LLULL, vol. 24, 2001, 89-118

JULIO REY PASTOR Y LA TEORÍA DE SUMACIÓN DE SERIES DIVERGENTES*

LUIS ESPAÑOL GONZÁLEZ • CARLOS SÁNCHEZ FERNÁNDEZ
Universidad de La Rioja (España) • Universidad de La Habana (Cuba)

RESUMEN

En la segunda década del siglo XX, pasados los primeros años de su instalación en Buenos Aires, Rey Pastor reanudó la publicación de investigaciones en análisis matemático, y lo hizo en un tema diferente del que había cultivado en la década anterior. No se conocen los motivos que le indujeron a abandonar la representación conforme y sustituirla por la sumación de series divergentes, campo en el que fue productivo en el periodo 1928-36. En este artículo arrojamos alguna luz sobre el interés de Rey Pastor por las series divergentes, pues encontramos varios precedentes de su afición a este campo. Además, situamos sus trabajos dedicados a este tema en el desarrollo general de la teoría en una etapa de sistematización y síntesis dialéctica en la que se conformaba como ciencia normal. Por último, hacemos una reseña de las cuatro publicaciones del autor que nos parecen esenciales entre las que dedicó a la sumación de series divergentes.

ABSTRACT

A few years after its arrival to Buenos Aires in the 1920's, Rey Pastor renewed the publishing of their investigations on mathematical analysis, and he did it in a different subject that in the previous decade he was working. The reasons why he forsook the conformal representation and he replaced it by the summability of divergent series, field in which he was active during the period 1928-36, are unknown. In this paper we enlighten about Rey Pastor's interest in divergent series by finding several precedents of his taste for this field. Moreover, we locate his papers about this subject on the general development of the theory in a stage of systematization and dialectic synthesis when it was adjusting oneself to a normal science. Finally, we review the four author's papers which seem us essential between those he wrote on summability of divergent series.

Recibido el 11 de abril de 2001

I.S.S.N. 0210-8615

Palabras clave: Historia de las matemáticas, series divergentes, siglo XX, Argentina, España, Julio Rey Pastor.

Introducción

La actividad profesional de Julio Rey Pastor (1888-1962)[1] es muy variada, pero este trabajo se limita a una parte de su investigación en matemáticas, mencionando otros aspectos sólo en la medida en que se relacionan con la parte tratada. Rey Pastor investigó en matemáticas durante dos periodos bien definidos. En el primero, hasta 1920, tuvo una doble vertiente, geométrica y analítica, si bien sus problemas geométricos favoritos fueron aquellos en los que se mezclan los fundamentos de la geometría y los del análisis; por otro lado, sus métodos de análisis matemático usaban, junto al rigor propio de la disciplina, un elevado contenido de intuición geométrica.

El segundo periodo, a partir de 1925, transcurre mayoritariamente en Buenos Aires, con estancias en España durante el verano austral. Rey Pastor dedicó los cuatro primeros años de su instalación en Argentina, 1921-24, a una intensa actividad docente en la enseñanza de las matemáticas dirigidas a ingenieros o científicos y en la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. También dedicó mucho tiempo a colonizar unas tierras levantando una plantación agrícola que llegó a ser un municipio en la provincia de Río Negro. Durante esos años, el repertorio de su producción no recoge trabajos de investigación matemática, aunque dictó cursos de matemática superior. En el elenco de estos cursos superiores surgieron, en Madrid (1925) y Buenos Aires (1926), los que trataron sobre sumación de series divergentes, que dieron lugar a la memoria [RP, 1931c][2], central para el tema que nos ocupa. Lo esencial de esta memoria estaría elaborado cuando presentó una comunicación sobre el tema en el Congreso Internacional de Matemáticos de Bolonia [RP,1928b], pero su publicación se demoró por diversas dificultades de edición[3]. Por otra parte, el mismo año que la memoria bonaerense sobre algoritmos lineales (una monografía inacabada, mal editada y de escasa difusión) publicó en Palermo, [RP,1931d], un método original de sumación y dos años después en Milán un amplio artículo, [RP,1933c], sobre aplicaciones de los algoritmos lineales. Los trabajos publicados en Italia tuvieron difusión internacional, pero atenuada por estar escritos en lengua española, hecho que el autor podría haber evitado si hubiera querido, pues en otras ocasiones publicó en francés, alemán o italiano. Nuestra opinión es que los cuatro trabajos mencionados son los principales de Rey Pastor sobre series divergentes, que destacan entre los numerosos que publicó sobre el tema en el periodo 1928-36 (ver Tabla 3).

Centraremos nuestra atención sobre estos primeros trabajos, dejando para otra ocasión o para otros autores el estudio detallado de su obra completa sobre series divergentes y la de sus discípulos en ambos lados del océano que trabajaron en esta especialidad, iniciando al mismo tiempo que el maestro una producción propia de nivel internacional. El estudio de la obra hispano-americana sobre series divergentes y su ubicación entre las corrientes matemáticas internacionales prioritarias en la época excede con mucho del alcance del presente trabajo, que se limita a investigar los antecedentes y la puesta en escena por Rey Pastor de un tema nuevo en su prolífica carrera y que abrió una línea de investigación en la matemática hispano-americana.

Dedicamos la primera parte de este trabajo a buscar en la actividad matemática de Rey Pastor hasta 1920 los antecedentes de su posterior dedicación a las series divergentes. Primero describimos la formación en análisis matemático que recibió, entre 1904 y 1914, en la licenciatura, el doctorado y las estancias de especialización en Berlín y Gotinga. Luego señalamos en sus primeras publicaciones algunas muestras de interés por las series y temas afines, que más tarde cristalizaría en su dedicación a las series divergentes. En la segunda parte del trabajo abordamos la puesta en escena de esta actividad, sintetizando las líneas de desarrollo principales de la teoría de las series divergentes y su metodología en el periodo que media entre la monografía de Borel de 1901 y la primera publicación de Rey Pastor en 1928. Resaltamos principalmente aquellas ideas que ayudan a comprender el lugar de la obra de este último. Finalmente, analizamos con algún detalle los cuatro trabajos de Rey Pastor sobre sumación de series divergentes que nos parecen más importantes.

La formación de Rey Pastor hasta 1914

Los estudios universitarios reglados no le ofrecieron a Rey Pastor la oportunidad de tratar con las series divergentes, pues el análisis que se enseñaba en las universidades españolas estaba en el entorno de Cauchy y Abel, momento en el que las series divergentes, a pesar de su sorprendente eficacia en algunos cálculos aproximados, quedaban fuera del análisis riguroso y por tanto de los cursos impartidos sobre la materia. Pero la capacidad personal de Rey Pastor y los medios de información matemática extracurriculares de que dispuso le permitieron llegar más lejos en su formación universitaria, que además completó mediante dos cursos de especialización en Alemania (1911-12 y 1913-14). Realizó esta formación avanzada en cuanto resolvió el problema urgente de ganarse la vida, lo que hizo rápidamente obteniendo en 1911 la cátedra de análisis matemático de la Universidad de Oviedo, seguida del traslado a Madrid dos años después. Extendemos su periodo formativo hasta 1914 porque, aunque era un catedrático español precoz, durante sus estancias en Alemania actuó como un estudiante postdoctoral.

Rey Pastor estudió la licenciatura en Zaragoza, entre 1904 y 1908. La carrera, de cuatro años, estaba organizada según un plan de estudios que orientaba la formación hacia una matemática de tipo aplicado, como se observa en la lista de las asignaturas que se cursaban en el último año, como colofón de la formación matemática: mecánica racional, geometría descriptiva, astronomía esférica y geodesia. Había tres asignaturas de análisis en los cursos anteriores (una cada curso: análisis matemático 1°, análisis matemático 2° y elementos de cálculo infinitesimal) pero en ellas estaban incluidas la aritmética y el álgebra elemental (los sistemas de ecuaciones lineales y la resolución de ecuaciones algebraicas), de modo que el contenido de análisis matemático que se le exigió a Rey Pastor estuvo limitado a temas muy básicos. Sus profesores en estas materias fueron J. Ríus y Casas y Z. García de Galdeano, mereciendo este último una atención especial porque Rey Pastor fue su discípulo predilecto y recibió de él una profunda influencia en diversos aspectos de su actividad profesional.

No cabe aquí hablar con detalle del doctorado, porque lo realizó en la línea de geometría proyectiva sintética de Torroja, en la que había sido introducido en los cursos de licenciatura que le impartió Álvarez Ude, que también fue doctor con Torroja. Había otras oportunidades para el doctorado, también en análisis, pero la escuela de Torroja era la más afamada e institucionalmente establecida. Hizo el doctorado en un año (leyó la tesis en junio de 1909) y a continuación pasó a ser auxiliar de Torroja.

A pesar de instalarse en Madrid y sumergirse en el trabajo geométrico no perdió el contacto con García de Galdeano y el análisis. Así lo atestiguan dos recensiones, publicadas en la revista *Anales de la Facultad de Ciencias de Zaragoza* el año 1909, de sendos libros de análisis aparecidos el año anterior e incorporados por García de Galdeano a su biblioteca particular (ver Tabla 1). En una de ellas aparece por primera vez en la obra de Rey Pastor una mención, siquiera muy fugaz, a las series divergentes. A propósito de la obra de P. Boutroux, Rey Pastor afirma que la teoría de funciones «ha experimentado en poco tiempo un cambio tan radical que más bien es una renovación completa. Desde el punto de vista local de Weierstrass, concretándose al estudio de las funciones analíticas en la proximidad de un punto mediante un desarrollo convergente en un círculo o corona, extendiéndose luego cuando esto era posible, por una prolongación analítica a los demás puntos en que la función estuviera definida, han sido muchas las tentativas hechas para cambiar de rumbo, sustituyendo la fórmula de Taylor por otros desarrollos (productos infinitos, series divergentes, desarrollos convergentes en una estrella de Mittag-Leffler, etc.), consiguiendo así definir funciones en regiones más extensas que antes, e iniciando estudios tan interesantes como los de M. Borel sobre los modos de crecimiento de las funciones, leyes que limitan el número de ceros en un área dada, etc.» Esta reseña indica que, recién licenciado, Rey Pastor estaba al corriente del significado de las series divergentes y conocía al menos de referencia la obra de dos significativos especialistas en el tema. Pero, al margen de esta simple mención, no hay pistas que indiquen que le prestó al asunto una atención especial. Cabe decir más bien que, en esos años, Rey Pastor estaba interesado en completar su formación matemática enciclopédica. La segunda reseña se refiere al segundo tomo de una obra de R. Baire (ver Tabla 1), dedicado a las variables complejas y a las ecuaciones diferenciales. Como el primer tomo estaba dedicado a las funciones de variables reales, Rey Pastor señala como una innovación esta división del análisis en real y complejo, frente a la clásica de cálculo diferencial e integral.

Interesado por García de Galdeano en el análisis matemático y por Torroja en la geometría proyectiva sintética, sus primeros años como doctor presentaron una manifiesta dualidad al pretender, por una parte, sacar partido de su especialización geométrica y, por otra, continuar perfeccionando su conocimiento del análisis. Esta dualidad se reforzó cuando, nada más terminar el doctorado, siendo auxiliar de geometría con Torroja, comenzó a preparar la oposición a la cátedra encargada de los dos primeros cursos de análisis matemático. Para mejorar el tratamiento en el segundo curso de la resolución numérica de las ecuaciónes algebraicas en el caso general complejo, introdujo y aplicó resultados de la teoría de la representación conforme. Mejorar su formación en este tema y en el geométrico de su tesis doctoral fueron los objetivos esgrimidos ante la Junta para Ampliación de Estudios (JAE) con el fin de obtener las becas que disfrutó en Alemania, así que éstos fueron, oficialmente, los temas que ocuparon su estudio.

Rey Pastor obtuvo una beca de la JAE[4] en la convocatoria de 1911. Según los justificantes presentados por el beneficiario, su estancia transcurrió en el seminario matemático berlinés, famoso desde Kummer y Weierstrass, en torno a las actividades de los profesores Frobenius, Schur, Schwarz y Schottky. De los trabajos de Rey Pastor posteriores a este viaje se deduce que alcanzó un profundo conocimiento de la variable compleja y la representación conforme y que perfeccionó su formación geométrica en cuestiones de axiomática. Aunque de momento no tuviera reflejo en sus publicaciones, conviene a nuestro trabajo destacar que Frobenius y su discípulo Schur son dos personajes importantes en la historia de las series divergentes. En el segundo viaje encontramos una situación similar. Después de acceder a la cátedra de Madrid, Rey Pastor estuvo durante el curso 1913-14 en Gotinga, la universidad de Hilbert, Courant, Carathéodory, Landau y Runge. De nuevo sus trabajos reflejan una especialización en la representación conforme (Carathéodory, Runge), pero además entraría en contacto con las ecuaciones en derivadas parciales (Hilbert, Courant) y las series divergentes (Landau, Runge)[5]. Parece pues fuera de duda que Rey Pastor tendría ocasión de conocer más a fondo este último tema al estar en contacto con algunos de los protagonistas de su desarrollo.

Aspectos de la obra de Rey Pastor, 1915-1920

Con el curso 1914-15 comenzó la actividad de Rey Pastor como catedrático de la Universidad Central en Madrid, donde ejerció como profesor, como investigador y como hombre influyente en la profesión, que intentaba renovar en la línea ideológica liderada por el filósofo Ortega. En 1920, un año antes de instalarse en Buenos Aires, tomó posesión del sillón de la Real Academia de Ciencias que se le había ofrecido dos años antes al morir Torroja. Es bien conocido que en tan solemne ocasión hizo pública una dolorosa declaración de fracaso en la tarea de renovación de la matemática española que se había propuesto.

Durante estos años siguió trabajando en los temas antes citados y en ellos comenzó a dirigir tesis doctorales a sus discípulos del Laboratorio y Seminario Matemático, creado por la JAE en 1915 bajo su dirección. Allí se trabajó en matemática pura y también en métodos numéricos y en historia de las matemáticas, pero las series divergentes no aparecen entre la investigación planteada en el Laboratorio, que se presentó en sociedad en el Congreso de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias (AEPPC) de Valladolid (1915) y dos años después, en el congreso de la AEPPC de Sevilla, ofreció un fruto de tesis doctorales y otros trabajos. Por entonces Rey Pastor sabría sin duda que, como tema de investigación internacional, la geometría proyectiva sintética estaba en liquidación y de hecho fue quedando relegada a una situación puramente inercial hasta que fue retirada de los planes de estudios universitarios. Las investigaciones analíticas sobre la representación conforme pudieron haber tenido continuidad con actualidad internacional, pero lo cierto es que Rey Pastor las clausuró con el trabajo que presentó en el Congreso Internacional de Matemáticos de Estrasburgo (1920)[6], un año antes de la marcha definitiva de Rey Pastor a Buenos Aires, ciudad en la que tuvo una prolongada estancia en 1917-18.

Veremos más adelante que las series divergentes aparecieron en la actividad de Rey Pastor como un programa de investigación a mediados de la década de los veinte, tras los primeros años de instalación en Buenos Aires. Pero, si bien las series divergentes no estuvieron en el punto de mira de la investigación de Rey Pastor durante la década española, sí que se insinuaron, como vamos a ver en el apartado siguiente, en sus conferencias sobre los problemas de la matemática o en los libros de texto que empezaba a elaborar como resultado de los cursos que estaban a su cargo. Entre la bibliografía que manejaba asiduamente para modernizar estos cursos figuran obras del italiano Capelli y del alemán Perron, autores ambos que frecuentaron el campo de las series divergentes. Pero los datos disponibles apuntan a que la decisión de abrir una línea de investigación en series divergentes no se produjo hasta la década siguiente, cuando abordó el doctorado en Argentina.

Trabajos de Rey Pastor sobre series anteriores a 1920

Aunque las series divergentes no fueron un tema de investigación para Rey Pastor hasta mediada la tercera década del siglo, ya desde sus primeros trabajos publicados se puede ver el rastro de un cierto gusto por el tema. Citaremos dos de sus primeros trabajos, todavía elementales, y dos ensayos posteriores sobre historia y métodos de investigación en matemáticas, que relacionamos en la Tabla 1 junto con las dos reseñas mencionadas en el apartado anterior.

1907	"Algunas consecuencias de la fórmula de Leibnitz", *Anales de la Facultad de Ciencias de Zaragoza* I, 162-167.
1909	Reseña de la obra *Leçons sur les functions définies par les équations différentielles du premier ordre*, de P. Boutroux, *idem.*, 94-96. Reseña de la obra *Leçons sur les théories générales de l'Analyse*, de R. Baire, *idem.*, 94-96.
1911	"Sobre la sumación de series", *Revista de la Sociedad Matemática Española* I(1), 10-16.
1916	*Introducción a la matemática superior*, Madrid.
1919	"La investigación matemática", *Boletín de Crítica, Pedagogía, Historia y Bibliografía* I(4), 97-108. Glosa a una obra de Capelli, , *Revista Matemática Hispano-Americana* (8-9), 291.

Tabla 1: *Trabajos previos de Rey Pastor relacionados con la sumación de series divergentes (1907-1919)*

Los trabajos elementales corresponden a una fase todavía formativa en la que Rey Pastor participó muy activamente en la resolución de los problemas propuestos en las revistas profesionales nacionales, que se editaban precisamente en Zaragoza. Hasta 1906 resolvió problemas en la *Revista Trimestral de Matemáticas* de su profesor Ríus y Casas, y a partir del año siguiente en los ya mencionados *Anales de la Facultad de Ciencias de Zaragoza.* Pero en el primer número de esta última revista, de 1907, Rey Pastor, siendo estudiante de tercer curso, publicó un artículo que nos interesa como precursor por dos razones. Primero, porque trata de una calculística combinatoria que está presente en los primeros desarrollos de los métodos de sumación de series divergentes. Segundo, porque el planteamiento del artículo es una muestra completamente temprana de sus preferencias en la elección de temas de investigación. El segundo artículo es también interesante tanto por el contenido cuanto por el planteamiento. Lo publicó en 1911 en el primer número de la *Revista de la Sociedad Matemática Española*, donde firma como catedrático, aunque la elaboración del trabajo será sin duda anterior a la oposición ganada.

Ambos escritos surgen de la *Théorie des nombres* de Lucas, un texto de referencia frecuente en la época, que estaba en la biblioteca de García de Galdeano. Los estudios de aritmética se realizaban en el primer curso de análisis matemático, donde alcanzaban un nivel elemental, pero la capacidad de Rey Pastor, sobrada para los estudios reglados, le llevaría a ampliar conocimientos en la obra de Lucas. En el trabajo de 1907, titulado *Algunas consecuencias de la fórmula de Leibnitz*, el estudiante Rey Pastor verifica que varias fórmulas obtenidas por Lucas con métodos diversos, que representan igualdades entre números combinatorios, diferencias finitas de la función $f(n)=n^m$ y números de Bernoulli B_m, se pueden obtener de modo unificado a partir de la fórmula de Leibniz que expresa la potencia m-ésima de la suma de n números. En el de 1911, titulado *Sobre la sumación de series*, el joven profesor Rey Pastor vuelve a tomar varios ejemplos de Lucas, ahora de series sumables, y los obtiene, además de otros, como corolarios de una ley general de sumación que establece para un caso particular de la serie hipergeométrica de Gauss.

Como se ve, por dos veces aparece Rey Pastor interesado en cuestiones de unificación y sistematización de resultados dispersos, afición en la que se observa, como tantas veces, la influencia de su maestro García de Galdeano, que señaló el *fusionismo* como una de las características nuevas de las matemáticas, después del crecimiento disperso y vertiginoso que tuvieron en el siglo XIX.

Las series divergentes aparecen de nuevo en la obra escrita de Rey Pastor con motivo de las conferencias pronunciadas en el Ateneo de Madrid en 1915, publicadas un año después en un librito titulado *Introducción a la matemática superior* y presidido por esta dedicatoria: «A mi querido maestro D. Zoel García de Galdeano, esforzado paladín de la matemática moderna en España". Para comprender bien esta dedicatoria conviene señalar que Rey Pastor aclara, en la breve introducción que le sigue, lo que entiende por «matemática moderna», a saber, «la posterior a Riemann y Weierstrass». Al ocuparse en varias conferencias de esta matemática, el autor despliega de nuevo su espíritu fusionista o sistematizador «agrupando sus variadas teorías en torno de tres ideas capitales: *conjuntos, funciones, grupos*».

Al tratar el análisis en estas conferencias, Rey Pastor adopta el criterio de Baire, que separa la variable real de la compleja, y así dedica primero dos conferencias a funciones de variable real; la primera de ellas se ocupa de los conceptos de función, curva e integral y la segunda se titula *Método de paso al límite en la teoría de funciones*. Aquí señala que «hay dos tipos de paso al límite, que podemos caracterizar así: *paso al infinito numerable y paso al infinito continuo*» y, tomando como ejemplo una suma, obtiene que el paso al límite «nos da dos algoritmos fundamentales distintos: la *serie* y la *integral*». Destaca luego el autor que estos dos tipos de pasos al límite se pueden aplicar a todo proceso algebraico o funcional, resultando así una «sistematización de la teoría de funciones» en la que caben teorías clásicas «y otras recientes a las que espera brillante porvenir»; entre estas últimas, se ocupa en su conferencia de series de Fourier, series divergentes, funciones de infinitas variables, sistemas de infinitas ecuaciones lineales y ecuaciones integrales. El paso al límite realiza por tanto una sistematización de «estas teorías modernas, cuya íntima conexión no podría sospecharse». Si centramos la atención en el apartado de las series divergentes, observamos que Rey Pastor comenta en primer lugar un ejemplo de Euler atribuyendo suma a una serie divergente, para advertir después que el rigor de Abel y Cauchy acabó desterrando dichas series del análisis, pero no sin ciertas dudas por su indudable valor para la aproximación de funciones; luego se refiere a las aproximaciones asintóticas de Stieltjes y Poincaré, con la fórmula de Stirling como ejemplo y una referencia a Hadamard, para terminar con la sumabilidad de Cesàro, una mención a Mittag-Leffler y una referencia general a Borel para el conjunto de la teoría de las series divergentes, que le parece «una rama apenas conocida de la teoría moderna de las series».

También esta vinculado a su maestro el artículo de 1919 *La investigación matemática*, que apareció en el cuarto número de la efímera revista *Boletín de crítica, pedagogía, historia y bibliografía*, otra de las obras altruistas de García de Galdeano. La introducción del artículo es como sigue: «¿Cuál es la esencia de la investigación matemática? ¿Cómo se amplía sin cesar el patrimonio de esta ciencia?

No incurriremos en la pretensión de contestar a estas preguntas, pero permítasenos señalar siquiera cuatro caminos cardinales que podemos designar así: anastomosis, correlación, generalización, especialización». Nos interesa de este artículo[7] que entre los ejemplos hay cuestiones sobre series e integrales, en particular sobre series divergentes y su vinculación con las matrices de Toeplitz. Los métodos de sumación de series divergentes aparecen entre los ejemplos de anastomosis lo que resulta especialmente significativo pues, según Rey Pastor, «la sublime cópula de ideas, patrimonio de los elegidos, ha sido y será siempre la generadora de entes nuevos, tanto más vigorosos cuanto más heterogéneas sean las ideas generatrices y más lejano parentesco exista ente ellas».

Las series divergentes antes de Rey Pastor, periodo 1901–1928

En las postrimerías del siglo XIX la teoría de sumación de series divergentes era un embrión donde con dificultad se podían distinguir algunas de sus partes constituyentes, mientras que del todo ni siquiera se apreciaban sus contornos.

Emile Borel (1871-1956) en su obra temprana de 1895 a 1901, logra llamar la atención de los más talentosos analistas de la época sobre un tema que todavía seguía siendo tan polémico como en la época de Cauchy y Abel. Desde que aparece el texto de las conferencias sobre series divergentes que Borel dictara en la Escuela Normal Superior, publicado en la *Colección de Monografías sobre la Teoría de Funciones* [BOREL 1901, Tabla 2], se abrieron posibilidades preciosas para la difusión, extensión y profundización de las ideas sobre la teoría de la sumación[8]. Rey Pastor conoció de esta obra, seguramente, en la biblioteca de García de Galdeano y desde muy temprano la cita en sus conferencias y publicaciones, así como cita los trabajos de Mittag-Leffler y Le Roy que también, junto a las obras clásicas de Euler y los primeros artículos de Cesàro sobre sumación en la media aritmética, pudo encontrar entre los libros del maestro.

Para simplificar nuestro estudio vamos a circunscribirnos a las ideas centrales sobre la teoría de sumación de series divergentes que se desarrollaron en el período que media entre la obra de Borel y sus coterráneos —Servant, Le Roy, Maillet, Buhl— y el momento que aparecen los primeros trabajos de Rey Pastor, es decir, aproximadamente, entre 1904, cuando comienza sus estudios en Zaragoza, y 1928 en que hace públicas sus ideas en el Congreso de Bolonia [RP, 1928b].

Cuatro tendencias principales cabe señalar en el desarrollo de la teoría de las series divergentes durante el primer tercio del siglo XX:

a. Establecimiento de nuevos métodos especiales de sumación y generalizaciones diversas de métodos ya conocidos.

b. Análisis de equivalencia o inclusión relativa entre los diferentes métodos. Comparación de la eficacia respectiva desde el punto de vista de la prolongación analítica.

c. Aplicaciones: a las series de Fourier, a las series de Dirichlet, a las ecuaciones diferenciales, a la física teórica.

d. Estudio de la sumabilidad de las series en su aspecto más general, propendiendo a la unificación y sistematización de métodos.

Haremos algunas indicaciones sumarias sobre los trabajos más importantes en cada una de estas direcciones. En la Tabla 2 señalamos la bibliografía principal que pudo influir en la conformación de la obra de Rey Pastor.

La tendencia que hemos señalado en primer término fue seguida por varios investigadores, estimulados por los interesantes resultados obtenidos por Borel con el método exponencial. A esta categoría pertenecen los trabajos de Le Roy, Mittag-Leffler, Buhl, Bromwich, Vallée-Poussin, Riesz, Norlund y algunos otros. Rey Pastor pudo estar al tanto de estos resultados a través de sus estudios en la biblioteca de García de Galdeano, donde se encontraban varios de los títulos más significativos.

Algunos investigadores como Hardy, Littlewood, Sannia, Hurwitz, Silvermann, etc., concentraron su interés en el estudio profundo y comparado de los métodos clásicos de Cesàro, Hölder, Borel, etc. De esta línea son los resultados conocidos como *teoremas tauberianos*. Aunque Rey Pastor en sus trabajos hace referencia a comparaciones en la eficacia de los diferentes métodos, no se va a preocupar en desarrollar esta línea, salvo para enmarcar sus resultados entre los otros.

1901	BOREL, E.	Leçons sur les séries divergentes	Gauthier-Villars, Paris
1904	FEJER, L.	Untersuchungen über Fouriersche Reihen	Math. Ann. 58, 51-69
1905	DIENES, P.	La série de Taylor sur le cercle de convergence	Comptes Rendus, 140, 489-491
1909	LEBESGUE, H.	Sur les integrales singulières	Ann. Toulouse, 1, 25-117
1909	RIESZ, M	Sur les séries de Dirichlet et les séries entières	Comptes Rendus, 149, 909-912
1911	HARDY, G.H. & CHAPMAN, S.	A general view of the theory of summable series	Quart. J. Math. 42, 181-215
1911	TOEPLITZ, O.	Ueber Allgemeine lineare Mittelbildungen	Prace Mat. Fiz. 22, 113-119
1913	DIENES, P.	Leçons sur les singularités des fonctions analytiques	Gauthier-Villars (Colección Borel), Paris.
1913	SCHUR, I.	Uber die Aquivalenz der Cesàro und Hölder Mittelwerte	Math. Ann. 74, 447-458
1913	SILVERMAN, L.L.	On the definition of the sum of a divergent series	Univ. of Missouri Studies, 1-96
1915	HARDY, G.H. & RIESZ, M.	The general theorie of Dirichlet's series	Cambridge Tracts in Math. nº18
1916	FORD, W.B.	Studies on divergent series and summability	Univ. of Michigan, New York
1917	HURWITZ, W.A. & SILVERMAN, L.L.	On the consistency and equivalence of certain definitions of summability	Trans. Amer. Math. Soc. 18, 1-20
1917	KOJIMA, T.	On generalized Toeplitz's theorems on limits and its applications	Tohoku Math. J. 12, 291-326
1918	FORD, W.B.	A conspectus of the modern theory of divergent series	Bull. Amer. Math. Soc. 25, 1-15
1918	KOJIMA, T.	Theorems on convergent integrals	Tohoku Math. J. 14, 64-79
1919	CARMICHAEL, R.D.	General aspects of the theory of summable series	Bull. Amer. Math. Soc. 25, 97-131
1920	PERRON, O.	Beitrag zur Theorie der divergenten Reihen	Math. Zeit. 6, 286-310
1920	SCHUR, I	Uber lineare Transf. in der Theorie der unendlichen Reihen	Journal de Crelle, 151, 79-111
1921	HAUSDORFF, F.	Summations Methoden und Momentfolgen I-II	Math. Zeit, 9, 74-109, 280-299
1922	BANACH, S.	Sur les opérations dans les ensenbles abstraits	Fund. Math. III, 133-181
1922	HURWITZ, W.A.	Report on topics in the theory of divergent series	Bull. Amer. Math. Soc. 28, 17-36
1922	KNOPP, K.	Uber das Eulersche Summierungsverfahren	Math. Zeit. 15, 226-253
1922	TAKENAKA, S.	A general view on the theory of summability	Tohoku Math. J. 21, 193-221
1925	SMAIL, L.L.	History and sinopsis of the theory of summable infinity process	Oregon Univ. Press, Eugene
1926	BROMWICH, T.J.	An introduction to the theory of infinite series	London
1928	BOREL, E.	Leçons sur les sér. diverg., 2^{nd} ed.	Gauthier-Villars, Paris

Tabla 2. *Alguna obras sobre series divergentes (1901-1928)*

También, en este periodo, se estudió la eficacia de los diversos métodos en conexión con el problema de la prolongación analítica. Se sabe, por ejemplo, que los métodos de Cesàro, Hölder, Norlund sólo alcanzan la circunferencia del círculo de convergencia, en tanto que el método de Borel es mucho más potente pues permite efectuar la prolongación, cuando es posible, a un recinto poligonal más extenso que el círculo primitivo de convergencia. Más eficaz es el método de Le Roy que extiende la prolongación a la región denominada «estrella» por Mittag-Leffler, pero comparado con el de Borel ofrece la desventaja de no prestarse fácilmente al cálculo. Rey Pastor siempre se pronunció enfáticamente por desarrollar esta línea de investigación; su primer trabajo importante en esta dirección, la comunicación al Congreso de Bolonia [RP, 1928b], es ya muestra de esta inclinación.

Otros investigadores encontraron útil empleo de los nuevos conceptos en algunas ramas afines del análisis. Una línea importante, trabajada por la escuela anglosajona en especial, es la aplicación de los métodos de sumación a tipos particulares como las series de Dirichlet y los desarrollos ortogonales, en particular a los desarrollos trigonométricos, motivados por el conocido teorema de Féjer [1904, Tabla 2] que rápidamente fue incorporado por varias escuelas en sus investigaciones sobre el Análisis de Fourier. Esta dirección no fue del interés de Rey Pastor, al menos para sus publicaciones. Pero el resultado de Féjer dio, sin duda, un nuevo aliento para aplicar las técnicas de sumación a una clase mayor de representaciones analíticas. Tal es el caso de las llamadas series de Dirichlet.

Una serie de Dirichlet es cualquiera de la forma

$$\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{e^{\lambda_n z}}$$

donde a_n y z son números complejos; la sucesión λ_n, que aporta los exponentes de la serie de Dirichlet, ordinariamente se toma como una sucesión creciente infinitamente grande, por ejemplo, $\lambda_n=\ln n$. Si además, $a_n=1$ para todo n, estamos en presencia de la famosa función *Zeta* de Riemann. En el siglo XIX era bien conocido un resultado análogo al teorema de Abel para series de potencias:

Si la serie de Dirichlet converge en el punto $z_0=\sigma_0+it_0$, entonces ella converge en el semiplano $Re(z)>\sigma_0$. Existe un valor, llamado abscisa de convergencia, tal que la serie de Dirichlet converge para $Re(z)>\sigma$ y diverge para $Re(z)<\sigma$. Además, en el semiplano de convergencia $Re(z)>\sigma$ la suma de la serie es una función holomorfa. En particular, la función Zeta de Riemann es holomorfa para $Re(z)>1$.

Marcel Riesz [1909, Tabla 2] llamó de nuevo la atención sobre las series de Dirichlet sustituyendo convergencia ordinaria por análisis de sumabilidad. En este articulo Riesz observa que el proceso de tomar medias aritméticas puede prolongar esencialmente el dominio de analiticidad de la función suma, siempre que se escojan factores de sumabilidad convenientes. En el caso $\lambda_n = \ln n$, Riesz llama a su método «sumabilidad logarítmica» y en este caso, el límite es equivalente a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n}\left(\frac{S_1}{1}+\frac{S_2}{2}+\ldots+\frac{S_n}{n}\right)$$

El método de Riesz es en esencia un método de *prolongación analítica* a todo el plano bajo ciertas condiciones de regularidad y crecimiento para valores suficientemente grandes de z. La región de sumabilidad, por tanto, extiende considerablemente el dominio de analiticidad de la función suma. De nuevo, al igual que plantea Borel, se relaciona el problema de sumabilidad con el problema de *prolongación analítica*, ahora para un tipo de series que llamaba la atención por sus especiales relaciones con la teoría analítica de números. Una buena referencia para estos problemas es [HARDY & RIESZ 1915, Tabla 2]. Lo que para nosotros resulta interesante, es mostrar que *la idea de la vinculación de la teoría de sumación con la prolongación analítica era una de las líneas fundamentales* en la época en que Rey Pastor comienza a preocuparse por esta problemática.

También se aplicó la teoría de las series sumables a la investigación de los puntos singulares de las funciones analíticas. En esta dirección obtuvieron resultados Leau, Servant y muy especialmente P. Dienes [1913, Tabla 2] y más tarde en su excelente obra [DIENES,1931]. Consideramos que el artículo [RP, 1933c], en los *Rendiconti* de Milán, muestra el dominio que poseía sobre esta línea.

Aplicaciones a la teoría de las ecuaciones diferenciales se observan ya en los trabajos de finales de siglo XIX de Poincaré y Borel, mas tarde ampliados por Maillet, Cunningham, Watson y otros muchos, sobre todo en la consideración de los desarrollos asintóticos. No se interesó Rey Pastor en publicar en esta dirección, aunque dió noticia de las aplicaciones a las ecuaciones diferenciales en sus charlas y publicaciones generales sobre la teoría de series. Sobre desarrollos asintóticos publicó varios resultados interesantes, particularmente en el artículo de 1933 que reseñamos más abajo.

La otra línea de investigación que hemos dejado para el final es la que consideramos tuvo mayor influencia en Rey Pastor. Se trata de la búsqueda de un enfoque generalizado a través de *algoritmos lineales*. La idea es realmente simple. Todo gira alrededor de cierta transformación lineal, determinada por una matriz infinita. Si la transformación conserva la convergencia y, además, transforma algunas series divergentes en convergentes, representa un proceso de sumación. Tales transformaciones se denominan *transformaciones regulares*. Aunque varios autores, a principios de siglo, se interesaron por los algoritmos lineales de convergencia y sumación, se considera que el trabajo de O. Toeplitz [1911, Tabla 2] representa el comienzo de una sistemática en esa dirección. Toeplitz, que estudió en Gotinga con Hilbert en pleno apogeo de la teoría de las ecuaciones integrales lineales, con el uso de sistemas de ecuaciones con infinitas incógnitas, es la persona indicada para esta tarea. El teorema de Toeplitz establece las condiciones necesarias y suficientes para que una matriz infinita represente una transformación regular.

La generalización de las «T-matrices» o matrices regulares fue rápidamente conseguida por T. Kojima [1917, Tabla 2] e, independientemente, por Isai Schur [1920, Tabla 2], alumno de Fröbenius, también interesado en la teoría de las ecuaciones integrales, con el que Rey Pastor pudo tener contacto en Berlín como ya dijimos.

Pero el paso más importante, desde nuestro enfoque, fue dado en un trabajo conjunto de W. A. Hurwitz y L. L. Silvermann [1917, Tabla 2] que relaciona las transformaciones lineales con funciones analíticas y sumabilidad. Este trabajo fue superado inmediatamente por Félix Hausdorff [1921, Tabla 2], quien desarrolla una teoría sólidamente basada en transformaciones regulares. En este artículo Hausdorff prueba que la sumabilidad (H, k) de Hölder y la sumabilidad (C, k) según Cesàro son casos especiales de transformaciones lineales. No es sorprendente que las matrices correspondientes sean llamadas *matrices de Hausdorff*. En la literatura especializada, el nombre de Hausdorff para su método de sumación fue introducido por R. S. Schmidt en 1924 y mantenido por Hardy [1949]. La transformación de Hausdorff esta relacionada con una matriz diagonal infinita:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & \mathrm{K} \\ 0 & \mu_2 & 0 & \mathrm{K} \\ 0 & 0 & \mu_3 & \mathrm{K} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{O} \end{pmatrix}$$

Si, por ejemplo, $\mu_n=(n+1)^{-1}$, entonces se obtiene el método de Hölder (H, k). Hausdorff prueba un variado conjunto de teoremas hallando relaciones con los μ_n. Entre estos resultados, prueba que para que una transformación sea regular, la sucesión μ_n debe representar los momentos, en el sentido de la integral de Stieltjes, con relación a una función generatriz de variación acotada sobre [0, 1], la cual satisface ciertas condiciones de frontera. Este resultado llama de nuevo la atención sobre la semejanza de esta teoría y la teoría de Stieltjes de las funciones de variación acotada, lo cual se destacaba ya en la obra seminal de Borel.

Rey Pastor, como ya hemos señalado anteriormente, en sus estancias en Alemania trabajó en contacto con estas escuelas alemanas, tanto en Berlín como en Gotinga, que seguramente estaban elaborando las ideas que más tarde le servirían para establecer su teoría. En ella, así como subrayó la relación con los problemas de prolongación analítica, mas afines con el enfoque francés, también enfatiza la importancia del método de los momentos de la escuela alemana, en la sistematización de una teoría general de la sumación y la convergencia.

Sin lugar a dudas los métodos de linealización de los problemas estaban de moda en las primeras tres décadas del siglo XX, y no creemos dejaran de estarlo cuando Rey Pastor se aventuró en el tema.

El lanzamiento de una línea de investigación

Organizar la vida en otro país sin duda le llevó tiempo a Rey Pastor, que además se dedicó intensamente a poner en marcha unas explotaciones agrícolas en zonas de nueva colonización. Por otro lado, incorporarse a la Universidad de Buenos Aires le supuso una dedicación docente intensa, acompañada de la edición de libros de texto en ambas orillas del océano, pues trabajaba en Madrid durante el verano austral. Para dar una idea de esta actividad basta citar los libros que publicó en este quinquenio:

— 1921. Cálculo infinitesimal / Funciones reales
— 1922. Elementos de análisis algebraico (2ª ed.)
— 1924. Lecciones de álgebra / Curso cíclico de matemáticas (vol.1)

Además, desarrollaba una tarea similar con los estudiantes de magisterio, si bien sus libros de matemáticas elementales no comenzaron a ver la luz en Argentina hasta la segunda mitad de la década y en la década siguiente en España con la colaboración de Puig Adam. Fue por entonces, en 1925, cuando reaparecieron sus publicaciones en las revistas españolas de investigación, que trataban temas diversos.

Pero en este tiempo afloró el tema de las series divergentes, que ocuparía durante varios años a Rey Pastor y a sus discípulos españoles y americanos. Como el autor afirma en la introducción a [RP, 1931c] en 1925 dio el curso sobre series divergentes en Madrid y un año después en Buenos Aires. Por otra parte, en el Congreso de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias celebrado en Cádiz en 1927, leyó unas *Notas de análisis* [RP, 1929a][9] que incluyen observaciones sobre funciones determinantes, el método de sumación de Borel, las series e integrales de Dirichlet, etc. Así se inició una producción extensa, entre cursos dictados en Argentina o España y artículos (los 24 de la Tabla 3) publicados en Argentina, Bélgica, España, Francia, Italia y Japón.

1928a	Cálculo de diferencias	Rev. Acad. Ciencias de Madrid 24, 19-27 y 299-306.
1928b	Prolongación analítica y sumación de series divergentes	Atti del CIM, Bologna 1928, 335-347.
1928c	Sobre la sumación de series divergentes	Bol. del SMA 1(1), 15-16.
1929a	Notas de análisis	Actas Cong. AEPPC (Barcelona) t.1, pp. 81-92.
1929b	Algoritmos lineales de convergencia y sumación	Cursos dictados en las UU. de BA y Madrid.
1929c	Análisis correlativo de series e integrales	Bol. del SMA 1(5), 1-10.
1929d	Ampliación de la estrella de Borel	Suplemento Bol. del SMA 1, 4-5.
1929e	Un algoritmo lineal de prolongación analítica	Suplemento Bol. del SMA 1, 5-6.
1929f	Relación entre los métodos de sumación de Borel	Suplemento Bol. del SMA 1, 8.
1929g	Una aplicación de los algoritmos lineales	Suplemento Bol. del SMA 1, 8.
1929h	Algoritmos lineales de convergencia	Suplemento Bol. del SMA 1.
1929i	Un algoritmo general de convergencia	RMH-A (Ser. II) 2, 273-286.
1930	Une méthode de convergence par des moyennes	CRAS de Paris 191, 452-453.
1931a	Exposición de resultados sobre series diluidas	Suplemento Bol. del SMA 2, 2.
1931b	Sobre los algoritmos lineales de convergencia	Suplemento Bol. del SMA 2, 1.
1931c	Teoría de los algoritmos lineales de convergencia y sumación	SMA 5, Imprenta de la UBA.
1931d	Un método de sumación de series	Rend. Circolo Mat. di Palermo 55, 1-6.
1932	Zur theorie der divergenten reihen	Tohoku Math. J. 36 I, 73-77.
1933a	Un semplice algoritmo di convergenza e sommazione	Periodico di Matematiche (Ser. IV) 13(3) 158-160.

1933b	Sur l'application de la méthode de Borel aux séries	CRAS de Paris 197, 973-974.
1933c	Aplicaciones de los algoritmos lineales de convergencia	Rend. Sem. Mat. e Fis. di Milano 7(9) 191-222.
1933d	Une généralisation élémentaire de la convergence	Bol. del S.M.A. III(13) 142-146.
1932d	Une généralization élémentaire de la convergence	Bull. Soc. Royal des Sci. de Liége 2(4) 90-93.
1935a	Transformación de Pincherle y sumación	RMH-A (Ser. II)10, 26-29.
1935b	Algunas orientaciones modernas de la teoría de series	XIV Congreso de la AEPPC, Santiago de Compostela 1934.
1935c	Teoría geométrica de las transformaciones eulerianas	RMH-A (Ser. II)10, 17-20.
1936	Relación entre los algoritmos de convergencia y sumación	RMH-A (Ser. II)11, 67-70.

Tabla 3: *Obras de Rey Pastor sobre series divergentes (1928-1936)* [10]

La actividad docente acabó fructificando en España cuando Ricardo San Juan, que fue el principal discípulo español de Rey Pastor, publicó su primer trabajo sobre series [SAN JUAN, 1930] y poco después la teis doctoral [SAN JUAN, 1933]. Pero fue en la capital argentina donde primero hizo escuela a partir del Boletín del Seminario Matemático Argentino —creado por él en 1928 a semejanza del Laboratorio español— en el que publicó artículos breves con cuestiones de investigación que proponía a sus discípulos. Ese mismo año el grupo del Seminario compareció en el Congreso de Bolonia, donde Rey Pastor publicó su primer trabajo, por orden de aparición, plenamente dedicado a la sumación de series divergentes [RP, 1928b].

Al inicio de [RP 1929i] afirma el autor que las concisas notas presentadas en Bolonia contienen «alguno de los resultados que hemos obtenido hace tiempo sobre las *series oscilantes* (comúnmente llamadas *divergentes*) y que en gran parte fueron expuestos en nuestro curso de 1926, dictado en la Universidad de Buenos Aires y algunos en 1928, en la de Madrid. Interrumpida su publicación, que fue iniciada en la Revista de la Academia de Ciencias de Madrid, vamos a exponer... alguno de sus capítulos». No queda claro lo que significa «hace tiempo», pero sí que Rey Pastor estaba aflorando, para ser compartido con discípulos, un proyecto de investigación que venía desarrollando privadamente. El curso de Rey Pastor sobre series divergentes apareció autografiado en 1926 en Buenos Aires, así que poco después estaría listo para la imprenta y, según hemos visto, gestionó sin éxito su publicación por la Real Academia de Ciencias de Madrid[11]. En la revista de la Academia apareció un trabajo sobre diferencias [RP, 1928a] que sin duda será ese inicio fallido de la publicación completa, proyecto interrumpido según acabamos de comentar citando al autor.

También en [RP, 1929c] hay una referencia a sus cursos en una presentación a pie de página que dice: «por deseo del señor Decano publicamos un resumen de parte del curso de Análisis correlativo que dictamos en la Facultad de Buenos Aires en 1926. Para no ocupar mucho espacio nos limitamos a extractar los apuntes que tomaron algunos de los alumnos, omitiendo los ejemplos y observaciones de carácter didáctico». Uno de estos alumnos pudo ser Toranzos, quien con ocasión del homenaje al maestro que sus discípulos organizaron en la Universidad de Rosario en 1945 recopiló una amplia lista de los cursos superiores dados por Rey Pastor[12], de la que entresacamos los siguientes, que corresponden al tema y a las fechas que nos ocupan:

— 1924. Series divergentes y series de Fourier
— 1926. Cálculo de diferencias finitas / Series e integrales D / Series divergentes
— 1927. Teoría de diferencias finitas
— 1929. Algoritmos lineales de convergencia y sumación[13]

Volviendo a la primera memoria fruto de sus cursos, el intento de publicación se desplazó a Buenos Aires, una vez interrumpido el inicio madrileño. Pero la memoria se demoró hasta 1931, cuando al fin vio la luz como una publicación del Seminario Matemático Argentino realizada en la imprenta universitaria [RP, 1931c]. El autor explica en la introducción que «el largo periodo transcurrido desde la impresión de este trabajo hasta su publicación es un índice de las dificultades de todo orden por que atraviesa la Universidad; para no dilatar indefinidamente su publicación, ha sido preciso mutilar la obra, desistiendo de imprimir algunos capítulos y el estudio bibliográfico que debía completarla». Antes, se hace constar en la obra que el expediente de publicación es de «fecha 8 de agosto de 1929» y en la propia introducción hay menciones a cursos y trabajos de 1929 y 1930, que sin duda fueron añadidos aprovechando la demora. Por otra parte, en [RP 1930] se cita la obra como de 1930 y en otros escritos de dicho año se afirma que la memoria está en prensa.

Todas estas vicisitudes nos permiten afirmar que dicha memoria puede considerarse, con los artículos de la Academia de Ciencias de Madrid como preámbulo, la primera obra de Rey Pastor sobre el tema, aunque se publicara más tarde que algunos artículos. Por eso empezamos con ella la parte final de este trabajo, que estará dedicada a la reseña y crítica de sus trabajos principales.

Reseña y crítica de la memoria [RP, 1931c]

Como hemos dicho, esta obra, títulada *Teoría de los algoritmos lineales de convergencia y sumación*, está basada en sus cursos de Madrid y Buenos Aires. Seguramente fue la primera obra sistemática publicada sobre estos métodos y sirvió de fuente principal para el trabajo de sus discípulos, tanto en España como en Latinoamérica. En la memoria se clarifican resultados anteriores de otros autores, mostrando un amplio conocimiento de todo lo que se estaba haciendo en la materia; además, se sistematizan y se amplían varios resultados anteriormente expuestos por Rey Pastor.

La memoria[14] tiene ocho capítulos, además de una brevísima introducción que ya hemos comentado. Los capítulos son los siguientes:

1. Definición funcional de los límites y sumas generalizadas
2. Algoritmos de convergencia y sumación
3. Algoritmos (C) y (M)
4. Algoritmos (E) y (B)
5. Otros algoritmos de convergencia y sumación
6. Métodos generales de convergencia y de sumación
7. Teoría general de los algoritmos de convergencia
8. Algoritmos funcionales

Desde el primer capítulo destaca que su punto de vista difiere del tomado por Borel. Llama punto de vista *aritmético* al adoptado por este autor, justificado porque se atiene al principio de permanencia de las leyes formales de la aritmética. Es decir, se deben cumplir las siguientes condiciones: 1°. El límite generalizado debe coincidir con el límite ordinario en el caso de convergencia del algoritmo infinito. 2°. En el caso de no-convergencia, el límite generalizado debe satisfacer, algunas de las leyes formales de las operaciones aritméticas.

Su punto de vista es denominado *funcional* puesto que es preciso atenerse, no solamente a la conservación de las propiedades aritméticas, sino también de las propiedades funcionales. Este enfoque pretende reivindicar a Euler y su clásica definición, dada en 1748, de suma infinita[15]:

Summa cujusque seriei est valor expressionis illius finitae, ex cujus evolutione illa series oritur.

Es decir, la suma esta asociada a una *función generatriz,* la función definida por la serie $f(t)=u_0+u_1t+u_2t^2+u_3t^3+...$, que se supone con radio de convergencia no nulo y que al evaluarse *genera* la serie numérica investigada.

Para Rey Pastor el problema de la sumación de series e integrales presenta dos aspectos: 1°. Definición de la suma generalizada. 2°. Cálculo efectivo de la suma mediante algoritmos diversos.

El segundo problema lo identifica con el problema de la *prolongación analítica*, pero deja claro que reservará el nombre de método de sumación para los algoritmos que permiten llegar a la suma mediante un número finito de operaciones aritméticas (incluso paso al límite) y no para los métodos que demuestran la existencia de la prolongación, exigiendo infinitas operaciones, o la aplicación del principio de Pincherle-Borel.

Establece Rey Pastor una teoría coherente de límites generalizados para integrales, funciones y sucesiones. Muestra como muchos resultados importantes se sitúan, de forma natural, como casos particulares. Así los métodos de Euler y de Borel se ajustan en su esquema, fundamentalmente por su íntima conexión con el problema de la prolongación analítica. Aunque no se preocupa por los teoremas tauberianos propiamente, se dedica a establecer las relaciones de inclusión o equivalencia que ligan los más importantes métodos de sumación.

El estilo de Rey Pastor es elegante y conciso, pero a veces parece algo reiterativo. La impresión tipográfica, bastante deficiente, no ayuda a decidirse a su lectura y estudio. La falta de citaciones y de una relación de literatura torna realmente difícil un estudio acucioso de las diferentes influencias que motivaron a Rey Pastor a tomar su línea de investigación. No obstante, la memoria tiene un mérito principal y es que representa el primer intento de sistematizar una teoría general de los algoritmos de convergencia y sumación. La obra de Hardy [1949], más completa y enciclopédica, aparece 18 años mas tarde, ya después de la muerte de Hardy, gracias a los esfuerzos de su amigo J.E. Littlewood por terminar la empresa que con entusiasmo había comenzado Hardy al retornar a Cambridge en 1931.

Es cierto que antes de la memoria de Rey Pastor habían aparecido otras, como Ford [1916, Tabla 2] y Smail [1925, Tabla2], así como la segunda edición del magnífico libro de Borel [1928, Tabla 2], que mantiene el mismo enfoque de la primera, con un apéndice escrito con la colaboración de Georges Bouligand sobre el desarrollo moderno en el período 1901-1927 que media entre las dos ediciones;

pero ninguna de estas obras se plantea el objetivo de sistematizar la teoría de los algoritmos lineales de sumación y convergencia. Es decir, la única obra que adopta como proyecto unificador centrar el problema de la sumación y la convergencia en sus características de algoritmos lineales, partiendo de los resultados de la escuela alemana, es la monografía de Rey Pastor.

También, como respuesta al interés por el tema, demostrado en estas primeras décadas del siglo, habían sido publicadas las segundas ediciones ampliadas de Knopp [1924, Tabla 2] y Bromwich [1926, Tabla 2], pero que no son monografías sobre series divergentes, sino textos generales sobre teoría de series, donde se trata de dar una visión panorámica de la teoría y las aplicaciones, incluyendo los resultados básicos de la sumación.

En resumen, podemos afirmar que si la publicación de la memoria de Rey Pastor no hubiera sido tan accidentada y de tan mala calidad tipográfica, sería hoy justamente señalada como la precursora y mejor orientada monografía sobre el enfoque funcional de la teoría de series divergentes. Si no es así, es porque además de editarse en la Universidad de Buenos Aires, como una publicación interna y con deficiencias notables, su objetivo era sólo que sirviera de base a los estudios de sus alumnos tanto en Argentina como en España. Este objetivo fue conseguido en la obra de San Juan, Vignaux, Durañona y varios más, en una y otra orilla.

Reseña y crítica del trabajo de Bolonia [RP, 1928b]

Desde la introducción se expone la relación de la teoría de series divergentes con el problema de la prolongación analítica y se defiende el punto de vista euleriano. Se señalan las propiedades aritméticas y se discute brevemente el problema de la permanencia o regularidad del algoritmo. Aparece el problema de las series lagunares, que retomará en varios de sus trabajos posteriores y en otros de sus alumnos en ambas orillas. Da una condición necesaria y suficiente para que no se altere la suma por intercalación de ceros. Estos resultados son sobre todo importantes para mostrar la fuerza de la definición euleriana, la cual había sido criticada precisamente con ejemplos de series lagunares. La principal trascendencia de estos estudios se debe a su íntima relación con los problemas de análisis de singularidades, ya famosos desde los resultados alcanzados por Hadamard a fines del siglo anterior y que en este siglo alcanzan un protagonismo notable en el análisis matemático.

Se comenta la relación entre los métodos de Borel y la polémica al respecto, dando una forma a la función sumatriz que contiene los dos casos en uno equivalente. Se observa que en el cálculo de diferencias se puede organizar una teoría análoga de sumación y de tal forma el método de Euler es correlativo al método de Borel. Amplía el campo de aplicación del método de Borel, introduciendo una variable y manipulando como en el método de Abel.

Expone el método de los momentos, que considera el más importante y que incluye como casos particulares a los métodos más eficaces, tales como el de Euler y el de Borel. Introduce otros métodos del mismo tipo, expone una tabla de funciones generatrices y plantea que los métodos clásicos prefijan la función generatriz y así restringen el campo de las series sumables; que lo mejor es, dada la serie, elegir la generatriz entre las que tienen momentos conocidos, como las expuestas en su tabla, para que la función asociada sea fácilmente sumable. Esto conduce al difícil problema de los momentos de Stieltjes, para el que son conocidas condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir los momentos dados, a fin que la función asociada sea, por ejemplo, exponencial o geométrica. Se deja abierto el problema de la independencia de la prolongación de la generatriz elegida. Tal generalización de la definición euleriana permite demostrar fácilmente las operaciones con series divergentes, cualquiera sea su radio, inclusive nulo. Esta es una de las bondades del enfoque de Rey Pastor.

Este trabajo significa el lanzamiento de las ideas de Rey Pastor a la palestra internacional. El Congreso de Bolonia podía servir como trampolín para obtener el reconocimiento internacional que sus trabajos anteriores sobre geometría no habían conseguido. Además, llamaba la atención sobre lo que él y sus discípulos consideraban de mayor importancia sobre el tema: la relación con el problema de la prolongación analítica.

Consideramos fue un trabajo importante para su época, no tan distante de los trabajos de la escuela británica de Hardy, ni de otros similares en las dos orillas, europea y americana. Sin embargo, nos parece algo presuntuoso en sus críticas a Borel. Rey Pastor se esfuerza en mostrar que Borel consideraba la teoría de series divergentes independiente del problema de la prolongación, lo cual no nos parece exacto, como uno de los autores ha expresado en un ensayo sobre la obra temprana de Borel [SÁNCHEZ, 1994].

Todavía no aparece clara la intención de Rey Pastor de conseguir una sistematización de la teoría de sumación con el uso de los algoritmos lineales, pero podemos observar la importancia que en todos sus trabajos va a dar a la relación con el problema de los momentos, en cuya base la escuela alemana había desarrollado sus ideas de linealización.

En resumen, en este artículo aparecen en ciernes las principales ideas de la obra de Rey Pastor y, por ser el primero de publicación internacional, tiene sobrados méritos históricos.

Reseña y crítica del trabajo de Palermo [RP, 1931d]

Este breve trabajo es quizás el más popular y citado de los que Rey escribió sobre series divergentes. Se enmarca en las dos primeras tendencias que señalamos en el epígrafe anterior, pues en él se establece un nuevo método y se analiza su eficacia desde el punto de vista de la prolongación analítica. A nuestro entender gana su popularidad por lo original y curioso que resulta el dominio de sumabilidad en el caso elemental de la serie geométrica. Por otra parte, el artículo no aporta ideas capitales en lo referente a la sistematización y unificación de métodos, algo que sí hacen los otros dos artículos que reseñamos aquí.

Si lo destacamos es porque otros conocedores de la obra de Rey Pastor, al valorar sus trabajos en este campo, han colocado los resultados de este artículo como su aporte principal, con lo cual no concordamos y así lo queremos señalar, porque lo más importante en la obra de Rey Pastor es su concepción funcional en la búsqueda de una unificación de la teoría a través de los algoritmos lineales. Esto es el centro de su atención, tanto en la memoria de 1931 como en sus artículos fundamentales. Donde mejor se observa esta tendencia es en el artículo que reseñamos a continuación.

Reseña y crítica del trabajo de Milán [RP, 1933c]

Señala Rey Pastor que la idea de *sistematizar* aparece ya en el libro de Borel [1901, Tabla 2], donde se dan condiciones suficientes para que una matriz sea regular, es decir, conserve los límites en el caso de existir la convergencia. Pero que la teoría propiamente dicha de los algoritmos lineales comienza con Lebesgue [1909, Tabla 2], aunque el teorema de Toeplitz [1911, Tabla 2], sobre el algoritmo dado por una matriz triangular, obtuvo mayor difusión por su forma elemental. También destaca la importancia de los artículos de Kojima [1917-18, Tabla 2] y de Schur [1921, Tabla 2]. Sin embargo señala que estos enfoques dejan fuera los métodos exponencial e integral de Borel y otros de variable continua, como el de Euler-Knopp. Este paso fue dado por Rey Pastor en sus primeros trabajos y más tarde por Knopp [1930]. Rey explica lo que entiende por «teoría de los algoritmos lineales de convergencia y sumación» y plantea que queda así incluida en la teoría de los operadores lineales entre dos espacios abstractos [Banach, 1932]. Subraya que el estudio sistemático de las propiedades generales de los algoritmos debe ser efectuado directamente como se expone en su monografía [RP,1931c], único estudio sistemático publicado hasta entonces

Destaca que todo proceso de sumación puede considerarse como un proceso de permutación de dos límites, observación hecha antes por Hardy. Tal permutación no siempre es legítima por no cumplirse las condiciones necesarias «y justamente esta falta que impide la inversión, es la que engendra en muchos casos una expresión convergente, partiendo de otra que no lo es, y en ella reside la eficacia del procedimiento»[16].

Plantea que el problema actual no es el estudio exhaustivo de cada método conocido en espera de series a las cuales aplicarlo, sino el inverso, «dada una serie o tipo de serie determinar los factores convenientes de sumación para lograr sumarla y estudiar las propiedades del nuevo algoritmo útiles para el problema propuesto»[17]

Con relación al problema de los momentos asume un punto de vista intermedio entre Borel y Stieltjes. Su idea es construir una tabla de momentos mediante la cual pueda determinarse, para cada serie cuya ley de formación sea regular, cuál es la función básica que mejor conviene para su sumación. Explica como pueden elegirse los momentos en algunos casos particulares.

Trata el problema, abordado por Cesàro, de la comparación asintótica de dos series, así como el estudio asintótico de funciones enteras en la dirección del eje real y también el de las series de radio finito, al tender la variable hacia un punto singular de la circunferencia de convergencia. De esta manera no sólo se sistematizan todos los casos de expresión asintótica de series, sino que también queda incluida la teoría de la divergencia de Pringsheim.

Expone diferentes aplicaciones a integrales singulares, así como nuevas aplicaciones a la teoría de funciones analíticas. Vuelve sobre el tema de la definición euleriana defendida en Bolonia, subrayando que los críticos de la definición euleriana parece que no han notado la más grave de sus deficiencias, que no es la falta de unicidad, sino «la falta de conservación de la suma ordinaria» y da su rectificación. Aplica la anterior definición para obtener el teorema de Le Roy. Resume artículos publicados en revistas poco accesibles, sobre singularidades de funciones analíticas. Da criterios para caracterizar las funciones con punto singular único, en particular se obtienen teoremas de Le Roy, Mandelbrojt y Lindelöf. Termina con un tipo más general de desarrollo de funciones que comprende como casos particulares los de Taylor, Bernoulli y Pincherle.

Como es fácil deducir de nuestra reseña anterior, este trabajo extenso hace una exposición sintética de resultados ya publicados en trabajos anteriores, pero también introduce muchas nuevas ideas que no son elaboradas en la memoria de 1931 que hemos comentado ni en ningún otro trabajo anterior. Aquí se observan los principales temas generales de su obra:

— Revalorización del método euleriano.
— Uso de los factores de convergencia y sumación.
— Análisis de los problemas de inclusión relativa entre diferentes métodos.
— Uso de transformaciones lineales regulares.
— Búsqueda de relaciones con el problema de la prolongación analítica.
— Vinculación entre momentos, sumación y prolongación analítica.
— Aplicaciones diversas, en particular en el estudio de las singularidades.

La característica más representativa es la búsqueda de la sistematización utilizando las ideas, fundamentalmente, de la escuela alemana de métodos lineales. Debemos tener en consideración que los trabajos que paralelamente se venían desarrollando en Europa y en Estados Unidos, sobre el llamado tanto análisis general como cálculo funcional —antes de ser el análisis funcional, donde se ponía énfasis en la unificación de teorías usando la metodología lineal— provocaron una atención mayor a la búsqueda de relaciones con otras ramas del análisis; muy especialmente con aquellas que adolecían de falta de generalidad y sistematicidad en el enfoque de sus problemas principales, como era el caso de la teoría de series divergentes. Sin embargo, la obra más influyente de análisis funcional, debida a la escuela de Lvov, se produce en la década de los años 20. Banach no logró publicar en Varsovia su monografía hasta 1932, posteriormente a la publicación de la monografía de Rey Pastor, así que no pudo influir en las ideas de éste expuestas en los trabajos anteriores a 1933. Es por ello que consideramos que este artículo, publicado en una revista de mayor circulación internacional que las revistas argentinas y con una madura redacción, es mucho mejor que la de la memoria de 1931 y es su obra más significativa y paradigmática en cuanto a la búsqueda de una *anastomosis* entre las diferentes tendencias desarrolladas en la teoría de series divergentes antes de constituirse en *ciencia normal.*

Conclusiones

El interés de Rey Pastor por el problema de la sumación de series divergentes se vislumbra en los primeros estadios de su carrera profesional y tuvo oportunidad de verse reforzado durante sus dos estancias anuales en Alemania, al coincidir en Berlín y Gotinga con prestigiosos especialistas en la materia. Durante el periodo profesional anterior a 1920, las series divergentes aparecen en reseñas de libros, conferencias y artículos de temas generales, de modo tal que puede deducirse que Rey Pastor tenía un conocimiento actualizado y profundo del tema, que no pasó a ser un proyecto de investigación hasta que hacia la mitad de los años veinte empezó a dictar cursos y a producir publicaciones propias entre 1928 y 1936, además de las realizadas por sus discípulos en Argentina y España. En las primeras publicaciones afirma que sus resultados fueron obtenidos hace algunos años, pero no puede determinarse con precisión ese lapso de tiempo.

Los cuatro trabajos reseñados representan lo más significativo y de posible trascendencia de la obra de Rey Pastor sobre series divergentes, en opinión de los autores. Los tres artículos fueron publicados en revistas italianas de difusión internacional, pero en castellano, lo que a nuestro entender le restó divulgación. Por otra parte, en su época, los trabajos de los hispanoparlantes no poseían el atractivo de otros provenientes de matemáticos de las escuelas anglosajona, alemana o francesa. Los discípulos de Rey Pastor en las dos orillas se esforzaron en obtener resonancia internacional, pero también con poco éxito. ¿Cuál fue la razón de este aparente fracaso? Una respuesta definitiva implicaría un estudio profundo y más detallado del contexto social internacional y de los paradigmas que prevalecían en su momento. A nuestro modesto entender, la obra de Rey Pastor se enmarca perfectamente en las líneas principales de desarrollo matemático de la época. Su producción en esta dirección no llegó tardía como alguno de sus biógrafos ha señalado.

Para documentar esta afirmación, baste, quizás, un dato: en el estudio enciclopédico de Zeller y W. Beekman [1970], de todas las obras publicadas entre 1880 y 1965, sobre procesos de sumación y convergencia, los trabajos referidos correspondientes a los años 1916-1925 ocupan 6 páginas, mientras que los correspondientes a los años 1926-1935, ocupan casi 25 páginas. O sea, en el momento que aparecieron las principales obras de Rey Pastor, el interés sobre el tema se había multiplicado en 4 veces. Aunque sea válido considerar otros factores cualitativos que pudieron incidir en estas cifras, no cabe duda que al menos no se había perdido el interés por esta línea de investigación.

Rey Pastor no llegó tarde a la palestra internacional con sus trabajos sobre series divergentes. Quizás sea válido decir esto sobre sus trabajos en geometría, pero de ninguna forma en esta dirección. La promoción de su obra no se consiguió por otras razones, no precisamente asociadas con la calidad y actualidad. Consideramos que aún quedan varios problemas por dilucidar para llegar a revalorizar justamente el esfuerzo de Julio Rey Pastor y sus discípulos en esta línea de investigación. Que nuestra modesta contribución sirva al menos como estímulo.

NOTAS

*Este trabajo ha contado con una Ayuda a la Investigación del Instituto de Estudios Riojanos de la Consejería de Educación, Cultura, Juventud y Deporte del Gobierno de La Rioja.

1 Los datos biográficos pueden verse en las referencias [DOU, 1963], [MILLÁN, 1988] o [RÍOS *et al*, 1979]. También la visión general de la obra de Rey en análisis matemático, junto con [DOU, 1985].

2 Las obras de Rey Pastor sobre series divergentes se indicarán en la forma [RP, 19XXx] haciendo referencia a la Tabla 3. Otras obras del autor serán citadas según las referencias dadas al final del trabajo.

3 Ver la introducción de [RP, 1931c]. Más adelante explicaremos esta demora.

4 Para la relación de Rey Pastor con la JAE ver [SÁNCHEZ-RON, 1990].

5 En el libro de matrícula que conserva María Rey Pastor, nieta de Don Julio, hemos podido ver que siguió, en el semestre de invierno de 1913-14, el curso sobre transformación conforme de Carathéodory, el de ecuaciones en derivadas parciales de Courant y el seminario de Landau, sin que se especifique el contenido de este seminario.

6 Ver en [ESPAÑOL, 1998] una relación clasificada de la obra de Rey Pastor hasta 1920.

7 Fue reproducido como apéndice de un libro del argentino Toranzos [1943], discípulo de Rey Pastor, donde la anastomosis se coloca al final, después de los otros tres caminos.

8 Para mas detalles sobre las fuentes y las características de la obra de Borel y sus contemporáneos puede verse [SÁNCHEZ, 1994]. [TUCCIARONE, 1973] y [FERRARO, 1999] son otras referencias sobre la historia de las series divergentes.

9 El trabajo se publicó en las actas del congreso siguiente de Barcelona. En la publicación se advierte en nota al pie: «Este trabajo se presentó y leyó en el Congreso de Cádiz. Al

publicarse en el tomo de la Sección de Matemáticas del Congreso de Barcelona ha sido corregido y ampliado por el autor».

10 Abreviaturas utilizadas: CIM: Congreso Internacional de Matemáticos; SMA: Seminario Matemático Argentino; AEPPC: Asociación Española para el Progreso de las Ciencias; BA: Buenos Aires; RMH-A: Revista Matemática Hispano-Americana; CRAS: Comptes Rendues de l'Académie des Sciences; UBA: Universidad de Buenos Aires.

11 En cambio, esta institución puso en circulación, con inusitado retraso y completamente fuera de tiempo, en 1929, la *Teoría geométrica de la polaridad*, una obra que estaba inédita desde 1912.

12 [TORANZOS, 1946], pp. 40-41.

13 Excepto el primero, todos los demás se reprodujeron autografiados según [ORTIZ & ORTIZ, 1990].

14 Este trabajo es extensamente reseñado por Raff en *Jahrbuch ueber die Forschritte der Mathematik* 17 (1931) 255-256. También por Ullrich en el *Zentralblatt für Mathematik* 8 (1934) 307-308.

15 Recogida en una nota al pie de la p. 9 de la memoria de Rey Pastor.

16 [RP, 1933c], p. 8.

17 [RP, 1933c], p. 9.

BIBLIOGRAFÍA

BANACH, S. (1932). *Théorie des operations linéaires*, Varsovia.

DIENES, P. (1931). *The Taylor series*, Oxford.

DOU, A. (1963). «Julio Rey Pastor», *Razón y Fe* 167, 133-146 y 273-282.

_______ (1985). «La obra de Rey Pastor en Análisis Matemático», en L. ESPAÑOL (Ed.), pp. 71-78.

ESPAÑOL, L. (ed.) (1985). *Actas I Simposio sobre Julio Rey Pastor (Logroño 28 de Octubre - 1 de Noviembre de 1983)*, Logroño, Instituto de Estudios Riojanos.

_________ (ed.) (1990). *Estudios sobre Julio Rey Pastor (1888-1962)*, Logroño, Instituto de Estudios Riojanos.

_________ (1998). «Relaciones internas en la obra matemática de Rey Pastor hasta 1920». En GARCÍA HOURCADE, J.L. et al. (coords.) *Estudios de historia de las técnicas, la arqueología industrial y las ciencias*, Junta de Castilla y León, vol II, pp. 965-976.

FERRARO, G. (1999). The first modern definition of the sum of divergent series: an aspect of the rise of 20th century mathematics, *Arch. Hist. Exact Sci.* 54, 101-135.

HARDY, G. H. (1949). *Divergent Series*, Oxford, Clarendon Press.

KNOPP,K. (1930). «Zur theorie der Limitierungsverfharen», *Math. Zeit.* 31, 97-127, 276-305.

MILLÁN, A. (1988). *El matemático Julio Rey Pastor*, Logroño, Instituto de Estudios Riojanos y Colegio Universitario de La Rioja.

ORTIZ, E. & ORTIZ, M. (1985) «Para una bibliografía de Don Julio Rey Pastor», en L. ESPAÑOL (Ed.), pp. 273-323.

RÍOS, S. & SANTALÓ, L.A. & BALANZAT, M. (1979). *Julio Rey Pastor, matemático*, Madrid, Instituto de España.

SAN JUAN, R. (1930). «Sobre el análisis correlativo de series e integrales», *Rev. Mat. Hispano-Americana* 4-5.

———— (1933). «Sumación de series de radio nulo y prolongación semianalítica», *Rev. Acad. Cienc. Madrid* 30, 122-193.

SÁNCHEZ FERNÁNDEZ, C. (1994). «Revalorización de la obra temprana de Emile Borel sobre sumación de series divergentes», *LLULL* 17, 437-467.

SÁNCHEZ-RON, J.M. (1990). «Julio Rey Pastor y la Junta para Ampliación de Estudios», en L. ESPAÑOL (Ed.), pp. 9-41.

TORANZOS, F. (1943). *Introducción a la epistemología y fundamentación de la matemática*, Buenos Aires, Espasa-Calpe Argentina.

———— (1946). «Rey Pastor y la enseñanza de la matemática en la Argentina», en *Homenaje a Julio Rey Pastor*, Publ. Inst. Mat. Rosario, t. 1, pp. 38-46.

TUCCIARONE, J. (1973). «The development of the theory of summable divergent series from 1880 to 1925», *Arch. Hist. Exact. Sc. 10*, 1-40.

ZELLER, K. & BEEKMANN, W. (1970). *Theorie der Limitierungsverfahren*, Ergebnisse der Mathematik, 15, Berlin, Springer Verlag. (1ª ed. 1958).