se expresan de manera imprecisa, siendo más habitual emplear el lenguaje natural en vez de valoraciones numéricas. El típico ejemplo que se suele poner para mostrar la necesidad del dominio lingüístico es el presentado en [115], en el cual los individuos deben valor el confort de un automóvil. En este ejemplo, parece normal que los individuos prefieran usar palabras tales como «aceptable» o «muy malo» para dar su testimonio sobre el nivel de confort del automóvil en vez de emplear un valor numérico exacto.

En lo que respecto al campo de la toma de decisiones en ambientes difusos, el modelado lingüístico ha sido el preferido para representar las preferencias proporcionadas por los individuos. Debido a su mayor uso y a la importancia que tiene este dominio de información en nuestra investigación, volveremos a analizarlo con mayor detalle en el capítulo 3.

2.4.2 Estructura de representación de las preferencias

Dado un conjunto de alternativas, existen diferentes estructuras (formatos) de representación que pueden ser empleadas por los individuos para proporcionar sus preferencias sobre estas alternativas. Las estructuras de representación más comunes en toma de decisiones son:

- Conjunto selección de alternativas.
- Orden de preferencia.
- Vector de utilidad.
- Relación de preferencia.

En los siguientes apartados, describimos cada una de estas estructuras de representación y las ilustramos con diferentes ejemplos.

2.4.2.1 Conjunto selección de alternativas

Es la más básicas de las estructuras de representación de preferencias. Se basa en la elección por parte del individuo del conjunto solución de alternativas que piensa que es más importante en la resolución del problema [3].

Definición 2.4.1 *Sea dm^h un individuo que tiene que proporcionar sus preferencias sobre una colección de alternativas $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. El conjunto selección de alternativas SS^h proporcionado por dm^h es aquel tal que $SS^h \subset A$ y $SS \neq \emptyset$.*

Como ejemplo de ilustración de esta estructura de representación, supongamos un grupo de tres individuos $DM = \{dm^1, dm^2, dm^3\}$ y una colección de cinco alternativas $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. Si el individuo dm^3 cree que las alternativas que mejor resuelven el problema son a_1 y a_5, utilizaría el conjunto selección de alternativas $SS^3 = \{a_1, a_5\}$.

Esta estructura de representación de preferencias es fácil de usar y comprender. Por el contrario, al utilizar una evaluación binaria (la alternativa es relevante para resolver el problema o no lo es) apenas ofrece información y, por tanto, no ofrece la posibilidad de distinguir el grado de preferencia del individuo sobre las alternativas que este piensa que son relevantes.

2.4.2.2 Orden de preferencia

Esta estructura de representación determina un orden o clasificación entre las alternativas que indica la relevancia de cada una como solución al problema [183, 190].

Definición 2.4.2 *Sea dm^h un individuo que tiene que proporcionar sus preferencias sobre una colección de alternativas $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. El orden de preferencia O^h proporcionado por dm^h es aquel tal que $O^h = \{o^h(1), \ldots, o^h(n)\}$ siendo $o^h(\cdot)$ una función de permutación sobre la colección de índices $\{1, \ldots, n\}$. Además, se suele asumir que cuanto mayor es la posición de la alternativa en este orden, menor relevancia tiene para el individuo como solución al problema.*

Como ejemplo de ilustración de esta estructura de representación, supongamos un grupo de tres individuos $DM = \{dm^1, dm^2, dm^3\}$ y una colección de cinco alternativas $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. Si el individuo dm^3 expresa el siguiente orden de preferencia $O^3 = \{5, 4, 3, 2, 1\}$, entonces $o^3(1) = 5$, $o^3(2) = 4$, $o^3(3) = 3$, $o^3(4) = 2$ y $o^3(5) = 1$. Esto significa que para el individuo dm^3, la alternativa que mejor soluciona el problema es a_5 y la peor a_1.

Esta estructura de representación de preferencias permite diferenciar el grado de preferencia entre las alternativas, ofreciendo una evaluación más detallada que el conjunto selección de alternativas. No obstante, no ofrece la posibilidad de modelar situaciones comunes en procesos de toma de decisiones al establecer un orden total entre las alternativas. Esto se debe a que esta estructura no permite que un individuo del grupo pueda indicar que, en su opinión, el grado de preferencia entre dos alternativas es igual.

2.4.2.3 Vector de utilidad

Esta estructura de representación de preferencias fue una de las más empleadas en los modelos clásicos de decisión para representar las preferencias de los individuos [92, 128]. Se basa en un vector donde cada elemento determina la utilidad o preferencia de cada alternativa como solución al problema.

Definición 2.4.3 *Sea dm^h un individuo que tiene que proporcionar sus preferencias sobre una colección de alternativas $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. El vector de utilidad U^h proporcionado por dm^h es aquel tal que $U^h = \{u_1^h, \ldots, u_n^h\}$ siendo u_j^h la utilidad o valoración proporcionada por dm^h sobre a_j. Sin pérdida de generalidad, se asume que cuanto mayor es el valor de u_j^h, mejor soluciona el problema la alternativa a_j de acuerdo con la opinión del individuo dm^h.*

Como ejemplo de ilustración de esta estructura de representación, supongamos un grupo de cuatro individuos $DM = \{dm^1, dm^2, dm^3, dm^4\}$ y una colección de cinco alternativas $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. Si el individuo dm^1 expresa el siguiente vector de utilidad $U^1 = \{1, 0, 0, 1, 0\}$ utilizando un dominio numérico binario, esto significa que para el individuo dm^1 las alternativas a_1 y a_4 reciben una valoración positiva como solución al problema mientras que las otras tres no. Si el individuo dm^2 expresa el siguiente vector de utilidad $U^2 = \{0.5, 0.7, 0.1, 0.9, 0.2\}$ utilizando un valor numérico en el intervalo $[0, 1]$, esto significa que para el individuo dm^2 la mejor alternativa es a_4 (le asigna el máximo valor de utilidad) mientras que la peor es a_3 (le asigna el menor valor de utilidad). Si el individuo dm^3 expresa el siguiente vector de utilidad $U^3 = \{[0.5, 0.6], [0.7, 0.8], [0.9, 1.0], [0.1, 0.2], [0.4, 0.5]\}$ utilizando un dominio de información intervalar en $[0, 1]$, esto significa que para el individuo dm^3 la mejor alternativa es a_3 mientras que la peor es a_4. Si el individuo dm^4 expresa el vector de utilidad $U^4 = \{\text{normal}, \text{muy mala}, \text{buena}, \text{mala}, \text{muy buena}\}$ utilizando el conjunto de términos lingüísticos $S = \{\text{muy mala}, \text{mala}, \text{normal}, \text{buena}, \text{muy buena}\}$, esto significa que para el individuo dm^5 la mejor alternativa es a_5 mientras que la peor es a_2.

Esta estructura ofrece un mayor nivel de detalle que las anteriores, permitiendo al individuo representar convenientemente sus preferencias. No obstante, esta estructura necesita que el individuo tenga la capacidad de evaluar globalmente cada alternativa en relación a las demás, lo cual puede ser muy complicado (o imposible) en la mayoría de procesos de toma de decisiones, especialmente si hay muchas alternativas.

2.4.2.4 Relación de preferencia

Atendiendo a la teoría clásica de preferencias [176], podemos modelar las preferencias proporcionadas sobre una colección de alternativas $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ mediante una relación binaria R:

$$a_i R a_j \Leftrightarrow a_i \text{ no es peor que } a_j.$$

Según esta definición, R se considera que es una relación de preferencia débil. Por tanto, R se asume reflexiva. Además, según esta definición, es lógico que se asocie un número real, $R(a_i, a_j) \in \mathbb{R}$, el cual indica el grado preferencia de la alternativa a_i sobre a_j, o dicho de otra forma, el grado de verdad de la siguiente afirmación: «a_i no es peor que a_j».

Cuando nos enfrentamos a un proceso de toma de decisiones, en el que la colección de alternativas es finita, las relaciones de preferencia son capaces de trabajar con esta clase de relaciones binarias entre alternativas.

Definición 2.4.4 *Una relación de preferencia RP sobre un conjunto de alternativas $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ se caracteriza por una función $\mu_{RP} : A \times A \rightarrow D$, siendo D el dominio de información del grado de preferencia.*

Según el dominio de información D utilizado para evaluar la intensidad de la preferencia, encontramos diferentes tipos de relaciones de preferencia [33, 63, 127, 155, 221]. Además, las relaciones de preferencia se suelen representar mediante una matriz $RP^h = (rp_{ij}^h)$ de $n \times n$, siendo $rp_{ij}^h = \mu_{RP^h}(a_i, a_j), \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, el grado de preferencia de la alternativa a_i sobre la alternativa a_j para el individuo dm^h:

$$RP^h = \begin{pmatrix} rp_{11}^h & \cdots & rp_{1n}^h \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ rp_{n1}^h & \cdots & rp_{nn}^h \end{pmatrix}$$

Usualmente los elementos pertenecientes a la diagonal principal no se definen, ya que no tiene sentido comparar una alternativa consigo mismo. No obstante, si se diera el caso, el comparar una alternativa consigo misma no debe influir en la obtención de la alternativa solución.

Al basarse en la comparación entre pares de alternativas, esta estructura de representación permite más libertad a los individuos a la hora de comunicar sus preferencias, ganando así en expresividad y solventando el problema presentado por los vectores de utilidad. Además, según el estudio realizado por Millet en [145], en el cual analizó diferentes estructuras de representación de preferencias, aquellas basadas en comparación entre pares de alternativas, como las relaciones de preferencia, son mejores al ofrecer mayor precisión que aquellas que no se basan en comparación entre pares como, por ejemplo, el conjunto selección de alternativas, los órdenes de preferencia o los vectores de utilidad.

A continuación, vamos a describir las relaciones de preferencia más empleadas en procesos de toma de decisiones:

- **Relaciones de preferencia difusas.** Estas relaciones emplean un valor numérico del intervalo $[0, 1]$ para medir la intensidad de las preferencias [63, 103, 155, 217, 241].

  Definición 2.4.5 *La relación de preferencia difusa RP^h proporcionada por el individuo dm^h sobre la colección de alternativas $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ se caracteriza por la función de pertenencia $\mu_{RP^h} : A \times A \rightarrow [0, 1]$.*

  En el caso de las relaciones de preferencia difusas, si $rp^h_{ij} = 0.5$, entonces hay indiferencia entre las alternativas a_i y a_j para el individuo dm^h ($a_i \sim a_j$); si $rp^h_{ij} = 1$, el individuo dm^h prefiere totalmente a la alternativa a_i sobre a_j; si $rp^h_{ij} > 0.5$, el individuo dm^h prefiere con un cierto grado a la alternativa a_i sobre a_j ($a_i \succ a_j$). Usualmente se asume la propiedad de reciprocidad aditiva, es decir, $rp^h_{ij} + rp^h_{ji} = 1$, $\forall i, j$, aunque no siempre es así. Además, aunque no se deben definir los elementos de la diagonal principal, si fuese necesario, en el caso de las relaciones de preferencia difusas estos elementos tendrían que tener el valor 0.5 para ser consistentes con lo comentado.

  Como ejemplo de ilustración de las relaciones de preferencia difusas, supongamos un grupo de tres individuos $DM = \{dm^1, dm^2, dm^3\}$ y una colección de cuatro alternativas $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Si el individuo dm^3 expresa la siguiente relación de preferencia difusa:

$$RP^3 = \begin{pmatrix} - & 0.0 & 0.5 & 0.6 \\ 1.0 & - & 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0.7 & - & 0.8 \\ 0.4 & 0.6 & 0.2 & - \end{pmatrix}$$

  esto implica, para el individuo dm^3, que $a_1 \sim a_3$, ya que $rp^3_{13} = 0.5$, que a_2 es completamente mejor que a_1, ya que $rp^3_{21} = 1$, y que $a_3 \succ a_4$, ya que $rp^3_{34} = 0.8$.

- **Relaciones de preferencia multiplicativas.** Estas relaciones se basan en un indicador de la razón de intensidad de las preferencias entre alternativas [33, 127, 213]. Según el análisis realizado por Miller en [144], Saaty sugirió utilizar la escala de razón $1-9$ para medir cada valor [177, 178, 179].

Definición 2.4.6 *La relación de preferencia multiplicativa RP^h proporcionada por el individuo dm^h sobre la colección de alternativas $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ se caracteriza por la función de pertenencia $\mu_{RP^h} : A \times A \rightarrow [1/9, 9]$.*

En la relación de preferencia multiplicativa RP^h, cada valor rp^h_{ij} determina el número de veces que la alternativa a_i es mejor que la alternativa a_j para el individuo dm^h. Suelen asociarse a los siguientes números los siguientes significados:

1	misma importancia
3	algo más importante
5	bastante más importante
7	mucho más importante
9	completamente más importante
2, 4, 6, 8	compromiso entre valoraciones ligeramente distintas

En este caso, se suele asumir la propiedad de reciprocidad multiplicativa, es decir, $rp^h_{ij} \cdot rp^h_{ji} = 1, \forall i, j$. Además, aunque no se deben definir los elementos de la diagonal principal, si fuese necesario, en el caso de las relaciones de preferencia multiplicativas estos elementos tendrían que tener el valor 1 para ser consistentes con lo comentado.

Como ejemplo de ilustración de las relaciones de preferencia multiplicativas, supongamos un grupo de tres individuos $DM = \{dm^1, dm^2, dm^3\}$ y una colección de cuatro alternativas $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Si el individuo dm^1 expresa la siguiente relación de preferencia multiplicativa:

$$RP^1 = \begin{pmatrix} - & 6 & 3 & 1 \\ 1/6 & - & 1/2 & 1/5 \\ 1/3 & 2 & - & 7 \\ 1 & 5 & 1/7 & - \end{pmatrix}$$

esto implica, para el individuo dm^1, que $a_1 \sim a_4$, ya que $rp^1_{14} = 1$, que a_3 es mucho más importante que a_4, ya que $rp^1_{34} = 7$, y que $a_1 \succ a_2$, ya que $rp^1_{12} = 6$.

- **Relaciones de preferencia intervalares.** Estas relaciones emplean un intervalo en $[0, 1]$ para medir la intensidad de las preferencias [2, 10, 125, 256]. Se utilizan cuando hay información para poder estimar el intervalo en el que se localiza la preferencia pero no la suficiente como para poder expresar un valor numérico exacto.

Definición 2.4.7 *La relación de preferencia intervalar RP^h proporcionada por el individuo dm^h sobre la colección de alternativas $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ se caracteriza por la función de pertenencia $\mu_{RP^h} \colon A \times A \to \mathcal{P}[0, 1]$, siendo $\mathcal{P}[0, 1] = \{[a, b] \mid a, b \in [0, 1],\ a \leq b\}$ el conjunto potencia de $[0, 1]$.*

De nuevo, aunque no se deben definir los elementos de la diagonal principal, si fuese necesario, en el caso de las relaciones de preferencia intervalares estos elementos tendrían que tener el valor $[0.5, 0.5]$ para ser consistentes con lo comentado. Además, hay que determinar algún operador de comparación que permita crear un orden entre valores intervalares, de forma que se pueda saber cuando una alternativa es mejor que otra.

Como ejemplo de ilustración de las relaciones de preferencia intervalares, supongamos un grupo de tres individuos $DM = \{dm^1, dm^2, dm^3\}$ y una colección de cuatro alternativas $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Si el individuo dm^2 expresa la siguiente relación de preferencia intervalar:

$$RP^2 = \begin{pmatrix} - & [0.0, 0.0] & [0.3, 0.7] & [0.3, 0.5] \\ [1.0, 1.0] & - & [0.6, 0.8] & [0.5, 0.5] \\ [0.3, 0.7] & [0.2, 0.4] & - & [0.3, 0.5] \\ [0.5, 0.7] & [0.5, 0.5] & [0.5, 0.7] & - \end{pmatrix}$$

esto implica, para el individuo dm^2, que $a_2 \sim a_4$, ya que $rp^2_{24} = [0.5, 0.5]$, que a_2 es completamente mejor que a_1, ya que $rp^2_{21} = [1.0, 1.0]$, y que $a_2 \succ a_3$, ya que $rp^2_{23} = [0.6, 0.8]$.

- **Relaciones de preferencia lingüísticas.** Estas relaciones emplean un término lingüístico perteneciente a un conjunto de términos lingüísticos para medir la intensidad de las preferencias [74, 99, 187, 205, 223].

Definición 2.4.8 *La relación de preferencia lingüística RP^h proporcionada por el individuo dm^h sobre la colección de alternativas $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ se caracteriza por la función de pertenencia $\mu_{RP^h} \colon A \times A \to S$, siendo $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_g\}$ el conjunto de términos lingüísticos cuya cardinalidad es g.*

Usualmente se ha venido considerado que el conjunto de términos lingüísticos $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_g\}$ tiene un número impar de elementos con un orden lineal entre ellos como única estructura disponible [74, 263], representando el elemento central $s_{g/2}$ un valor neutral, por ejemplo «igualmente preferido». Si se definen los elementos de la diagonal principal, su valor debe ser $s_{g/2}$ como consecuencia de lo comentado. En cualquier caso, como veremos en el capítulo 3, existen diferentes modelos para trabajar con información lingüística.

Como ejemplo de ilustración de las relaciones de preferencia lingüísticas, supongamos un grupo de tres individuos $DM = \{dm^1, dm^2, dm^3\}$, una colección de cuatro alternativas $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ y el conjunto de términos lingüísticos $S = \{\text{mucho peor}, \text{peor}, \text{igual}, \text{mejor}, \text{mucho mejor}\}$. Si el individuo dm^1 expresa la siguiente relación de preferencia lingüística:

$$RP^1 = \begin{pmatrix} - & \text{peor} & \text{mucho mejor} & \text{mucho mejor} \\ \text{mejor} & - & \text{mucho mejor} & \text{igual} \\ \text{mucho peor} & \text{mucho peor} & - & \text{mejor} \\ \text{mucho peor} & \text{igual} & \text{peor} & - \end{pmatrix}$$

esto implica, para el individuo dm^1, que $a_2 \sim a_4$, ya que $rp^1_{24} = \text{igual}$, y que $a_2 \succ a_3$, ya que $rp^2_{23} = \text{mucho mejor}$.

2.5 Cuantificadores lingüísticos y mayoría difusa

Como se ya se ha discutido, el concepto de mayoría es uno de los más importantes en los procesos de toma de decisiones en grupo [107]. Esto se debe a que la solución obtenida debe ser aquella que alcance un mayor acuerdo entre los individuos del grupo, en el sentido de que la mayoría acepten la decisión alcanzada. Como ya hemos comentado, en problemas del mundo real es difícil, si no imposible, que la decisión tomada sea aceptada por todos los individuos del grupo.

El concepto de mayoría se ha definido tradicionalmente como un umbral del total de individuos que forman parte del grupo. La mayoría difusa podría definirse como un concepto suave de mayoría representado mediante un cuantificador lingüístico difuso, como, por ejemplo, «la mayoría», «casi todos», «más de la mitad», etc. Estos cuantificadores lingüísticos difusos pueden representarse formalmente, en primer lugar, mediante el cálculo de proposiciones lingüísticamente cuantificadas [244] y, en segundo lugar, mediante operadores de agregación como, por ejemplo, los operadores OWA (Ordered Weighted Averaging) propuestos por Yager [229], los cuales proporcionan la granularidad y flexibilidad necesaria [62, 254].

Kacprzyk fue el primero que planteó asociar el concepto de mayoría difusa a un cuantificador lingüístico en procesos de toma de decisiones [61, 100, 101, 102]. Sin embargo, es importante remarcar que fue Nurmi quien presentó en [153] las primeras definiciones novedosas sobre soluciones en toma de decisiones en grupo bajo preferencias difusas y mayorías «crisp», aunque valuadas. Tanto en los trabajos de Kacpryzk como en el de Nurmi se proponen nuevas definiciones de consenso y de soluciones populares. Desde ese momento, la mayoría difusa fue el punto clave para las nuevas definiciones de consenso suave propuestas por Kacpryzk y Fedrizzi [103, 104, 105]. Aplicando una mayoría difusa se puede definir el grado de consenso de una forma más flexible y reflejar el amplio espectro de posibles acuerdos parciales que pueden darse en un grupo de individuos. De esta manera, es más sencillo dirigir el proceso de consenso hasta que se logre un acuerdo amplio (no total) entre los individuos.

La cantidad de elementos satisfaciendo un predicado determinado se puede formalizar mediante un cuantificador. La lógica clásica solamente emplea dos cuantificadores, ≪al menos uno≫, relacionado con la conectiva ≪o≫, y ≪para todos≫, relacionado con la conectiva ≪y≫. Sin embargo, el lenguaje natural tiene una mayor variedad de cuantificadores, por ejemplo, ≪aproximadamente siete≫, ≪la mayoría≫, ≪al menos la mitad≫, etc. Con el objetivo de dar una representación de esa variedad de cuantificadores existentes en el discurso humano, Zadeh definió el concepto de cuantificador lingüístico difuso [244]. Los cuantificadores lingüísticos difusos se han venido empleando desde entonces para incluir el concepto de mayoría difusa en el cálculo de medidas de consenso y para desarrollar nuevas soluciones en procesos de toma de decisiones en grupo [103, 104, 105].

La semántica de un cuantificador lingüístico difuso se representa normalmente media el uso de subconjuntos difusos. En el discurso natural se identifican dos tipos de cuantificadores [88]:

- Absolutos. Estos cuantificadores se vinculan con el concepto de número de elementos y representan cantidades absolutas como, por ejemplo, ≪alrededores de tres≫ o ≪más de seis≫. La semántica de un cuantificador absoluto se define por medio de un subconjunto difuso Q caracterizado por una función de pertenencia $Q(r) \in [0, 1]$, $r \in \mathbb{R}^+$, donde $Q(r)$ es el grado en el cual la cantidad r es compatible con el cuantificador que Q modela. En particular, un cuantificador absoluto $Q : \mathbb{R}^+ \to [0, 1]$ cumple:

$$Q(0) = 0 \ \wedge \ \exists k \text{ tal que } Q(k) = 1.$$

- Relativos. Estos cuantificadores están relacionados con declaraciones de tipo proporcional como, por ejemplo, ≪la mayor parte≫ o ≪al menos la mitad≫. Análogamente, la semántica de un cuantificador relativo se define por un subconjunto difuso Q caracterizado por una función de pertenencia $Q(r) \in [0, 1]$, $r \in [0, 1]$, donde $Q(r)$ es el grado en el cual la proporción r es compatible con el cuantificador que Q modela. En concreto, un cuantificador relativo $Q : [0, 1] \to [0, 1]$ cumple:

$$Q(0) = 0 \ \wedge \ \exists r \in [0, 1] \text{ tal que } Q(r) = 1.$$

En su trabajo publicado en [233], Yager distinguió dos tipos de cuantificadores relativos: los cuantificadores monótonos crecientes regulares, como, por ejemplo, «todos», «la mayoría», «muchos», etc., y los cuantificadores monótonos decrecientes regulares, como, por ejemplo, «al menos uno», «pocos», etc. Los cuantificadores monótonos crecientes regulares satisfacen:

$$\forall a, b \text{ si } a > b, \text{ entonces } Q(a) \geq Q(b),$$

mientras que los cuantificadores monótonos decrecientes regulares satisfacen:

$$\forall a, b \text{ si } a > b, \text{ entonces } Q(a) \leq Q(b).$$

Para representar un cuantificador monótono creciente regular se suele emplear la siguiente función de pertenencia [102]:

$$Q(r) = \begin{cases} 0, & \text{si } r < a \\ \dfrac{r-a}{b-a}, & \text{si } a \leq r \leq b \\ 1, & \text{si } r > b, \end{cases}$$

con $a, b, r \in [0, 1]$. Cuando se utilizan los parámetros a y b con los valores 0.3 y 0.8, respectivamente, para modelar el cuantificador lingüístico difuso «mayoría», y se aplica al operador OWA, se asigna a los individuos más importantes un valor pequeño ya que asocia un valor de 0 al $30\,\%$ primero de individuos. Este problema se solventa garantizando que todos los individuos tengan asignado un valor diferente a 0. De esta forma, todos contribuyen al valor final agregado. Para ello, se debe usar un cuantificador estrictamente creciente. En particular, Yager considera como una opción valida utilizar la familia parametrizada de cuantificadores monótonos crecientes regulares [233]:

$$Q(r) = r^a, \;\; a \geq 0,$$

la cual es estrictamente creciente.

Conviene remarcar que todo cuantificador del lenguaje natural se puede representar mediante un cuantificador relativo. Además, cuando se conoce la porción de elementos a considerar, también se podrá representar mediante un cuantificador absoluto.

Por otra parte, Yager desarrolló en [232] un formalismo para la evaluación de verdad en proposiciones cuantificadas lingüísticamente. Este formalismo está basado en la interpretación lógica y generaliza las conectivas ≪o≫ e ≪y≫ mediante operadores de agregación. Esta es la manera que emplea Yager para incorporar el concepto de mayoría difusa al proceso de selección, tanto en la etapa de agregación como en la etapa de explotación. Es decir, comúnmente se emplean operadores de agregación dirigidos por cuantificadores. Esto significa que los pesos de los operadores de agregación se calculan mediante un cuantificador lingüístico para modelar así el concepto de mayoría en las operaciones de agregación y explotación. De esta forma, se introduce el concepto de mayoría mediante los pesos del operador de agregación utilizado en las etapas de agregación y explotación.

2.6 Consistencia

Aparte del consenso alcanzado entre los individuos, otro de los aspectos que hay que tener en cuenta cuando las preferencias las expresan individuos es el de la coherencia o consistencia [22, 37, 91, 93, 117, 205]. En cierto modo, ambos conceptos están relacionados. Por una parte, el consenso está relacionado con el acuerdo alcanzado entre las preferencias proporcionadas por los distintos individuos que forman parte del grupo, mientras que la consistencia está relacionada con el acuerdo dentro de las preferencias propias de un individuo.

Sabemos que las relaciones de preferencia son la estructura de representación más empleada en procesos de toma de decisiones en grupo gracias a su eficacia en el modelado de procesos de decisión [145]. El esfuerzo de completar las evaluaciones entre pares de alternativas es mucho más sencillo que asignar valores de utilidad a todas las alternativas del problema en su conjunto. Esto acarrea que el individuo está capacitado para evaluar globalmente cada alternativa frente a todas las demás, tarea que puede ser especialmente compleja si el número de alternativas es elevado. La comparación entre pares de alternativas ayuda al individuo a centrarse solamente en dos alternativas a la vez, lo que reduce la incertidumbre y la duda, a la vez que puede facilitar la coherencia. Esto es importante ya que la información coherente o consistente, aquella que no implica ningún tipo de contradicción, es más relevante o importante que la información que contiene contradicciones. Sin embargo, debido a la complejidad asociada a la mayoría de los procesos de toma de decisiones en grupo, las preferencias expresadas por los individuos pueden ser inconsistentes. De hecho, el uso de relaciones de preferencia no implica en principio ningún tipo de propiedad de consistencia. Sin embargo, el estudio de la consistencia es crucial para evitar malas soluciones en procesos de toma de decisiones en grupo. Por suerte, podemos conocer y cuantificar la consistencia asociada a las preferencias expresadas por un individuo [37, 93, 117], e incluso aplicar ciertos procedimientos para mejorarla [117].

En el modelado de preferencias, la coherencia se ha tenido en cuenta en los procesos estándar de toma de decisiones mediante la adopción de diferentes formulaciones que dependen del contexto [67]. En el contexto numérico clásico (booleano o binario), se asume que las preferencias son transitivas para asegurar un comportamiento consistente. En el contexto difuso, la transitividad juega un papel crucial en el modelado de la coherencia, ya que el comportamiento «crisp» solo debería aparecer como un caso particular. Por tanto, la transitividad «crisp» se ha generalizado para el modelado de preferencias difuso, existiendo una gran variedad de propiedades de transitividad difusa, ofreciendo cada una de las cuales un tipo de coherencia distinto [93]. Por otro lado, la coherencia se ha entendido como una medida de racionalidad, permitiendo así distintos grados de cumplimiento [37]. Un argumento clave aquí fue que la mayoría de las condiciones de transitividad difusa estándar publicadas en la literatura eran de naturaleza «crisp», es decir, se cumplen o no se cumplen. Sin embargo, es evidente que muchas situaciones son intransitivas, mientras que otras veces solamente encontramos pequeñas violaciones de la transitividad que pueden evitarse en la práctica. La consistencia permite en la mayoría de los casos diferentes grados, los cuales se pueden y deben medir. El enfoque axiomático propuesto por Cutello y Montero fue el primero en este sentido, proponiendo una familia particular de condiciones que cualquier medida de racionalidad debería verificar dentro del modelado de preferencias [37].

Centrándonos en las relaciones de preferencia difusas comprobamos que se han formulado diferentes propiedades para modelizar la consistencia. Por ejemplo, una restricción que se suele aceptar normalmente que verifica una relación de preferencia difusa es la reciprocidad aditiva [102], la cual se define como:

$$rp_{ij}^h + rp_{ji}^h = 1, \ \ \forall i, j.$$

La reciprocidad aditiva, sin embargo, se suele relajar para proporcionar a los individuos más libertad a la hora de expresar sus preferencias. La reciprocidad débil modela esta propiedad más relajada y se define como:

$$rp_{ij}^h \geq 0.5 \Rightarrow rp_{ji}^h \leq 0.5, \ \ \forall i, j.$$

Otra de las propiedades más importantes en lo que respecta a las preferencias es la transitividad, la cual simboliza la idea de que el valor de preferencia obtenido mediante la comparación directa de dos alternativas tiene forzosamente que ser mayor o igual que el obtenido entre esas dos alternativas mediante una cadena indirecta de alternativas [50, 128]. Existen diferentes formas de caracterizar la transitividad en las relaciones de preferencia difusas. Entre ellas podemos destacar [93]:

- Condición de triángulo [128]. Esta condición puede interpretarse geométricamente considerando las alternativas a_i, a_j, a_k como los vértices de un triángulo con lados de longitud rp_{ij}^h, rp_{jk}^h y rp_{ik}^h [128]. Por tanto, la longitud correspondiente a los vértices a_i, a_k, no debe exceder la suma de las longitudes correspondientes a los vértices a_i, a_j y a_j, a_k. Se define como:

$$rp_{ij}^h + rp_{jk}^h \geq rp_{ik}^h, \ \ \forall i, j, k.$$

- Transitividad débil [191]. La interpretación de esta condición es que si preferimos la alternativa a_i a la alternativa a_j y la alternativa a_j a la alternativa

a_k, entonces debemos preferir la alternativa a_i a la alternativa a_k. Este tipo de transitividad es la condición de transitividad habitual que un individuo lógico y coherente debe utilizar si no desea expresar preferencias incoherentes. Por tanto, es la condición mínima requerida que debe verificar una relación de preferencia difusa para ser consistente. Se define como:

$$rp_{ij}^h \geq 0.5,\ rp_{jk}^h \geq 0.5 \Rightarrow rp_{ik}^h \geq 0.5,\ \ \forall i, j, k.$$

- Transitividad $\max - \min$ [50, 262]. La idea que representa esta propiedad es que el valor de preferencia obtenido por comparación directa entre dos alternativas debe ser igual o mayor que los valores parciales mínimos obtenidos al comparar ambas alternativas con una intermedia. Ha sido la condición tradicional para representar la coherencia en las relaciones de preferencia difusas [262], aunque es un concepto muy fuerte que no se ha podido verificar ni siquiera cuando una relación de preferencia difusa se considera perfectamente coherente desde el punto de vista práctico. Se define como:

$$rp_{ik}^h \geq \min(rp_{ij}^h, rp_{jk}^h),\ \ \forall i, j, k.$$

- Transitividad $\max - \max$ [50, 262]. Este concepto caracteriza la idea de que el valor de preferencia obtenido mediante comparación directa entre dos alternativas debe ser igual o mayor que los valores parciales máximos obtenidos al comparar ambas alternativas utilizando una intermedia. Este concepto es más fuerte que la transitividad $\max - \min$. Esto conlleva que si una relación de preferencia difusa recíproca no cumple esta propiedad tampoco verifica la anterior. Se define como:

$$rp_{ik}^h \geq \max(rp_{ij}^h, rp_{jk}^h),\ \ \forall i, j, k.$$

- Transitividad $\text{máx} - \text{mín}$ restringida [191]. Cuando una relación de preferencia difusa verifica esta condición está modelando el concepto de que cuando preferimos la alternativa a_i a la alternativa a_j con un valor rp^h_{ij} y la alternativa a_j a la alternativa a_k con un valor rp^h_{jk}, entonces se debe preferir la alternativa a_i a la alternativa a_k con al menos una intensidad de preferencia rp^h_{ik} igual al mínimo de los valores anteriores. La desigualdad debe convertirse en igualdad solo cuando exista indiferencia entre al menos dos de las tres alternativas. Una relación de preferencia difusa consistente tiene que verificar esta condición, que va un paso más allá de la transitividad débil porque añade un requisito adicional sobre los grados de preferencia involucrados. Por lo tanto, esta condición de transitividad es más suave que la transitividad $\text{máx} - \text{mín}$, pero más fuerte que la transitividad débil. Se define como:

$$rp^h_{ij} \geq 0.5,\ rp^h_{jk} \geq 0.5 \Rightarrow rp^h_{ik} \geq \text{mín}(rp^h_{ij}, rp^h_{jk}),\ \ \forall i, j, k.$$

- Transitividad $\text{máx} - \text{máx}$ restringida [191]. En este caso se modela el concepto de que cuando se prefiere la alternativa a_i a la alternativa a_j con un valor rp^h_{ij} y la alternativa a_j a la alternativa a_k con un valor rp^h_{jk}, entonces se debe preferir la alternativa a_i a la alternativa a_k con al menos una intensidad de preferencia rp^h_{ik} igual al máximo de los valores anteriores. Al igual que en el caso anterior, la igualdad debe mantenerse solamente cuando exista indiferencia entre al menos dos de las tres alternativas, en cuyo caso coinciden la transitividad $\text{máx} - \text{máx}$ restringida y la transitividad $\text{máx} - \text{mín}$ restringida. Es evidente que este concepto es, por un lado, más fuerte que la transitividad $\text{máx} - \text{mín}$ restringida y, por otro lado, más débil que la transitividad $\text{máx} - \text{mín}$. Este concepto ha sido considerado por Tanino como una condición obligatoria que debe verificarse en una relación de preferencia difusa consistente [191]. Se define como:

$$rp^h_{ij} \geq 0.5,\ rp^h_{jk} \geq 0.5 \Rightarrow rp^h_{ik} \geq \text{máx}(rp^h_{ij}, rp^h_{jk}),\ \ \forall i, j, k.$$

- Transitividad multiplicativa [191]. Se define como:

$$(rp_{ji}^h/rp_{ij}^h) \cdot (rp_{kj}^h/rp_{jk}^h) = rp_{ki}^h/rp_{ik}^h, \ \ \forall i, j, k.$$

  Tanino definió este concepto de transitividad solamente para el caso de que $rp_{ij}^h > 0 \ \forall i, j$, e interpretó rp_{ij}^h/rp_{ji}^h como una relación de la intensidad de preferencia de a_i respecto a a_j. Esto implica que a_i es rp_{ij}^h/rp_{ji}^h veces tan buena como a_j. La transitividad multiplicativa incluye a la propiedad de transitividad $\text{máx} - \text{máx}$ restringida [190, 191]. Además, si se reescribe como $rp_{ij}^h \cdot rp_{jk}^h \cdot rp_{ki}^h = rp_{ik}^h \cdot rp_{kj}^h \cdot rp_{ji}^h \ \forall i, j, k$, puede extenderse a todo el conjunto de relaciones de preferencia difusas recíprocas, es decir, cuando los valores de rp_{ij}^h pueden asumir valores iguales a 0.

- Transitividad aditiva [190, 191]. Vamos a suponer que nuestra intención es establecer una clasificación entre tres alternativas, a_i, a_j y a_k. Además, la información que tenemos sobre estas alternativas hace que nos decantemos por una situación de indiferencia, es decir, $a_i \sim a_j \sim a_k$. Al expresar nuestras preferencias, la indiferencia se representa mediante $rp_{ij}^h = rp_{jk}^h = rp_{ik}^h = 0.5$. Vamos a suponer ahora que recibimos alguna información que nos indica que $a_i \prec a_j$, es decir, $rp_{ij}^h < 0.5$. Esto implica que debemos modificar rp_{jk}^h o rp_{ik}^h. Si no lo hacemos, estamos incurriendo en una contradicción ya que ocurriría que $a_i \prec a_j \sim a_k \sim a_i$. Supongamos que $rp_{jk}^h = 0.5$, entonces tenemos que preferimos a_j a a_i y que hay indiferencia en la preferencia de a_j sobre a_k. Esto nos lleva a concluir que debemos preferir la alternativa a_k sobre a_i. Además, como $a_j \sim a_k$, entonces $rp_{ij}^h = rp_{ik}^h$. Por consiguiente, $(rp_{ij}^h - 0.5) + (rp_{jk}^h - 0.5) = (rp_{ij}^h - 0.5) = (rp_{ik}^h - 0.5)$. Idéntica conclusión se obtiene si $rp_{ik}^h = 0.5$. Si $rp_{jk}^h < 0.5$, entonces tendríamos que preferimos la alternativa a_k a la alternativa x_j y esta a su vez a la alternativa a_i. Por tanto, deberíamos preferir la alternativa a_k a la alternativa a_l. Por otra parte, el valor asignado a rp_{ik}^h debe ser menor o igual al asignado a rp_{ij}^h, siendo solamente igual si $rp_{ik}^h = 0.5$. Si el valor asignado a $rp_{ji}^h - 0.5$ se interpreta como la intensidad de preferencia de a_j sobre a_i, entonces es lógico hacer la suposición de que la intensidad de preferencia a_i sobre a_k debe igualar la suma de las intensidades de preferencias al emplear una alternativa intermedia a_j, es decir, $rp_{ik}^h - 0.5 = (rp_{ij}^h - 0.5) + (rp_{jk}^h - 0.5)$. La misma lógica se puede aplicar para el caso de que $rp_{jk}^h > 0.5$. Después de toda esta explicación, la transitividad aditiva se define como:

$$(rp_{ij}^h - 0.5) + (rp_{jk}^h - 0.5) = (rp_{ik}^h - 0.5), \quad \forall i, j, k. \tag{2.1}$$

La transitividad aditiva implica reciprocidad. Además, como $rp_{ii}^h = 0.5 \; \forall i$, si hacemos $k = i$ en (2.1), tenemos que $rp_{ij}^h + rp_{ji}^h = 1 \; \forall i, j$.

En resumen, una relación de preferencia difusa que cumpla alguna de las propiedades de transitividad anteriores se dice que es consistente para esa propiedad en concreto. Para clarificar esto, si una relación de preferencia difusa cumple la propiedad de transitividad aditiva, afirmaremos que es consistente de manera aditiva.

Finalmente, aunque aquí hemos presentado diferentes propiedades asociadas a las relaciones de preferencia difusas para modelizar la consistencia, ya que estas han sido ampliamente usadas en procesos de toma de decisiones en grupo, estas pueden extenderse a otras clases de relaciones de preferencias como las intervalares o las lingüísticas [117].

≪A veces, la persona a la que nadie imagina capaz de hacer nada es la que hace cosas que nadie imagina≫

Alan Turing

CAPÍTULO

3

Modelos de computación con palabras en toma de decisiones

La metodología de la computación con palabras se ha aplicado en diferentes entornos para reducir las diferencias existentes entre la computación y el razonamiento humano. Dado que la toma de decisiones es un proceso mental asociado a personas, parece lógico aplicar la metodología de la computación con palabras para construir modelos de decisión que enriquezcan aquellos en los que la información manipulada tiene un carácter cualitativo.

En este capítulo revisamos los principales desarrollos sobre computación con palabras en entornos de toma de decisiones. Comenzamos con una visión general de la metodología de computación con palabras en la sección 3.1. A continuación, en la sección 3.2, describimos cómo aplicarla en entornos de toma de decisiones. Finalizamos este capítulo con una breve reseña sobre diferentes modelos lingüísticos de computación con palabras, en concreto, los modelos semánticos de computación con palabras (sección 3.3), los modelos de computación con palabras basados en escalas cualitativas (sección 3.4) y los nuevos modelos de computación con palabras basados en expresiones lingüísticas complejas (sección 3.5).

3.1 La metodología de la computación con palabras

La computación con palabras es una metodología que se basa en el empleo de palabras y proposiciones del lenguaje natural como principales objetos de cómputo. Zadeh introdujo esta metodología en uno de sus artículos más influyentes [247], en el cual presentó los principales conceptos asociados a esta metodología: los gránulos [252] y las variables lingüísticas [248, 249, 250].

Un gránulo se define como ≪un grupo de objetos (o puntos) que se unen por su similitud, proximidad o funcionalidad≫ [252]. A modo de ejemplo, los gránulos de un ordenador podrían ser la caja, la pantalla, el teclado y el ratón. Además, los gránulos de la caja son el procesador, la placa base, la memoria principal, el disco duro y las tarjetas de expansión (Figura. 3.1). A partir del ejemplo, podemos notar

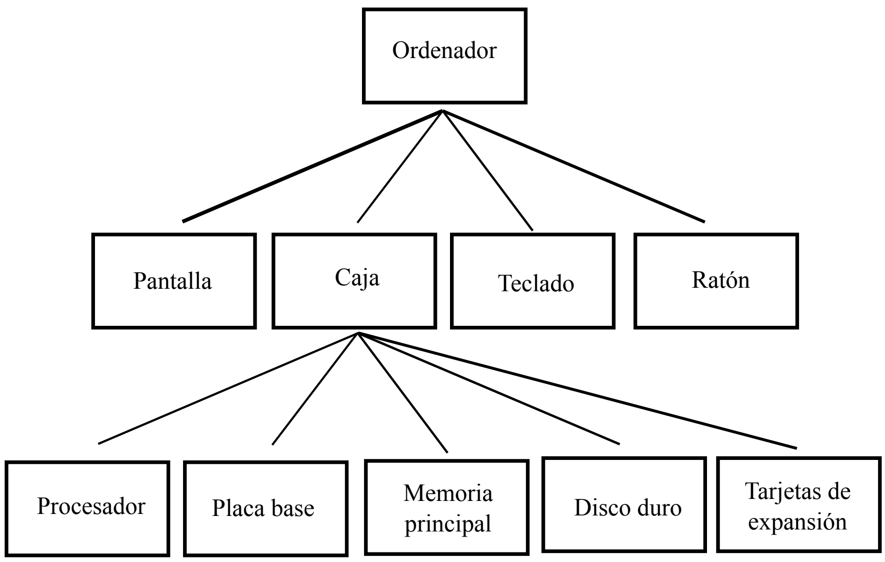

Figura 3.1. Ejemplo de granulación de un ordenador.

que la granulación, es decir, la descomposición del todo en partes es, en general, de naturaleza jerárquica.

Los gránulos se pueden ver desde una doble perspectiva [74]. La primera, la cual se asume en muchos métodos y técnicas de cálculo como la teoría de conjuntos aproximados, la técnica de divide y vencerás, los árboles de decisión, etc., corresponde a una interpretación nítida de los gránulos. Es decir, el proceso de descomposición da lugar a gránulos disjuntos, los cuales se diferencian fácilmente. La segunda aparece especialmente en procesos relacionados con el razonamiento humano y la formación de conceptos, en los cuales los gránulos son difusos en lugar de nítidos. Volviendo al ejemplo anterior, es fácil encontrar ordenadores en los que la caja esté integrada en la pantalla o placas base que incorporen varias tarjetas de expansión (dispositivos de sonido y gráficos), lo que dificulta diferenciar los gránulos. Además, los gránulos suelen estar asociados a atributos difusos, por ejemplo, es posible clasificar los dispositivos de almacenamiento según el atributo ≪capacidad de almacenamiento≫ con los valores difusos ≪grande≫, ≪medio≫ o ≪bajo≫. Esta imprecisión asociada a los gránulos, sus atributos y sus valores es característica de la forma en la cual las personas forman, organizan y manipulan los conceptos.

Por tanto, en muchas situaciones podemos considerar a un gránulo como un conjunto difuso de puntos unidos por su similitud. En la metodología de la computación con palabras, un gránulo g que denota a una palabra p se ve como una restricción difusa sobre una variable. El concepto de granulación difusa ha sido extensamente estudiado en la literatura [8, 40, 168].

Otro supuesto básico de la metodología de computación con palabras es que la información se proporciona restringiendo el valor de las variables. Además, se asume que la información consiste en un conjunto de proposiciones expresadas en un lenguaje natural o sintético, es decir, que las variables toman como posibles valores los lingüísticos.

Una variable lingüística se define como ≪una variable cuyos valores no son números sino palabras o sentencias de un lenguaje natural o artificial≫ [248]. El principal propósito de utilizar valores lingüísticos (palabras u oraciones) en lugar de números se debe a que las caracterizaciones lingüísticas suelen ser menos específicas que las numéricas, pero mucho más cercanas a la forma en que los humanos expresan y utilizan su conocimiento. Por ejemplo, decir que ≪la mujer es alta≫ es menos preciso que decir que ≪la mujer mide dos metros≫. En este caso, podemos considerar a ≪alta≫ como un valor lingüístico de la variable ≪altura≫ que es menos preciso e informativo que el valor numérico ≪dos≫. A pesar de ser menos informativo, el valor ≪alta≫ permite a las personas expresar y usar de forma natural información que puede ser incierta o incompleta (el hablante puede no conocer la altura exacta de la mujer). Como este tipo de situaciones en las que la información es imprecisa son muy comunes en la vida real, las variables lingüísticas son esenciales para modelar el conocimiento humano.

Formalmente, una variable lingüística es una 5-tupla $\langle L, T(L), U, S, M\rangle$ [248] en la cual:

- L representa el nombre asociado a la variable.
- $T(L)$ representa una colección finita de valores o términos lingüísticos.
- U determina el universo del discurso.
- S define la regla sintáctica que genera los valores lingüísticos en $T(L)$.
- M define la regla semántica que relaciona cada valor lingüístico X con su significado $M(X)$, siendo $M(X)$ un subconjunto difuso de U.

En la Figura. 3.2 podemos ver un ejemplo de la variable lingüística ≪altura≫, cuyo correspondiente conjunto de términos lingüísticos es $T(\text{altura}) = \{$muy baja, baja, media, alta, muy alta$\}$. Se puede observar cómo la regla semántica asocia cada uno de los términos lingüísticos X a su subconjunto difuso $M(X)$ de U. Es evidente que un aspecto crucial que determinará la validez de un método de computación con palabras es la determinación de las correctas funciones de pertenencias para los términos lingüísticos del conjunto $T(L)$.

Tanto las variables lingüísticas como la metodología de la computación con palabras han sido un excelente campo de investigación desde sus inicios. La estrecha relación entre la teoría de conjuntos difusos y la metodología de la computación con palabras se describe con más detalle en [136, 196, 197, 248, 249, 250, 251]. También se presentó cómo la metodología de la computación con palabras puede usarse para ir más allá de los esquemas actuales de computación que trabajan con valores numéricos a un nuevo tipo de cómputo donde los datos asumen la forma

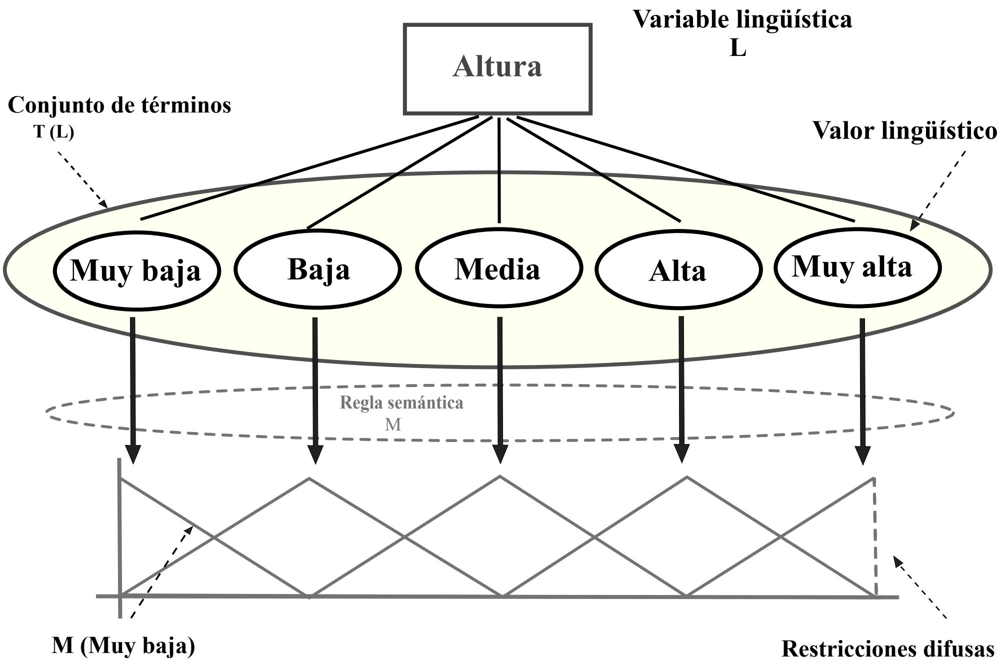

Figura 3.2. Ejemplo de la variable lingüística ≪altura≫.

de percepciones [253]. De esta forma, el concepto de computador perceptivo como arquitectura para la metodología de la computación con palabras también ha sido investigado [29, 135, 210]. En la Figura 3.3, se muestra el diagrama de un computador perceptivo, en el cual un codificador transforma las percepciones lingüísticas en conjuntos difusos y da lugar a un conjunto de palabras con sus conjuntos difusos asociados. Las salidas del codificador activan el motor de computación con palabras, cuya salida es otro conjunto difuso, el cual el codificador asocia a la palabra más similar del conjunto de palabras. En [137], Mendel encuentra los orígenes de la computación perceptiva en [193] y destaca que Schmucker presentó en su monografía la esencia de la computación perceptual [182].

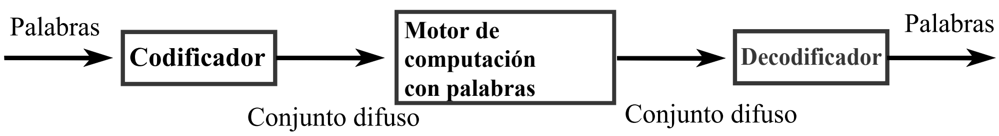

Figura 3.3. Computador perceptivo para evaluaciones subjetivas.

Otro concepto importante relacionado con la metodología de la computación con palabras es el proceso de retraslación, es decir, el proceso que consiste en representar un conjunto difuso de forma aproximada mediante una palabra o término lingüístico de un conjunto predeterminado. Yager estudió este problema en [234] y Martin y Klir presentaron en [130] dos enfoques diferentes para tratar este problema en el campo de la computación con percepciones.

Finalmente, queremos centrar nuestra atención en el trabajo presentado en [54], en el cual los autores discuten y analizan la semántica de los conjuntos difusos. Según Dubois y Prade: ≪Tres semánticas principales para las funciones de pertenencia parecen existir en el literatura: similitud, preferencia e incertidumbre≫. Anteriormente, hemos presentado la relación directa entre la similitud y la granulación. Además, la utilización de los conjuntos difusos en ambientes de incertidumbre ha sido ampliamente estudiada en la literatura [52, 113, 228, 245]. Por tanto, parece natural pensar que la tercera semántica de los conjuntos difusos, es decir, la preferencia, se utiliza en la toma de decisiones: la preferencia particular de alguien que toma una decisión se puede expresar mediante el uso de preferencias difusas o valores lingüísticos. De esta forma, en un esquema de expresión de preferencias en un entorno de toma de decisiones lingüístico se define primero el conjunto de términos lingüísticos que utilizará la persona para expresar sus preferencias. Hecho esto, estas preferencias se representarán finalmente mediante un formato de representación particular de preferencias lingüísticas (por ejemplo, funciones de utilidad lingüísticas o relaciones de preferencia lingüísticas [31]).

3.2 Computación con palabras en toma de decisiones

Recordemos que nos centramos en un problema de decisión en el que hay varias alternativas y una serie de individuos evalúan estas alternativas, en base a ciertos criterios establecidos, mediante términos lingüísticos [122, 77, 143]. El resultado de este proceso de decisión será una única alternativa, un conjunto de alternativas o una clasificación de estas de mejor a peor como solución del problema.

El proceso de resolución de cualquier problema de decisión consta de cinco etapas:

1. Definición del problema de decisión.

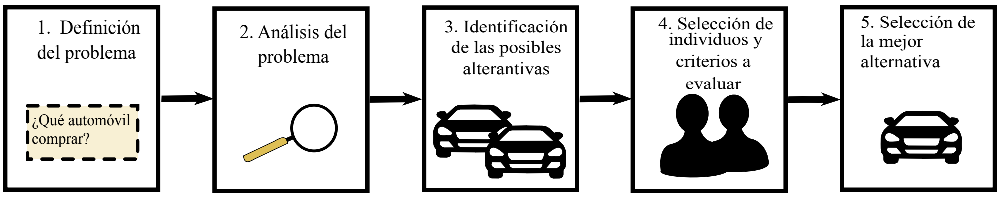

Figura 3.4. Etapas para resolver un problema de decisión.

2. Análisis del problema de decisión.

3. Identificación de las posibles alternativas para resolver el problema de decisión.

4. Selección de los individuos responsables de la toma de decisiones y de los criterios con los que se evaluarán las alternativas.

5. Selección de la mejor alternativa para resolver el problema de decisión.

La Figura 3.4 describe un ejemplo de estas etapas. Primero, se define el problema de decisión, el cual consiste en la elección de un automóvil. Segundo, se analiza el problema: encontrar las necesidades que se buscan en el automóvil, descartar tipos de vehículos, hacer una lista preliminar de los posibles modelos, etc. Después del análisis inicial, en tercer lugar se seleccionan dos automóviles como posibles alternativas de elección. Cuarto, se escogen dos expertos en automóviles como responsables para expresar sus preferencias sobre los posibles automóviles. Quinto, se efectúa el proceso de decisión y se escoge el mejor automóvil de los dos.

La última etapa, la etapa de seleccionar la mejor alternativa, implica, como vimos en el capítulo anterior, dos nuevas etapas según la teoría de análisis de decisión clásica [18, 175]:

- Agregación. Esta etapa consiste en fusionar las evaluaciones con respecto a todos los criterios o individuos para obtener una preferencia colectiva para las alternativas.

- Explotación. Esta etapa consiste en obtener la mejor alternativa, o una clasificación de estas, a partir de la preferencia colectiva.

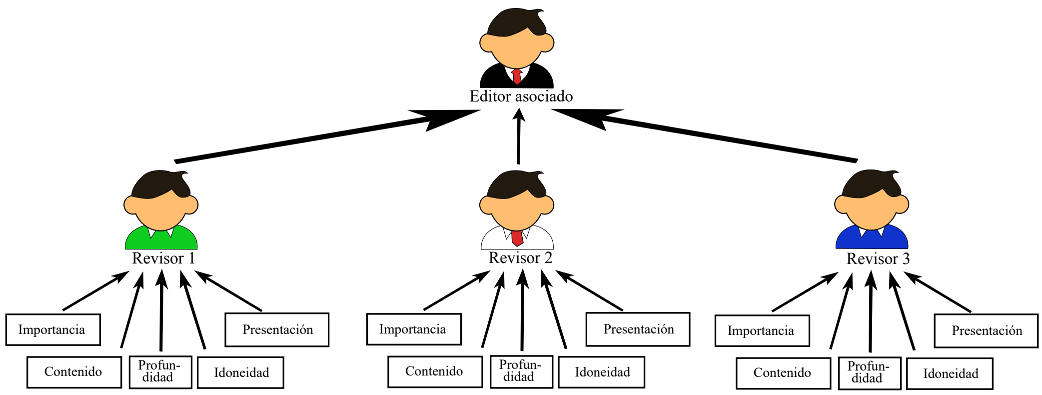

Figura 3.5. **Esquema de evaluación en una revista.**

Un claro ejemplo de aplicación de las etapas de agregación y explotación lo encontramos en el trabajo de Wu y Mendel [211], en el cual se describe el proceso de decisión sobre el esquema de evaluación de una revista (Figura 3.5). En este proceso, el editor asociado de la revista selecciona a diversos revisores (los responsables de la toma de decisiones) para que evalúen un determinado artículo enviado a la revista. Los revisores tienen que elegir entre varias alternativas: rechazar el artículo, aceptarlo si los autores mejoran el artículo o aceptarlo directamente tal y como está. De cara a evaluar el trabajo y tomar una decisión sobre este, los revisores deben tener en cuenta diferentes criterios como la importancia, el contenido, la profundidad, la presentación, la idoneidad para la revista, etc. Una vez que todos los revisores han evaluado el artículo, el editor asociado debe agregar esta información y aplicar la etapa de explotación en la que, a partir de esa información agregada, obtendrá la evaluación final del artículo: rechazarlo, aceptarlo o informar a los autores de que deben volver a presentarlo con las modificaciones que los revisores solicitan en sus evaluaciones.

Sin embargo, cuando se utiliza información lingüística, el esquema anterior debe modificarse. Según Herrera y Herrera-Viedma [77], antes de efectuar las etapas de agregación y explotación es necesario incluir dos etapas previas. Por tanto, cuando se emplea información lingüística, el esquema de resolución constaría de las siguientes etapas:

- Selección del modelo de representación. En esta etapa se establece el dominio de las expresiones lingüísticas con las que se expresan las evaluaciones sobre las alternativas. En concreto, se establecen la granularidad del conjunto de términos lingüísticos, sus valores y su semántica.

- Selección de los operadores de agregación. En esta etapa se escogen los operadores de agregación más apropiados para agregar y combinar las evaluaciones lingüísticas proporcionadas.

- Selección de la mejor alternativa. En esta etapa se obtiene la mejor alternativa, o una clasificación de las alternativas, de acuerdo con las evaluaciones lingüísticas proporcionadas. Esta etapa está a su vez compuesta por las siguientes subetapas:

  - Agregación de la información lingüística. En esta subetapa se genera una evaluación lingüística colectiva de las alternativas. Para ello, se agregan las evaluaciones lingüísticas comunicadas por los individuos que participan en el problema de decisión mediante el operador de agregación de información lingüística elegido.
  - Explotación. En esta subetapa se establece un orden entre las alternativas utilizando para ello la evaluación lingüística colectiva obtenida en la etapa anterior.

De acuerdo con este esquema de resolución, se hace evidente la necesidad de modelos de computación con palabras que permitan tanto la representación como la agregación de evaluaciones lingüísticas.

3.3 Modelos semánticos de computación con palabras

Los primeros modelos desarrollados para la computación con palabras en toma de decisiones se basaron en el uso de funciones de pertenencia, de ahí que se conozcan como modelos semánticos. Estos modelos trabajan con los números difusos asociados a la semántica de los términos lingüísticos y utilizan el principio de extensión [248, 249, 250], concepto fundamental de la teoría de conjunto difusos que introdujo Zadeh para generalizar nociones matemáticas precisas a conjuntos difusos

[50], para la agregación. Dentro de la clase de modelos semánticos de computación con palabras encontramos: el modelo basado en funciones de pertenencia [38] y el modelo basados en conjuntos difusos de tipo 2 [98, 135, 198].

3.3.1 Modelos basados en funciones de pertenencia

Estos modelos semánticos de computación con palabras se basan en la utilización de funciones de pertenencia asociadas a los términos lingüísticos y en el principio de extensión para trabajar con información lingüística [38]. En concreto, una función de agregación $\tilde{F}$ aplicada sobre n términos lingüísticos pertenecientes a un conjunto de términos lingüísticos $T(L)$ da lugar a un número difuso $F(\mathcal{R})$ que no tiene un término lingüístico correspondiente en $T(L)$ y, aquí, el proceso de retraslación entra en juego [130, 234]. A partir de este resultado, tenemos dos opciones:

- Aplicar una función de aproximación $app_1(\cdot)$ para asociar el número difuso a un término lingüístico que pertenezca a $T(L)$ [38]:

$$T(L)^n \xrightarrow{\tilde{F}} F(\mathcal{R}) \xrightarrow{app_1(\cdot)} T(L).$$

- Obtener una evaluación numérica que ordene a las alternativas de mejor a peor como solución al problema. Para ello, se emplean funciones de clasificación que ordenan a los números difusos [14]:

$$T(L)^n \xrightarrow{\tilde{F}} F(\mathcal{R}) \xrightarrow{\text{clasificación difusa}} \text{clasificación numérica}.$$

En la Figura 3.6 podemos ver un ejemplo que ilustra el proceso de retraslación. Supongamos que aplicamos una función de agregación $\tilde{F}$ sobre una serie de términos lingüísticos que pertenecen al conjunto $T(L) = \{$nulo, muy bajo, bajo, medio, alto, muy alto, total$\}$. Como resultado de la agregación obtenemos un número difuso $F(\mathcal{R})$. Sin embargo, como a este número difuso no le corresponde ningún término lingüístico de $T(L)$, necesitamos una función de aproximación $app_1(\cdot)$ para asignarle el término lingüístico «medio» o el término lingüístico «alto» a $F(\mathcal{R})$.

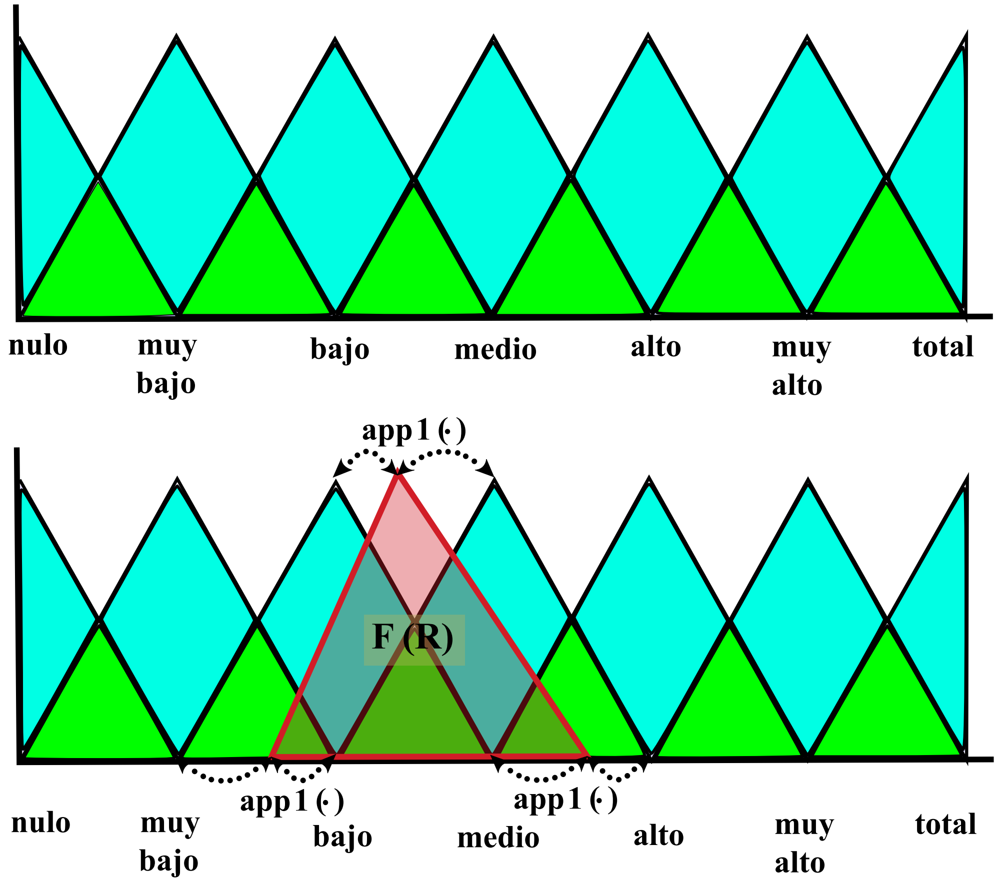

Figura 3.6. Proceso de retraslación.

Las limitaciones de usar una función de aproximación son la falta de precisión en el resultado y la pérdida de información, los cuales son aspectos críticos a considerar en la toma de decisiones.

3.3.2 Modelos basados en conjuntos difusos de tipo 2

Estos modelos semánticos de computación con palabras se basan en el uso de conjuntos difusos de tipo 2 para trabajar con información lingüística [98, 135, 137, 198, 199]. Algunas de las razones para utilizar conjuntos difusos de tipo 2 son:

- Según Türkşen [198]: «La representación de tipo 1 es un enfoque "reduccionista", ya que descarta la propagación de los valores de pertenencia mediante medias o ajustes de curvas y, por tanto, camufla la "incertidumbre" incrustada en la propagación de los valores de pertenencia. Por lo tanto, la representación de tipo 1 no proporciona una buena aproximación para la representación del significado de las palabras y no permite que la computación con palabras sea una plataforma más rica≫.

- Según Mendel [136]: ≪Las palabras significan diferentes cosas para distintas personas y, por eso, son inciertas. Por lo tanto, necesitamos un tipo de conjunto difuso para modelar una palabra que tenga el potencial de captar su incertidumbre, y un conjunto difuso de tipo 2 intervalar debería por tanto utilizarse como tipo de conjunto difuso para modelar una palabra≫.

Entre las distintas clases de conjuntos difusos de tipo 2, la mayoría de los modelos emplean conjuntos difusos de tipo 2 intervalares [181, 212], ya que estos reducen la complejidad de los cálculos necesarios para agregar conjuntos difusos de tipo 2 pero mantienen sus propiedades a la hora de modelizar la incertidumbre. En estos modelos, el conjunto difuso de tipo 2 obtenido por una función de agregación tiene que asociarse a alguno de los términos lingüísticos del conjunto de términos lingüísticos mediante un proceso de retraslación. Por consiguiente, estos modelos presentan los mismos inconvenientes de los modelos semánticos basados en funciones de pertenencia.

3.4 Modelos de computación con palabras basados en escalas cualitativas

Con la intención de solventar las limitaciones de los modelos semánticos de computación con palabras, en particular el de la pérdida de información, se han desarrollado diferentes modelos de computación con palabras basados en escalas cualitativas. Dadas sus ventajas, estos modelos han sido los más utilizados en toma de decisiones y a los que más esfuerzo les han dedicado los investigadores. Podemos clasificar a estos modelos en tres grupos diferentes: (i) modelos basados en escalas cualitativas ordinales, (ii) modelos basados en funciones de escalas lingüísticas (definidas por funciones matemáticas entre términos lingüísticos y valores numéricos) y (iii) el modelo de semántica individual personalizada basado en consistencia.

3.4.1 Modelos basados en escalas cualitativas ordinales

Estos modelos se propusieron para trabajar con conjuntos de términos lingüísticos distribuidos uniforme y simétricamente y además con cardinalidad impar. Entre los modelos basados en escalas cualitativas ordinales podemos destacar: (i) el modelo que usa operadores de agregación basados en el orden [227], (ii) el modelo basado en combinación convexa [39], (iii) el modelo lingüístico 2-tupla [85], (iv) el modelo basado en términos lingüísticos virtuales [218], (v) el modelo lingüístico multigranular [78], (vi) el modelo basado en jerarquías lingüísticas [79], y (vii) el modelo basado en medidas de proximidad [68]. A continuación describimos brevemente cada uno de ellos.

3.4.1.1 Modelo con operadores de agregación basados en orden

Este modelo fue propuesto por Yager en 1981 y es el primero basado en escalas cualitativas ordinales [227]. Este modelo utiliza un conjunto de términos lingüísticos $S = \{s_0, \ldots, s_g\}$ con un orden lineal entre ellos como única estructura disponible. El modelo utiliza los operadores clásicos máx, mín y $\neg$, para agregar los términos lingüísticos del conjunto ordenado:

- $\text{máx}(s_i, s_j) = s_i$ si $i \geq j$,
- $\text{mín}(s_i, s_j) = s_i$ si $i \leq j$, y
- $\neg(s_i) = s_{g-i}$, siendo g la cardinalidad de S.

Yager estudió varios operadores de información ordinal para agregar coherentemente evaluaciones lingüísticas [231, 235]. También estudió operadores de agregación de información ordinal tales como operadores normalizados ponderados, uninormas y medias ordinales [235]. Buckley también usó variaciones de la media, el máximo y el mínimo para agregar información lingüística [15].

Además, recientemente Yager notificó que los seres humanos presentan dos características esenciales que los sistemas de toma de decisiones deben considerar [237]. Por un lado, las personas se sienten más cómodas cuando expresan sus opiniones mediante términos lingüísticos en lugar de valores numéricos. Desde un punto de vista matemático, la información lingüística se basa en la representación ordinal. Esto justifica la necesidad de operadores de agregación basados en el orden. Por otro lado, la indecisión y la falta de compromiso. Ambas características pueden modelarse mediante conjuntos difusos intuicionistas de Atanassov [5]. Por tanto, Yager trata de analizar entornos donde la información proporcionada es ordinal y basada en conjuntos difusos intuicionistas. Teniendo esto en cuenta, Yager propone también el siguiente modelo ordinal basado en conjuntos difusos intuicionistas $A =< A^+, A^- >$ tal que $A^+(x) \in S$ simboliza el grado de pertenencia de x en A y $A^-(x) \in S$ simboliza el grado de no pertenencia de x en A verificando que $A^-(x) \leq \neg(A^+(x))$ y $A^+(x) \leq \neg(A^-(x))$.

3.4.1.2 Modelo basado en combinación convexa

El siguiente modelo propuesto fue el modelo de agregación simbólica clásico [39]. Este modelo realiza la agregación mediante la combinación convexa de los términos lingüísticos que opera directamente sobre los índices del conjunto de términos lingüísticos $S = \{s_0, \ldots, s_g\}$ de forma recursiva, el cual produce un valor real dentro del intervalo de granularidad de S. Este modelo asume que la granularidad de S es impar y que los términos lingüísticos se distribuyen simétricamente alrededor del término lingüístico central. Al igual que los modelos semánticos, este modelo simbólico necesita una función de aproximación $app_2(\cdot)$ para obtener un término lingüístico de S, dado que la agregación no produce generalmente un valor entero, es decir, no está asociado con ningún término lingüístico de S.

$$S^n \xrightarrow{C} [0, g] \xrightarrow{app_2(\cdot)} \{0, \ldots, g\} \rightarrow S.$$

Como ejemplo, vamos a agregar los términos lingüísticos «muy alto», «medio», «muy bajo» y «bajo» del conjunto de términos lingüísticos $S = \{$nulo, muy bajo, bajo, medio, alto, muy alto, total$\}$, siendo $C\{$muy alto, medio, muy bajo, bajo$\} = C\{s_5, s_3, s_1, s_2\} = 2.75$, el cual no coincide con ningún índice de los asociados a los términos lingüísticos de S. Por tanto, necesitamos una función de aproximación, $app_2(\cdot)$, definido como la típica función de redondeo *round* de forma que el resultado final obtenido es $s_{round}(2.75) = s_3 =$ «medio». Por tanto, aunque este modelo siempre proporciona resultados lingüísticos, también conlleva pérdida de información.

Entre los operadores de agregación definidos para este modelo encontramos el operador LOWA (Linguistic Ordered Weighted Averaging) [81], los operadores LWD (Linguistic Weighted Disjunction), LWC (Linguistic Weighted Conjunction), y LWA (Linguistic Weighted Averaging) [75], el operador LAMA (Linguistic Aggregation of Majority Additive) [164] y los operadores de agregación lingüísticos inducidos y guiados por mayoría [96], entre otros.

3.4.1.3 Modelo lingüístico 2-tupla

Herrera y Martínez desarrollaron este modelo simple y comprensible basado en aproximaciones simbólicas con las siguientes características [85]:

- Facilita los procesos de computación con palabras y evita la pérdida de información.

- Mientras que los anteriores modelos tratan el dominio lingüístico como discreto, este modelo lo trata como continuo, de forma que la información lingüística se modela por un par de valores, (s, α), llamado 2-tupla lingüística, siendo s un término lingüístico y α un valor numérico determinando una traslación simbólica.

- Extiende el dominio lingüístico original a una 2-tupla lingüística para expresar los resultados de los procesos de computación con palabras.

Definición 3.4.1 *[85] Sea β el resultado de la agregación de los índices de una serie de valores de un conjunto de términos lingüísticos S, es decir, el resultado de una operación de agregación simbólica. $\beta \in [0, g]$, siendo $g + 1$ la cardinalidad de S. Sean $i = round(\beta)$ y $\alpha = \beta - i$ dos valores tal que $i \in [-0.5, 0.5)$, entonces α se denomina la traslación simbólica.*

Este modelo también introduce funciones de transformación entre 2-tuplas lingüísticas y valores numéricos.

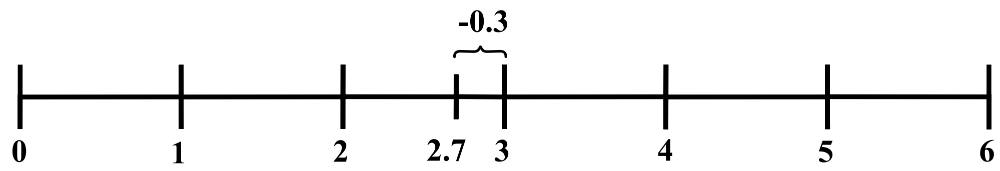

Figura 3.7. Ejemplo de 2-tupla lingüística.

Definición 3.4.2 *[85] Sea $S = \{s_0, \ldots, s_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos y $\beta \in [0, g]$ un valor que representa el resultado de una operación de agregación simbólica, entonces la 2-tupla que expresa la información equivalente a β se obtiene con la siguiente función:*

$$\Delta \colon [0, g] \longrightarrow S \times [-0.5, 0.5)$$
$$\Delta(\beta) = (s_i, \alpha), \ con \begin{cases} s_i, & i = round(\beta) \\ \alpha = \beta - i, & \alpha \in [-0.5, 0.5), \end{cases}$$

donde $round(\cdot)$ es la operación usual de redondeo, s_i es el término lingüístico con el índice más cercano a β y α es el valor de la traslación simbólica. Además, tenemos que:

$$\Delta^{-1} \colon S \times [-0.5, 0.5) \longrightarrow [0, g]$$
$$\Delta^{-1}(s_i, \alpha) = i + \alpha = \beta.$$

Como ejemplo, supongamos que el resultado de una operación de agregación simbólica sobre el conjunto $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ es $\beta = 2.7$. En este caso, la 2-tupla $(s_3, -0.3)$ determina la información equivalente a β (Figura 3.7).

Dadas sus características, el modelo lingüístico 2-tupla ha recibido una gran aceptación entre la comunidad científica [60, 132]: (i) varios operadores de agregación clásicos como, por ejemplo, el de agregación ponderado ordenado, el operador medio ponderado y la media aritmética, entre otros, han sido extendidos para agregar información lingüística 2-tupla [131], (ii) ha sido extendido para trabajar con información lingüística no balanceada [79] y multigranular [86], (iii) y una nueva forma de modelar la información lingüística, denominada 2-tupla proporcional [207], ha sido introducido como extensión y generalización del modelo lingüístico 2-tupla.

3.4.1.4 Modelo basado en términos lingüísticos virtuales

Este modelo fue propuesto por Xu [218] para extender el conjunto de términos lingüísticos discretos $S = \{s_{-g/2}, \ldots, s_0, \ldots, s_{g/2}\}$, siendo $g + 1$ su granularidad, al conjunto de términos lingüísticos continuos $S' = \{s_\alpha \mid \alpha \in [-t, t]\}$, siendo t $(t \gg q/2)$ un entero positivo lo suficientemente grande. Si $s_\alpha \in S$, se denomina término lingüístico original. En otro caso, se denomina término lingüístico virtual. En la Figura 3.8, podemos observar el conjunto de términos lingüísticos $S = \{s_{-3}, \ldots, s_3\}$. Este conjunto se puede extender a un conjunto de términos lingüísticos continuos en el cual los términos lingüísticos virtuales como, por ejemplo, $s_{-0.25} \in [-3, 3]$, podrían obtenerse si agregamos los términos lingüísticos «muy alto», «medio», «muy bajo» y «bajo», usando el operador lingüístico media [220].

Este modelo utiliza un conjunto de términos lingüístico que cambia durante el proceso de decisión a medida que se crean nuevos términos lingüísticos virtuales en los procesos de agregación. Además, este modelo permite el uso de operadores aritméticos y la multiplicación entre un término lingüístico y un valor real, lo que podría dar lugar a la aparición de términos lingüísticos virtuales estando en un rango bastante diferente de los originales. Estas cuestiones limitan la interpretabilidad de los modelos de decisión que implementan este modelo de computación con palabras. Por tanto, este modelo también presenta el problema de retraslación si los resultados de las operaciones son términos lingüísticos virtuales (es lo usual en este modelo) y los resultados finales deben expresarse en el conjunto de términos lingüísticos original. Sin embargo, el modelo es sencillo y evita la pérdida de

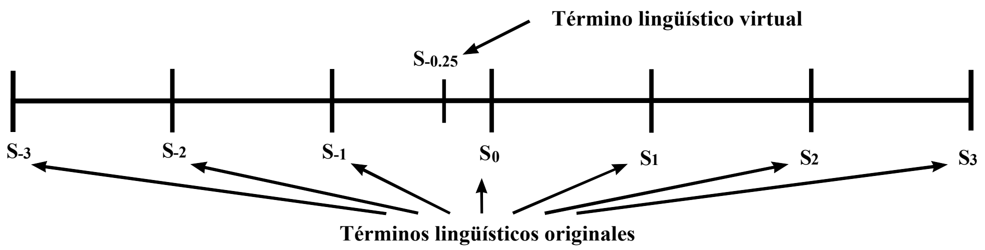

Figura 3.8. Ejemplo del modelo basado en términos lingüísticos virtuales.

información ya que se puede utilizar para clasificar las alternativas y, por tanto, seleccionar la mejor de ellas. Por último, cabe destacar que en [225] se demostró que este modelo es equivalente al modelo lingüístico 2-tupla [85].

3.4.1.5 Modelo lingüístico multigranular

Los modelos anteriores asumen que los responsables de tomar la decisión coinciden tanto en usar los mismos términos lingüísticos como en el significado de estos. Sin embargo, esto no siempre es así, ya que los problemas de toma de decisiones suelen darse en contextos bastante complejos donde hay que gestionar información heterogénea. Para solventar esta limitación, surgen los modelos lingüísticos multigranulares [78, 86, 95, 150, 151]. En estos modelos, los términos lingüísticos empleados por los individuos pueden pertenecer a diferentes conjuntos de términos lingüísticos con diferentes semánticas y granularidad. Estos modelos suelen consistir en los siguientes pasos [78]:

- Se asume un entorno $F_{MS} = \{S_j\}$, $S_j = \{s_0^j, \ldots, s_{s_{g_j}}^j\}$, $j = \{1, \ldots, n\}$, que incluye diferentes conjuntos de términos lingüísticos. Cada término $s_i^j \in S_j$ tiene su propia semántica $\mu_{s_j}(x)$ y granularidad g_j. Por lo tanto, cada individuo puede expresar sus evaluaciones mediante su propia escala lingüística.

- Unificar la información lingüística multigranular. Usualmente, se realiza en dos etapas:

  - Seleccionar un conjunto de términos lingüísticos básico S_T.
  - Cada término lingüístico s_i^j se expresa en S_T mediante una función de transformación. Sean S_j y S_T dos conjuntos de términos lingüísticos tales que $g_T > g_j$. Sea $F(S_T)$ el conjunto de conjuntos difusos definidos en S_T. La función de transformación multigranular se define como:

$$\begin{array}{l}\zeta_{S_j S_T} : S_j \to F(S_T) \\ \zeta_{S_j S_T}(s_i^j) = \sum_{k=0}^{g_T} s_k^T / \gamma_k^j, \text{ con } \gamma_k^j = \text{máx}_y \, \text{mín}\{\mu_{s_i^j}(y), \mu_{s_k^T}(y)\}.\end{array}$$

3.4.1.6 Modelo basado en jerarquías lingüísticas

El modelo anterior nos proporciona un mecanismo para trabajar con información lingüística multigranular, pero presenta falta de precisión en la etapa de unificación. El modelo basado en jerarquías lingüísticas intenta solventar este problema [79]. Este modelo define una estructura lingüística para manejar múltiples escalas lingüísticas de forma simbólica y obtiene resultados precisos que pueden expresarse en cualquiera de las escalas lingüísticas de la estructura. Una jerarquía lingüística es un conjunto de niveles, estando cada uno de ellos formado por un conjunto de términos lingüísticos con diferente granularidad. Las etapas de este modelo son similares a las del modelo anterior, aunque con algunas pequeñas modificaciones:

- El marco de referencia es una jerarquía lingüística, $JL = \bigcup_t S_{n(t)}$, $t \in \{1, \ldots, m\}$, que contiene m niveles. Cada uno de ellos está formado por un conjunto de términos lingüísticos con cardinalidad impar y simétricamente distribuidos. El conjunto de términos lingüísticos que forma parte del nivel $t+1$ se genera a partir del nivel t como $S_{n(t)} \rightarrow S_{(2n(t)-1)}$. Por ejemplo, si el nivel uno es S_3, el nivel dos será S_5 y el nivel tres S_9.

- Para representar la información lingüística en un único dominio, se define una función de transformación $TF_{t'}^{t}$ entre los niveles t y t' mediante el modelo lingüístico 2-tupla de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &TF_{t'}^{t} : S_{n(t)} \rightarrow S_{n(t')} \\ &TF_{t'}^{t}(s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)}) = \Delta_{t'} \left(\frac{\Delta_t^{-1}(s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)})(n(t')-1)}{n(t)-1} \right). \end{aligned}$$

  El proceso de unificación se efectúa sin pérdida de información ya que $TF_{t'}^{t}$ es una función biyectiva.

- Las operaciones de agregación se basan en el modelo lingüístico 2-tupla ya que el resultado del proceso de unificación se corresponde con valores 2-tupla lingüísticos.

Además de para representar información lingüística multigranular, este modelo también se ha utilizado para representar información lingüística no balanceada [17, 23, 94], es decir, aquella en la que los términos lingüísticos no están simétrica ni uniformemente distribuidos alrededor del término lingüístico central.

3.4.1.7 Modelo basado en medidas de proximidad

Según García-Lapresta y Pérez-Román [69], no tiene sentido asignar números a los términos lingüísticos y, por tanto, ellos también basan sus estudios en escalas cualitativas ordenadas. A diferencia del modelo de Yager [227], estos autores consideran que no todos los términos deben estar uniformemente distribuidos. Las personas suelen hacer comparaciones ordinales entre pares de términos y, por tanto, estos autores consideran proximidades psicológicas entre los términos lingüísticos basados en una escala de orden que evita la escala numérica. El objetivo principal de este modelo es establecer cualquier tipo de distancia entre cada par de términos lingüísticos y luego trabajar con los términos diseñando un sistema de votación para clasificar las alternativas que los individuos evalúan.

Sea $S = \{s_0, \ldots, s_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos ordenado tal que $s_{i+1} > s_i$, y sea $\Delta = \{\delta_0, \ldots, \delta_h\}$ el conjunto de todas las proximidades psicológicas posibles entre los términos lingüísticos de forma que $\delta_0 \succ \cdots \succ \delta_h$ [69]. En otras palabras, Δ representa los grados de proximidades, siendo δ_0 la proximidad máxima y δ_h la mínima.

Definición 3.4.3 *[69] Una medida de proximidad ordinal sobre S tomando valores en Δ es una aplicación $\pi : S^2 \rightarrow \Delta$ donde $\pi(s_r, s_t) = \pi_{rt}$ es el grado de proximidad entre s_r y s_t que satisface las siguientes condiciones independientes:*

- *Exhaustividad:* $\forall \delta \in \Delta$, *existe* s_r, s_t *tal que* $\delta = s_{rt}$.
- *Simetría:* $\pi_{rt} = \pi_{tr}$ $\forall r, t \in \{0, \ldots, g\}$.
- *Proximidad máxima:* $\pi_{rt} = \delta_0 \Leftrightarrow r = t$ $\forall r, t \in \{0, \ldots, g\}$.
- *Monotonicidad:* $\min\{\pi_{rt}, \pi_{tu}\} \succ \pi_{ru}$ $\forall r, t, u \in \{0, \ldots, g\}$ *tal que* $r < t < u$.

Basándose en la distancia establecida entre los términos lingüísticos para trabajar con escalas cualitativas no necesariamente ordenadas de forma uniforme, estos autores diseñan un sistema de votación que ordena las alternativas de acuerdo con las medianas de las proximidades ordinales entre las evaluaciones de cada individuo y el término lingüístico mayor. Este modelo puramente ordinal se destaca porque propone una solución nueva para medir la distancia entre los términos lingüísticos, la cual permite obtener una solución justa y precisa a un problema de toma de decisiones en grupo.

3.4.2 Modelos basados en funciones de escalas lingüísticas

En la literatura se pueden encontrar distintos modelos que tratan de resolver procesos de toma de decisiones en grupo mediante el diseño de funciones de escalas lingüísticas, es decir, funciones matemáticas entre términos lingüísticos y valores numéricos. Entre estos modelos podemos destacar: (i) el modelo lingüístico 2-tupla proporcional [207], (ii) el modelo basado en escalas numéricas [44, 46], y (iii) los modelos basados en funciones matemáticas específicas. A continuación describimos brevemente cada uno de ellos junto con diversas funciones matemáticas específicas.

3.4.2.1 Modelo lingüístico 2-tupla proporcional

El modelo lingüístico 2-tupla fue extendido por Wang y Hao para trabajar con conjuntos de términos lingüísticos que no están necesariamente distribuidos de forma uniforme y simétrica. En este nuevo modelo, denominado modelo lingüístico 2-tupla proporcional, la información lingüística se representa a través de términos lingüísticos consecutivos con su correspondiente par de proporciones simbólicas.

Sea $S = \{s_0 \ldots, s_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos ordenado. La información lingüística se proporciona mediante un par de proporción simbólica $(\alpha s_i, \beta s_{i+1})$ siendo s_i, s_{i+1} dos términos lingüísticos de S con proporciones simbólicas correspondientes $\alpha, \beta \in [0, 1]$ verificando que $\alpha + \beta = 1$. Un par de proporción simbólica se denota mediante $(\alpha s_i, (1 - \alpha)s_{i+1})$. Por ejemplo, la evaluación $(0.4s_i, 0.6s_{i+1})$ significa que la persona confía en un 40 % en el término lingüístico s_i y en un 60 % en el término lingüístico s_{i+1}.

La colección de todos los pares de proporción simbólica se denota por $\overline{S} = \{(\alpha s_i, (1-\alpha)s_{i+1}) \mid \alpha \in [0,1],\ i = \{0,\dots,g-1\}\}$. Esta colección se conoce como la colección de 2-tuplas proporcionales ordinales generada por S, mientras que los términos de esta se conocen como 2-tuplas proporcionales ordinales.

Una limitación importante de este modelo es que la semántica asociada a los términos lingüísticos solo puede definirse a través de números difusos simétricos de tipo trapezoidal $s_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$ [57]. Sin embargo, esta semántica permite realizar cómputos de forma precisa. Este modelo extiende el concepto de valores característicos canónicos $CCV(s_i) = (b_i + c_i)/2$ de la siguiente forma:

Definición 3.4.4 *[207] Sean $S, \overline{S}$ y CCV definidos como anteriormente. El CCV de una 2-tupla proporcional, $(\alpha s_i, (1-\alpha)s_{i+1})$, se define como:*

$$CCV((\alpha s_i, (1-\alpha)s_{i+1})) = \alpha CCV(s_i) + (1-\alpha)CCV(s_{i+1}).$$

El modelo lingüístico 2-tupla proporcional no maneja bien la incertidumbre ni la falta de información ya que asume que $\alpha + \beta = 1$. Debido a esta limitación, este modelo fue extendido al modelo lingüístico 3-tupla proporcional [71]. Este modelo mejorado considera un parámetro numérico ϵ para representar el grado de ignorancia de la información, siendo $\alpha + \beta < 1$.

3.4.2.2 Modelo basado en escalas numéricas

Con la idea de combinar diferentes modelos lingüísticos e incrementar la precisión del modelo lingüístico 2-tupla, este fue extendido mediante los conceptos de escala numérica y de escala numérica intervalar [44, 46].

Dong y otros introdujeron el concepto de escala numérica para convertir valoraciones lingüísticas en números reales [44]. Estos autores determinaron que la cuestión más importante del modelo lingüístico 2-tupla (y sus extensiones) es la definición de la función que establece la asociación uno a uno entre la información lingüística y los valores numéricos. Según esta idea, estos autores propusieron una nueva extensión del modelo lingüístico 2-tupla mediante el concepto de escala numérica.

Definición 3.4.5 *[44] Sea $S = \{s_0, \ldots, s_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos, y $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. La función: $NS : S \to \mathbb{R}$ se define como una escala numérica de S, y $NS(s_i)$ se denomina como el índice numérico de s_i. Si la función NS es monótona estrictamente creciente, entonces NS es una escala numérica ordenada.*

Definición 3.4.6 *[44] Sean S y NS definidas como antes y $\overline{S}$ el conjunto de 2-tuplas asociado a S. La escala numérica $\overline{NS}$ sobre $\overline{S}$, para (s_i, α), se define por:*

$$\overline{NS} : \overline{S} \to \mathbb{R}$$

$$\overline{NS}(s_i, \alpha) = \begin{cases} NS(s_i) + \alpha \times (NS(s_{i+1}) - NS(s_i)), & \alpha \geq 0 \\ NS(s_i) + \alpha \times (NS(s_i) - NS(s_{i-1})), & \alpha < 0. \end{cases}$$

Este concepto es capaz de proporcionar un proceso de transformación general entre términos lingüísticos y valores numéricos. Puede verificarse que este modelo es equivalente al modelo lingüístico 2-tupla cuando $NS(s_i) = \Delta^{-1}(s_i)$, al modelo lingüístico 2-tupla proporcional cuando $NS(s_i) = CCV(s_i)$ y al modelo basado en jerarquías lingüísticas cuando se establece una expresión más compleja. Además, en [44], NS se introdujo como una familia de funciones, y cuando estas son funciones ordenadas, se verificó que existe su función inversa NS^{-1}.

El modelo de escala numérica se extendió a su vez mediante el concepto de escala numérica intervalar [46], el cual convierte las valoraciones lingüísticas en valores numéricos intervalares. Sea $M = \{[A_L, A_R] \mid A_L, A_R \in \mathbb{R},\ A_l \leq A_R\}$ un conjunto de números intervalares. La escala numérica intervalar de S se define mediante la función $INS : S \to M$ y el índice numérico intervalar de s_i se representa por $INS(s_i)$. Por otra parte, la escala numérica intervalar $\overline{INS}$ sobre $\overline{S}$ se define mediante:

$$\overline{INS} : \overline{S} \to M$$
$$\overline{INS}(s_i, \alpha) = [A_L, A_R],$$

donde

$$A_L = \begin{cases} INS_L(s_i) + \alpha \times (INS_L(s_{i+1}) - INS_L(s_i)), & \alpha \geq 0 \\ INS_L(s_i) + \alpha \times (INS_L(s_i) - INS_L(s_{i-1})), & \alpha < 0, \end{cases}$$

y

$$A_R = \begin{cases} INS_R(s_i) + \alpha \times (INS_R(s_{i+1}) - INS_R(s_i)), & \alpha \geq 0 \\ INS_R(s_i) + \alpha \times (INS_R(s_i) - INS_R(s_{i-1})), & \alpha < 0. \end{cases}$$

3.4.2.3 Escala lingüística basada en funciones matemáticas específicas

Estos modelos surgen de la necesidad de funciones matemáticas que asignen valores numéricos a etiquetas lingüísticas para representar su correspondiente semántica. Sea $S = \{s_0, \dots, s_{2g}\}$ un conjunto de términos lingüísticos ordenado de cardinalidad impar y θ_i un número real no negativo asociado al término lingüístico s_i. La asociación de s_i a θ_i se define mediante una función de escala lingüística monótonamente creciente:

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & S \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ & s_i = \theta_i,\ i = \{0, \dots, 2g\}. \end{aligned}$$

Existen tres alternativas principales para definir tal función [121]:

- Si el conjunto de términos lingüísticos está uniformemente distribuido, la función f se puede definir de forma simple como $f(s_i) = \frac{i}{2g}$, pero carece de una base teórica razonable. Por ejemplo, si suponemos que $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$, entonces $s_0 = 0$, $s_1 = 0.25$, $s_2 = 0.50$, $s_3 = 0.75$ y $s_4 = 1$. Si la función f se define simplemente por $f(s_i) = i$, obtenemos el modelo lingüístico 2-tupla [85].

- Si el conjunto de términos lingüísticos es no balanceado y tiene sus términos más cercanos sobre s_g, la función f se puede definir como:

$$f(s_i) = \begin{cases} \frac{a^g - a^{g-i}}{2a^g - 2}, & i = 0, \dots, g \\ \\ \frac{a^g + a^{i-g} - 2}{2a^g - 2}, & i = g+1, \dots, 2g, \end{cases}$$

siendo $a > 1$ un umbral que se determina para cada problema particular a partir de experimentos. Cuanto mayor sea el valor de a, mayor será el desequilibrio entre los términos lingüísticos. En el estudio llevado a cabo en [6] se demostró que lo más probable es que $a \in [1.36, 1.40]$. Por ejemplo, si suponemos que $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ y que $a = 1.4$, entonces $s_0 = 0$, $s_1 = 0.29$, $s_2 = 0.50$, $s_3 = 0.71$ y $s_4 = 1$.

- Si el conjunto de términos lingüísticos es no balanceado y tiene sus términos más cercanos sobre ambos extremos del conjunto, la función f se puede definir como:

$$f(s_i) = \begin{cases} \frac{g^{\alpha}-(g-i)^{\alpha}}{2g^{\alpha}}, & i = 0, \ldots, g \\ \\ \frac{g^{\beta}+(i-g)^{\beta}}{2g^{\beta}}, & i = g+1, \ldots, 2g, \end{cases}$$

siendo $\alpha, \beta \in (0, 1]$ [123]. Cuanto menor sea el valor de α o β, mayor será la similaridad entre los términos del extremo izquierdo o derecho de S, respectivamente. Si $\alpha = \beta = 1$, esta función se reduce al primer caso. Por ejemplo, si suponemos que $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ y que $\alpha = 0.6$ y $\beta = 0.8$, entonces $s_0 = 0$, $s_1 = 0.17$, $s_2 = 0.50$, $s_3 = 0.79$ y $s_4 = 1$.

3.4.3 Modelo de semántica individual personalizada

En la literatura se han propuestos diferentes enfoques para intentar modelar la realidad de que una misma palabra tiene diferentes significados para distintas personas. Unos enfoques se han basado en el uso de conjuntos de términos lingüísticos multigranulares [139] y otros en el uso de conjuntos difusos de tipo 2 [59, 86, 148, 149, 150]. Aunque estos modelos son útiles para trabajar con múltiples significados de las palabras y han sido ampliamente usados para computación con palabras en diferentes tipos de problemas, no son capaces de modelar la semántica específica de cada individuo. Por ejemplo, cuando se revisa un artículo, dos revisores pueden pensar que el artículo es «bueno», pero el término «bueno» a menudo tendrá diferente significado para estos dos revisores.

El uso de la escala numérica intervalar [46], la cual se ha presentado anteriormente, se empleó para crear un nuevo modelo que ayuda a solventar este problema, proporcionando semánticas individuales a cada persona [116]. Este modelo, conocido como modelo de semántica individual personalizada, permite considerar diferentes semánticas para cada término lingüístico dependiendo del individuo. Para representar la semántica individual, Liu y otros propusieron un modelo basado en optimización dirigido por consistencia y consideraron la premisa de que si las relaciones de preferencia lingüísticas comunicadas por los individuos son consistentes, entonces las relaciones de preferencia difusas intervalares, obtenidas a partir de la escala numérica intervalar establecida, deberían ser tan consistentes como sea posible. La consistencia individual garantiza que el individuo no está siendo aleatorio ni ilógico en sus evaluaciones.

Dada una relación de preferencia difusa F asociada a una relación de preferencia difusa intervalar $\tilde{V}$ y el conjunto de relaciones de preferencias difusas $N_{\tilde{V}}$ asociado a $\tilde{V}$, la consistencia optimista y la consistencia pesimista de $\tilde{V}$ se definen para representar el mejor y el peor índice de consistencia, respectivamente. Los índices de consistencia optimista y pesimista se definen por $OCI(\tilde{V}) = \text{máx}\, CI(F)$ y $PCI(\tilde{V}) = \text{mín}\, CI(F)$, respectivamente, siendo CI el índice de consistencia de $F \in N_{\tilde{V}}$. Usando estos índices, este modelo intenta optimizar la consistencia optimista y la pesismista para obtener escalas numéricas intervalares individuales personalizadas.

3.5 Modelos de computación con palabras basados en expresiones lingüísticas complejas

Aunque los modelos de computación con palabras descritos anteriormente son apropiados para describir la imprecisión asociada al lenguaje natural, el hecho de que se basen en el empleo de términos lingüísticos individuales puede dificultar la representación de las opiniones de los individuos debido a la complejidad de los problemas de decisión actuales y al nivel de conocimiento de los individuos [172, 204]. De hecho, el uso de un término lingüístico predefinido podría limitar la expresión de opiniones. Esto se debe a que el término lingüístico seleccionado del conjunto podría no coincidir con la opinión del individuo y, por lo tanto, este tiene que elegir el más adecuado entre varios términos lingüísticos [129]. Para disminuir la incertidumbre asociada a seleccionar el término lingüístico que mejor se adapta a la opinión que quiere expresar el individuo, parece lógico permitir que los individuos utilicen más de un término lingüístico para expresar sus opiniones. Esto da como resultado la aparición de expresiones lingüísticas complejas [204]. A grandes rasgos, las expresiones lingüísticas complejas se refieren a la información lingüística que implica más de un término lingüístico y que se expresa usando un lenguaje natural o artificial mediante términos lingüísticos, conectivas y atenuadores lingüísticos. El cambio de un solo término lingüístico a una expresión lingüística compleja facilita la expresión y representación de las opiniones de los individuos. Lo ideal sería que el uso de expresiones lingüísticas complejas permitiera expresar opiniones de manera natural y libre. Sin embargo, esto es bastante más complejo que el cómputo con términos lingüísticos individuales. Hasta ahora, se han propuesto diferentes modelos para trabajar con expresiones lingüísticas complejas. Entre ellos, podemos destacar los siguientes [204]:

- El modelo basado en términos lingüísticos inciertos [219].
- El modelo basado en conjuntos de términos lingüísticos difusos vacilantes [173].
- El modelo basado en conjuntos de términos lingüísticos difusos vacilantes extendido [203].
- El modelo basado en evaluaciones de distribución en conjuntos de términos lingüísticos [255].
- El modelo basado en números difusos discretos [134].
- El modelo basado en conjuntos de términos lingüísticos probabilísticos [157].
- El modelo basado en conjuntos difusos vacilantes lingüísticos [141].
- El modelo basado en términos lingüísticos de 2 dimensiones [260].

El uso de expresiones lingüísticas complejas es, en cierto modo, similar a la motivación para desarrollar modelos lingüísticos multigranulares [150]. En realidad, cuando el nivel de conocimiento del individuo es mayor que el nivel de definición ofrecido por la colección de términos lingüísticos, este puede considerar la posibilidad de expresar su opinión mediante expresiones lingüísticas complejas o, alternativamente, puede buscar otro conjunto de términos lingüísticos con un nivel de definición mayor. Sin embargo, los modelos basados en expresiones lingüísticas complejas no sustituyen totalmente a los modelos basados en conjuntos lingüísticos multigranulares, y viceversa.

≪La vida no es la que uno vivió, sino la que recuerda y cómo la recuerda para contarla≫

Gabriel García Márquez

CAPÍTULO 4

Un modelo de toma de decisiones en grupo en un contexto multicriterio, heterogéneo y lingüístico

En los procesos de toma de decisiones en grupo los individuos que forman parte de este evalúan la idoneidad de las distintas alternativas como posible solución a un problema particular para obtener una clasificación de estas de mejor a peor como solución al problema. Debido a que los procesos de toma de decisiones en grupo son procesos cognitivos realizados por seres humanos, los modelos de computación con palabras han sido ampliamente aplicados para enriquecer y crear modelos de decisión ya que reducen las diferencias entre el razonamiento humano y el proceso de cómputo.

Incluso aunque ya existe una gran cantidad de modelos de computación con palabras, en los últimos años se ha empezado a utilizar la granulación de la información [252], la cual es un concepto esencial del paradigma de la computación granular [7, 160, 185], para utilizar información lingüística en procesos de toma de decisiones [19, 22, 163]. La granulación de la información se define como el proceso que consiste en la formación de gránulos de información a partir de determinados elementos o entidades [185, 261]. A su vez, los gránulos de información se definen como entidades complejas de información que se deben tratar de forma eficiente dentro del entorno computacional asociado a un particular marco de granulación [126]. En concreto, en los modelos desarrollados en [19, 22, 163], el proceso de granulación de la información se ha aplicado para asociar los términos lingüísticos empleados por los individuos para expresar sus preferencias con intervalos, los cuales hacen la función de gránulos de información, mediante un proceso de optimización.

Este proceso de optimización favorece que la distribución y la semántica de los términos lingüísticos se obtengan a través de la maximización (minimización) de un criterio de optimización particular. Por ejemplo, en los modelos anteriores se ha utilizado como criterio el consenso alcanzado entre los individuos, la consistencia individual e incluso ambos. Esto representa una mejora respecto a los modelos de computación con palabras tradicionales, en los que tanto la semántica como la distribución de los términos lingüísticos se establecen *a priori*, es decir, antes de iniciar el proceso de toma de decisiones en grupo.

En los modelos presentados en [19, 22, 163] se asumen relaciones de preferencia lingüísticas para representar las preferencias de los individuos. Al asumir una relación de preferencia lingüística, los individuos tienen que evaluar la preferencia de una alternativa sobre otra mediante un término lingüístico. La cuestión en estos modelos es que la preferencia de una alternativa sobre otra se evalúa en su totalidad, es decir, sin proporcionar una evaluación por cada criterio a tener en cuenta. Por ejemplo, supongamos que tenemos que elegir una casa de entre un conjunto de ellas y pensamos que para evaluarlas podemos tener en cuenta el precio, el tamaño, la ubicación, etc. En los modelos anteriores, tendríamos que considerar todos esos criterios en su conjunto para indicar nuestra preferencia de una casa sobre otra. Sin embargo, parece más sensato que pudiéramos expresar que, por ejemplo, una casa es mejor que otra respecto al precio, pero que la otra es mejor que la anterior respecto al tamaño. Es decir, es más realista evaluar la preferencia de una alternativa sobre otra en diferentes criterios. Por otra parte, en entornos multicriterio, es necesario considerar no solo que los individuos puedan tener distinto nivel de importancia, gracias a su conocimiento y experiencia sobre el problema, y que los criterios puedan tener también distinto peso de cara a evaluar las alternativas, sino que habría que considerar también que la opinión de un individuo particular pueda tener diferente nivel de importancia en cada criterio. Volviendo al ejemplo descrito en el capítulo 1, parece natural pensar que, a la hora de evaluar una biblioteca de acuerdo con los servicios que proporciona [20], la preferencia de un profesor debe ser más importante que la de un estudiante cuando se evalúa el catálogo de revistas digitales de investigación ofrecido por la biblioteca. Por otro lado, la preferencia de un estudiante debe ser más importante que la de un profesor cuando se evalúa el espacio comunitario ofrecido por la biblioteca para el estudio y aprendizaje en grupo. Un profesor utiliza mucho más el catálogo de revistas digitales accesibles desde la biblioteca que un estudiante, por eso su opinión se debe tener más en cuenta en este criterio, mientras que un profesor apenas (por no decir nunca) utiliza el espacio comunitario ofrecido por la biblioteca, algo que sí que utilizan los estudiantes constantemente.

En este capítulo, presentamos un nuevo modelo para dar soporte a todas las etapas de un proceso de toma de decisiones en grupo donde se utiliza información lingüística para representar las preferencias de los individuos que integran el grupo encargado de tomar la decisión. Este nuevo modelo tiene la capacidad de modelar procesos en los que se consideran distintos criterios para evaluar las diferentes alternativas del problema. Además, para ser más realista, este nuevo modelo está diseñado para trabajar en contextos heterogéneos desde dos puntos de vista: (i) los criterios considerados para evaluar las alternativas tienen distintos pesos de importancia, y (ii) la opinión de cada individuo del grupo tiene un nivel de importancia distinto para cada criterio. Para ello, este nuevo modelo se estructura en las tres etapas siguientes:

- La primera etapa tiene por objetivo obtener las comparaciones lingüísticas entre pares de alternativas proporcionadas por los distintos individuos que participan en el problema de decisión. En concreto, para modelar las comparaciones lingüísticas, se utilizan relaciones de preferencia lingüísticas.

- La segunda etapa es vital para obtener la solución del problema. Para ello, en esta etapa se convierten los términos lingüísticos en los formalismos de gránulos de información asumidos a través de un proceso de optimización en el que se trata de maximizar tanto la consistencia como el consenso. En particular, como gránulos de información se utilizan intervalos, de forma que los términos lingüísticos se transforman en intervalos para que la solución final sea la de mayor consenso y consistencia posible. Para realizar el proceso de optimización, el modelo hace uso del algoritmo de optimización por enjambre o nube de partículas [110].

- La tercera, y última, etapa tiene por objetivo obtener la clasificación final de las alternativas en base a las relaciones de preferencia lingüísticas proporcionadas por los individuos. Es decir, esta etapa consiste en aplicar un proceso de selección, el cual tiene como particularidad el considerar que los criterios tienen distintos pesos de importancia y que la opinión de cada individuo tiene un nivel de importancia distinto para cada criterio.

El contenido del resto de este capítulo se estructura de la siguiente manera. En la sección 4.1, se introduce el esquema genenal del proceso de decisión asumido y la primera etapa del modelo, es decir, la de obtención de las preferencias comunidadas por los individuos. En la sección 4.2, se describe el proceso de granulación de la información lingüística, es decir, la segunda etapa del modelo. En la sección 4.3, se presenta la etapa final del modelo, esto es, el proceso de selección. A continuación, en la sección 4.4, ilustramos el funcionamiento del modelo mediante su aplicación en un proceso de decisión que consiste en seleccionar la mejor biblioteca de entre una serie de ellas. Finalmente, en la sección 4.5, discutimos las ventajas e inconvenientes del modelo en base a distintos aspectos analizados.

4.1 Planteamiento inicial y obtención de preferencias

Para el desarrollo de nuestro modelo partimos de que queremos modelar procesos de toma de decisiones en grupo llevados a cabo en entornos multicriterio, lingüísticos y heterogéneos.

Formalmente, dada una colección de alternativas, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, siendo $n \geq 2$, y un conjunto de criterios, $C = \{c^1, \ldots, c^q\}$, siendo $q \geq 2$, las distintas alternativas son comparadas teniendo en cuenta cada uno de los criterios por un grupo de individuos, $DM = \{dm^1, \ldots, dm^m\}$, siendo $m \geq 2$, con el objetivo de obtener una clasificación de las alternativas de mejor a peor como posible solución al problema de decisión planteado [63, 97]. Al desarrollarse en un entorno lingüístico, estas comparaciones o preferencias de los individuos se modelan mediante un conjunto de términos lingüísticos $S^1 = \{s^1_0, \ldots, s^1_{g^1}\}$ [74, 263], siendo $g^1 + 1$ su granularidad, y en el que existe un orden lineal $\prec$ entre los términos lingüísticos que de forma que $\forall s^1_i, s^1_j \in S^1$, si $s^1_i \prec s^1_j$ $(j > i)$, entonces s^1_j simboliza un grado de preferencia mayor que el indicado por s^1_i. Además, cada criterio, c^k $(k = 1, \ldots, q)$, tiene asociado un peso, α^k, que representa la importancia del criterio para obtener la evaluación global de la alternativa, y cada individuo, dm^h $(h = 1, \ldots, m)$, tiene asociado un nivel de importancia diferente, β^{hk}, para cada criterio, c^k $(k = 1, \ldots, q)$. Al igual que las preferencias, los pesos también se modelan mediante términos lingüísticos. En concreto, se consideran tres conjuntos distintos de términos lingüísticos: (i) $S^1 = \{s^1_0, \ldots, s^1_{g^1}\}$, el cual contiene los términos lingüísticos empleados por los individuos para expresar sus preferencias, (ii) $S^2 = \{s^2_0, \ldots, s^2_{g^2}\}$, el cual contiene los términos lingüísticos utilizados para modelar los pesos de los criterios, y (iii) $S^3 = \{s^3_0, \ldots, s^3_{g^3}\}$, el cual contiene los términos lingüísticos usados para modelar la importancia de cada individuo en cada criterio. Además, tanto la semántica como el número de términos lingüísticos, representado por $g^1 + 1, g^2 + 1$, y $g^3 + 1$, respectivamente, puede ser diferente para cada uno de estos tres conjuntos.

Una vez definido el esquema general del proceso de decisión que estamos considerando, la primera etapa de nuestro modelo consiste en obtener las preferencias de los individuos que integran el grupo. Dadas las ventajas ofrecidas por la comparación entre pares de alternativas [145], nuestro modelo asume que los individuos comunican sus preferencias mediante relaciones de preferencia lingüísticas [222]. Por tanto, en esta primera etapa, cada individuo dm^h $(h = 1, \ldots, m)$ proporciona una relación de preferencia lingüística RP^{hk} para cada criterio c^k $(k = 1, \ldots, q)$ usando para expresar sus preferencias los términos lingüísticos del conjunto $S^1 = \{s_0^1, \ldots, s_{g^1}^1\}$.

Además, es importante notar que el peso asignado a cada criterio, así como la importancia de las preferencias de cada individuo para cada criterio se establecen al inicio y dependen de cada problema particular. El moderador podría ser el encargado de asignar estos pesos y niveles de importancia.

4.2 Granulación de la información lingüística

Antes de efectuar el proceso de selección (tercera etapa del modelo), debemos hacer operacionales los términos lingüísticos a través de un proceso de granulación de la información. Este es el objetivo de esta segunda etapa.

Los términos lingüísticos no son operativos en sí mismos. Esto implica que no se puede realizar ningún procesamiento con ellos. Para ello, necesitamos llevar a cabo un proceso de granulación sobre los términos lingüísticos [186, 252], el cual consiste en convertir los términos lingüísticos en gránulos de información. Por ejemplo, y por comentar alguna de las opciones disponibles, entre los formalismos de granulación de la información tenemos los conjuntos aproximados, los conjuntos sombreados, los intervalos y los conjuntos difusos [159]. Los términos lingüísticos se asocian con los gránulos de información mediante un proceso de optimización en el que se maximiza o minimiza un determinado criterio. Por ejemplo, en los modelos desarrollados en [19, 163] se empleó la consistencia como criterio de optimización, mientras que en el modelo desarrollado en [22] se utilizaron tanto la consistencia como el consenso como criterio de optimización.

En nuestro modelo, y siguiendo las ideas de los modelos desarrollados en [19, 22, 163], el problema de la representación granular de los términos lingüísticos está relacionada con la formación de una familia de intervalos a lo largo del intervalo $[0, 1]$. Como consecuencia de esto, si consideramos un conjunto de términos lingüísticos de granularidad $g + 1$, el vector de puntos de corte definido como $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_g)$ determina de forma completa una familia de intervalos, $I_1, I_2, \ldots, I_{g+1}$, donde $0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_g < 1$ y $I_1 = [0, p_1)$, $I_2 = [p_1, p_2)$, $\ldots$, $I_j = [p_{j-1}, p_j)$, $\ldots$, $I_{g+1} = [p_g, 1]$.

Este proceso de asociación de términos lingüísticos con intervalos presenta las siguientes tres características importantes:

- Conserva la semántica de los términos lingüísticos distribuidos en el proceso de granulación.
- La distribución de los intervalos correspondientes en la escala no es uniforme.
- Obtiene la versión operativa de los términos lingüísticos modelados como intervalos mediante la formulación de un proceso de optimización.

En las siguientes subsecciones describimos el criterio de optimización asumido en este modelo así como su proceso de optimización.

4.2.1 Criterio de optimización

Para abordar los detalles técnicos del proceso de optimización necesitamos especificar la formulación del problema de optimización. Para ello, en primer lugar tenemos que definir el criterio de optimización que debe ser optimizado.

En los procesos de toma de decisiones en grupo sabemos que tanto la consistencia individual como el consenso alcanzado entre el grupo de individuos juegan un papel destacado:

- La adopción de una decisión de consenso por parte del grupo de individuos es el principal objetivo de un proceso de toma de decisiones en grupo. Si no se llega a una decisión consensuada, alguno o varios de los individuos del grupo podrían pensar que sus opiniones no se han tenido en cuenta de forma adecuada y podrían rechazar la decisión alcanzada. Por tanto, el consenso ha recibido una atención especial cuando se construyen modelos de toma de decisiones en grupo [16, 90].

- Las comparaciones entre pares de alternativas tienen la ventaja de que el individuo se centra solamente dos alternativas en cada momento, ayudando así a facilitar la evaluación. Sin embargo, realizar comparaciones entre pares genera más información de la que realmente podría necesitarse y podría limitar la comprensión global de las alternativas. En consecuencia, las preferencias proporcionada por un individuo podrían ser incoherentes, dando esto lugar a decisiones ilógicas. Por tanto, es importante analizar la consistencia de las relaciones de preferencia proporcionadas por los individuos [37, 117].

Teniendo esto en cuenta, parece natural pensar que cuanto mayor sea la consistencia y el consenso alcanzado, mejor será la decisión tomada. Por ello, nuestro modelo utiliza como criterio de optimización un promedio ponderado del consenso y la consistencia:

$$O = O_1 \cdot \gamma + (1 - \gamma) \cdot O_2, \tag{4.1}$$

siendo $\gamma \in [0, 1]$ un parámetro que establece un balance entre el consenso, O_1, y la consistencia, O_2 [89].

4.2.2 Proceso de optimización

A la luz de cómo está formado el criterio de optimización, para su optimización podemos considerar distintas alternativas como, por ejemplo, los algoritmos genéticos o la optimización por enjambre de partículas. En comparación con los algoritmos genéticos [146, 208], la optimización por enjambre de partículas es especialmente atractiva por su menor coste computacional [161]. Además, este algoritmo de optimización ya se ha probado como una buena alternativa en problemas similares [19, 22, 24, 124, 162, 163].

4.2.2.1 Optimización por enjambre de partículas

El algoritmo de optimización por enjambre de partículas es una técnica computacional que trata de optimizar un problema particular de forma iterativa. Para ello, en cada iteración del algoritmo trata de encontrar mejores soluciones candidatas en relación con una cierta medida de calidad (función objetivo o de aptitud).

Considerando una población, también conocida como enjambre, de soluciones candidatas, también conocidas como partículas, este algoritmo optimiza el problema moviendo estas soluciones candidatas en todas las direcciones del espacio de posibles soluciones según simples fórmulas matemáticas. El movimiento de cada partícula está guiado tanto por la mejor ubicación conocida de la propia partícula como por la mejor ubicación obtenida por cualquiera de las demás partículas del enjambre. El objetivo es guiar al enjambre de partículas hacia la mejor posición (solución) en sucesivas generaciones (iteraciones) de estas.

El propósito inicial de este algoritmo de optimización, atribuido a Eberhart y Kennedy [56, 110], fue el de imitar el comportamiento social mediante el intento de representar el movimiento de los organismos en un banco de peces o en una bandada de pájaros [109]. Supongamos que existe un único alimento en una cierta área y una bandada de pájaros lo buscan al azar. Los pájaros son conscientes de lo lejos que está el trozo de comida en cada iteración, pero no saben su ubicación. Aquí, para localizar el trozo de comida, el mejor enfoque es moverse detrás del pájaro más cercano a él. Diversas preguntas filosóficas sobre este algoritmo y sobre la inteligencia de enjambre se pueden encontrar en [111].

El algoritmo de optimización por enjambre de partículas es una metaheurística, lo que implica que sea capaz de buscar en espacios muy grandes y que no haga suposiciones sobre el problema a optimizar. Sin embargo, no garantiza que siempre se encuentre la solución óptima. Además, como el gradiente del problema que se va a optimizar no es utilizado por este algoritmo, no es necesario que el problema sea diferenciable. Esto difiere de las técnicas clásicas de optimización como los métodos de Quasi-Newton y de descenso de gradiente, los cuales necesitan que el problema de optimización sea diferenciable.

La definición formal del algoritmo de optimización por enjambre de partículas es la siguiente. Sea m el número de partículas del enjambre y n el tamaño del espacio de búsqueda. Sea $\mathbf{v}_j \in \mathbb{R}^n$ and $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^n$ el vector de velocidad y el vector de posición en el espacio de búsqueda n-dimensional, respectivamente, asociados con cada partícula $j \in \{1, \ldots, m\}$. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la función de aptitud o función objetivo, también conocida como función *fitness*, la cual tiene que optimizarse (suponemos que en este caso se desea maximizar). Esta función objetivo recibe como argumento un vector de número reales $\mathbf{x}_j$ y devuelve como salida un número real que representa la calidad asociada a la partícula j. El objetivo es encontrar una partícula j en la que $f(\mathbf{x}_j) \geq f(\mathbf{x}_k)$ para todo $k \in \{1, \ldots, m\}$ y $j \neq k$. Esto significa que la partícula j sería un máximo global. Sea $\mathbf{pbestx}_j$ la mejor posición que la partícula j ha alcanzado hasta el momento y sea $\mathbf{gbestx}$ la mejor posición alcanzada por alguna partícula del enjambre hasta este punto. Sea l_{up} y l_{lo} los límites superior e inferior del espacio de búsqueda, respectivamente. Sea c_1 el factor de aprendizaje cognitivo que influencia el movimiento de la partícula hacia su mejor posición hasta ese momento y sea c_2 el factor de aprendizaje social que influencia el movimiento de la partícula hacia la mejor posición conocida hasta ese momento por todo el enjambre. Tanto el valor de c_1 como de c_2 suele estar dentro del intervalo $[0, 2]$, siendo 2 el valor recomendado [169]. Sean r_p y r_g dos valores aleatorios en el intervalo $[0, 1]$ que aportan un comportamiento estocástico al movimiento de las partículas, mejorando de esta forma la habilidad para escapar de mínimos locales. La componente de inercia ω regula la velocidad de las partículas e influencia así el rendimiento del algoritmo. Se introdujo en [184] para balancear la búsqueda local, explotación, y la búsqueda global, exploración. Un valor mayor de ω está orientado a la exploración mientras que un valor menor de ω está orientado a la explotación. Por tanto, el valor de ω debería disminuir con el paso de las iteraciones del algoritmo para asegurar una fuerte búsqueda global en las primeras generaciones y una fuerte búsqueda local en las finales. Según esto, el valor de ω se modifica comúnmente de la siguiente manera:

$$\omega(t) = (\omega(1) - \omega(s)) \cdot \frac{s-t}{s} + \omega(s), \tag{4.2}$$

siendo $\omega(1)$, $\omega(t)$, y $\omega(s)$, el valor inicial de ω, el valor de ω en la generación actual y el valor final de $\omega(s)$, respectivamente; s y t representan el máximo número de generaciones y la generación actual, respectivamente.

El algoritmo 1 describe los pasos del algoritmo básico de optimización por enjambre de partículas. Sus ventajas son que tiene pocos parámetros que ajustar, su convergencia rápida y su facilidad de implementación [202, 216]. Además, las dos partes que dependen de cada problema particular son la definición de las partículas y de la función objetivo empleada para medir la calidad de estas. A continuación, describimos ambas.

Algoritmo 1 Optimización por enjambre de partículas

para cada partícula $j = 1, \ldots, m$ **hacer**
  Inicializar su posición en la primera generación mediante un vector aleatorio uniformemente distribuido: $\mathbf{x}_j(1) \sim U(l_{\text{lo}}, l_{\text{up}})$
  Inicializar su mejor posición a esta posición inicial: $\mathbf{pbestx}_j \leftarrow \mathbf{x}_j(1)$
  si $(f(\mathbf{pbestx}_j) > f(\mathbf{gbestx}))$ **entonces**
    Actualizar la posición óptima global: $\mathbf{gbestx} \leftarrow \mathbf{pbestx}_j$
  fin si
  Inicializar su velocidad: $\mathbf{v}_j \sim U(-|l_{\text{up}} - l_{\text{lo}}|, |l_{\text{up}} - l_{\text{lo}}|)$
fin para
para cada generación $t = 2, \ldots, s$ **hacer**
  para cada partícula $j = 1, \ldots, m$ **hacer**
    para cada dimensión $d = 1, \ldots, n$ **hacer**
      Generar dos números aleatorios: $r_p, r_g \sim U(0, 1)$
      Actualizar su velocidad: $v_{j,d}(t) \leftarrow \omega(t)v_{j,d}(t-1) + c_1 r_p(pbestx_{j,d}(t-1) - x_{j,d}(t-1)) + c_2 r_g(gbestx_d(t-1) - x_{j,d}(t-1))$
    fin para
    Actualizar su posición: $\mathbf{x}_j(t) \leftarrow \mathbf{x}_j(t-1) + \mathbf{v}_j(t)$
    si $(f(\mathbf{x}_j(t)) > f(\mathbf{pbestx}_j))$ **entonces**
      Actualizar su mejor posición: $\mathbf{pbestx}_j \leftarrow \mathbf{x}_j(t)$
      si $(f(\mathbf{pbestx}_j) > f(\mathbf{gbestx}))$ **entonces**
        Actualizar la posición óptima global: $\mathbf{gbestx} \leftarrow \mathbf{pbestx}_j$
      fin si
    fin si
  fin para
fin para
devolver $\mathbf{gbestx}$

4.2.2.2 Definición de la partícula

Una de las cuestiones esenciales en el diseño del algoritmo de optimización por enjambre de partículas es encontrar una buena asociación entre una solución del problema y su representación en forma de partícula. En nuestro modelo, cada partícula se define mediante un vector de puntos de corte situados a lo largo del intervalo $[0, 1]$. Esto quiere decir que los puntos de corte determinan los intervalos en los que

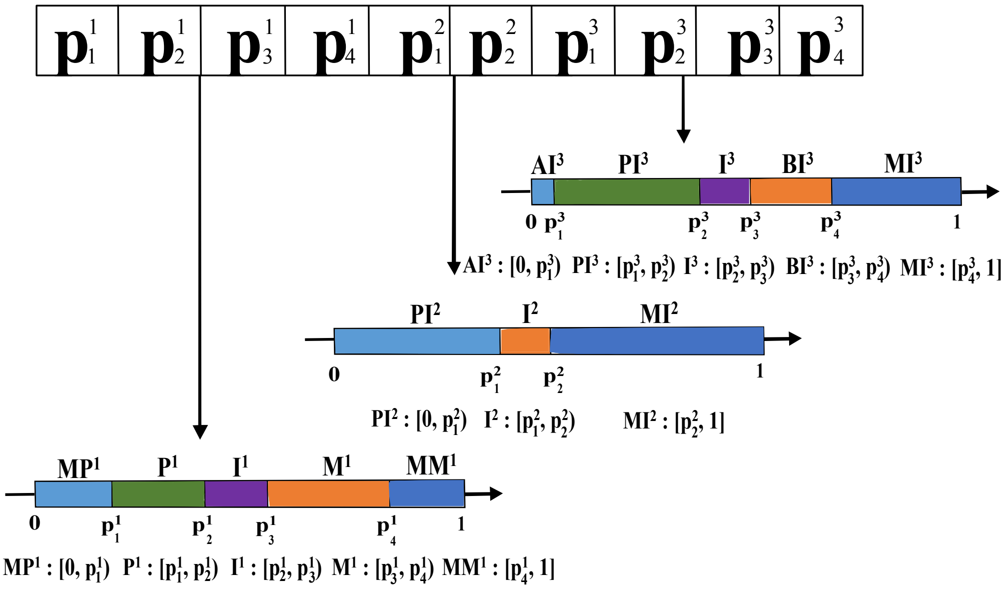

Figura 4.1. **Partícula asociada a un vector de puntos de corte.**

se transforman los términos lingüísticos. Con el fin de clarificar cómo se define una partícula supongamos lo siguiente:

- Las preferencias proporcionadas por los individuos que forman parte del grupo se modelan mediante el conjunto de términos lingüísticos $S^1 = \{s_0^1 =$ mucho peor (MP^1), $s_1^1 =$ peor (P^1), $s_2^1 =$ igual (I^1), $s_3^1 =$ mejor (M^1), $s_4^1 =$ mucho mejor (MM^1)$\}$.

- La importancia o peso de los criterios se modelan mediante el conjunto de términos lingüísticos $S^2 = \{s_0^2 =$ poco importante (PI^2), $s_1^2 =$ importante (I^2), $s_2^2 =$ muy importante (MI^2)$\}$.

- La importancia de las preferencias de los individuos para cada criterio se modelan mediante el conjunto de términos lingüísticos $S^3 = \{s_0^3 =$ apenas importante (AI^3), $s_1^3 =$ poco importante (PI^3), $s_2^3 =$ importante (I^3), $s_3^3 =$ bastante importante (BI^3), $s_4^3 =$ muy importante (MI^3)$\}$.

La asociación que se obtiene entre los términos lingüísticos y los intervalos es: MP^1: $[0, p_1^1)$, P^1: $[p_1^1, p_2^1)$, I^1: $[p_2^1, p_3^1)$, M^1: $[p_3^1, p_4^1)$, MM^1: $[p_4^1, 1]$, PI^2: $[0, p_1^2)$, I^2: $[p_1^2, p_2^2)$, MI^2: $[p_2^2, 1]$, AI^3: $[0, p_1^3)$, PI^3: $[p_1^3, p_2^3)$, I^3: $[p_2^3, p_3^3)$, BI^3: $[p_3^3, p_4^3)$ y MI^3:

$[p_4^3, 1]$, siendo p_1^1, p_2^1, p_3^1, p_4^1, p_1^2, p_2^2, p_1^3, p_2^3, p_3^3 y p_4^3 los puntos de corte que definen el vector $\mathbf{p} = (p_1^1, p_2^1, p_3^1, p_4^1, p_1^2, p_2^2, p_1^3, p_2^3, p_3^3, p_4^3)$, el cual modela cada partícula en este ejemplo (Figura 4.1). Si las granularidades de S^1, S^2 y S^3 son $g^1 + 1$, $g^2 + 1$ y $g^3 + 1$, respectivamente, cada partícula se compone de $(g^1 + g^2 + g^3)$ puntos de corte.

4.2.2.3 Definición de la función objetivo

El objetivo del proceso de optimización es maximizar el valor del criterio de optimización mediante el ajuste de las posiciones de los puntos de corte en el intervalo $[0, 1]$. Además, en la definición de la función objetivo debemos tener en cuenta el hecho de que las entradas de las relaciones de preferencia lingüísticas son intervalos. Sin embargo, la función objetivo debe devolver un valor numérico.

Esto se entiende de la siguiente manera. Los términos lingüísticos que aparecen en las relaciones de preferencia lingüísticas tienen ahora la forma de gránulos de información formalizados como intervalos. Por tanto, tenemos que formar las entradas generando un número aleatorio en el intervalo asociado a cada entrada de la relación de preferencia. Para ello, muestreamos las relaciones de preferencia lingüísticas RP^{hk} $(h = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, q)$ para generar las relaciones de preferencia R^{hk} $(h = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, q)$, las cuales están formadas por entradas cuyos valores son generados por la distribución uniforme definida sobre el intervalo asociado con el término lingüístico correspondiente a esa entrada.

Vamos a clarificar este funcionamiento mediante un ejemplo. Supongamos que, basado en el grado de preferencia expresado por el individuo dm^1, la alternativa a_4 es «mejor» que la alternativa a_2 en el criterio c^3. Según esta evaluación, el término lingüístico asociado con la entrada rp_{42}^{13} de la relación de preferencia RP^{13} es «mejor». Asumiendo que el intervalo asociado a «mejor» es $[0.62, 0.81)$, la entrada de R^{13}, r_{42}^{13}, se obtiene mediante la distribución uniforme definida sobre $[0.62, 0.81)$. De forma similar, los pesos de importancia, α^k $(k = 1, \ldots, q)$ y β^{hk} $(h = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, q)$, también son muestreados para generar los pesos u^k y v^{hk}, respectivamente, los cuales se representan por números obtenidos mediante la distribución uniforme definida sobre los intervalos correspondientes asociados al término lingüístico que representa el peso de importancia.

En resumen, cada relación de preferencia lingüística y cada peso de importancia se muestrean N veces y la media de los valores obtenidos por el criterio de optimización O sobre cada colección de N muestras define la función objetivo f:

$$f = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} O^i. \tag{4.3}$$

Esta forma de definir la función objetivo está en línea con las prácticas estándar encontradas en las simulaciones de Montecarlo [209].

En cada muestra i, el criterio de optimización O^i se calcula mediante (4.1). Por tanto, debemos describir cómo calcular el consenso, O_1, y la consistencia, O_2. Debido a que las entradas de las relaciones de preferencia, R^{hk} $(h = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, q)$, contienen valores dentro del intervalo $[0, 1]$, podemos basarnos en los modelos que existen en la literatura para medir el consenso y la consistencia cuando se utilizan relaciones de preferencia difusas.

Para calcular el consenso, O_1, en un entorno de toma de decisiones en grupo multicriterio proponemos una nueva metodología basada en el concepto de coincidencia [83] y en los tres niveles de una relación de preferencia [21]. Esta nueva metodología se define así:

- Obtención de una matriz de similaridad $MS^{hlk} = (ms_{ij}^{hlk})$ para cada criterio c^k y para cada par de individuos dm^h y dm^l:

$$ms_{ij}^{hlk} = 1 - |r_{ij}^{hk} - r_{ij}^{lk}|.$$

- Para cada criterio c^k, agregamos todas las matrices de similaridad MS^{hlk} para obtener una matriz de consenso $MC^k = (mc_{ij}^k)$:

$$mc_{ij}^k = \frac{1}{(m-1)\cdot(m-2)}\sum_{h=1}^{m-1}\sum_{l=h+1}^{m} ms_{ij}^{hlk}.$$

- Para cada criterio c^k, obtenemos tres medidas de consenso asociadas a los tres niveles de una relación de preferencia:
  - Grado de consenso en pares de alternativas, cp^k_{ij}, el cual mide el acuerdo total alcanzado sobre un par de alternativas particular (a_i, a_j):

$$cp^k_{ij} = mc^k_{ij}.$$

  - Grado de consenso en alternativas, ca^k_i, el cual mide el acuerdo total alcanzado sobre una alternativa particular a_i:

$$ca^k_i = \frac{1}{2 \cdot (n-1)} \sum_{j=1;\ j \neq i}^{n} (cp^k_{ij} + cp^k_{ji}).$$

  - Grado de consenso en la relación, cr^k, el cual mide el acuerdo global alcanzado para un criterio dado c^k:

$$cr^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} ca^k_i.$$

- El consenso, O_1, se computa como la media ponderada de los grados de consenso para los criterios:

$$O_1 = \frac{1}{\sum_{k=1}^{q} u^k} \sum_{k=1}^{q} u^k \cdot cr^k.$$

La consistencia, O_2, se computa como la media de los grados de consistencia asociados a cada individuo:

$$O_2 = \frac{1}{m} \sum_{h=1}^{m} cd^h,$$

siendo cd^h el grado de consistencia asociado al individuo dm^h, el cual se calcula como la media ponderada de los grados de consistencia de este individuo en cada criterio c^k:

$$cd^h = \frac{1}{\sum_{k=1}^{q} v^{hk}} \sum_{k=1}^{q} v^{hk} \cdot cd^{hk},$$

siendo cd^{hk} el grado de consistencia asociado a la relación de preferencia R^{hk} del individuo dm^h para el criterio c^k. Para calcularlo seguimos las metodologías desarrolladas en [35, 91].

Como se explicó en el capítulo 2, se han propuesto distintas propiedades que deben satisfacer las relaciones de preferencia para considerarlas consistentes o coherentes. Entre ellas, la propiedad de transitividad aditiva se ha utilizado mayoritariamente para verificar la consistencia de las relaciones de preferencia. Cuando trabajamos con relaciones de preferencia difusas, esta propiedad equivale a la propiedad de consistencia de Saaty para las relaciones de preferencia multiplicativas [93, 178]. Tanino presentó la siguiente formulación de la transitividad aditiva [190]:

$$(r_{il}^{hk} - 0.5) + (r_{lj}^{hk} - 0.5) = (r_{ij}^{hk} - 0.5), \quad \forall i, j, l \in \{1, \ldots, n\}.$$

La transitividad aditiva implica reciprocidad aditiva, es decir, $r_{ij}^{hk} + r_{ji}^{hk} = 1$ $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Por tanto, esto se puede reescribir como:

$$r_{ij}^{hk} = r_{il}^{hk} + r_{lj}^{hk} - 0.5, \quad \forall i, j, l \in \{1, \ldots, n\}. \tag{4.4}$$

Si para cada tres alternativas de un problema de decisión, $a_i, a_j, a_l \in A$, sus grados de preferencia $r_{ij}^{hk}, r_{jl}^{hk}, r_{il}^{hk}$ cumplen (4.4), la relación de preferencia difusa se considera consistente aditiva.

El valor estimado de un grado de preferencia se puede obtener mediante otros grados de preferencia usando (4.4). En realidad, el valor estimado de r_{ij}^{hk} $(i \neq j)$ se puede calcular mediante una alternativa intermedia a_l de la siguiente forma [91]:

$$er_{ij}^{hkl} = r_{il}^{hk} + r_{lj}^{hk} - 0.5. \tag{4.5}$$

El valor estimado total er_{ij}^{hk} del grado de preferencia r_{ij}^{hk} se calcula como la media aritmética de todos los posibles valores er_{ij}^{hkl}:

$$er_{ij}^{hk} = \sum_{l=1;\ l\neq i,j}^{n} \frac{er_{ij}^{hkl}}{n-2}.$$

El valor $|er_{ij}^{hk} - r_{ij}^{hk}|$ se usa como medida de error entre un grado de preferencia y su estimado [91].

Si $er_{ij}^{hkl} = r_{ij}^{hk}\ \forall l$, entonces la información proporcionada es completamente consistente. Sin embargo, los individuos no siempre son totalmente consistentes y, por tanto, la preferencia proporcionada por un individuo podría no verificar (4.4) y algunos de los valores estimados er_{ij}^{hkl} podrían no estar dentro del intervalo $[0,1]$. A partir de (4.5), podemos ver que el valor mínimo de cualquier grado de preferencia er_{ij}^{hkl} es -0.5 mientras que el máximo es 1.5. Con el fin de normalizar el dominio de expresión, el valor final estimado de r_{ij}^{hk} $(i \neq j)$, cp_{ij}^{hk}, se define de la siguiente manera:

$$cp_{ij}^{hk} = med\{0, 1, er_{ij}^{hk}\},$$

donde med representa la mediana.

El error entre un grado de preferencia, r_{ij}^{hk}, y su valor final estimado, cp_{ij}^{hk}, se calcula como:

$$\varepsilon r_{ij}^{hk} = |cp_{ij}^{hk} - r_{ij}^{hk}|.$$

La reciprocidad de $R^{hk} = (r_{ij}^{hk})$ implica la reciprocidad de $CP^{hk} = (cp_{ij}^{hk})$. Por tanto, $\varepsilon r_{ij}^{hk} = \varepsilon r_{ji}^{hk}$. Si $\varepsilon r_{ij}^{hk} = 0$, entonces existe consistencia total entre r_{ij}^{hk} y el resto de los elementos de R^{hk}. Evidentemente, cuando mayor sea el valor de εr_{ij}^{hk} mayor será la inconsistencia de r_{ij}^{hk} en lo que respecta a las restantes entradas de R^{hk}.

Esta observación permite medir el nivel de consistencia asociado a relación de preferencia difusa R^{hk} del individuo dm^h para el criterio c^k [35]:

$$cd^{hk} = \frac{\sum_{i,j=1;\ i\neq j}^{n} (1 - \varepsilon r_{ij}^{hk})}{n^2 - n}.$$

La relación de preferencia R^{hk} es totalmente consistente si $cd^{hk} = 1$. En otro caso, cuanto menor sea el valor de cd^{hk}, mayor será la inconsistencia de R^{hk}.

Finalmente, hay que notar que existen algunas limitaciones adicionales en la implementación del proceso de optimización que se deben abordar para obtener una solución significativa. Así, es importante que los límites de los intervalos se mantengan suficientemente diferenciados. De esta forma, si la longitud de los intervalos es menor a 0.05, la función de aptitud u objetivo debería devolver un valor lo suficientemente bajo, por ejemplo -1, el cual está muy lejos de los valores típicos devueltos por esta función al optimizar los intervalos. Dicho de otra forma, esta función de aptitud no considera la partícula porque los límites de los intervalos se superponen y pierden su semántica. Además, hay que volver a recordar que aunque el algoritmo de optimización por enjambre de partículas maximiza la función de aptitud, no hay garantía de que el resultado sea el óptimo. Simplemente podemos decir que hemos obtenido la mejor solución según el algoritmo de optimización por enjambre de partículas.

4.3 Proceso de selección

La tercera etapa del modelo tiene por objetivo ordenar las alternativas de mejor a peor a partir de las preferencias de los individuos del grupo. Es decir, la tercera etapa consiste en un proceso de selección divido en dos etapas: (i) agregación y (ii) explotación. En los siguientes apartados describimos ambas etapas.

4.3.1 Etapa de agregación

Esta etapa del proceso de selección produce una relación de preferencia colectiva que resume las preferencias expresadas por los individuos en la primera etapa del modelo. Para ello, debemos tener en cuenta que los criterios tienen distinto peso y que las preferencias de los individuos del grupo también tienen distinta importancia para cada criterio. Para modelar esto, podemos hacer uso de un operador de agregación de tipo IOWA [240] (Induced Ordered Weighted Averaging). Los operadores de agregación de tipo IOWA son una familia de operadores de agregación más general que los operadores de agregación de tipo OWA [229], los cuales se utilizarán en la etapa de explotación. Los operadores IOWA reciben argumentos en forma de pares, llamados pares OWA, en los que el primer componente se utiliza para establecer el orden en el que se agregan los segundos componentes.

Definición 4.3.1 *[240] La función $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es un operador IOWA de dimensión n si, asociado a Φ, existe un vector de pesos $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, tal que $w_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, y donde:*

$$\Phi(\langle u_1, a_1\rangle, \langle u_1, a_2\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot b_j,$$

siendo b_j el componente a_i del par OWA $\langle u_i, a_i\rangle$ que tiene el j-ésimo mayor valor de u_i. Debido a la función que realizan los componentes de los pares OWA, a_i se conoce como la variable argumento y u_i como la variable inductora del orden.

Una cuestión de considerable interés relacionada con el uso de estos operadores es el desarrollo de una metodología apropiada para la derivación de los pesos utilizados en la agregación [229, 230, 236]. Un enfoque para hacerlo es recurrir a los cuantificadores lingüísticos difusos propuestos por Zadeh [244] y la aplicación de esta idea a toma de decisiones multicriterio [226, 229]. Sobre la base de este tipo de cuantificadores, Yager propuso calcular los pesos utilizando:

$$w_i = Q\left(\frac{i}{n}\right) - Q\left(\frac{i-1}{n}\right), \quad i = 1, \ldots, n,$$

siendo Q el cuantificador lingüístico que se está modelando [229, 231, 235]. Si los pesos asociados con el operador IOWA se determinan usando este enfoque, esto se representa por Φ_Q.

Una vez más, como cada término lingüístico se forma como un intervalo, las entradas de las relaciones de preferencia lingüísticas, RP^{hk} $(h = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, q)$, el peso asociado a cada criterio, α^k $(k = 1, \ldots, q)$, y el nivel de importancia asociado a cada individuo por cada criterio, β^{hk} $(h = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, q)$, se muestrean N veces. Entonces, usamos la media aritmética como valor para la entrada en la relación de preferencia, $\bar{R}^{hk} = (\bar{r}_{ij}^{hk})$ $(h = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, q)$, para el peso asociado a cada criterio, $\bar{u}^k$ $(k = 1, \ldots, q)$, y para el nivel de importancia asociado a cada individuo por cada criterio, $\bar{v}^{hk}$ $(h = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, q)$. El proceso de obtención de la relación de preferencia colectiva es el siguiente:

- Para cada criterio, c^k, se obtiene una relación de preferencia, $\bar{R}^{ck} = (\bar{r}_{ij}^{ck})$, mediante un operador IOWA en el cual el nivel de importancia asociado a cada individuo para el criterio c^k es la variable inductora del orden:

$$\bar{r}_{ij}^{ck} = \Phi_Q(\langle \bar{v}^{1k}, \bar{r}_{ij}^{1k} \rangle, \langle \bar{v}^{2k}, \bar{r}_{ij}^{2k} \rangle, \ldots, \langle \bar{v}^{mk}, \bar{r}_{ij}^{mk} \rangle).$$

- La relación de preferencia colectiva final, $\bar{R}^c = (\bar{r}_{ij}^c)$, se obtiene mediante un operador IOWA en el cual el peso asociado a cada criterio actúa como variable inductora del orden:

$$\bar{r}_{ij}^{c} = \Phi_Q(\langle \bar{u}^{1}, \bar{r}_{ij}^{c1} \rangle, \langle \bar{u}^{2}, \bar{r}_{ij}^{c2} \rangle, \ldots, \langle \bar{u}^{k}, \bar{r}_{ij}^{ck} \rangle).$$

4.3.2 Etapa de explotación

Esta segunda etapa del proceso de selección, usando la información contenida en $\bar{R}^c$, ordena las alternativas para obtener aquella que mejor soluciona el problema. Para ello, se hace uso de dos conocidos grados de selección de alternativas [91], los cuales se basan en operadores OWA y en el concepto de mayoría difusa.

Yager introdujo la familia de operadores OWA como un medio para agregar evaluaciones relacionadas con el cumplimiento de múltiples criterios y unificar en un solo operador el comportamiento disyuntivo y conjuntivo.

Definición 4.3.2 *[229] La función $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es un operador OWA de dimensión n si, asociado a ϕ, existe un vector de pesos $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ tal que $w_i \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, y donde:*

$$\phi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot b_j,$$

siendo b_j el j-ésimo mayor elemento en la colección $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Los operadores OWA ponen a disposición una familia paramétrica de operadores de agregación, que incluye muchos de los operadores conocidos como la mediana, el mínimo, la media aritmética y el máximo, que se obtienen eligiendo los pesos apropiados [230]. El mismo enfoque basado en los cuantificadores lingüísticos puede aplicarse también para generar los pesos relacionados con el operador OWA, que está representado por ϕ_Q.

Los grados de selección de alternativas que utiliza nuestro proceso de selección son los dos siguientes [91]:

- El grado de dominancia guiado por cuantificador, $QGDD_i$, mide la dominancia que la alternativa a_i tiene sobre el resto de alternativas en base a la noción de mayoría difusa:

$$QGDD_i = \phi_Q(\bar{r}^c_{i1}, \bar{r}^c_{i2}, \ldots, \bar{r}^c_{i(i-1)}, \bar{r}^c_{i(i+1)}, \ldots, \bar{r}^c_{in}).$$

- El grado de no-dominancia guiado por cuantificador, $QGNDD_i$, mide el grado en el que la alternativa a_i no es dominada por una mayoría difusa de las restantes:

$$QGNDD_i = \phi_Q(1 - \bar{r}^s_{1i}, 1 - \bar{r}^s_{2i}, \ldots, 1 - \bar{r}^s_{(i-1)i}, 1 - \bar{r}^s_{(i+1)i}, \ldots, 1 - \bar{r}^s_{ni}),$$

  donde el grado en el cual la alternativa a_i es estrictamente dominado por la alternativa a_j se representa por $\bar{r}^s_{ji} = \text{máx}\{\bar{r}^c_{ji} - \bar{r}^c_{ij}, 0\}$.

En concreto, el proceso de selección aplica estos dos grados de selección de alternativas de la siguiente forma:

- En primer lugar, obtenemos las siguientes dos colecciones de alternativas aplicando los dos grados de selección de alternativas sobre A:

$$A^{QGDD} = \left\{ a_i \in A \mid QGDD_i = \sup_{a_j \in A} QGDD_j \right\}$$

$$A^{QGNDD} = \left\{ a_i \in A \mid QGNDD_i = \sup_{a_j \in A} QGNDD_j \right\}.$$

- En segundo lugar, obtenemos una nueva colección de alternativas a partir de la intersección de las dos anteriores colecciones de alternativas:

$$A^{QG} = A^{QGDD} \bigcap A^{QGNDD}.$$

  Si $A^{QG} \neq \emptyset$, entonces este es el conjunto selección de alternativas. En otro caso, continuamos al siguiente paso.

- En tercer lugar, si $\#(A^{QGDD}) = 1$, entonces este es el conjunto selección de alternativas. En otro caso, seleccionamos de este conjunto la alternativa que tenga el mayor valor de no-dominancia guiado por cuantificador.

4.4 Estudio experimental

Con el objetivo de ilustrar el funcionamiento de nuestro modelo, vamos a presentar a continuación un problema de decisión y vamos a resolverlo utilizando el modelo propuesto en este capítulo. El problema de decisión que se nos plantea es el siguiente. Tenemos un grupo de cuatro individuos compuesto por:

- Dos estudiantes (dm^1 y dm^2).
- Un profesor (dm^3).
- Un bibliotecario (dm^4).

Estos tienen que expresar sus preferencias para evaluar cinco bibliotecas de la Universidad de Granada:

- Biblioteca de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura (a_1).
- Biblioteca de la Facultad de Ciencias (a_2).
- Biblioteca de la Facultad de Derecho (a_3).

- Biblioteca de la Facultad de Medicina (a_4).
- Biblioteca de la Facultad de Psicología (a_5).

Los dos estudiantes, el profesor y el bibliotecario tienen que evaluar las cinco bibliotecas según los tres criterios siguientes:

- El espacio de la biblioteca inspira el estudio y el aprendizaje (c^1).
- Colección de revistas electrónicas (c^2).
- Voluntad de ayudar a los usuarios (c^3).

Para proporcionar sus preferencias, los estudiantes, el profesor y el bibliotecario utilizan los términos lingüísticos del siguiente conjunto:

$$\begin{aligned} S^1 &= \{s_0^1 = \text{mucho peor (MP}^1), s_1^1 = \text{peor (P}^1), s_2^1 = \text{igual (I}^1), \\ & s_3^1 = \text{mejor (M}^1), s_4^1 = \text{mucho mejor (MM}^1)\}. \end{aligned}$$

Para representar el peso de los criterios a la hora de evaluar las bibliotecas se utilizan los términos lingüísticos del siguiente conjunto:

$$\begin{aligned} S^2 &= \{s_0^2 = \text{poco importante (PI}^2), s_1^2 = \text{importante (I}^2), \\ & s_2^2 = \text{muy importante (MI}^2)\}. \end{aligned}$$

Para representar la importancia de las preferencias de los individuos del grupo en cada criterio se utilizan los términos lingüísticos del siguiente conjunto:

$$\begin{aligned} S^3 &= \{s_0^3 = \text{poco importante (PI}^3), s_1^3 = \text{importante (I}^3), \\ & s_2^3 = \text{muy importante (MI}^3)\}. \end{aligned}$$

En este ejemplo concreto, suponemos que la importancia asociada a cada criterio es:

$$\alpha^1 = \text{I}^2 \qquad \alpha^2 = \text{PI}^2 \qquad \alpha^3 = \text{MI}^2.$$

El nivel de importancia de las preferencias proporcionadas por los individuos del grupo en cada criterio es:

$$\begin{array}{lcllcllcl}
\beta^{11} & = & \text{MI}^3 & \beta^{12} & = & \text{PI}^3 & \beta^{13} & = & \text{MI}^3 \\
\beta^{21} & = & \text{MI}^3 & \beta^{22} & = & \text{PI}^3 & \beta^{23} & = & \text{MI}^3 \\
\beta^{31} & = & \text{PI}^3 & \beta^{32} & = & \text{MI}^3 & \beta^{33} & = & \text{I}^3 \\
\beta^{41} & = & \text{I}^3 & \beta^{42} & = & \text{I}^3 & \beta^{43} & = & \text{PI}^3.
\end{array}$$

Una vez que hemos especificado los detalles del problema de decisión que pretendemos abordar, vamos a ilustrar a continuación el funcionamiento de nuestro modelo.

4.4.1 Obtención de preferencias

En la primera etapa del modelo, los individuos del grupo, en este caso, los dos estudiantes, el profesor y el bibliotecario, tienen que comunicar sus preferencias en cada criterio sobre las cinco bibliotecas. Por tanto, cada individuo tiene que expresar tres relaciones de preferencia lingüísticas.

El primer estudiante, dm^1, proporciona las siguientes tres relaciones de preferencia lingüísticas:

$$RP^{11} = \begin{pmatrix} - & \text{P}^1 & \text{I}^1 & \text{I}^1 & \text{M}^1 \\ \text{M}^1 & - & \text{M}^1 & \text{M}^1 & \text{I}^1 \\ \text{I}^1 & \text{P}^1 & - & \text{M}^1 & \text{P}^1 \\ \text{I}^1 & \text{P}^1 & \text{P}^1 & - & \text{MP}^1 \\ \text{MP}^1 & \text{I}^1 & \text{M}^1 & \text{MM}^1 & - \end{pmatrix}$$

$$RP^{12} = \begin{pmatrix} - & \text{M}^1 & \text{M}^1 & \text{M}^1 & \text{P}^1 \\ \text{MP}^1 & - & \text{MM}^1 & \text{P}^1 & \text{M}^1 \\ \text{I}^1 & \text{P}^1 & - & \text{MM}^1 & \text{MP}^1 \\ \text{I}^1 & \text{I}^1 & \text{P}^1 & - & \text{I}^1 \\ \text{MM}^1 & \text{P}^1 & \text{M}^1 & \text{I}^1 & - \end{pmatrix}$$

$$RP^{13} = \begin{pmatrix} - & \mathrm{P}^1 & \mathrm{P}^1 & \mathrm{M}^1 & \mathrm{M}^1 \\ \mathrm{I}^1 & - & \mathrm{I}^1 & \mathrm{M}^1 & \mathrm{P}^1 \\ \mathrm{P}^1 & \mathrm{I}^1 & - & \mathrm{I}^1 & \mathrm{P}^1 \\ \mathrm{P}^1 & \mathrm{M}^1 & \mathrm{MM}^1 & - & \mathrm{M}^1 \\ \mathrm{MP}^1 & \mathrm{MM}^1 & \mathrm{P}^1 & \mathrm{MP}^1 & - \end{pmatrix}.$$

El segundo estudiante, dm^2, proporciona las siguientes tres relaciones de preferencia lingüísticas:

$$RP^{21} = \begin{pmatrix} - & \mathrm{I}^1 & \mathrm{P}^1 & \mathrm{MM}^1 & \mathrm{I}^1 \\ \mathrm{I}^1 & - & \mathrm{MM}^1 & \mathrm{MM}^1 & \mathrm{MP}^1 \\ \mathrm{M}^1 & \mathrm{MP}^1 & - & \mathrm{I}^1 & \mathrm{MM}^1 \\ \mathrm{MP}^1 & \mathrm{MP}^1 & \mathrm{I}^1 & - & \mathrm{MP}^1 \\ \mathrm{I}^1 & \mathrm{M}^1 & \mathrm{MP}^1 & \mathrm{MM}^1 & - \end{pmatrix}$$

$$RP^{22} = \begin{pmatrix} - & \mathrm{MM}^1 & \mathrm{MM}^1 & \mathrm{M}^1 & \mathrm{P}^1 \\ \mathrm{P}^1 & - & \mathrm{M}^1 & \mathrm{I}^1 & \mathrm{M}^1 \\ \mathrm{P}^1 & \mathrm{MP}^1 & - & \mathrm{M}^1 & \mathrm{P}^1 \\ \mathrm{P}^1 & \mathrm{I}^1 & \mathrm{P}^1 & - & \mathrm{M}^1 \\ \mathrm{MM}^1 & \mathrm{MP}^1 & \mathrm{MM}^1 & \mathrm{MP}^1 & - \end{pmatrix}$$

$$RP^{23} = \begin{pmatrix} - & \mathrm{MP}^1 & \mathrm{MP}^1 & \mathrm{MM}^1 & \mathrm{M}^1 \\ \mathrm{I}^1 & - & \mathrm{M}^1 & \mathrm{I}^1 & \mathrm{I}^1 \\ \mathrm{M}^1 & \mathrm{P}^1 & - & \mathrm{MP}^1 & \mathrm{M}^1 \\ \mathrm{MP}^1 & \mathrm{I}^1 & \mathrm{M}^1 & - & \mathrm{I}^1 \\ \mathrm{MP}^1 & \mathrm{I}^1 & \mathrm{M}^1 & \mathrm{I}^1 & - \end{pmatrix}.$$

El profesor, dm^3, proporciona las siguientes tres relaciones de preferencia lingüísticas:

$$RP^{31} = \begin{pmatrix} - & \mathrm{MP}^1 & \mathrm{M}^1 & \mathrm{P}^1 & \mathrm{MM}^1 \\ \mathrm{M}^1 & - & \mathrm{I}^1 & \mathrm{P}^1 & \mathrm{P}^1 \\ \mathrm{P}^1 & \mathrm{I}^1 & - & \mathrm{I}^1 & \mathrm{MP}^1 \\ \mathrm{M}^1 & \mathrm{M}^1 & \mathrm{I}^1 & - & \mathrm{M}^1 \\ \mathrm{MP}^1 & \mathrm{M}^1 & \mathrm{MM}^1 & \mathrm{P}^1 & - \end{pmatrix}$$

$$RP^{32} = \begin{pmatrix} - & \mathrm{P}^1 & \mathrm{P}^1 & \mathrm{M}^1 & \mathrm{M}^1 \\ \mathrm{MM}^1 & - & \mathrm{P}^1 & \mathrm{P}^1 & \mathrm{I}^1 \\ \mathrm{MM}^1 & \mathrm{M}^1 & - & \mathrm{P}^1 & \mathrm{M}^1 \\ \mathrm{I}^1 & \mathrm{M}^1 & \mathrm{MM}^1 & - & \mathrm{M}^1 \\ \mathrm{P}^1 & \mathrm{I}^1 & \mathrm{MP}^1 & \mathrm{M}^1 & - \end{pmatrix}$$

$$RP^{33} = \begin{pmatrix} - & \mathrm{I}^1 & \mathrm{I}^1 & \mathrm{P}^1 & \mathrm{M}^1 \\ \mathrm{I}^1 & - & \mathrm{MP}^1 & \mathrm{MP}^1 & \mathrm{I}^1 \\ \mathrm{I}^1 & \mathrm{P}^1 & - & \mathrm{MM}^1 & \mathrm{MM}^1 \\ \mathrm{M}^1 & \mathrm{M}^1 & \mathrm{M}^1 & - & \mathrm{P}^1 \\ \mathrm{MP}^1 & \mathrm{I}^1 & \mathrm{P}^1 & \mathrm{M}^1 & - \end{pmatrix}.$$

El bibliotecario, dm^4, proporciona las siguientes tres relaciones de preferencia lingüísticas:

$$RP^{41} = \begin{pmatrix} - & \mathrm{P}^1 & \mathrm{MM}^1 & \mathrm{MM}^1 & \mathrm{M}^1 \\ \mathrm{M}^1 & - & \mathrm{MP}^1 & \mathrm{MP}^1 & \mathrm{I}^1 \\ \mathrm{MP}^1 & \mathrm{MM}^1 & - & \mathrm{M}^1 & \mathrm{MP}^1 \\ \mathrm{MP}^1 & \mathrm{MM}^1 & \mathrm{P}^1 & - & \mathrm{MM}^1 \\ \mathrm{P}^1 & \mathrm{I}^1 & \mathrm{M}^1 & \mathrm{MP}^1 & - \end{pmatrix}$$

$$RP^{42} = \begin{pmatrix} - & \mathrm{I}^1 & \mathrm{I}^1 & \mathrm{P}^1 & \mathrm{P}^1 \\ \mathrm{I}^1 & - & \mathrm{I}^1 & \mathrm{M}^1 & \mathrm{P}^1 \\ \mathrm{I}^1 & \mathrm{I}^1 & - & \mathrm{I}^1 & \mathrm{I}^1 \\ \mathrm{MM}^1 & \mathrm{MP}^1 & \mathrm{I}^1 & - & \mathrm{M}^1 \\ \mathrm{MM}^1 & \mathrm{M}^1 & \mathrm{I}^1 & \mathrm{P}^1 & - \end{pmatrix}$$

$$RP^{43} = \begin{pmatrix} - & \mathrm{MM}^1 & \mathrm{MM}^1 & \mathrm{P}^1 & \mathrm{MM}^1 \\ \mathrm{P}^1 & - & \mathrm{I}^1 & \mathrm{P}^1 & \mathrm{P}^1 \\ \mathrm{MP}^1 & \mathrm{I}^1 & - & \mathrm{M}^1 & \mathrm{I}^1 \\ \mathrm{I}^1 & \mathrm{MM}^1 & \mathrm{I}^1 & - & \mathrm{MM}^1 \\ \mathrm{P}^1 & \mathrm{M}^1 & \mathrm{I}^1 & \mathrm{P}^1 & - \end{pmatrix}.$$

4.4.2 Granulación de la información lingüística

Una vez que los cuatro individuos han proporcionado sus preferencias mediante relaciones de preferencia lingüísticas, la siguiente etapa del modelo consiste en hacer operacionales los términos lingüísticos que forman parte de esas relaciones de preferencia a través del proceso de granulación de la información. Como ya hemos descrito, este proceso de granulación se basa en asociar los términos lingüísticos en intervalos distribuidos a lo largo del intervalo $[0, 1]$ mediante un proceso de optimización en el que se intenta maximizar el consenso y la consistencia.

Antes de mostrar los resultados de este proceso de optimización mediante el algoritmo de optimización por enjambre de partículas, vamos a especificar el valor utilizado en los distintos parámetros de este algoritmo de optimización. En concreto:

- El enjambre está compuesto por 200 partículas. Hemos utilizado este tamaño para la población ya que se obtuvieron resultados similares en distintas ejecuciones del algoritmo. Es decir, se comprobó que este tamaño de población producía resultados estables.

- El número máximo de generaciones (iteraciones) se fijó en 400. Usamos este valor ya que, a partir de este número, se observan los mismos valores devueltos por la función de aptitud.

- A los coeficientes c_1 y c_2 se les asignó el valor 2. Utilizamos este valor ya que se usa comúnmente en los distintos modelos propuestos en la literatura [169].

- El valor de ω se decrementó linealmente de 0.9 a 0.4 [152]. Por tanto, (4.2) queda definida como:

$$\omega(t) = (0.9 - 0.4) \cdot \frac{s-t}{s} + 0.4.$$

- Como queremos que el consenso tenga más importancia, el valor asignado a γ fue 0.75 en (4.1).

- En (4.3), se asignó el valor de 500 a N, ya que se estuvieron resultados similares con valores de N superiores.

Una vez especificados los valores con los que se ejecuta el algoritmo de optimización por enjambre de partículas, podemos proceder a su ejecución para hacer operacionales los términos lingüísticos de los tres conjuntos utilizados en este problema de decisión. La Figura 4.2 muestra el rendimiento del algoritmo de optimización según los valores devueltos por la función de aptitud en sucesivas generaciones. El mejor valor obtenido para el criterio de optimización es 0.826, siendo 0.005 la desviación típica.

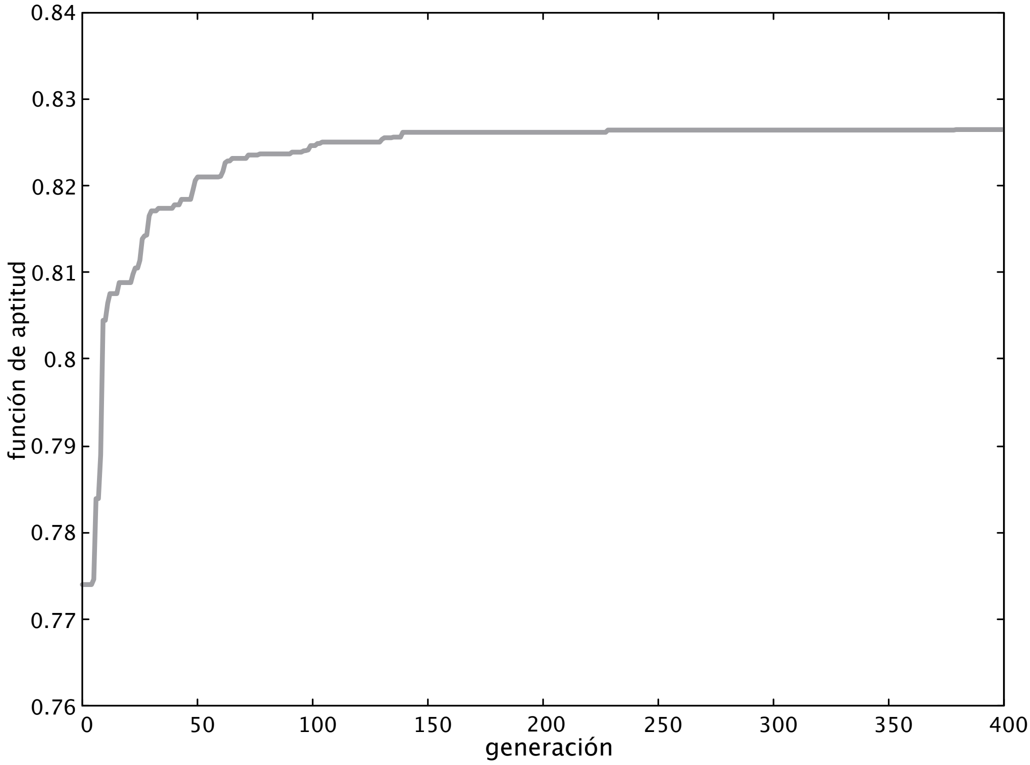

Figura 4.2. **Valores de la función de aptitud devueltos por el algoritmo de optimización por enjambre de partículas.**

El vector de puntos de corte calculado por el algoritmo de optimización por enjambre de partículas es $\mathbf{p} = (0.56, 0.64, 0.72, 0.80, 0.06, 0.14, 0.62, 0.88)$. Por tanto, los intervalos correspondientes a los términos lingüísticos pertenecientes a los conjuntos S^1, S^2 y S^3 son:

$$\begin{array}{lllllllll}\mathrm{MP}^1 & = & [0.00, 0.56) & \mathrm{P}^1 & = & [0.56, 0.64) & \mathrm{I}^1 & = & [0.64, 0.72) \\ \mathrm{M}^1 & = & [0.72, 0.80) & \mathrm{MM}^1 & = & [0.80, 1.00] & & & \end{array}$$

$$\mathrm{PI}^2 = [0.00, 0.06) \quad \mathrm{I}^2 = [0.06, 0.14) \quad \mathrm{MI}^2 = [0.14, 1.00]$$

$$\mathrm{PI}^3 = [0.00, 0.62) \quad \mathrm{I}^3 = [0.62, 0.88) \quad \mathrm{MI}^3 = [0.88, 1.00].$$

4.4.3 Proceso de selección

Una vez obtenidos los intervalos asociados a los términos lingüísticos de los distintos conjuntos, la última etapa del modelo consiste en ordenar las alternativas, de acuerdo a las relaciones de preferencias de los individuos, mediante el proceso de selección.

En primer lugar, se obtienen las relaciones de preferencia $\bar{R}^{hk} = (\bar{r}_{ij}^{hk})$ $(h = 1, \ldots, 4;\ k = 1, \ldots, 3)$, los pesos asociados a los criterios, $\bar{u}^k$ $(k = 1, \ldots, 3)$, y los niveles de importancia asociados a las preferencias de los dos estudiantes, del profesor y del bibliotecario para cada criterio, $\bar{v}^{hk}$ $(h = 1, \ldots, 4;\ k = 1, \ldots, 3)$. Estas son:

$$\bar{R}^{11} = \begin{pmatrix} - & 0.60 & 0.68 & 0.68 & 0.76 \\ 0.76 & - & 0.76 & 0.76 & 0.68 \\ 0.68 & 0.60 & - & 0.76 & 0.60 \\ 0.68 & 0.60 & 0.60 & - & 0.28 \\ 0.28 & 0.68 & 0.76 & 0.90 & - \end{pmatrix}$$

$$\bar{R}^{12} = \begin{pmatrix} - & 0.76 & 0.76 & 0.76 & 0.60 \\ 0.28 & - & 0.90 & 0.60 & 0.76 \\ 0.68 & 0.60 & - & 0.90 & 0.28 \\ 0.68 & 0.68 & 0.60 & - & 0.68 \\ 0.90 & 0.60 & 0.76 & 0.68 & - \end{pmatrix}$$

$$\bar{R}^{13} = \begin{pmatrix} - & 0.28 & 0.28 & 0.76 & 0.76 \\ 0.68 & - & 0.68 & 0.76 & 0.60 \\ 0.60 & 0.68 & - & 0.68 & 0.60 \\ 0.60 & 0.76 & 0.90 & - & 0.76 \\ 0.28 & 0.90 & 0.60 & 0.28 & - \end{pmatrix}$$

$$\bar{R}^{21} = \begin{pmatrix} - & 0.68 & 0.60 & 0.90 & 0.68 \\ 0.68 & - & 0.90 & 0.90 & 0.28 \\ 0.68 & 0.28 & - & 0.68 & 0.90 \\ 0.28 & 0.28 & 0.68 & - & 0.28 \\ 0.68 & 0.76 & 0.28 & 0.90 & - \end{pmatrix}$$

$$\bar{R}^{22} = \begin{pmatrix} - & 0.90 & 0.90 & 0.76 & 0.60 \\ 0.60 & - & 0.76 & 0.68 & 0.76 \\ 0.60 & 0.28 & - & 0.76 & 0.60 \\ 0.60 & 0.68 & 0.60 & - & 0.76 \\ 0.90 & 0.28 & 0.90 & 0.28 & - \end{pmatrix}$$

$$\bar{R}^{23} = \begin{pmatrix} - & 0.28 & 0.28 & 0.90 & 0.76 \\ 0.68 & - & 0.76 & 0.68 & 0.68 \\ 0.76 & 0.60 & - & 0.28 & 0.76 \\ 0.28 & 0.68 & 0.76 & - & 0.68 \\ 0.28 & 0.68 & 0.76 & 0.68 & - \end{pmatrix}$$

$$\bar{R}^{31} = \begin{pmatrix} - & 0.28 & 0.76 & 0.60 & 0.90 \\ 0.76 & - & 0.68 & 0.60 & 0.60 \\ 0.60 & 0.68 & - & 0.68 & 0.28 \\ 0.76 & 0.76 & 0.68 & - & 0.76 \\ 0.28 & 0.76 & 0.90 & 0.60 & - \end{pmatrix}$$

$$\bar{R}^{32} = \begin{pmatrix} - & 0.60 & 0.60 & 0.76 & 0.76 \\ 0.90 & - & 0.60 & 0.60 & 0.68 \\ 0.90 & 0.76 & - & 0.60 & 0.76 \\ 0.60 & 0.76 & 0.90 & - & 0.76 \\ 0.60 & 0.68 & 0.28 & 0.76 & - \end{pmatrix}$$

$$\bar{R}^{33} = \begin{pmatrix} - & 0.68 & 0.68 & 0.60 & 0.76 \\ 0.68 & - & 0.28 & 0.28 & 0.68 \\ 0.68 & 0.60 & - & 0.90 & 0.90 \\ 0.76 & 0.76 & 0.76 & - & 0.60 \\ 0.28 & 0.68 & 0.60 & 0.76 & - \end{pmatrix}$$

$$\bar{R}^{41} = \begin{pmatrix} - & 0.60 & 0.90 & 0.90 & 0.76 \\ 0.76 & - & 0.28 & 0.28 & 0.68 \\ 0.28 & 0.90 & - & 0.76 & 0.28 \\ 0.28 & 0.90 & 0.60 & - & 0.90 \\ 0.60 & 0.68 & 0.76 & 0.28 & - \end{pmatrix}$$

$$\bar{R}^{42} = \begin{pmatrix} - & 0.68 & 0.68 & 0.60 & 0.60 \\ 0.68 & - & 0.68 & 0.76 & 0.60 \\ 0.68 & 0.68 & - & 0.68 & 0.68 \\ 0.90 & 0.28 & 0.68 & - & 0.76 \\ 0.90 & 0.76 & 0.68 & 0.60 & - \end{pmatrix}$$

$$\bar{R}^{43} = \begin{pmatrix} - & 0.90 & 0.90 & 0.60 & 0.90 \\ 0.60 & - & 0.68 & 0.60 & 0.60 \\ 0.28 & 0.60 & - & 0.76 & 0.68 \\ 0.68 & 0.90 & 0.68 & - & 0.90 \\ 0.60 & 0.76 & 0.68 & 0.60 & - \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}^1 = 0.10 \quad \bar{u}^2 = 0.03 \quad \bar{u}^3 = 0.57$$

$$\begin{array}{lll} \bar{v}^{11} = 0.94 & \bar{v}^{12} = 0.31 & \bar{v}^{13} = 0.94 \\ \bar{v}^{21} = 0.94 & \bar{v}^{22} = 0.31 & \bar{v}^{23} = 0.94 \\ \bar{v}^{31} = 0.31 & \bar{v}^{32} = 0.94 & \bar{v}^{33} = 0.75 \\ \bar{v}^{41} = 0.75 & \bar{v}^{42} = 0.75 & \bar{v}^{43} = 0.31. \end{array}$$

En segundo lugar, la relación de preferencia colectiva $\bar{R}^{c1}$ para el criterio c^1 se obtiene mediante la agregación de las relaciones de preferencia $\bar{R}^{11}$, $\bar{R}^{21}$, $\bar{R}^{31}$, y $\bar{R}^{41}$. Para realizar la agregación, se utiliza un operador IOWA junto con el cuantificador lingüístico «mayoría» definido como $Q(r) = r^{1/2}$ para generar los pesos del operador IOWA. El resultado obtenido es:

$$\bar{R}^{c1} = \begin{pmatrix} - & 0.57 & 0.71 & 0.75 & 0.76 \\ 0.74 & - & 0.70 & 0.70 & 0.54 \\ 0.61 & 0.59 & - & 0.73 & 0.57 \\ 0.54 & 0.60 & 0.63 & - & 0.44 \\ 0.41 & 0.71 & 0.68 & 0.76 & - \end{pmatrix}.$$

Vamos a ilustrar cómo se calcula el valor asociado a la preferencia colectiva r_{12}^{c1} como ejemplo:

$$\begin{array}{cccc} \bar{v}^{11} = 0.94 & \bar{v}^{21} = 0.94 & \bar{v}^{31} = 0.31 & \bar{v}^{41} = 0.75 \\ \bar{r}_{12}^{11} = 0.60 & \bar{r}_{12}^{21} = 0.68 & \bar{r}_{12}^{31} = 0.28 & \bar{r}_{12}^{41} = 0.60 \\ b_1 = \bar{r}_{12}^{11} & b_2 = \bar{r}_{12}^{21} & b_3 = \bar{r}_{12}^{41} & b_4 = \bar{r}_{12}^{31} \\ Q(1/4) = 0.50 & Q(1/2) = 0.71 & Q(3/4) = 0.87 & Q(1) = 1.0 \\ w_1 = 0.50 & w_2 = 0.21 & w_3 = 0.16 & w_4 = 0.13 \end{array}$$

$$r_{12}^{c1} = 0.50 \cdot 0.60 + 0.21 \cdot 0.68 + 0.16 \cdot 0.60 + 0.13 \cdot 0.28 = 0.57.$$

Aplicando el mismo procedimiento para calcular las relaciones de preferencia colectivas $\bar{R}^{c2}$ y $\bar{R}^{c3}$ asociadas a los criterios c^2 y c^3, obtenemos:

$$\bar{R}^{c2} = \begin{pmatrix} - & 0.68 & 0.68 & 0.73 & 0.68 \\ 0.72 & - & 0.69 & 0.64 & 0.69 \\ 0.78 & 0.65 & - & 0.69 & 0.65 \\ 0.68 & 0.64 & 0.77 & - & 0.75 \\ 0.75 & 0.63 & 0.52 & 0.65 & - \end{pmatrix}$$

$$\bar{R}^{c3} = \begin{pmatrix} - & 0.42 & 0.42 & 0.74 & 0.78 \\ 0.67 & - & 0.63 & 0.65 & 0.63 \\ 0.60 & 0.64 & - & 0.64 & 0.69 \\ 0.57 & 0.76 & 0.82 & - & 0.74 \\ 0.32 & 0.80 & 0.64 & 0.48 & - \end{pmatrix}.$$

En tercer lugar, la relación de preferencia colectiva final $\bar{R}^c$ se obtiene mediante la agregación de las relaciones $\bar{R}^{c1}$, $\bar{R}^{c2}$, y $\bar{R}^{c3}$, usando de nuevo el operador IOWA con el mismo cuantificador lingüístico «mayoría» para generar los pesos. Esta es:

$$\bar{R}^{c} = \begin{pmatrix} - & 0.50 & 0.54 & 0.74 & 0.76 \\ 0.70 & - & 0.66 & 0.66 & 0.62 \\ 0.64 & 0.63 & - & 0.67 & 0.65 \\ 0.58 & 0.70 & 0.77 & - & 0.67 \\ 0.42 & 0.75 & 0.62 & 0.58 & - \end{pmatrix}.$$

En cuarto lugar, se calculan los grados de dominancia y de no-dominancia guiados por cuantificador. Para ello, se utiliza un operador OWA que también hace uso del cuantificador lingüístico «mayoría» para generar los pesos. Se obtiene:

$$\begin{array}{ll} QGDD_1 = 0.69 & QGDD_2 = 0.67 \\ QGDD_3 = 0.65 & QGDD_4 = 0.71 \\ QGDD_5 = 0.65 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} QGNDD_1 = 0.96 & QGNDD_2 = 0.97 \\ QGNDD_3 = 0.98 & QGNDD_4 = 0.98 \\ QGNDD_5 = 0.93. & \end{array}$$

Por tanto, tenemos que $A^{QGDD} = \{a_4\}$ y $A^{QGNDD} = \{a_3, a_4\}$, siendo $A^{QG} = \{a_4\}$. Según esto, la mejor biblioteca es la de la Facultad de Medicina (a_4).

4.5 Discusión

A continuación, y teniendo en cuenta distintos aspectos, vamos a analizar el rendimiento de nuestro modelo y a discutir las posibles ventajas y limitaciones que presenta.

4.5.1 Distribución uniforme de los intervalos

Para poner en contexto los resultados obtenidos por nuestro modelo, vamos a mostrar el rendimiento cuando se considera una distribución uniforme de los puntos de corte sobre el intervalo $[0, 1]$. En este caso tenemos que $\mathbf{p} = (0.20, 0.40, 0.60, 0.80, 0.33, 0.66, 0.33, 0.66)$. Por tanto, los intervalos correspondientes a los términos lingüísticos pertenecientes a los conjuntos S^1, S^2 y S^3 son en este caso:

$$\begin{array}{lcllcllcl} \text{MP}^1 & = & [0.00, 0.20) & \text{P}^1 & = & [0.20, 0.40) & \text{I}^1 & = & [0.40, 0.60) \\ \text{M}^1 & = & [0.60, 0.80) & \text{MM}^1 & = & [0.80, 1.00] & & & \end{array}$$

$$\text{PI}^2 = [0.00, 0.33) \quad \text{I}^2 = [0.33, 0.66) \quad \text{MI}^2 = [0.66, 1.00]$$

$$\text{PI}^3 = [0.00, 0.33) \quad \text{I}^3 = [0.33, 0.66) \quad \text{MI}^3 = [0.66, 1.00].$$

Con esta distribución uniforme de los intervalos, el criterio de optimización obtiene un valor igual a 0.722, siendo 0.010 su desviación típica. Si lo comparamos con el valor obtenido por nuestro modelo, el cual era 0.826, vemos que ahora el criterio de optimización alcanza un valor menor. Por tanto, nuestro modelo permite obtener una solución con mejor consenso y consistencia.

4.5.2 Rendimiento del modelo para distintos valores de γ

El impacto de los valores del parámetro γ, el cual se utiliza para obtener el valor del criterio de optimización O, sobre el rendimiento de nuestro modelo se obser-

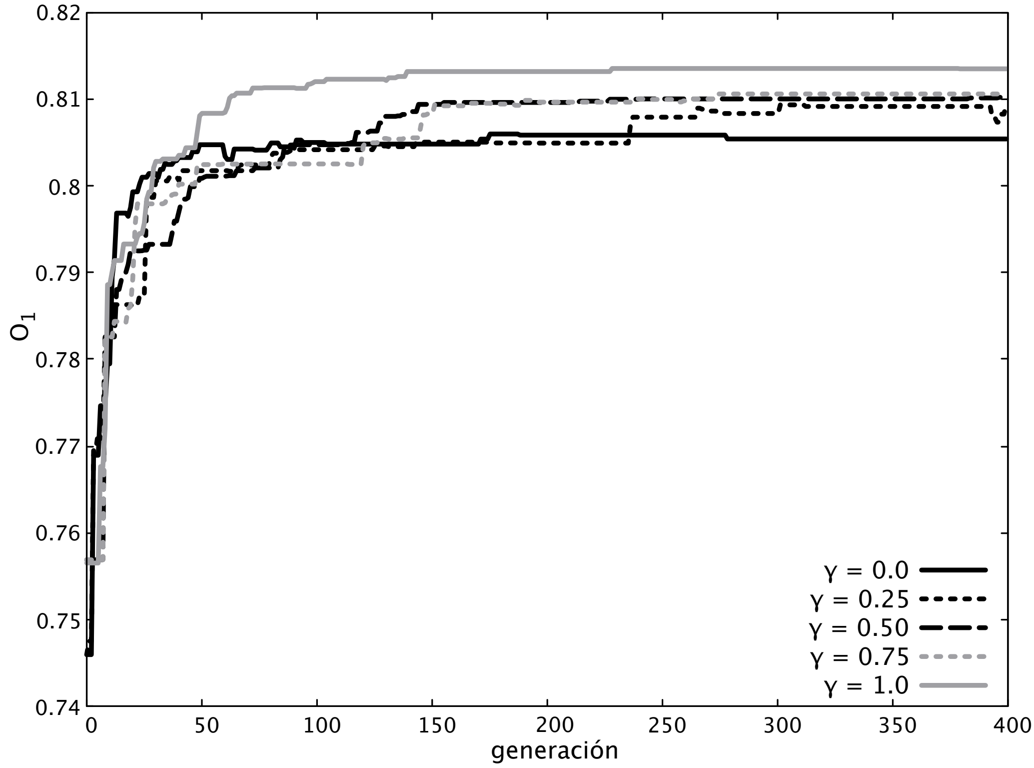

Figura 4.3. O_1 para distintos valores de γ.

va en la Figura 4.3 y en la Figura 4.4. Por un lado, cuando $\gamma = 0$, el algoritmo de optimización se centra exclusivamente en maximizar la consistencia individual asociada con cada individuo (O_2). Por tanto, se obtiene un valor mayor para este criterio (Figura 4.4). Por otro lado, cuando γ recibe valores distintos de 0, los valores asociados al criterio O_2 descienden progresivamente. Esto es lógico ya que, en este caso, no se está optimizando el criterio O_2 en sí mismo, sino que el criterio de optimización O incorpora también el efecto del consenso alcanzado entre los individuos del grupo. En concreto, cuando $\gamma = 1$, el algoritmo de optimización se centra exclusivamente en el consenso y, por tanto, el criterio O_1 alcanza su máximo valor (Figura 4.3). A diferencia de lo que ocurre con el criterio O_2, cuanto mayor sea el valor de γ, mayor será el valor asociado al criterio O_1. Esto es natural ya que ahora se le está dando más importancia al consenso.

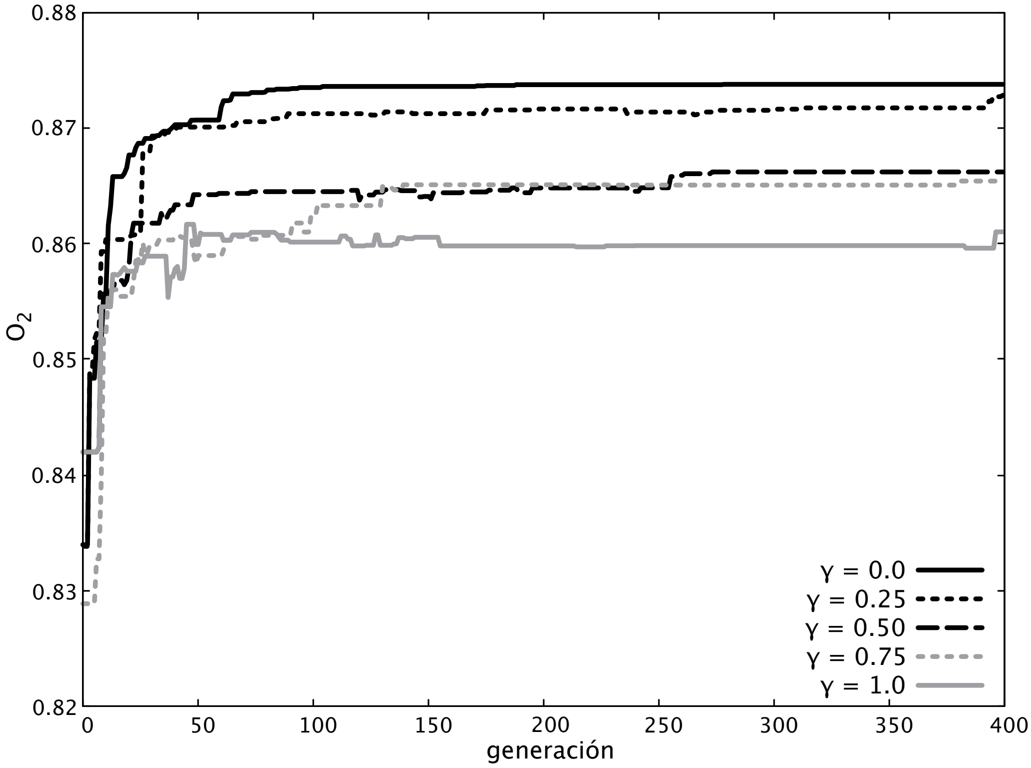

Figura 4.4. O_2 **para distintos valores de** γ.

4.5.3 Proceso de consenso

El modelo que hemos propuesto obtiene la clasificación de las alternativas de mejor a peor como solución del problema con el mayor consenso y consistencia posibles, teniendo en cuenta las relaciones de preferencia lingüísticas expresadas por los individuos del grupo. Ya se ha analizado que este modelo obtiene un valor más alto para el criterio de optimización que cuando se utiliza una distribución uniforme de los términos lingüísticos. Sin embargo, existe un límite en el que no se puede aumentar el valor asociado con el criterio de optimización. Para superar esta limitación, los individuos tendrían que modificar sus preferencias iniciales. Por tanto, se tendría que añadir un proceso en el que los individuos discutan y modifiquen sus preferencias. Como se describió en el capítulo 2, entre los significados asociado al consenso estaba aquel que lo definía como un proceso de negociación compuesto por sucesivas rondas de discusión en el que los individuos aceptaban modificar sus preferencias de acuerdo con el consejo proporcionado por un moderador, el cual sabía en todo momento la consistencia y el consenso alcanzados en cada ronda a través del cálculo de distintas medidas de consenso y consistencia.

4.5.4 Modelos de computación con palabras

La comparación del resultado obtenido por un modelo de toma de decisiones en grupo con otros no es una tarea sencilla. La mayoría de las veces los términos lingüísticos se representan de distinta forma o el contexto en el que se definen estos modelos también difiere. Por tanto, las comparaciones cuantitativas no suelen ser significativas. No obstante, como ya hemos mencionado a lo largo de esta memoria, nuestro modelo presenta algunas ventajas en relación con otros:

- En comparación con los modelos tradicionales de computación con palabras, como los modelos semánticos o los modelos basados en escalas cualitativas, nuestro modelo hace operativos los términos lingüísticos mediante un proceso de granulación de la información de forma que la distribución y semántica, en lugar de establecerse *a priori* como en los modelos de computación con palabras anteriores, se establece mediante un proceso de optimización. Esto permite que la distribución y semántica de términos lingüísticos se forme de manera que la solución del problema sea la de mayor consenso y consistencia.

- Aumenta la flexibilidad y riqueza de los modelos de toma de decisiones en grupo basados en computación granular para operar con la información lingüística [19, 22, 163] al permitir modelar contextos multicriterio en los que cada criterio tiene asociado un peso de importancia y las preferencia expresadas por cada individuo del grupo tienen un nivel de importancia diferente para cada criterio. Esto posibilita modelar procesos de toma de decisiones en grupo de forma más realista.

Sin embargo, y al igual que en los modelos propuestos en [19, 22, 163], como los términos lingüísticos se formalizan en intervalos, nuestro modelo sufre del problema de la pérdida de información. El hecho de trabajar con los intervalos mediante el muestreo para obtener un representante de estos implica que se produzca pérdida de información. Esto, unido a la forma en la que se construyen los intervalos, también implica que a veces se puedan muestrear relaciones de preferencia que no cumplen algunas propiedades como la reciprocidad débil. Por tanto, habría que tener en cuenta que las relaciones de preferencia obtenidas cumplen también otra serie de propiedades. Otra forma de solventar esto sería trabajando directamente con intervalos en lugar de con un representante de estos e incluso utilizando otro formalismo de granulación para modelar los términos lingüísticos.

≪La gente que me odia y que me quiere no me va a perdonar que me distraiga≫

Silvio Rodríguez

CAPÍTULO

5

Conclusiones y líneas de investigación futuras

El capítulo final de esta memoria lo dedicamos a recordar los principales desarrollos y los resultados más importantes alcanzados durante el desarrollo de esta (sección 5.1). Además, presentamos algunas ideas sobre diferentes líneas de investigación que podrían llevarse a cabo para continuar esta investigación en el futuro (sección 5.2).

5.1 Conclusiones

En esta memoria nos hemos centrado en la investigación en procesos de toma de decisiones en grupo, área de investigación de gran relevancia actualmente. En concreto, hemos centrado nuestros desarrollos en procesos de toma de decisiones en grupo los cuales se efectúan en ambientes multicriterio, heterogéneos y lingüísticos. Para ello, hemos desarrollado un proceso de granulación de la información basado en computación granular para poder operar con la información lingüística. Además, se han desarrollado dos nuevos métodos, uno para obtener el consenso y otro para efectuar el proceso de selección, en entornos multicriterio en los cuales los criterios tienen distinto peso a la hora de obtener las alternativas solución, así como las preferencias de los individuos, las cuales tienen distinto nivel de importancia dependiendo del criterio al cual se refieran.

Teniendo en cuenta todo esto y los resultados alcanzados durante el desarrollo de esta memoria, a continuación exponemos algunas de las conclusiones que se pueden extraer:

- Sobre el proceso de granulación de la información lingüística. En esta memoria hemos desarrollado un nuevo proceso de granulación de la información lingüística basado en computación granular para poder operar con los términos lingüísticos empleados por los individuos para modelar sus preferencias. Podemos extraer estas conclusiones sobre este nuevo proceso de granulación de la información:

  - A diferencia de los modelos clásicos de computación con palabras, en los cuales tanto la semántica como la distribución de los términos lingüísticos se establece *a priori*, nuestro proceso de granulación permite obtener estos a través de un proceso de optimización en el que se maximiza tanto el consenso como la consistencia. De esta forma, la semántica y la distribución de los términos lingüísticos se obtiene de manera que sean lo más significativos posibles, permitiendo obtener soluciones con mayor consenso y consistencia.
  - En comparación con otros procesos de granulación de la información lingüística, este nuevo proceso mejora la riqueza y la flexibilidad de los modelos de toma de decisiones grupales al permitir trabajar en entornos multicriterio, en los cuales cada criterio tiene asociado un peso de importancia y en los que las preferencias expresadas por cada individuo del grupo tienen un nivel de importancia diferente para cada criterio.

- Sobre el método para calcular el consenso. En esta memoria hemos presentado un nuevo método para calcular el consenso alcanzado entre los individuos del grupo según sus preferencias. Sobre este nuevo método para calcular el consenso podemos extraer las siguientes conclusiones:

- Similar a otros métodos para calcular el consenso, este nuevo método se basa en el concepto de coincidencia y permite obtener el consenso en los tres niveles de una relación de preferencia: pares de alternativas, alternativas y relación. Sin embargo, este nuevo modelo permite calcular estas medidas de consenso en procesos de toma de decisiones grupales en los cuales se tienen en cuenta diferentes criterios para evaluar las alternativas y en los que estos tienen diferentes pesos de importancia en la evaluación final.
- Este método de cálculo del consenso en entornos multicriterio y heterogéneos podría ser fácilmente extendido para trabajar con otros tipos de relaciones de preferencia (como, por ejemplo, difusas, multiplicativas, etc.), pudiendo ser, por tanto, útil en otros entornos de decisión.

- Sobre el método de selección de alternativas. En esta memoria hemos presentado un nuevo método de selección de alternativas que permite obtener una ordenación de las alternativas de mejor a peor como solución del problema teniendo en cuenta para ello las preferencias de los individuos del grupo. Podemos extraer estas conclusiones sobre este nuevo método de selección de alternativas.

  - Este nuevo método de selección de alternativas, al estar basado en operadores de agregación de tipo IOWA y OWA, puede aplicarse en entornos multicriterio y heterogéneos en los que se debe considerar que los criterios tienen diferentes pesos de importancia y que las preferencias de los individuos tienen diferentes niveles de importancia en distintos criterios.
  - Este método de selección de alternativas puede adaptarse al formalismo de granulación generado por el proceso de granulación de la información asumida por el modelo.

5.2 Líneas de investigación futuras

En relación con las líneas de investigación en las que se podría continuar la investigación que se ha desarrollado en esta memoria podemos destacar, entre otras, las siguientes:

- El proceso de granulación de la información lingüística desarrollado en esta memoria asume que los individuos utilizan un término lingüístico perteneciente a un conjunto para modelar su preferencia. Sin embargo, como se ha analizado en el capítulo 3, para modelar mejor la incertidumbre y permitir evaluaciones más realistas parece lógico que los individuos puedan emplear más de un término lingüístico para modelar sus preferencias. Por tanto, una idea interesante que podría contribuir a mejorar el modelo de toma de decisiones introducido en esta memoria es adaptar el proceso de granulación de la información para trabajar con expresiones lingüísticas complejas, es decir, aquellas que están formadas por más de un término lingüístico.

- En la última década han surgido grandes avances en las tecnologías de medios sociales, democracia digital y participación electrónica. Un aspecto diferencial de estos modelos de comunicación es que el número de individuos que pueden participar en un proceso de toma de decisiones aumenta drásticamente. Esto ha originado un campo de investigación emergente y de rápido desarrollo conocido como procesos de toma de decisiones a gran escala [41]. Este tipo de proceso de toma de decisiones es más complejo de modelar al participar gran cantidad de individuos con diversos intereses y presentar alternativas con múltiples criterios. Por tanto, se podría pensar cómo adaptar el modelo de decisión desarrollado en esta memoria a estos entornos.

- Para facilitar el desarrollo de procesos de toma de decisiones grupales en entornos reales en los cuales la estructura del grupo de individuos esté descentralizada es importante desarrollar aplicaciones informáticas, como, por ejemplo, aplicaciones móviles. Para ello, la tecnología de cadenas de bloques (*blockchain*) puede ser útil como herramienta para reforzar la eficacia, integridad y seguridad de estos procesos de decisión distribuidos [259]. La tecnología de cadena de bloques puede verse como una red descentralizada capaz de proporcionar inmutabilidad, seguridad, privacidad y transparencia sin necesidad de una autoridad central. Esto permite trazar todo el proceso de decisión, con lo que lo hace más transparente.

Publicaciones

Respecto a la publicación y difusión de los desarrollos y resultados descritos en esta memoria, hay que destacar que estos han sido publicados en el siguiente artículo:

- E. A. Callejas, J. A. Cerrada, C. Cerrada, F. J. Cabrerizo. «Group decision making based on a framework of granular computing for multi-criteria and linguistic contexts». IEEE Access, volumen 7, páginas 54670–54681, 2019.

En relación con los indicios de calidad asociados a esta publicación podemos destacar:

- Factor de impacto en el InCites Journal Citation Reports: 3.745.
- Categoría en el InCites Journal Citation Reports: Computer Science, Information Systems.
- Posición: 35/156. Primer cuartil.

Bibliografía

[1] M. Aggarwal. Discriminative aggregation operators for multi criteria decision making. *Applied Soft Computing*, 52:1058–1069, 2017.

[2] C. Alcalde, A. Burusco, y R. Fuentes-González. A constructive method for the definition of interval-valued fuzzy implication operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 153(2):211–227, 2005.

[3] S. Alonso. *Group Decision Making With Incomplete Fuzzy Preference Relations*. Tesis, Universidad de Granada, Granada, 2006.

[4] K. J. Arrow. *Social Choice and Individual Values*. Yale University Press, New Haven, 1963.

[5] K. T. Atanassov. Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 20(1):87–96, 1986.

[6] G.-Y. Bao, X.-L. Lian, M. He, y L.-L. Wang. Improved two-tuple linguistic representation model based on new linguistic evaluation scale. *Control and Decision*, 25(5):780–784, 2010.

[7] A. Bargiela y W. Pedrycz. *Granular Computing: An Introduction*. Springer, New York, 2003.

[8] A. Bargiela y W. Pedrycz. Granular mappings. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A: Systems and Humans*, 35(2):292–297, 2005.

[9] R. E. Bellman y L. A. Zadeh. Decision-making in a fuzzy environment. *Management Science*, 17(4):53–79, 1970.

[10] U. Bentkowska, H. Bustince, A. Jurio, M. Pagola, y B. Pekala. Decision making with an interval-valued fuzzy preference relation and admissible orders. *Applied Soft Computing*, 35:792–891, 2015.

[11] J. C. Bezdek, B. Spillman, y R. Spillman. A fuzzy relation space for group decision theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 1(4):255–268, 1978.

[12] F. Blanco-Mesa, E. León-Castro, y J. M. Merigó. A bibliometric analysis of aggregation operators. *Applied Soft Computing*, 81:105488, 2019.

[13] D. Bouyssou, T. Marchant, M. Pirlot, P. Perny, A. Tsoukias, y P. Vincke. *Evaluation and Decision Models: A Critical Perspective*. Springer, New York, 2000.

[14] M. Brunelli y J. Mezei. How different are ranking methods for fuzzy numbers? A numerical study. *International Journal of Approximate Reasoning*, 54(5):627–639, 2013.

[15] J. Buckley. The multiple judge, multiple criteria ranking problem: A fuzzy set approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 13(1):25–37, 1984.

[16] C. T. Butler y A. Rothstein. *On Conflict and Consensus: A Handbook on Formal Consensus Decisionmaking*. Food Not Bombs Publishing, Takoma Park, 2006.

[17] F. J. Cabrerizo, S. Alonso, y E. Herrera-Viedma. A consensus model for group decision making problems with unbalanced fuzzy linguistic information. *International Journal of Information Technology & Decision Making*, 8(1):109–131, 2009.

[18] F. J. Cabrerizo, R. Heradio, I. J. Pérez, y E. Herrera-Viedma. A selection process based on additive consistency to deal with incomplete fuzzy linguistic information. *Journal of Universal Computer Science*, 16(1):62–81, 2010.

[19] F. J. Cabrerizo, E. Herrera-Viedma, y W. Pedrycz. A method based on PSO and granular computing of linguistic information to solve group decision making problems defined in heterogeneous contexts. *European Journal of Operational Research*, 230(3):624–633, 2013.

[20] F. J. Cabrerizo, J. López-Gijón, M. A. Martínez, J. A. Morente-Molinera, y E. Herrera-Viedma. A fuzzy linguistic extended LibQUAL+ model to assess service quality in academic libraries. *International Journal of Information Technology & Decision Making*, 16(1):225–244, 2017.

[21] F. J. Cabrerizo, J. M. Moreno, I. J. Pérez, y E. Herrera-Viedma. Analyzing consensus approaches in fuzzy group decision making: Advantages and drawbacks. *Soft Computing*, 14:451–463, 2010.

[22] F. J. Cabrerizo, J. A. Morente-Molinera, W. Pedrycz, A. Taghavi, y E. Herrera-Viedma. Granulating linguistic information in decision making under consensus and consistency. *Expert Systems with Applications*, 99:83–92, 2018.

[23] F. J. Cabrerizo, I. J. Pérez, y E. Herrera-Viedma. Managing the consensus in group decision making in an unbalanced fuzzy linguistic context with incomplete information. *Knowledge-Based Systems*, 23(2):169–181, 2010.

[24] F. J. Cabrerizo, R. Ureña, W. Pedrycz, y E. Herrera-Viedma. Building consensus in group decision making with an allocation of information granularity. *Fuzzy Sets and Systems*, 255:115–127, 2014.

[25] N. Capuano, F. Chiclana, E. Herrera-Viedma, H. Fujita, y V. Loia. Fuzzy group decision making for influence-aware recommendations. *Computers in Human Behavior*, 101:371–379, 2019.

[26] C. Carlsson, D. Ehrenberg, P. Eklund, M. Fedrizzi, P. Gustafsson, P. Lindholm, G. Merkuryeva, T. Riissanen, y A. G. S. Ventre. Consensus in distributed soft environments. *European Journal of Operational Research*, 61(1–2):165–185, 1992.

[27] C. Carlsson y R. Fuller. *Fuzzy Reasoning in Decision Making and Optimization*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2002.

[28] B. Ceballos, M. T. Lamata, y D. A. Pelta. A comparative analysis of multi-criteria decision-making methods. *Progress in Artificial Intelligence*, 5(4):315–322, 2016.

[29] K. C. Chai, C. H. Jong, K. M. Tay, y C. P. Lim. A perceptual computing-based method to prioritize failure modes in failure mode and effect analysis and its application to edible bird nest farming. *Applied Soft Computing*, 49:734–747, 2016.

[30] S. J. Chen y C. L. Hwang. *Fuzzy Multiple Attribute Decision-Making: Methods and Applications*. Springer, New York, 1992.

[31] D. Cheng, Z. Zhou, F. Cheng, y J. Wang. Deriving heterogeneous experts weights from incomplete linguistic preference relations based on uninorm consistency. *Knowledge-Bassed Systems*, 150:150–165, 2018.

[32] H. Chernoff. *Elementary Decision Theory*. Dover Publications, New York, 1987.

[33] F. Chiclana, F. Herrera, y E. Herrera-Viedma. Integrating multiplicative preference relations in a multipurpose decision-making model based on fuzzy preference relations. *Fuzzy Sets and Systems*, 122(2):277–291, 2001.

[34] F. Chiclana, E. Herrera-Viedma, F. Herrera, y S. Alonso. Some induced ordered weighted averaging operators and their use for solving group decision making problems based on fuzzy preference relations. *European Journal of Operational Research*, 182(1):383–339, 2007.

[35] F. Chiclana, F. Mata, L. Martínez, E. Herrera-Viedma, y S. Alonso. Integration of a consistency control module within a consensus model. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 16(1):35–53, 2008.

[36] L. Coch y J. R. P. French. Overcoming resistance to change. *Humans Relations*, 1(4):512–532, 1948.

[37] V. Cutello y J. Montero. Fuzzy rationality measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 62(1):39–54, 1994.

[38] R. Degani y G. Bortolan. The problem of linguistic approximation in clinical decision making. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2(2):143–162, 1988.

[39] M. Delgado, J. L. Verdegay, y M. A. Vila. On aggregation operations of linguistic labels. *International Journal of Intelligent Systems*, 8(3):351–370, 1993.

[40] S. Dick, A. Schenker, W. Pedrycz, y A. Kandel. Regranulation: A granular algorithm enabling communication between granular worlds. *Information Sciences*, 177(2):408–435, 2007.

[41] R.-X. Ding, I. Palomares, X. Wang, G.-R. Yang, B. Liu, Y. C. Dong, E. Herrera-Viedma, y F. Herrera. Large-scale decision-making: Characterization, taxonomy, challenges and future directions from an Artificial Intelligence and applications perspective. *Information Fusion*, 59:84–102, 2020.

[42] Y. C. Dong, Z. Ding, L. Martínez, y F. Herrera. Managing consensus based on leadership in opinion dynamics. *Information Sciences*, 397–398:187–205, 2017.

[43] Y. C. Dong y J. Xu. *Consensus Building in Group Decision Making: Searching the Consensus Path with Minimum Adjustments*. Springer, Singapore, 2016.

[44] Y. C. Dong, Y. Xu, y S. Yu. Computing the numerical scale of the linguistic term set for the 2-tuple fuzzy linguistic representation model. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 17(6):1366–1378, 2009.

[45] Y. C. Dong, Q. Zha, H. Zhang, G. Kou, H. Fujita, F. Chiclana, y E. Herrera-Viedma. Consensus reaching in social network group decision making: Research paradigms and challenges. *Knowledge-Based Systems*, 162:3–13, 2018.

[46] Y. C. Dong, G. Zhang, W. C. Hong, y S. Yu. Linguistic computational model based on 2-tuples and intervals. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 21(6):1006–1018, 2013.

[47] M. Dotoli, N. Epicoco, y M. Falagario. Multi-criteria decision making techniques for the management of public procurement tenders: A case study. *Applied Soft Computing*, 88:106064, 2020.

[48] J. Doyle. Prospects for preferences. *Computational Intelligence*, 20(2):111–136, 2004.

[49] D. Dubois y J. L. Koning. Social choice axioms for fuzzy set aggregation. *Fuzzy Sets and Systems*, 43(3):257–274, 1991.

[50] D. Dubois y H. Prade. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. Academic Press, New York, 1980.

[51] D. Dubois y H. Prade. A review of fuzzy set aggregation connectives. *Information Sciences*, 36(1–2):85–121, 1985.

[52] D. Dubois y H. Prade. *Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*. Plenum Press, New York, 1988.

[53] D. Dubois y H. Prade. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets. *International Journal of General Systems*, 17(2–3):191–209, 1990.

[54] D. Dubois y H. Prade. The three semantics of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 90(2):141–150, 1997.

[55] R. Duncan y H. Raiffa. *Games and Decision. Introduction and Critical Survey*. Dover Publications, New York, 1985.

[56] R. C. Eberhart y J. Kennedy. A new optimizer using particle swarm theory. En *6th International Symposium on Micro Machine and Human Science*, páginas 39–43, Nagoya, Japón, 1995.

[57] A. Ebrahimnejad y M. Tavana. A novel method for solving linear programming problems with symmetric trapezoidal fuzzy numbers. *Applied Mathematical Modelling*, 38(17–18):4388–4395, 2014.

[58] P. Eklund, A. Rusinowska, y H. D. Swart. Consensus reaching in committees. *European Journal of Operational Research*, 178(1):185–193, 2007.

[59] M. Espinilla, J. Liu, y L. Martínez. An extended hierarchical linguistic model for decision-making problems. *Computational Intelligence*, 27(3):489–512, 2011.

[60] F. J. Estrella, M. Espinilla, F. Herrera, y L. Martínez. FLINTSTONES: A fuzzy linguistic decision tools enhancement suite based on the 2-tuple linguistic model and extensions. *Information Sciences*, 280:152–170, 2014.

[61] M. Fedrizzi y J. Kacprzyk. On measuring consensus in the setting of fuzzy preference relations. En J. Kacprzyk y M. Roubens, editores, *Non-Conventional Preference Relations in Decision Making*, páginas 129–141. Springer-Verlag, 1988.

[62] M. Fedrizzi, J. Kacprzyk, y H. Nurmi. Consensus degrees under fuzzy majorities and fuzzy preferences using OWA (ordered weighted average) operators. *Control and Cybernetics*, 22(4):77–86, 1993.

[63] J. C. Fodor y M. R. Roubens. *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support*. Springer, Dordrecht, 1994.

[64] J. R. P. French. A formal theory of social power. *Psychological Review*, 63(3):181–194, 1956.

[65] Y. Gao y D. Li. Consensus evaluation method of multi-ground-target threat for unmanned aerial vehicle swarm based on heterogeneous group decision making. *Computers & Electrical Engineering*, 74:223–232, 2019.

[66] Y. Gao y D. Li. A consensus model for heterogeneous multi-attribute group decision making with several attribute sets. *Expert Systems with Applications*, 125:69–80, 2019.

[67] J. L. García-Lapresta y J. Montero. Consistency in preference modeling. En B. Bouchon-Meunier, G. Coletti, y R. R. Yager, editores, *Modern Information Processing: From Theory to Applications*, páginas 87–97. Elsevier, 2006.

[68] J. L. García-Lapresta y D. Pérez-Román. Ordinal proximity measures in the context of unbalanced qualitative scales and some applications to consensus and clustering. *Applied Soft Computing*, 35:864–872, 2015.

[69] J. L. García-Lapresta y D. Pérez-Román. Aggregating opinions in non-uniform ordered qualitative scales. *Applied Soft Computing*, 67:652–657, 2018.

[70] J. Gastil. *Democracy in Small Groups: Participation, Decision-Making and Communication*. New Society Publishers, Philadelphia, 1993.

[71] W.-T. Guo, V.-N. Huynh, y Y. Nakamori. A proportional 3-tuple fuzzy linguistic representation model for screening new product projects. *Journal of Systems Science and Systems Engineering*, 25:1–22, 2016.

[72] F. Harary. On the measurement of structural balance. *Behavioral Science*, 4(4):316–323, 1959.

[73] Y. He y Z. S. Xu. A consensus reaching model for hesitant information with different preference structures. *Knowledge-Based Systems*, 135:99–112, 2017.

[74] F. Herrera, S. Alonso, F. Chiclana, y E. Herrera-Viedma. Computing with words in decision making: Foundations, trends and prospects. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 8(4):337–364, 2009.

[75] F. Herrera y E. Herrera-Viedma. Aggregation operators for linguistic weighted information. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A: Systems and Humans*, 27(5):646–656, 1997.

[76] F. Herrera y E. Herrera-Viedma. Choice functions and mechanisms for linguistic preference relations. *European Journal of Operational Research*, 120(1):144–161, 2000.

[77] F. Herrera y E. Herrera-Viedma. Linguistic decision analysis: Steps for solving decision problems under linguistic information. *Fuzzy Sets and Systems*, 115(1):67–82, 2000.

[78] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, y L. Martínez. A fusion approach for managing multi-granularity linguistic term sets in decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 114(1):43–58, 2000.

[79] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, y L. Martínez. A fuzzy linguistic methodology to deal with unbalanced linguistic term sets. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 16(2):354–370, 2008.

[80] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, y J. L. Verdegay. A sequential selection process in group decision making with a linguistic assessment approach. *Information Sciences*, 85(4):223–239, 1995.

[81] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, y J. L. Verdegay. Direct approach processes in group decision making using linguistic OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 79(2):175–190, 1996.

[82] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, y J. L. Verdegay. A model of consensus in group decision making under linguistic assessments. *Fuzzy Sets and Systems*, 78(1):73–87, 1996.

[83] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, y J. L. Verdegay. Linguistic measures based on fuzzy coincidence for reaching consensus in group decision making. *International Journal of Approximate Reasoning*, 16(3–4):309–334, 1997.

[84] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, y J. L. Verdegay. Choice processes for non-homogeneous group decision making in linguistic setting. *Fuzzy Sets and Systems*, 94(3):287–308, 1998.

[85] F. Herrera y L. Martínez. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(6):746–752, 2000.

[86] F. Herrera y L. Martínez. A model based on linguistic 2-tuples for dealing with multigranular hierarchical linguistic contexts in multi-expert decision-making. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part B: Cybernetics*, 31(2):227–234, 2001.

[87] F. Herrera, L. Martínez, y P. J. Sánchez. Managing non-homogeneous information in group decision making. *European Journal of Operational Research*, 166(1):115–132, 2005.

[88] F. Herrera y J. L. Verdegay. On group decision making under linguistic preferences and fuzzy linguistic quantifiers. En B. Bouchon-Meunier, R. R. Yager, y L. A. Zadeh, editores, *Fuzzy Logic and Soft Computing*, páginas 173–180. World Scientific, Singapore, 1995.

[89] E. Herrera-Viedma, S. Alonso, F. Chiclana, y F. Herrera. A consensus model for group decision making with incomplete fuzzy preference relations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15(5):863–877, 2007.

[90] E. Herrera-Viedma, F. J. Cabrerizo, J. Kacprzyk, y W. Pedrycz. A review of soft consensus models in a fuzzy environment. *Information Fusion*, 17:4–13, 2014.

[91] E. Herrera-Viedma, F. Chiclana, F. Herrera, y S. Alonso. A group decision-making model with incomplete fuzzy preference relations based on additive consistency. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part B: Cybernetics*, 37(1):176–189, 2007.

[92] E. Herrera-Viedma, F. Herrera, y F. Chiclana. A consensus model for multiperson decision making with different preference structures. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A: Systems and Humans*, 32(3):394–402, 2002.

[93] E. Herrera-Viedma, F. Herrera, F. Chiclana, y M. Luque. Some issues on consistency of fuzzy preference relations. *European Journal of Operational Research*, 154(1):98–109, 2004.

[94] E. Herrera-Viedma y A. G. López-Herrera. A model of information retrieval system with unbalanced fuzzy linguistic information. *International Journal of Intelligent Systems*, 22(11):1197–1214, 2007.

[95] E. Herrera-Viedma, L. Martínez, F. Mata, y F. Chiclana. A consensus support system model for group decision-making with multi-granular linguistic preference relations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 13(5):644–658, 2005.

[96] E. Herrera-Viedma, G. Pasi, A. G. López-Herrera, y C. Porcel. Evaluating the information quality of web sites: A methodology based on fuzzy computing with words. *Journal of American Society for Information Science and Technology*, 57(4):538–549, 2006.

[97] C.-L. Hwang y M.-J. Lin. *Group Decision Making Under Multiple Criteria: Methods and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[98] Y. Jiang y Y. Tang. An interval type-2 fuzzy model of computing with words. *Information Sciences*, 281:418–442, 2014.

[99] F. Jin, Z. Ni, H. Chen, y Y. Li. Approaches to decision making with linguistic preference relations based on additive consistency. *Applied Soft Computing*, 49:71–80, 2016.

[100] J. Kacprzyk. Group decision-making with a fuzzy majority via linguistic quantifiers. Part I: A consensory-like pooling. *Cybernetics and Systems: An International Journal*, 16(2–3):119–129, 1985.

[101] J. Kacprzyk. Group decision-making with a fuzzy majority via linguistic quantifiers. Part II: A competitive-like pooling. *Cybernetics and Systems: An International Journal*, 16(2–3):131–144, 1985.

[102] J. Kacprzyk. Group decision making with a fuzzy linguistic majority. *Fuzzy Sets and Systems*, 18(2):105–118, 1986.

[103] J. Kacprzyk y M. Fedrizzi. 'soft' consensus measures for monitoring real consensus reaching processes under fuzzy preferences. *Control and Cybernetics*, 15(3–4):309–323, 1986.

[104] J. Kacprzyk y M. Fedrizzi. A 'soft' measure of consensus in the setting of partial (fuzzy) preferences. *European Journal of Operational Research*, 34(3):316–325, 1988.

[105] J. Kacprzyk M. Fedrizzi. A 'human-consistent' degree of consensus based on fuzzy logic with linguistic quantifiers. *Mathematical Social Sciences*, 18(3):275–290, 1989.

[106] J. Kacprzyk y M. Fedrizzi. *Multiperson Decision Making Models Using Fuzzy Sets and Possibility*. Springer Netherlands, Dordrecht, 1990.

[107] J. Kacprzyk, M. Fedrizzi, y H. Nurmi. Group decision making and consensus under fuzzy preferences and fuzzy majority. *Fuzzy Sets and Systems*, 49(1):21–31, 1992.

[108] R. L. Keeney y H. Raiffa. *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[109] J. Kennedy. The particle swarm: Social adaptation of knowledge. En *1997 IEEE International Conference on Evolutionary Computation*, páginas 303–308, Indianapolis, Estados Unidos, 1997.

[110] J. Kennedy y R. C. Eberhart. Particle swarm optimization. En *IEEE International Conference on Neural Networks*, páginas 1942–1948, Perth, Australia, 1995.

[111] J. Kennedy, R. C. Eberhart, and Y. Shi. *Swarm Intelligence*. Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, SF, 2001.

[112] A. Klenke. *Probability Theory: A Comprehensive Course*. Springer-Verlag, Londres, 2014.

[113] J. Klir y T. A. Folger. *Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.

[114] E. Koksalmis y O. Kabak. Deriving decision makers' weights in group decision making: An overview of objective methods. *Information Fusion*, 49:146–160, 2019.

[115] E. Levrat, A. Voisin, S. Bombardier, y J. Bremont. Subjective evaluation of car seat comfort with fuzzy set techniques. *International Journal of Intelligent Systems*, 12:891–913, 1997.

[116] C.-C. Li, Y. C. Dong, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, y L. Martínez. Personalized individual semantics in computing with words for supporting linguistic group decision making. an application on consensus reaching. *Information Fusion*, 33:29–40, 2017.

[117] C.-C. Li, Y. C. Dong, Y. Xu, F. Chiclana, E. Herrera-Viedma, y F. Herrera. An overview on managing additive consistency of reciprocal preference relations for consistency-driven decision making and fusion: Taxonomy and future directions. *Information Fusion*, 52:143–156, 2019.

[118] Y. Liang, J. Qin, L. Martínez, y J. Liu. A heterogeneous QUALIFLEX method with criteria interaction for multi-criteria group decision making. *Information Sciences*, 512:1481–1502, 2020.

[119] H. Liao, M. Tang, R. Qin, X. Mi, A. H. Altlahi, S. Alshomrani, y F. Herrera. Overview of hesitant linguistic preference relations for representing cognitive complex information: Where we stand and what is next. *Cognitive Computation*, 12(1):25–48, 2020.

[120] H. Liao, Z. S. Xu, E. Herrera-Viedma, y F. Herrera. Hesitant fuzzy linguistic term set and its application in decision making: A state-of-the-art survey. *International Journal of Fuzzy Systems*, 20(7):2084–2110, 2018.

[121] H. C. Liao, R. Qin, C. Gao, X. Wu, A. Hafezalkotob, y F. Herrera. Score-HeDLiSF:A score function of hesitant fuzzy linguistic term set based on

hesitant degrees and linguistic scale functions: An application to unbalanced hesitant fuzzy linguistic multimoora. *Information Fusion*, 48:39–54, 2019.

[122] J. Lin y R. Chen. A novel group decision making method under uncertain multiplicative linguistic environment for information system selection. *IEEE Access*, 7:19848–19855, 2019.

[123] A. Liu y F. Wei. Research on method of analyzing the posterior weight of experts based on new evaluation scale of linguistic information. *Chinese Journal of Management Science*, 19(6):149–155, 2011.

[124] F. Liu, Y. Wu, y W. Pedrycz. A modified consensus model in group decision making with an allocation of information granularity. *IEEE Transactions on Fuzzy Sets and Systems*, 26(5):3182–3187, 2018.

[125] F. Liu y W.-G. Zhang. TOPSIS-based consensus model for group decision-making with incomplete interval fuzzy preference relations. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 44(8):1283–1294, 2014.

[126] S. Liu, W. Pedrycz, A. Gacek, y Y. Dai. Development of information granules of higher type and their applications to granular models of time series. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 71:60–72, 2018.

[127] W. Liu, H. Zhang, X. Chen, y X. Yu. Managing consensus and self-confidence in multiplicative preference relations in group decision making. *Knowledge-Based Systems*, 162:62–73, 2018.

[128] R. D. Luce y P. Suppes. Preferences, utility and subject probability. En D. Luce, R. R. Bush, y E. Galante, editores, *Handbook of Mathematical Psychology*, páginas 249–410. Wiley, New York, 1965.

[129] J. Ma, D. Ruan, Y. Xu, y G. Zhang. A fuzzy-set approach to treat determinacy and consistency of linguistic terms in multi-criteria decision making. *International Journal of Approximate Reasoning*, 44(2):165–181, 2007.

[130] O. Martin y G. Klir. On the problem of retranslation in computing with perceptions. *International Journal of General Systems*, 35(6):655–674, 2006.

[131] L. Martínez y F. Herrera. An overview on the 2-tuple linguistic model for computing with words in decision making: Extensions, applications and challenges. *Information Sciences*, 207:1–18, 2012.

[132] L. Martínez, R. M. Rodríguez, y F. Herrera. *The 2-tuple Linguistic Model: Computing with Words in Decision Making*. Springer, Cham, 2015.

[133] L. Martínez, D. Ruan, y F. Herrera. Computing with words in decision support systems: An overview on models and applications. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 3(4):382–395, 2010.

[134] S. Massanet, J. V. Riera, J. Torrens, y E. Herrera-Viedma. A new linguistic computational model based on discrete fuzzy numbers for computing with words. *Information Sciences*, 258:277–290, 2014.

[135] J. M. Mendel. An architecture for making judgement using computing with words. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences*, 12(3):325–335, 2002.

[136] J. M. Mendel. Computing with words and its relationships with fuzzistics. *Information Sciences*, 177(4):988–1006, 2007.

[137] J. M. Mendel. Historical reflections on perceptual computing. En *Proceedings of the 8th International FLINS Conference on Computational Intelligence in Decision and Control*, páginas 181–186, Madrid, España, September 2008.

[138] J. M. Mendel y R. I. B. John. Type-2 fuzzy sets made simple. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 10(2):117–127, 2002.

[139] J. M. Mendel y D. Wu. *Perceptual Computing: Aiding People in Making Subjective Judgments*. Wiley-IEEE Press, Hoboken, NJ, 2010.

[140] F. Y. Meng, S.-M. Chen, y R. Yuan. Group decision making with heterogeneous intuitionistic fuzzy preference relations. *Information Sciences*, 523:197–219, 2020.

[141] F. Y. Meng, X. H. Chen, y Q. Zhang. Multi-attribute decision analysis under a linguistic hesitant fuzzy environment. *Information Sciences*, 267:287–305, 2014.

[142] F. Y. Meng, J. Tang, F. J. Cabrerizo, y E. Herrera-Viedma. A rational and consensual method for group decision making with interval-valued intuitionistic multiplicative preference relations. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 90:103514, 2020.

[143] F. Y. Meng, J. Tang, y H. Fujita. Linguistic intuitionistic fuzzy preference relations and their application to multi-criteria decision making. *Information Fusion*, 46:77–90, 2019.

[144] G. A. Miller. The magical number seven plus or minus two: some limits on our capacity of processing information. *Psychological Review*, 63(2):81–97, 1956.

[145] I. Millet. The effectiveness of alternative preference elicitation methods in the analytic hierarchy process. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 6(1):41–51, 1997.

[146] M. Mitchell. *An Introduction to Genetic Algorithms*. MIT Press, Cambridge, MA, 1996.

[147] G. Montibeller, P. Patel, y V. J. del Rio Vilas. A critical analysis of multi-criteria models for the prioritisation of health threats. *European Journal of Operational Research*, 281(1):87–99, 2020.

[148] J. A. Morente-Molinera, F. J. Cabrerizo, S. Alonso, M. A. Martínez, y E. Herrera-Viedma. Using multi-granular fuzzy linguistic modelling methods to represent social networks related information in an organized way. *International Journal of Computers Communications & Control*, 15(2):3851, 2020.

[149] J. A. Morente-Molinera, G. Kou, C. Pang, F. J. Cabrerizo, y E. Herrera-Viedma. An automatic procedure to create fuzzy ontologies from users'

opinions using sentiment analysis procedures and multi-granular fuzzy linguistic modelling methods. *Information Sciences*, 476:222–238, 2019.

[150] J. A. Morente-Molinera, I. J. Pérez, R. Ureña, y E. Herrera-Viedma. On multi-granular fuzzy linguistic modelling in group decision making problems: A systematic review and future trends. *Knowledge-Based Systems*, 74:49–60, 2015.

[151] J. A. Morente-Molinera, X. Wu, A. Morfeq, R. Al-Hmouz, y E. Herrera-Viedma. A novel multi-criteria group decision-making method for heterogeneous and dynamic contexts using multi-granular fuzzy linguistic modelling and consensus measures. *Information Fusion*, 53:240–250, 2020.

[152] A. Nickabadi, M. M. Ebadzadeh, y R. Safabakhsh. A novel particle swarm optimization algorithm with adaptive inertia weight. *Applied Soft Computing*, 11(4):3658–3670, 2011.

[153] H. Nurmi. Approaches to collective decision making with fuzzy preference relations. *Fuzzy Sets and Systems*, 6(3):249–259, 1981.

[154] P. Olaso, K. Rojas, D. Gómez, y J. Montero. A generalization of stability for families of aggregation operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 378:68–78, 2020.

[155] S. A. Orlovski. Decision-making with a fuzzy preference relation. *Fuzzy Sets and Systems*, 1(3):155–167, 1978.

[156] I. Palomares, F. J. Estrella, L. Martínez, y F. Herrera. Consensus under a fuzzy context: Taxonomy, analysis framework AFRYCA and experimental case of study. *Information Fusion*, 20:252–271, 2014.

[157] Q. Pang, H. Wang, y Z. S. Xu. Probabilistic linguistic term sets in multi-attribute group decision making. *Information Sciences*, 369:128–143, 2016.

[158] W. Pedrycz. Shadowed sets: Representing and processing fuzzy sets. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part B: Cybernetics*, 28(1):103–109, 1998.

[159] W. Pedrycz. *Granular Computing: Analysis and Design of Intelligent Systems*. CRC Press, Boca Raton, FL, 2013.

[160] W. Pedrycz. Allocation of information granularity in optimization and decision-making models: Towards building the foundations of granular computing. *European Journal of Operational Research*, 232(1):137–145, 2014.

[161] W. Pedrycz y A. Bargiela. An optimization of allocation of information granularity in the interpretation of data structures: Toward granular fuzzy clustering. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part B: Cybernetics*, 42(3):582–590, 2012.

[162] W. Pedrycz y M. Song. Analytic hierarchy process (AHP) in group decision making and its optimization with an allocation of information granularity. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 19(3):527–539, 2011.

[163] W. Pedrycz y M. Song. A granulation of linguistic information in AHP decision-making problems. *Information Fusion*, 17:93–101, 2014.

[164] J. I. Peláez y J. M. Doña. LAMA: A linguistic aggregation of majority additive operator. *International Journal of Intelligent Systems*, 18(7):809–820, 2003.

[165] I. J. Pérez, F. J. Cabrerizo, S. Alonso, Y. C. Dong, F. Chiclana, y E. Herrera-Viedma. On dynamic consensus processes in group decision making problems. *Information Sciences*, 459:20–35, 2018.

[166] I. J. Pérez, F. J. Cabrerizo, y E. Herrera-Viedma. A mobile decision support system for dynamic group decision making problems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A: Systems and Humans*, 40(6):1244–1256, 2010.

[167] I. J. Pérez, F. J. Cabrerizo, y E. Herrera-Viedma. A mobile group decision making model for heterogeneous information and changeable decision contexts. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 19(Suppl. 1):33–52, 2011.

[168] T. Pham. Computing with words in formal methods. *International Journal of Intelligent Systems*, 15(8):801–810, 2000.

[169] R. Poli, J. Kennedy, y T. Blackwell. Particle swarm optimization. *Swarm Intelligence*, 1(1):33–57, 2007.

[170] B. A. Potter. *From Conflict to Cooperation: How to Mediate a Dispute*. Ronin Publishing, Berkeley, 1996.

[171] S. Ríos, C. Bielza, y A. Mateos. *Fundamentos de los Sistemas de Ayuda a la Decisión*. Ra-Ma, Madrid, 2002.

[172] R. M. Rodríguez, A. Labella, y L. Martínez. An overview on fuzzy modelling of complex linguistic preferences in decision making. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 9(Suppl. 1):81–94, 2016.

[173] R. M. Rodríguez, L. Martínez, y F. Herrera. Hesitant fuzzy linguistic term sets for decision making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 20(1):109–119, 2012.

[174] M. Roubens. Some properties of choice functions based on valued binary relations. *European Journal of Operational Research*, 40(3):309–321, 1989.

[175] M. Roubens. Fuzzy sets and decision analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 90(2):199–206, 1997.

[176] M. Roubens y Ph. Vincke. *Preference Modelling*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[177] T. L. Saaty. *The Analytic Hierarchy Process*. MacGraw-Hill, New York, 1980.

[178] T. L. Saaty. *Fundamentals of Decision Making and Priority Theory With the AHP*. RWS Publications, Pittsburg, 1994.

[179] T. L. Saaty y L. G. Vargas. *Models, Methods, Concepts and Applications of the Analytic Hierarchy Process*. Springer, New York, 2012.

[180] S. Saint y J. R. Lawson. *Rules for Reaching Consensus: A Modern Approach to Decision Making*. Jossey-Bass, San Francisco, 1994.

[181] X. Sang, Y. Zhou, y X. Yu. An uncertain possibility-probability information fusion method under interval type-2 fuzzy environment and its application in stock selection. *Information Sciences*, 504:546–560, 2019.

[182] K. J. Schmucker. *Fuzzy Sets, Natural Language Computations, and Risk Analysis*. Computer Science Press, Rockville, 1984.

[183] S. Seo y M. Sakawa. Fuzzy multiattribute utility analysis for collective choice. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 15(1):45–53, 1985.

[184] Y. Shi y R. C. Eberhart. A modified particle swarm optimizer. En *IEEE International Conference on Evolutionary Computation*, páginas 69–73, Anchorage, Estados Unidos, 1998.

[185] A. Skowron y J. Stepaniuk. Information granules: Towards foundations of granular computing. *International Journal of Intelligent Systems*, 16(1):57–85, 2001.

[186] M. Song y W. Pedrycz. From local neural networks to granular networks: A study in information granulation. *Neurocomputing*, 74(18):3931–3940, 2011.

[187] Y. Song y G. Li. Consensus constructing in large-scale group decision making with multi-granular probabilistic 2-tuple fuzzy linguistic preference relations. *IEEE Access*, 7:56947–56959, 2019.

[188] B. Sun, W. Ma, y X. Xiao. Three-way group decision making based on multigranulation fuzzy decision-theoretic rough set over two universes. *International Journal of Approximate Reasoning*, 81:87–102, 2017.

[189] M. Tang, X. Zhou, H. Liao, J. Xu, H. Fujita, y F. Herrera. Ordinal consensus measure with objective threshold for heterogeneous large-scale group decision making. *Knowledge-Based Systems*, 180:62–74, 2019.

[190] T. Tanino. Fuzzy preference orderings in group decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 12(2):117–131, 1984.

[191] T. Tanino. Fuzzy preference relations in group decision making. In J. Kacprzyk y M. Roubens, editores, *Non-Conventional Preference Relations in Decision Making*, pages 54–71. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[192] Z. Tao, X. Liu, H. Chen, y Z. Chen. Group decision making with fuzzy linguistic preference relations via cooperative games method. *Computers & Industrial Engineering*, 83:184–192, 2015.

[193] R. Tong y P. Bonissone. A linguistic approach to decisionmaking with fuzzy sets. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-10(11):716–723, 1980.

[194] V. Torra. Hesitant fuzzy sets. *International Journal of Intelligent Systems*, 25(6):529–539, 2010.

[195] E. Triantaphyllou. *Multi-criteria Decision Making Methods: A Comparative Study*. Springer, Dordrecht, 2000.

[196] E. Trillas. On the use of words and fuzzy sets. *Information Sciences*, 176(11):1463–1487, 2006.

[197] E. Trillas y S. Guadarrama. What about fuzzy logic's linguistic soundness? *Fuzzy Sets and Systems*, 156(3):334–340, 2005.

[198] I. B. Türkşen. Type 2 representation and reasoning for CWW. *Fuzzy Sets and Systems*, 127(1):17–36, 2002.

[199] I. B. Türkşen. Meta-linguistic axioms as a foundation for computing with words. *Information Sciences*, 177(2):332–359, 2007.

[200] D. K. Verma. *Decision-Making Style: Social and Creative Dimensions*. Global India Publications, New Delhi, 2009.

[201] S.-P. Wan, W. Zou, y J.-Y. Dong. Prospect theory based method for heterogeneous group decision making with hybrid truth degrees of alternative comparisons. *Computers & Industrial Engineering*, 141:106285, 2020.

[202] D. Wang, D. Tan, y L. Liu. Particle swarm optimization algorithm: An overview. *Soft Computing*, 22(2):387–408, 2018.

[203] H. Wang. Extended hesitant fuzzy linguistic term sets and their aggregation in group decision making. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 8(1):14–33, 2015.

[204] H. Wang, Z. S. Xu, y X.-J. Zeng. Modeling complex linguistic expressions in qualitative decision making: An overview. *Knowledge-Based Systems*, 144:174–187, 2018.

[205] H. Wang, Z. S. Xu, X.-J. Zeng, y H. Liao. Consistency measures of linguistic preference relations with hedges. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 27(2):372–386, 2019.

[206] J. Wang, J. Lan, P. Ren, y Y. Luo. Some programming models to derive priority weights from additive interval fuzzy preference relation. *Knowledge-Based Systems*, 27:69–77, 2012.

[207] J. H. Wang y J. Hao. A new version of 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14(3):435–445, 2006.

[208] L. Wang, T. Sun, C. Qian, M. Goh, y V. K. Mishra. Applying social network analysis to genetic algorithm in optimizing project risk response decisions. *Information Sciences*, 512:1024–1042, 2020.

[209] R. H. Williams. *Electrical Engineering Probability*. West Publishing Company, St. Paul, MN, 1991.

[210] D. Wu. A reconstruction decoder for computing with words. *Information Sciences*, 255:1–15, 2014.

[211] D. Wu y J. M. Mendel. Aggregation using the linguistic weighted average and interval type-2 fuzzy sets. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15(6):1145–1161, 2007.

[212] D. Wu y J. M. Mendel. Recommendations on designing practical interval type-2 fuzzy systems. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 85:182–193, 2019.

[213] Z. Wu, B. Jin, H. Fujita, y J. Xu. Consensus analysis for AHP multiplicative preference relations based on consistency control: A heuristic approach. *Knowledge-Based Systems*, 191:105317, 2020.

[214] M. Xia y J. Chen. Multi-criteria group decision making based on bilateral agreements. *European Journal of Operational Research*, 240(3):756–764, 2015.

[215] F. Xiao. A novel multi-criteria decision making method for assessing health-care waste treatment technologies based on D numbers. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 71:216–225, 2018.

[216] G. Xu, Q. Cui, X. Shi, H. Ge, H.-Z. Zhan, H. P. Lee, Y. Liang, y R. Tai. Particle swarm optimization based on dimensional learning strategy. *Swarm and Evolutionary Computation*, 45:33–51, 2019.

[217] Y. Xu, R. Patnayakuni, y H. Wang. The ordinal consistency of a fuzzy preference relation. *Information Sciences*, 224:152–164, 2013.

[218] Z. S. Xu. A method based on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations. *Information Sciences*, 166(1–4):19–30, 2004.

[219] Z. S. Xu. Uncertain linguistic aggregation operators based approach to multiple attribute group decision making under uncertain linguistic environment. *Information Sciences*, 168(1–4):171–184, 2004.

[220] Z. S. Xu. On generalized induced linguistic aggregation operators. *International Journal of General Systems*, 35(1):17–28, 2006.

[221] Z. S. Xu. A survey of preference relations. *International Journal of General Systems*, 36(2):179–203, 2007.

[222] Z. S. Xu. Group decision making based on multiple types of linguistic preference relations. *Information Sciences*, 178(2):452–467, 2008.

[223] Z. S. Xu. Interactive group decision making procedure based on uncertain multiplicative linguistic preference relations. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 21(3):408–415, 2010.

[224] Z. S. Xu. A consensus reaching process under incomplete multiplicative preference relations. *International Journal of General Systems*, 41(4):333–351, 2012.

[225] Z. S. Xu y H. Wang. On the syntax and semantics of virtual linguistic terms for information fusion in decision making. *Information Fusion*, 34:43–48, 2017.

[226] R. R. Yager. Quantifiers in the formulation of multiple objective decision functions. *Information Sciences*, 31(2):107–139, 1893.

[227] R. R. Yager. A new methodology for ordinal multiobjective decisions based on fuzzy sets. *Decision Sciences*, 12(4):589–600, 1981.

[228] R. R. Yager. Some relationships between possibility, truth and certainty. *Fuzzy Sets and Systems*, 11(1–3):151–156, 1983.

[229] R. R. Yager. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 18(1):183–190, 1988.

[230] R. R. Yager. Families of OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 59(2):125–148, 1993.

[231] R. R. Yager. Non-numeric multi-criteria multi-person decision making. *Group Decision and Negotiation*, 2(1):81–93, 1993.

[232] R. R. Yager. Interpreting linguistically quantified proposition. *International Journal of Intelligent Systems*, 9(6):541–569, 1994.

[233] R. R. Yager. Quantifier guided aggregations using OWA operators. *International Journal of Intelligent Systems*, 11(1):49–73, 1996.

[234] R. R. Yager. On the retranslation process in Zadeh's paradigm of computing with words. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part B: Cybernetics*, 34(2):1184–1195, 2004.

[235] R. R. Yager. Aggregation of ordinal information. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 6(3):199–219, 2007.

[236] R. R. Yager. Using stress functions to obtain OWA operators. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15(6):1122–1129, 2007.

[237] R. R. Yager. Multicriteria decision making with ordinal/linguistic intuitionistic fuzzy sets for mobile apps. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 24(3):590–599, 2016.

[238] R. R. Yager. Categorization in multi-criteria decision making. *Information Sciences*, 460–461:416–423, 2018.

[239] R. R. Yager. On the fusion of multiple multi-criteria aggregation functions with focus on the fusion of OWA aggregations. *Knowledge-Based Systems*, 191:105216, 2020.

[240] R. R. Yager y D. P. Filev. Induced ordered weighted averaging operators. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part B: Cybernetics*, 29(2):141–150, 1999.

[241] H.-B. Yan y T. Ma. A group decision-making approach to uncertain quality function deployment based on fuzzy preference relation and fuzzy majority. *European Journal of Operational Research*, 241(3):815–829, 2015.

[242] M. C. Yang. Consensus and single leader decision-making in teams using structured design methods. *Design Studies*, 31(4):345–362, 2010.

[243] Z. Yue. Approach to group decision making based on determining the weights of experts by using projection method. *Applied Mathematical Modelling*, 36(7):2900–2910, 2012.

[244] L. A. Zadeh. A computational approach to fuzzy quantifiers in natural languages. *Computers & Mathematics with Applications*, 9(1):149–184, 1893.

[245] L. A. Zadeh. The role of fuzzy logic in the management of uncertainty in expert systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 11(1–3):199–227, 1893.

[246] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338–353, 1965.

[247] L. A. Zadeh. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-3(1):28–44, 1973.

[248] L. A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—I. *Information Sciences*, 8(3):199–249, 1975.

[249] L. A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—II. *Information Sciences*, 8(4):301–375, 1975.

[250] L. A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—III. *Information Sciences*, 9(1):43–80, 1975.

[251] L. A. Zadeh. Fuzzy logic = computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(2):103–111, 1996.

[252] L. A. Zadeh. Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic. *Fuzzy Sets and Systems*, 90(2):111–127, 1997.

[253] L. A. Zadeh. From computing with numbers to computing with words—from manipulation of measurements to manipulation of perceptions. *IEEE Transactions on Circuits and Systems—I: Fundamental Theory and Applications*, 46(1):105–119, 1999.

[254] S. Zadrozny y J. Kacprzyk. Issues in the practical use of the OWA operators in fuzzy querying. *Journal of Intelligent Information Systems*, 33(3):307–325, 2009.

[255] G. Q. Zhang, Y. C. Dong, y Y. F. Xu. Consistency and consensus measures for linguistic preference relations based on distribution assessments. *Information Fusion*, 17:46–55, 2014.

[256] H. Zhang. Revisiting multiplicative consistency of interval fuzzy preference relation. *Computers & Industrial Engineering*, 132:325–332, 2019.

[257] H. Zhang, Y. C. Dong, F. Chiclana, y S. Yu. Consensus efficiency in group decision making: A comprehensive comparative study and its optimal design. *European Journal of Operational Research*, 275(2):580–598, 2019.

[258] Q. Zhang, J. C. H. Chen, y P. P. Chong. Decision consolidation: Criteria weight determination using multiple preference formats. *Decision Support Systems*, 38(2):247–258, 2004.

[259] Z. Zheng, S. Xie, H.-N. Dai, X. Chen, y H. Wang. Blockchain challenges and opportunities: A survey. *International Journal of Web and Grid Services*, 14(4):352–375, 2018.

[260] H. Zhu, J. Zhao, y Y. Xu. 2-dimension linguistic computational model with 2-tuples for multi-attribute group decision making. *Knowledge-Based Systems*, 103:132–142, 2016.

[261] X. Zhu y W. Pedrycz. Granular encoders and decoders: A study in processing information granules. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 25(5):1115–1126, 2017.

[262] H. J. Zimmerman. *Fuzzy Set Theory and Its Applications*. Springer, Dordrecht, 1991.

[263] C. Zuheros, C.-C. Li, F. J. Cabrerizo, Y. C. Dong, E. Herrera-Viedma, y F. Herrera. Computing with words: Revisiting the qualitative scale. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 26(Suppl. 2):127–143, 2018.