



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TESIS DOCTORAL

Título
Mejoras de los dominios de puntos de salida de métodos iterativos que no utilizan derivadas
Autor/es
Ana Isabel Velasco del Olmo
Director/es
José Antonio Ezquerro Fernández
Facultad
Facultad de Ciencias, Estudios Agroalimentarios e Informática
Titulación
Departamento
Matemáticas y Computación
Curso Académico
2012-2013



Mejoras de los dominios de puntos de salida de métodos iterativos que no utilizan derivadas, tesis doctoral

de Ana Isabel Velasco del Olmo, dirigida por José Antonio Ezquerro Fernández (publicada por la Universidad de La Rioja), se difunde bajo una Licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 Unported. Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden solicitarse a los titulares del copyright.

- © El autor
- © Universidad de La Rioja, Servicio de Publicaciones, 2013
publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es
ISBN 978-84-695-8469-9



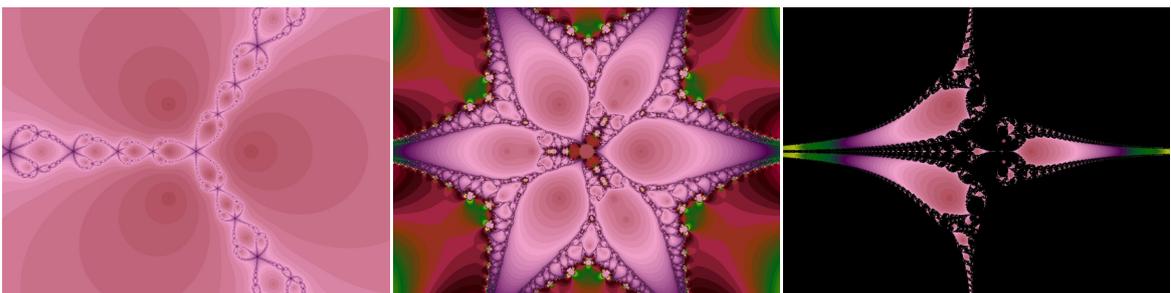
Universidad de La Rioja

Departamento de Matemáticas y Computación

Facultad de Ciencias, Estudios Agroalimentarios e Informática

Mejoras de los dominios de puntos de salida de métodos iterativos que no utilizan derivadas

TESIS DOCTORAL



ANA ISABEL VELASCO DEL OLMO

Logroño, septiembre 2013

Mejoras de los dominios de puntos de salida de métodos iterativos que no utilizan derivadas

*Memoria que presenta para optar al título de
Doctor en Matemáticas*

Ana Isabel Velasco del Olmo

Dirigida por el Doctor

José Antonio Ezquerro Fernández



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

Departamento de Matemáticas y Computación
Facultad de Ciencias, Estudios Agroalimentarios e Informática

Logroño, septiembre 2013

A mi madre...

*todo lo que soy es gracias a ella
y sin ella, yo no puedo ser*

« Nunca se va tan lejos como cuando no se sabe a dónde se camina »

*Maximilian Robespierre, 1758-1794
Político y revolucionario francés*

Agradecimientos

Cuando tienes que agradecer a tantas personas la fe y la confianza que han depositado en ti, no sabes bien por dónde empezar. Así, como siempre me dice José, empezaré por el principio, dando las gracias a esa pequeña gran familia formada alrededor del grupo de investigación PRIENOL. Vosotros me habéis acogido como a una más, siempre dándome el apoyo, la confianza y el ánimo suficientes para continuar trabajando.

Quiero empezar dando las gracias a Sergio y Sonia, por animarme durante las sucesivas JANA a terminar mis estudios de doctorado y emprender esta aventura. A Alicia y Juan Ramón, por su apoyo, ayuda y gran cariño que me demuestran. A Vicente, por hacer que me invadiese la curiosidad por el análisis numérico y por hacerme desear siempre oír sus originales comunicaciones. A Rosa, por su sonrisa imborrable. A Juan Carlos, por ser como es y hacerme reír siempre. Y a Garay, por ser la persona tan maravillosa que es. A todos, os doy las gracias por animarme a empezar y continuar esta aventura.

Gracias a mis padres, Blas y M^a Jesús, y a mi hermano, Juan Carlos, que, a pesar de los momentos difíciles que nos han tocado este año, siempre me habéis ayudado, cuidado y protegido. Siempre me animáis a terminar mis proyectos y hacéis lo imposible por que pueda llevarlos a cabo. Gracias por preocuparos más de mí que de vosotros. A Eugenio, él se preocupa de cuidarme, él ha sufrido conmigo mis momentos de crisis y a él le he robado el tiempo que necesitaba para terminar esta memoria. Gracias por estar siempre conmigo sin quejarte, por animarme a terminar este proyecto, por apoyarme, ayudarme y sacrificarte. Pero sobre todo, gracias por quererme a pesar de la guerra que te doy.

Y quiero dejar para el final a esas personas sin las cuales esta memoria jamás hubiese existido y a las que nunca podré agradecer lo suficiente toda su ayuda. A M^a Jesús, gracias por tus sabias palabras y tus buenos consejos, por estar siempre dispuesta a resolverme dudas, por tu apoyo incondicional y tu cariño. A Michel, que además de ser un matemático extraordinario, día tras día demuestras la persona tan maravillosa que eres, siempre dispuesto a escuchar y a contestar mis preguntas. Gracias por dedicarme parte de tu tiempo y por darme ánimo y consejo, tanto a nivel personal como académico. A ti y a tu mujer, Mercedes, que me habéis mimado y hecho sentir parte de vuestra familia, gracias por acogerme.

A José, mi director de tesis, compañero de trabajo y amigo. Él empezó este proyecto conmigo y él es quien merece el mérito de esta memoria. Gracias por dejarme trabajar contigo y confiar en mí, por estar siempre para contestar mis dudas, escucharme y consolarme. Gracias por decirme las palabras que necesito oír en cada momento, por lo que me has enseñado y ayudado, por sacrificarte y esforzarte para que esta memoria vea la luz. Por dedicarme tu tiempo, por adaptarte a mis constantes cambios de horario y por los momentos de café. Siempre te daré gracias por aguantarme y ser mi amigo.

Índice general

Índice general	VII
Introducción	1
Parte I	
Preliminares	7
1. Conceptos básicos	9
1.1. Espacios de Banach	9
1.2. Diferenciación de operadores	13
1.3. Integración de operadores	15
1.4. Diferencias divididas	17
1.5. Algunas ecuaciones no lineales en espacios de Banach	21
1.5.1. Ecuaciones integrales de Hammerstein	21
1.5.2. Problemas conservativos	23
Parte II	
Una familia de métodos iterativos con memoria que no utiliza derivadas: los métodos tipo secante	25
2. Análisis de la accesibilidad de los métodos tipo secante mediante una teoría basada en relaciones de recurrencia	29
2.1. Convergencia semilocal de los métodos tipo secante	30
2.2. Convergencia semilocal del método modificado de la secante	37
2.3. Método iterativo híbrido (predictor-corrector)	43
2.3.1. Construcción del método	43
2.3.2. Convergencia semilocal del método	46
2.4. Aplicación	49

3. Una mejora de la accesibilidad de los métodos tipo secante mediante una modificación de la teoría basada en relaciones de recurrencia	53
3.1. Planteamiento del problema	53
3.2. Mejora del dominio de puntos de salida	56
3.3. Aplicación	62
3.3.1. Sistema de ecuaciones no lineales diferenciable	63
3.3.2. Sistema de ecuaciones no lineales no diferenciable	65

Parte III

Un método iterativo punto a punto que no utiliza derivadas: el método de Steffensen	67
--	-----------

4. Análisis de la accesibilidad del método de Steffensen mediante la teoría de Kantorovich	73
4.1. Convergencia semilocal del método de Steffensen	74
4.2. Convergencia semilocal del método modificado de Newton	81
4.3. Método iterativo híbrido (predictor-corrector)	87
4.3.1. Construcción del método	87
4.3.2. Convergencia semilocal del método	88
4.4. Aplicación	91
5. Una mejora de la accesibilidad del método de Steffensen mediante una modificación de la teoría basada en relaciones de recurrencia	95
5.1. Convergencia semilocal del método de Steffensen	96
5.1.1. Análisis general	96
5.1.2. Casos particulares	101
5.1.2.1. Caso no diferenciable	101
5.1.2.2. Caso diferenciable	103
5.2. Convergencia semilocal del método modificado de la secante	104
5.3. Método iterativo híbrido (predictor-corrector)	111
5.3.1. Construcción del método	111
5.3.2. Convergencia semilocal del método	112
5.4. Aplicación	115
5.4.1. Sistema de ecuaciones no lineales diferenciable	116
5.4.2. Sistema de ecuaciones no lineales no diferenciable	119

Conclusiones y cuestiones abiertas	125
---	------------

Bibliografía	129
---------------------	------------

Introducción

Uno de los problemas más antiguos de las matemáticas y, por extensión de las ciencias y la ingeniería, es la resolución de ecuaciones no lineales. Como bien sabemos, encontrar soluciones exactas de ecuaciones no lineales es un problema difícil y, por eso, recurrimos habitualmente a su aproximación mediante la utilización de métodos iterativos. Newton en 1669 y posteriormente Raphson en 1690, propusieron un procedimiento numérico para resolver una ecuación algebraica. El método es el que ahora conocemos como método de Newton o método de Newton-Raphson, que todavía sigue siendo una técnica central en la resolución de ecuaciones no lineales. Una gran cantidad de tópicos relacionados con el método de Newton ha centrado la atención de los matemáticos e investigadores desde entonces.

A lo largo de esta memoria, para darle suficiente generalidad al problema de aproximar soluciones de una ecuación no lineal, consideramos ecuaciones de la forma

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

donde F es un operador no lineal, $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$, definido en un dominio abierto convexo no vacío Ω de un espacio de Banach X con valores en un espacio de Banach Y . Así la ecuación (1) puede hacer referencia a una ecuación polinómica, a un sistema de ecuaciones no lineales, a un problema diferencial, a un problema integral, a un problema de optimización, etc., dependiendo de cuáles sean los espacios X e Y en los que esté definido el operador F .

La generalización del método de Newton a espacios de Banach se debe al matemático soviético L. V. Kantorovich, quien a mediados del siglo XX publica varios trabajos, de entre los que destacamos [68] y [70]. La generalización del método de Newton para resolver la ecuación (1) se escribe de la forma

$$x_0 \in \Omega, \quad x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1}F(x_n), \quad n \geq 0,$$

donde $F'(x_n)$ es la derivada de Fréchet del operador F en el punto x_n y $[F'(x_n)]^{-1}$ su operador inverso. A día de hoy, el método de Newton sigue siendo una de las técnicas numéricas más utilizadas para aproximar una solución de (1). Esto es debido a su simplicidad, fácil implementación y eficiencia. Recordamos que el método de Newton tiene orden de convergencia dos [70].

Ahora bien, la aplicación del método de Newton pasa por la evaluación de F' en cada paso x_n de iteración. Bien porque ésta sea costosa de evaluar o porque no exista, son especialmente interesantes los métodos iterativos que no utilizan derivadas ([3], [5], [10], [87], [88]). Es frecuente entonces aproximar la derivada del operador F para

solventar el problema anterior. Así, habitualmente se aproxima la derivada de F por una diferencia dividida de primer orden, dando lugar a métodos iterativos que utilizan diferencias divididas en vez de derivadas. Es conocido [88] que el operador lineal y acotado $[x, y; F]$, con $x, y \in \Omega$ y $x \neq y$, definido en el espacio de Banach X , es una diferencia dividida de primer orden de F en los puntos x e y si

$$[x, y; F](x - y) = F(x) - F(y).$$

El primer método que surge al tener en cuenta la aproximación anterior en el método de Newton es el conocido método de la secante ([11], [88]),

$$x_{-1}, x_0 \in \Omega, \quad x_{n+1} = x_n - [x_{n-1}, x_n; F]^{-1}F(x_n), \quad n \geq 0,$$

que se obtiene al aproximar $F'(x_n)$ por $[x_{n-1}, x_n; F]$ y cuyo orden de convergencia es superlineal.

Como mediante la aproximación anterior obtenemos el método de la secante a partir del método de Newton, Hernández y Rubio se plantean en [60] la posibilidad de conectar ambos métodos a partir de sus interpretaciones geométricas en el caso real, dando lugar así a una familia uniparamétrica de métodos iterativos con memoria que en espacios de Banach tiene el siguiente algoritmo

$$\begin{cases} x_{-1}, x_0 \in \Omega, \\ y_n = \lambda x_n + (1 - \lambda)x_{n-1}, \quad \lambda \in [0, 1], \\ x_{n+1} = x_n - [y_n, x_n; F]^{-1}F(x_n), \quad n \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Notemos que el algoritmo anterior se reduce al método de la secante si $\lambda = 0$ y, si el operador F es diferenciable, al método de Newton cuando $\lambda = 1$, puesto que en este caso, $y_n = x_n$ y $[y_n, x_n; F] = F'(x_n)$. Hernández y Rubio muestran que a medida que aumenta el valor de λ , aumenta la velocidad de convergencia de los métodos iterativos de la familia (2), pero sin llegar a alcanzar el orden de convergencia cuadrático del método de Newton.

Por otra parte, si consideramos $X = Y$, es conocido que si en el método de Newton se aproxima $F'(x_n)$ por la diferencia dividida de primer orden $[x_n, x_n + F(x_n); F]$, obtenemos el método de Steffensen ([4], [12]), cuyo algoritmo es

$$\begin{cases} x_0 \in \Omega, \\ y_n = x_n + F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - [x_n, y_n; F]^{-1}F(x_n), \quad n \geq 0, \end{cases} \quad (3)$$

que evidentemente es un método iterativo punto a punto. En este caso, se mantiene la convergencia cuadrática del método de Newton.

En esta memoria vamos a analizar con detalle los métodos iterativos (2) y (3) desde diferentes puntos de vista y con el claro objetivo de mejorar los estudios ya existentes para estos métodos desde el punto de vista de la accesibilidad.

A la hora de estudiar la aplicabilidad de un método iterativo en la resolución de una ecuación no lineal, aparecen dos problemas importantes: en primer lugar, la localización

de aproximaciones iniciales suficientemente buenas, de manera que el método iterativo converja empezando en ellas; y en segundo lugar, que la sucesión dada por el método iterativo converja a una solución de la ecuación a resolver.

Empezando por el segundo problema, destacamos que, a la hora de estudiar la convergencia de un método iterativo, existen tres tipos de convergencia: local, semilocal y global. En primer lugar, los resultados denominados de convergencia local. A partir de determinadas condiciones para el operador F y exigiendo condiciones a una solución de $F(x) = 0$, estos resultados proporcionan la denominada bola de convergencia del método iterativo, que indica la accesibilidad de la raíz a partir de aproximaciones iniciales consideradas en dicha bola. En segundo lugar, tenemos los resultados denominados de convergencia semilocal. Estos resultados, a partir de determinadas condiciones para el operador F y exigiendo condiciones a las aproximaciones iniciales de la raíz, proporcionan el denominado dominio de parámetros correspondiente a las condiciones que deben de verificar las aproximaciones iniciales para tener asegurada la convergencia de la sucesión dada por el método iterativo a la solución. Por último, tenemos los resultados de convergencia global. Estos resultados, a partir de condiciones para el operador F , aseguran la convergencia de la sucesión a la solución independientemente de las aproximaciones iniciales.

Como vemos, todos los resultados relativos a la resolución de los problemas planteados pasan por exigir determinadas condiciones al operador F . Sin embargo, la existencia de condiciones para la solución, para las aproximaciones iniciales, o para ninguna de éstas, determinan los diferentes tipos de resultados. El estudio de la convergencia local tiene el inconveniente de tener que asegurar que una solución x^* de $F(x) = 0$, que desconocemos, verifique determinadas condiciones. Por otra parte, la ausencia de condiciones para las aproximaciones iniciales, e incluso para una solución, hace que el estudio de la convergencia global sea, en general, excesivamente particular en cuanto al tipo de operadores a tratar.

En esta memoria vamos a hacer hincapié solo en la convergencia semilocal de los procesos iterativos que aparecen a lo largo de ella, pero estudiándola con diferentes técnicas de demostración y viendo qué es lo que aporta cada una de ellas en el estudio de los métodos iterativos aquí presentados.

Comenzamos recordando el resultado de convergencia semilocal dado en [62] para la familia de métodos iterativos (2) en condiciones de diferenciabilidad para el operador F y demostrado mediante una técnica basada en relaciones de recurrencia. Esta técnica de demostración ha sido desarrollada por el grupo de investigación PRIENOL para demostrar la convergencia semilocal de distintos métodos iterativos ([39], [40], [41], [45], [49]). Veremos cuál es el principal problema que se deduce del resultado dado en [62] y cómo podemos solventarlo utilizando una novedosa técnica que consiste en una sencilla modificación de la técnica anterior. Además, veremos que esta novedosa técnica permite analizar situaciones en las que el operador F sea no diferenciable, lo cual, como veremos después, puede ser importante desde el punto de vista práctico.

El estudio inicial que hacemos de la convergencia semilocal para el método de Stiefensen lo realizamos en condiciones de diferenciabilidad para el operador F y lo desarrollaremos mediante la conocida técnica de las sucesiones mayorizantes introducida por Kantorovich para el método de Newton en [71]. Posteriormente, estudiaremos de nuevo la convergencia semilocal de este método, pero ahora utilizando la nueva técnica intro-

ducida anteriormente para estudiar la convergencia semilocal de la familia de métodos iterativos (2), lo que permite aproximar soluciones de ecuaciones no lineales en las que los operadores implicados sean no diferenciables mediante el método de Steffensen.

Por otra parte, la localización de buenas aproximaciones iniciales a partir de las cuales un método iterativo converge juega un papel destacado a la hora de elegir un método iterativo para aproximar una solución de una ecuación no lineal. Es aquí donde prestaremos especial atención a lo largo de toda la memoria. En general, un inconveniente que plantean los métodos iterativos que utilizan diferencias divididas es que su aplicabilidad es reducida porque los dominios de puntos de salida, a partir de los cuales está garantizada la convergencia de los métodos, son reducidos. Así, teniendo en cuenta este inconveniente, nos hemos planteado como principal objetivo en esta memoria la mejora de los dominios de puntos de salida de los métodos (2) y (3).

La mejora de los dominios de puntos de salida de la familia de métodos iterativos (2) la vamos a realizar a partir de dos procedimientos diferentes. Cuando exijamos que el operador F sea diferenciable, situación ya abordada en [62], utilizaremos un método iterativo híbrido (predictor-corrector) que permita utilizar un método iterativo de la familia (2) empezando en una cierta iteración previamente calculada con un método iterativo menos exigente a la hora de encontrar buenas aproximaciones iniciales que garanticen la convergencia semilocal del mismo. En concreto, utilizaremos el conocido método modificado de la secante, cuyo orden de convergencia es simplemente lineal. En segundo lugar, veremos que la novedosa técnica de la que ya hemos hablado antes, desarrollada para estudiar la convergencia semilocal de métodos iterativos, proporciona ya de por sí mejores dominios de puntos de salida para la familia de métodos iterativos (2) que la dada en [62].

Las dos mejoras del dominio de puntos de salida del método de Steffensen que se presentan se han llevado a cabo desde una misma perspectiva: la construcción de un método iterativo híbrido (predictor-corrector); si bien, contemplamos dos enfoques diferentes cuando se construye el método iterativo híbrido (predictor-corrector). En primer lugar, cuando exijamos que el operador F sea diferenciable, comenzamos iterando con el método modificado de Newton y, a partir de cierta iteración de éste, utilizaremos el método de Steffensen. En segundo lugar, cuando no es necesaria la diferenciable del operador F , utilizamos el método modificado de la secante para empezar a iterar y, posteriormente, utilizamos el método de Steffensen a partir de cierta iteración.

En cuanto a la estructura de esta memoria, la hemos dividido en tres partes con cinco capítulos y es autocontenida. La mayoría de los resultados teóricos aquí presentados se han demostrado de manera rigurosa y didáctica para que el lector interesado los pueda seguir sin dificultad. Y, para los pocos resultados teóricos que no se han demostrado, se ha citado la fuente donde poder consultarlos.

La primera parte de la memoria consta de un solo capítulo en el que se introducen los espacios de Banach y presentan los conceptos básicos que se utilizan a lo largo de la memoria, destacando aquellos que aparecen con mayor frecuencia, como son la diferenciación de operadores y las diferencias divididas en espacios de Banach.

La segunda parte de la memoria está dedicada a la familia de métodos iterativos con memoria definida en (2), a los que llamaremos métodos tipo secante como consecuencia de su origen geométrico en el caso escalar. Esta parte consta de dos capítulos. En el primero analizamos la convergencia semilocal de estos métodos mediante una teoría

basada en relaciones de recurrencia, que como hemos indicado antes ha sido desarrollada por el grupo PRIENOL a través de distintos trabajos en los que se estudian diferentes métodos iterativos. Veremos que el dominio de puntos de salida que se obtiene es muy reducido y lo mejoraremos a partir de la construcción de un método iterativo híbrido (predicor-corrector). Este estudio se llevará a cabo en condiciones de diferenciabilidad para el operador F . En concreto, exigiremos que la diferencia dividida de primer orden $[x, y; F]$ sea Lipschitz continua en el dominio Ω :

$$\|[x, y; F] - [u, v; F]\| \leq K(\|x - u\| + \|y - v\|), \quad K \geq 0, \quad x, y, u, v \in \Omega, \quad x \neq y, u \neq v.$$

En el segundo capítulo de esta parte, el tercero de la memoria, es donde presentamos la nueva técnica de demostración de la convergencia semilocal, aplicada aquí a los métodos tipo secante. Vemos que no hay necesidad de construir un método iterativo híbrido (predicor-corrector) para mejorar los dominios de puntos de salida de los métodos tipo secante. Además, tampoco existe la necesidad de que el operador F sea diferenciable; de hecho, la condición que se le exige al operador F es que la diferencia dividida de primer orden $[x, y; F]$ verifique la siguiente condición en el dominio Ω :

$$\|[x, y; F] - [u, v; F]\| \leq L + K(\|x - u\| + \|y - v\|); L, K \geq 0; x, y, u, v \in \Omega; x \neq y, u \neq v.$$

La tercera parte de esta memoria versa sobre el método de Steffensen, que recordemos es un método iterativo punto a punto que no utiliza derivadas y que tiene el mismo orden de convergencia cuadrático que el método de Newton. Esta parte también consta de dos capítulos. En el primer capítulo de esta parte, el cuarto de la memoria, analizamos la convergencia semilocal de este método desde la perspectiva de Kantorovich, utilizando sucesiones mayorizantes. Para ello, exigimos que el operador F sea diferenciable y F' Lipschitz continua en el dominio Ω ,

$$\|F'(x) - F'(y)\| \leq K \|x - y\|, \quad K \geq 0, \quad x, y \in \Omega.$$

Como en estas condiciones el dominio de puntos de salida del método de Steffensen es reducido con respecto al del método de Newton, buscamos una salida a este inconveniente que consiste en construir un método iterativo híbrido (predicor-corrector) que comienza calculando cierto número de iteraciones mediante el método modificado de Newton, cuyo orden de convergencia es lineal, para pasar después al método de Steffensen y aprovechar así su convergencia cuadrática. En el segundo capítulo de esta tercera parte, el quinto de la memoria, es donde aprovechamos de nuevo las ventajas de la nueva teoría para demostrar la convergencia semilocal, que hemos presentado en el capítulo 3 y que no necesita que el operador F sea diferenciable, y mejorar así el dominio de puntos de salida del método de Steffensen. Para darle un enfoque todavía más general, exigiremos que la diferencia dividida de primer orden $[x, y; F]$ cumpla la siguiente condición en el dominio Ω :

$$\|[x, y; F] - [u, v; F]\| \leq \omega(\|x - u\|, \|y - v\|), \quad x, y, u, v \in \Omega, \quad x \neq y, u \neq v,$$

donde $\omega : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función no decreciente en sus dos argumentos. Además, para completar el estudio de la mejora del dominio de puntos de salida del método de Steffensen, terminamos construyendo un método iterativo híbrido (predicor-corrector)

que comienza calculando un número finito de iteraciones con el método modificado de la secante y termina aprovechando, de nuevo, la convergencia cuadrática del método de Steffensen y sin necesitar que el operador F sea diferenciable.

Para terminar, destacamos que se han ilustrado todos los desarrollos teóricos realizados en esta memoria con la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales, tanto en situaciones diferenciables como no diferenciables, que surgen de la discretización de ecuaciones integrales de Hammerstein y de problemas conservativos en los que están implicados problemas de contorno para ecuaciones diferenciales ordinarias.

Parte I

Preliminares

Capítulo 1

Conceptos básicos

En este capítulo hacemos una introducción escueta de los espacios de Banach. Para un estudio más detallado de estos espacios se puede consultar cualquiera de los numerosos tratados que hay en la bibliografía matemática, entre los que citamos los de Berberian [21], Rudin [92] y Curtain-Pritchard [31].

Como dice Wojtaszczyk [102] en su introducción, de los espacios de Banach no podemos esperar que nos resuelvan los problemas que estemos tratando, pero sí que nos hagan ver dichos problemas con un nuevo enfoque y nos permitan aislar sus características esenciales. Obtendremos así una gran generalidad en los resultados que obtenemos. Además en muchos casos, el utilizar las técnicas y los teoremas generales de los espacios de Banach nos puede sugerir nuevos problemas. Al trabajar con espacios de Banach abarcamos una gran amplitud de situaciones, tales como ecuaciones en el campo real o complejo, sistemas de ecuaciones reales o complejas, ecuaciones diferenciales o ecuaciones integrales.

1.1. Espacios de Banach

La estructura métrica se basa en la generalización de la idea de valor absoluto de un número real o módulo de un número complejo.

Para cada elemento x de un espacio lineal X , se define norma de x al número real no negativo $\|x\|$ que satisface las siguientes tres condiciones:

$$N_1 : \|x\| > 0 \text{ si } x \neq 0, \|0\| = 0,$$

$$N_2 : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \text{ para todo } \lambda \in K,$$

$$N_3 : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Además, un espacio lineal X en el que hay definida una norma se llama espacio normado.

En general, en un espacio normado se pueden introducir diferentes normas. Indicamos a continuación cómo relacionar las diferentes normas que podemos definir en un espacio lineal. El concepto que las relaciona es el de normas equivalentes. Así, se dice que dos normas diferentes $\|x\|$ y $\|x\|'$ de un espacio lineal son equivalentes si existen constantes a, b tales que $0 < a < b$ y

$$a\|x\| \leq \|x\|' \leq b\|x\| \quad \text{para todo } x \in X.$$

Es conocido que en un espacio lineal de dimensión finita todas las normas son equivalentes [73].

Una clase importante de los espacios lineales normados son los llamados espacios de Banach. En la solución de muchos problemas el asunto a tratar es la existencia de un límite x^* de una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio normado X ; situación familiar en el análisis clásico vinculada a la idea de completitud. Es interesante destacar que la completitud no se deduce de las propiedades de los espacios normados, sino que es una propiedad adicional que un espacio puede tener o no.

Definición 1.1. *Se dice que un espacio normado X es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente a un límite que es un elemento de X .*

Definición 1.2. *Un espacio de Banach es un espacio normado completo.*

A continuación damos algunos ejemplos de espacios de Banach.

Ejemplo 1.3. Los espacios real \mathbb{R}^n y complejo \mathbb{C}^n con la norma $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, definida por

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad 1 \leq p < \infty \quad \text{y} \quad \|x\|_\infty = \max_{(i)} |x_i|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

son espacios de Banach.

Ejemplo 1.4. El espacio $\mathcal{C}([a, b])$ de las funciones reales de una variable que son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ es un espacio de Banach para la norma

$$\|x\|_\infty = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|.$$

Ejemplo 1.5. También se puede ver que los espacios $\mathcal{C}^n([a, b])$ son espacios de Banach para las normas

$$\|x\|_\infty = \max\{\|x\|, \|x'\|, \dots, \|x^{(n)}\|\}$$

y

$$\|x\|_1 = \|x\| + \|x'\| + \dots + \|x^{(n)}\|,$$

donde $\|\cdot\|$ denota la norma en $\mathcal{C}([a, b])$.

En cálculo se trabaja con funciones reales definidas sobre un intervalo real. En análisis funcional, consideramos espacios más generales, tales como espacios métricos o normados y aplicaciones entre dichos espacios. En este caso, a estas aplicaciones se les llama operadores. Diremos que un operador T aplica el espacio X en Y si a un elemento $x \in X$ le hace corresponder un elemento $T(x) \in Y$. En principio, T no tiene por qué estar definido sobre todo el espacio X ni recorrer todos los valores de Y . Al conjunto de puntos de X donde está definido T lo llamamos dominio de T , y lo denotaremos $\mathcal{D}(T)$, y al conjunto de valores de Y que toma el operador T lo llamamos rango de T , y lo denotamos $\mathcal{R}(T)$.

De especial interés son aquellos operadores que conservan las operaciones algebraicas de los espacios donde están definidos.

Definición 1.6. Un operador L que aplica un espacio lineal X en otro espacio lineal Y , ambos espacios sobre el mismo cuerpo K , se dice lineal si, para todo $x_1, x_2 \in X$, tenemos

$$L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2),$$

y, para todo $x \in X$ y todo $\lambda \in K$,

$$L(\lambda x) = \lambda L(x).$$

Es muy corriente en análisis funcional emplear la notación Lx en lugar de $L(x)$ para los operadores lineales.

Definición 1.7. Un operador T entre dos espacios normados X e Y se dice acotado si existe un número real c tal que, para todo $x \in \mathcal{D}(T)$, se cumple

$$\|T(x)\| \leq c\|x\|. \quad (1.1)$$

Observamos que la norma de la izquierda es la del espacio Y y la de la derecha la del espacio X , aunque las hayamos denotado igual.

Notar que en el caso de operadores acotados, la imagen no tiene por qué estar acotada, lo que verifican estos operadores es que transforman conjuntos acotados en conjuntos acotados.

Al conjunto de los operadores lineales y acotados entre dos espacios lineales X e Y lo denotaremos a partir de ahora por $\mathcal{L}(X, Y)$. Es fácil ver que $\mathcal{L}(X, Y)$ es un espacio lineal sobre el mismo cuerpo K .

A continuación, vamos a definir una norma en el conjunto de operadores acotados. Dejando a un lado el caso en que $x = 0$, nos podemos preguntar cuál es el menor número c que verifica (1.1). De aquí surge la idea para definir la norma de un operador.

Definición 1.8. Sea T un operador acotado. Definimos la norma de T como

$$\|T\| = \inf\{c; \|T(x)\| \leq c\|x\|, x \in \mathcal{D}(T), x \neq 0\} = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}.$$

Como consecuencia, si T es acotado, entonces

$$\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|. \quad (1.2)$$

Otra fórmula alternativa para la norma anterior, cuando el operador T es lineal, es la siguiente:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ \|x\|=1}} \|T(x)\|. \quad (1.3)$$

Que estas fórmulas son equivalentes y que todas ellas son en efecto normas puede verse en [73]. Además, también se tiene que el espacio $\mathcal{L}(X, Y)$ con Y completo y la norma (1.3) es un espacio completo [73].

Teorema 1.9. Si un espacio normado X es de dimensión finita, entonces cada operador lineal en X es acotado.

Definición 1.10. Un operador T entre dos espacios normados X e Y se dice continuo en un punto $\tilde{x} \in X$ si para toda sucesión $\{x_n\}$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \tilde{x}, \quad \text{se tiene} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = T(\tilde{x}).$$

Diremos que un operador es continuo si lo es en todos los puntos de su dominio.

Esta definición generaliza la idea de función continua del cálculo. Los operadores lineales tienen la siguiente propiedad:

Teorema 1.11. Sea T un operador lineal entre dos espacios normados. Entonces,

- (i) T es continuo si y sólo si es acotado.
- (ii) Si T es continuo en un punto, entonces T es continuo en todos los puntos de su dominio.

A continuación introducimos el concepto de Lipschitz continuidad.

Definición 1.12. Un operador T entre dos espacios normados X e Y se dice que satisface una condición de Lipschitz (o que es Lipschitz continuo) si existe una constante $K \geq 0$ tal que

$$\|T(x) - T(y)\| \leq K \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

En tal caso, K se llama la constante de Lipschitz del operador T .

Ahora introducimos el operador inverso de uno dado, operador fundamental para resolver ecuaciones de la forma $Lx = y$, donde L es un operador lineal.

Definición 1.13. Sea L es un operador lineal y acotado de X en Y . Si existe un operador L^{-1} que aplica $\mathcal{R}(L)$ en $\mathcal{D}(L)$, de manera que

$$L^{-1}Lx = x, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{D}(L),$$

$$LL^{-1}y = y, \quad \text{para todo } y \in \mathcal{R}(L),$$

diremos que L tiene inverso y que L^{-1} es el inverso de L .

Se puede probar que si L^{-1} existe, entonces también es un operador lineal. Una propiedad algebraica que garantiza la existencia del inverso es la siguiente: si de la relación $Lx = 0$ se deduce que x debe ser cero, entonces L tiene inverso. Esta condición es además una condición necesaria.

La condición anterior es en general difícil de comprobar. Necesitaremos entonces una caracterización analítica del concepto de inversión. Para ello, los siguientes resultados son fundamentales [71, 89].

Lema 1.14 (Banach). Sea L un operador lineal acotado en un espacio de Banach X verificando

$$\|L\| \leq k < 1.$$

Entonces, el operador $I - L$ tiene inverso continuo y cumple

$$\|(I - L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - k}.$$

Unas ligeras variantes del lema anterior son los siguientes resultados.

Lema 1.15. *Sea L un operador lineal acotado en un espacio de Banach X . Existe L^{-1} si y sólo si existe un operador inversible $M \in \mathcal{L}(X, X)$ tal que*

$$\|I - ML\| < 1.$$

En este caso,

$$L^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (I - ML)^n M \quad y \quad \|L^{-1}\| \leq \frac{\|M\|}{1 - \|I - ML\|}.$$

Lema 1.16. *Sea L un operador lineal acotado en un espacio de Banach X . Existe L^{-1} si y sólo si existe un operador lineal acotado M en X tal que existe M^{-1} y*

$$\|M - L\| < \frac{1}{\|M^{-1}\|}.$$

En este caso,

$$L^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (I - M^{-1}L)^n M^{-1}$$

y

$$\|L^{-1}\| \leq \frac{\|M^{-1}\|}{1 - \|I - M^{-1}L\|} \leq \frac{\|M^{-1}\|}{1 - \|M^{-1}\|\|M - L\|}.$$

1.2. Diferenciación de operadores

En esta sección presentamos algunos de los conceptos y resultados básicos del cálculo diferencial en espacios de Banach. A parte del interés que esta sección pueda tener por sí misma, en ella se establecerá el contexto que permitirá resolver ecuaciones con operadores no lineales.

Comenzamos dando una primera definición de derivada para operadores definidos en espacios de Banach.

Definición 1.17. *Dado $x_0 \in X$, si existe un operador $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ de manera que, para todo $x \in X$, se cumple*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + hx) - F(x_0)}{h} = L(x), \quad (1.4)$$

entonces se dice que F es diferenciable Gateaux (o diferenciable débilmente) en x_0 . En esta situación, el operador lineal L es la derivada de F en x_0 y lo denotaremos $L = F'(x_0)$.

Sin embargo, la derivada Gateaux no es una buena generalización del concepto de derivada para funciones escalares, como pone de manifiesto la existencia de funciones derivables Gateaux y no continuas. Para estar seguros de que las funciones diferenciables son continuas, podemos introducir el siguiente concepto más fuerte de derivada.

Definición 1.18. Si el límite de la ecuación (1.4) es uniforme en el conjunto $\{x \in X; \|x\| = 1\}$, entonces se dice que F es diferenciable Fréchet (o simplemente diferenciable) en x_0 . En este caso, el operador lineal $L = F'(x_0)$ se llama derivada de F en x_0 .

Equivalentemente, el concepto de diferenciability se puede expresar de la siguiente forma. Dado $x_0 \in X$, si existe un operador lineal y continuo L de X en Y de manera que

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{\|F(x_0 + v) - F(x_0) - Lv\|}{\|v\|} = 0,$$

entonces F es diferenciable Fréchet en x_0 y el operador $F'(x_0) = L$ se denomina derivada de F en x_0 .

Decir que en el cálculo diferencial en espacios de Banach los operadores lineales acotados juegan un papel similar al de las constantes en el cálculo diferencial real o complejo.

Ejemplo 1.19. Si F es un operador de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m que, a una n -tupla $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, le hace corresponder $(F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, x_2, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^m$, tenemos que la derivada F' en un punto $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ se representa por la matriz Jacobiana

$$F'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x_0}.$$

Para ver esto, notamos que la matriz $F'(x_0) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{x=x_0}$ es un operador lineal acotado de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m , puesto que es una matriz $m \times n$ con coeficientes constantes [89].

Uno de los resultados que se pierden al pasar de los números reales a espacios más generales es el Teorema del Valor Medio, que asegura que si f es una función diferenciable en un intervalo $[a, b]$, entonces

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \quad \text{donde } \xi \in (a, b).$$

Veremos ahora una desigualdad que generaliza al Teorema del Valor Medio. Para ello, dados dos puntos x e y , definimos el segmento que los une como

$$[x, y] = \{x + \lambda(y - x); \lambda \in [0, 1]\}.$$

Diremos que un conjunto Ω es convexo si para cualesquiera $x, y \in \Omega$, el segmento $[x, y]$ que los une está contenido en Ω .

Teorema 1.20 (Teorema del Valor Medio). Sean X e Y dos espacios de Banach y $F : X \rightarrow Y$ un operador diferenciable en un conjunto convexo $\Omega \subseteq X$. Entonces, si $x_0, x_1 \in \Omega$, se tiene

$$\|F(x_1) - F(x_0)\| \leq \sup_{0 < \theta < 1} \left\| F'(x_0 + \theta(x_1 - x_0)) \right\| \|x_1 - x_0\|.$$

Corolario 1.21. Con la notación anterior se tiene

$$\begin{aligned} & \|F(x_1) - F(x_0) - F'(\bar{x})(x_1 - x_0)\| \\ & \leq \sup_{0 < \theta < 1} \left\| F'(x_0 + \theta(x_1 - x_0)) - F'(\bar{x}) \right\| \|x_1 - x_0\| \quad \text{con } \bar{x} \in [x_0, x_1]. \end{aligned}$$

La demostración del corolario anterior se obtiene aplicando el teorema 1.20 al operador $F - F'(\bar{x})$.

1.3. Integración de operadores

A continuación comentamos algunos aspectos sobre el cálculo integral en espacios de Banach. En primer lugar, definimos la integral en el sentido de Riemann para una función de variable real y con valores en un espacio de Banach. A continuación, apoyándonos en la definición anterior, definimos la integral de una función entre dos espacios de Banach en general.

Definición 1.22. Sea F definida en un intervalo real $[a, b]$ y con valores en un espacio de Banach Y . Entonces podemos definir la integral de F como el límite de las siguientes sumas

$$\sum_{k=0}^{n-1} F(\tau_k)(t_{k+1} - t_k),$$

donde $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ y $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$, cuando $\max_{(k)} \{t_{k+1} - t_k\}$ tiende a cero. Si el límite dirigido anterior existe, lo llamaremos integral de F y lo denotaremos por

$$\int_a^b F(t) dt.$$

Evidentemente, si la integral existe, es un elemento de Y . Una condición suficiente para que exista dicha integral es que la función F sea continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.

Las propiedades de esta integral se deducen de las conocidas para la integral de Riemann en el caso real [71].

Definición 1.23. Supongamos ahora que T es un operador definido en un segmento $[x_0, x_1] \subseteq X$ y con valores en el espacio $\mathcal{L}(X, Y)$. En este caso, definimos:

$$\int_{x_0}^{x_1} T(x) dx = \int_0^1 T(x_0 + t(x_1 - x_0))(x_1 - x_0) dt.$$

Notar que en este caso, la función $T(x_0 + [\cdot](x_1 - x_0))(x_1 - x_0)$ está en las condiciones de la definición 1.22 con $[a, b] = [0, 1]$.

Si en la definición anterior se considera el caso particular de que $T = F'$, donde F es un operador de X en Y que tiene derivada continua en el segmento $[x_0, x_1]$, tenemos el siguiente teorema que generaliza la conocida regla de Barrow del cálculo.

Teorema 1.24. Si F es un operador de X en Y con derivada continua en el segmento $[x_0, x_1] \subset X$, entonces

$$\int_{x_0}^{x_1} F'(x) dx = F(x_1) - F(x_0). \quad (1.5)$$

El siguiente resultado nos permite acotar la integral de un operador que esté acotado por una función real ([71]).

Lema 1.25. Sea T un operador en las condiciones de la definición 1.23 y $\phi(t)$ una función real definida en $[0, 1]$ e integrable. Si se verifican

$$\left\| T(x_0 + \tau(x_1 - x_0)) \right\| \leq \phi(t_0 + \tau(t_1 - t_0)), \quad \tau \in [0, 1],$$

y

$$\|x_1 - x_0\| \leq t_1 - t_0,$$

entonces

$$\left\| \int_{x_0}^{x_1} T(x) dx \right\| \leq \int_{t_0}^{t_1} \phi(t) dt.$$

Como caso particular del lema anterior, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.26. Si se cumple la desigualdad

$$\|T(x)\| \leq \phi(t),$$

para x y t verificando

$$\|x - x_0\| \leq t - t_0,$$

entonces

$$\left\| \int_{x_0}^{x_1} T(x) dx \right\| \leq \int_{t_0}^{t_1} \phi(t) dt,$$

donde x_1 es un elemento que cumple $\|x_1 - x_0\| \leq t_1 - t_0$.

Terminamos con el Teorema de Taylor. Aunque hay varios enunciados similares [26], hemos elegido el siguiente por su comodidad a la hora de utilizarlo.

Teorema 1.27 (Teorema de Taylor). Supongamos que F es un operador n veces diferenciable en la bola $B(x_0, r)$ y que $F^{(n)}$ es integrable en el segmento $[x_0, x_1]$ con $x_1 \in B(x_0, r)$. Entonces,

$$F(x_1) = F(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} F^{(k)}(x_0)(x_1 - x_0)^k + R_n(x_0, x_1), \quad (1.6)$$

donde

$$\begin{aligned} R_n(x_0, x_1) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x_1} F^{(n)}(x)(x_1 - x)^{n-1} dx \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 F^{(n)}(x_0 + t(x_1 - x_0))(x_1 - x_0)^n (1-t)^{n-1} dt. \end{aligned} \quad (1.7)$$

1.4. Diferencias divididas

En esta sección trataremos resumidamente alguno de los conceptos que posteriormente serán utilizados en el desarrollo de esta memoria. Somos conscientes de que lo aquí abordado necesita de un desarrollo más detallado del que aquí se presenta. Es por ello que fundamentalmente nos esforzaremos simplemente en resumir ordenadamente algunos de los resultados que posteriormente se utilizan.

El concepto de diferencia dividida en espacios de Banach fue introducido por J. Schröder [94] generalizando el concepto de diferencia dividida de una función escalar de la misma forma que la derivada Fréchet de un operador en espacios de Banach generaliza el de la derivada de una función escalar.

Así, de forma natural, al considerar una diferencia dividida como una aproximación de una derivada, si F es un operador entre dos espacios de Banach X e Y , a partir de la estimación

$$F(x) \approx F(y) + F'(y)(x - y) \quad \Rightarrow \quad F(x) - F(y) \approx F'(y)(x - y)$$

y teniendo en cuenta que $F'(y) \in \mathcal{L}(X, Y)$, es claro que una diferencia dividida en espacios de Banach, al ser una aproximación de la derivada, debe ser un operador lineal acotado de X en Y que, al aplicarlo a $(x - y)$, es igual a $F(x) - F(y)$. Definimos formalmente a continuación el concepto de diferencia dividida de primer orden de un operador F en espacios de Banach.

Definición 1.28. Sean X e Y dos espacios de Banach, $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$ un operador y Ω un subconjunto abierto convexo no vacío de X . Un operador $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ se dice que es una diferencia dividida de primer orden de F en los puntos x e y , $x \neq y$, si

$$L(x - y) = F(x) - F(y). \quad (1.8)$$

En adelante, si $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ es una diferencia dividida de primer orden del operador F en los puntos x e y , la denotaremos también por $L = [x, y; F]$.

La condición (1.8) no determina la unicidad de la diferencia dividida a menos que la dimensión de X sea uno (diferencia dividida en \mathbb{R}). Se puede probar que si $\dim(X) = d$ y $\dim(Y) = d'$, entonces existen $d'(d - 1) + 1$ operadores lineales de E_1 en E_2 cumpliendo (1.8) y que son linealmente independientes, donde E_1 es un espacio normado completo y E_2 es un espacio normado [88].

Para la existencia de diferencias divididas de un operador, se puede ver [17]. Para ejemplos en algunos espacios particulares, ver [99]. A continuación, damos dos ejemplos en espacios de dimensión finita.

Ejemplo 1.29. Consideramos el caso $X = Y = \mathbb{R}^2$ y denotamos por F_1 y F_2 las componentes del operador F . Es decir,

$$\text{para } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \text{tenemos } F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2) \\ F_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

Entonces, cada uno de los operadores lineales A_1 y A_2 , dados por las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{F_1(x_1, y_2) - F_1(y_1, y_2)}{x_1 - y_1} & \frac{F_1(x_1, x_2) - F_1(x_1, y_2)}{x_2 - y_2} \\ \frac{F_2(x_1, y_2) - F_2(y_1, y_2)}{x_1 - y_1} & \frac{F_2(x_1, x_2) - F_2(x_1, y_2)}{x_2 - y_2} \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{F_1(x_1, x_2) - F_1(y_1, x_2)}{x_1 - y_1} & \frac{F_1(y_1, x_2) - F_1(y_1, y_2)}{x_2 - y_2} \\ \frac{F_2(x_1, x_2) - F_2(y_1, x_2)}{x_1 - y_1} & \frac{F_2(y_1, x_2) - F_2(y_1, y_2)}{x_2 - y_2} \end{pmatrix},$$

verifican (1.8).

Por otra parte, si F es diferenciable y su derivada Fréchet F' es continua en el segmento $[x, y] = \{tx + (1-t)y; t \in [0, 1]\}$, el operador lineal dado por

$$A_3 = \int_0^1 F'(x + t(y-x)) dt,$$

también verifica (1.8). Esto significa que cualquiera de los tres operadores anteriores son diferencias divididas del operador F en los puntos x e y . Además, cualquier combinación convexa de A_1, A_2 y A_3 es también una diferencia dividida de F en x e y .

Ejemplo 1.30. Consideramos el espacio \mathbb{R}^n con la norma del máximo, de manera que si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, tenemos

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|, \quad \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Sea D un dominio abierto de \mathbb{R}^n y F un operador definido en D , con valores en \mathbb{R}^n y tal que $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$. Sean x e y dos puntos distintos de D y denotamos por $[x, y; F]$ la matriz con entradas

$$[x, y; F]_{ij} = \frac{1}{x_j - y_j} (F_i(x_1, \dots, x_j, y_{j+1}, \dots, y_n) - F_i(x_1, \dots, x_{j-1}, y_j, \dots, y_n)).$$

Es sencillo comprobar que el operador anterior $[x, y; F] \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ verifica la condición (1.8). En efecto, veamos que se cumple

$$([x, y; F](x - y))_i = (F(x) - F(y))_i,$$

puesto que

$$\begin{aligned} ([x, y; F](x - y))_i &= \sum_{j=1}^n [x, y; F]_{ij} (x_j - y_j) \\ &= \sum_{j=1}^n (F_i(x_1, \dots, x_j, y_{j+1}, \dots, y_n) - F_i(x_1, \dots, x_{j-1}, y_j, \dots, y_n)) \\ &= (F_i(x_1, y_2, \dots, y_n) - F_i(y_1, y_2, \dots, y_n)) + (F_i(x_1, x_2, y_3, \dots, y_n) - F_i(x_1, y_2, \dots, y_n)) \\ &+ \dots + (F_i(x_1, \dots, x_{n-1}, y_n) - F_i(x_1, \dots, x_{n-2}, y_{n-1}, y_n)) + (F_i(x_1, \dots, x_n) - F_i(x_1, \dots, x_{n-1}, y_n)) \\ &= F_i(x_1, \dots, x_n) - F_i(y_1, \dots, y_n) = (F(x) - F(y))_i. \end{aligned}$$

A menudo, se requiere que la aplicación $[\cdot, \cdot; F] : X \times Y \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$, tal que $(x, y) \rightarrow [x, y; F] \in \mathcal{L}(X, Y)$, satisfaga una condición tipo Lipschitz en algún dominio, lo que implica que el operador F sea diferenciable en el dominio, tal y como veremos después. Nosotros utilizaremos dicha condición en la forma en que lo hace Laarsonen en [75].

Definición 1.31. Sean X e Y dos espacios de Banach, $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$ un operador, Ω un subconjunto abierto convexo no vacío de X y x e y dos puntos distintos de Ω que tienen asociada una diferencia dividida de primer orden $[x, y; F] \in \mathcal{L}(X, Y)$. Diremos que la diferencia dividida de primer orden $[x, y; F]$ es Lipschitz continua en Ω si existe una constante $K \geq 0$ tal que

$$\|[x, y; F] - [u, v; F]\| \leq K (\|x - u\| + \|y - v\|); \quad \forall x, y, u, v \in \Omega; \quad x \neq y, u \neq v. \quad (1.9)$$

Veamos en el siguiente lema que la condición anterior implica que F es diferenciable Fréchet en Ω ([88]).

Lema 1.32. Sean X e Y dos espacios de Banach, $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$ un operador, Ω un subconjunto abierto convexo no vacío de X y x e y dos puntos distintos de Ω que tienen asociada una diferencia dividida de primer orden $[x, y; F] \in \mathcal{L}(X, Y)$ cumpliendo (1.9). Entonces,

$$[x, x; F] = F'(x), \quad (1.10)$$

$$\|F'(x) - F'(y)\| \leq 2K \|x - y\|, \quad K \geq 0. \quad (1.11)$$

Notemos que en las condiciones indicadas se tiene que F' cumple una condición Lipschitz de la forma (1.11) con constante de Lipschitz $2K$.

Una consecuencia inmediata de (1.9) y (1.10) es:

$$\|[x, y; F] - F'(z)\| \leq K (\|x - z\| + \|y - z\|), \quad K \geq 0, \quad \forall x, y, z \in \Omega. \quad (1.12)$$

Recíprocamente, si suponemos que F es diferenciable Fréchet en Ω y que su derivada Fréchet satisface (1.11), entonces se sigue que F tiene una diferencia dividida de primer orden Lipschitz continua en Ω . En efecto, para ello podemos tomar por ejemplo

$$[x, y; F] = \int_0^1 F'(x + t(y - x)) dt. \quad (1.13)$$

Sin embargo, con la excepción del caso $\dim(X) = 1$, sabemos que ésta no es la única diferencia dividida de primer orden Lipschitz continua de F .

En el siguiente teorema [88] se da una caracterización de las diferencias divididas de primer orden de la forma (1.13).

Teorema 1.33. Sea $[\cdot, \cdot; F] : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ un operador que satisface las condiciones (1.8) y (1.9). Las siguientes afirmaciones son equivalentes

(i) La igualdad (1.13) se cumple para todo $x, y \in \Omega$.

(ii) Para todo par de puntos $u, v \in \Omega$ tales que $2v - u \in \Omega$, se tiene

$$[u, v; F] = 2[u, 2v - u; F] - [v, 2v - u; F]. \quad (1.14)$$

A continuación, exponemos brevemente algunas condiciones de tipo Lipschitz para las diferencias divididas de primer orden que han sido utilizadas por otros autores.

La condición Lipschitz (1.9) ha sido utilizada, por ejemplo en [70], [75] y [87]. Utilizando la noción anterior de diferencia dividida Schmidt en [93] y Sergeev en [95]

generalizan el método de la secante a espacios de Banach. Para probar la convergencia de dicho método ambos consideran una condición Lipschitz de la forma:

$$\|[x, y; F] - [y, z; F]\| \leq K\|x - z\|, \quad x, y, z \in \Omega, \quad K \geq 0. \quad (1.15)$$

Es fácil ver que (1.15) implica (1.9), puesto que

$$\|[x, y; F] - [u, v; F]\| \leq \|[x, y; F] - [y, u; F]\| + \|[y, u; F] - [u, v; F]\| \leq K\|x - u\| + K\|y - v\|.$$

Además, tomando $x = z$ en (1.15) se sigue $[x, y; F] = [y, x; F]$.

Numerosos ejemplos importantes de diferencias divididas satisfacen la condición (1.9) pero no cumplen la relación simétrica anterior y, en consecuencia, no verifican (1.15). Hacemos notar que en el ejemplo 1.29, A_1 y A_2 no son simétricas, mientras que A_3 y $\frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2$ sí que lo son.

A continuación, generalizamos la condición de Lipschitz continuidad para la diferencia dividida $[x, y; F] \in \mathcal{L}(X, Y)$ suavizándola mediante la siguiente condición:

$$\|[x, y; F] - [u, v; F]\| \leq \omega(\|x - u\|, \|y - v\|); \quad x, y, u, v \in \Omega, \quad (1.16)$$

donde $\omega : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función continua y no decreciente en sus dos componentes.

En el siguiente teorema veremos que la condición (1.16) verifica (1.10) cuando $\omega(0, 0) = 0$ ([60]).

Teorema 1.34. *Sea Ω un conjunto abierto convexo no vacío de un espacio de Banach X . Suponemos que para cada par de puntos $x, y \in \Omega$ existe una diferencia dividida de primer orden $[x, y; F] \in \mathcal{L}(X, Y)$ satisfaciendo (1.16) y $\omega(0, 0) = 0$. Entonces, se verifica la condición (1.10).*

Es fácil ver ahora que la condición (1.16) generaliza la condición (1.9), sin más que considerar $\omega(s, t) = K(s + t)$.

Por otra parte, también podemos observar que si F no es diferenciable, entonces la función ω dada en (1.16) es tal que $\omega(0, 0) > 0$, como puede verse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.35. Dado el siguiente sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned} x^2 - y + 1 + \frac{1}{9}|x - 1| &= 0, \\ y^2 + x - 7 + \frac{1}{9}|y| &= 0, \end{aligned}$$

lo podemos escribir como $F(x) = 0$, donde $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ y $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $F = (F_1, F_2)$ y

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2) &= x_1^2 - x_2 + 1 + \frac{1}{9}|x_1 - 1|, \\ F_2(x_1, x_2) &= x_2^2 + x_1 - 7 + \frac{1}{9}|x_2|. \end{aligned}$$

Tomando $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ y la norma $\|x\| = \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 2} |x_i|$, la norma correspondiente a $A \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ es:

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq 2} \sum_{j=1}^2 |a_{ij}|.$$

Ahora, si $v, w \in \mathbb{R}^2$, podemos definir $[v, w; F] \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ como (véase [88])

$$[v, w; F]_{i1} = \frac{F_i(v_1, w_2) - F_i(w_1, w_2)}{v_1 - w_1}, \quad [v, w; F]_{i2} = \frac{F_i(v_1, v_2) - F_i(v_1, w_2)}{v_2 - w_2}, \quad i = 1, 2.$$

Entonces,

$$[v, w; F] = \begin{pmatrix} \frac{v_1^2 - w_1^2}{v_1 - w_1} & -1 \\ 1 & \frac{v_2^2 - w_2^2}{v_2 - w_2} \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} \frac{|v_1 - 1| - |w_1 - 1|}{v_1 - w_1} & 0 \\ 0 & \frac{|v_2 - 1| - |w_2 - 1|}{v_2 - w_2} \end{pmatrix}$$

y

$$\|[x, y; F] - [v, w; F]\| \leq \|x - v\| + \|y - w\| + \frac{2}{9},$$

de manera que $\omega(s, t) = s + t + \frac{2}{9}$ y $\omega(0, 0) > 0$. Observamos que esta situación surge del hecho de que la función F es no diferenciable.

1.5. Algunas ecuaciones no lineales en espacios de Banach

La resolución de sistemas de ecuaciones no lineales de la forma $F(x) = 0$, donde $F : D \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ está definida en un dominio abierto convexo no vacío D , es un problema habitual de las ciencias y la ingeniería.

Notemos que los conocidos esquemas en diferencias finitas permiten transformar problemas continuos, como ecuaciones integrales y ecuaciones diferenciales, en sistemas de ecuaciones, tal como vemos a continuación.

1.5.1. Ecuaciones integrales de Hammerstein

Las ecuaciones de Hammerstein tienen un origen físico importante y surgen de la dinámica de fluidos electromagnéticos [90]. En particular, las ecuaciones integrales no lineales de tipo Hammerstein mixto son de la forma:

$$x(s) = f(s) + \int_a^b G(s, t)H(t, x(t)) dt, \quad s \in [a, b], \quad (1.17)$$

donde $-\infty < a < b < +\infty$, la función $f(s)$ es continua en $[a, b]$ y dada, y el núcleo G y la función H son conocidas. Estas ecuaciones aparecieron a principios de los años 30 del siglo XX como modelos generales del estudio de problemas de valores en la frontera semilineales, donde el núcleo $G(s, t)$ se presenta típicamente como la función de Green de un operador diferencial [52]. Así, la ecuación (1.17) se puede reformular como un problema de valores en la frontera de dos puntos con una cierta condición de contorno no lineal [16]. También aparecen análogos multidimensionales de la ecuación (1.17) como reformulaciones de una EDP elíptica con condiciones de contorno no lineales [79]. Ecuaciones integrales como (1.17) aparecen frecuentemente en numerosas aplicaciones

del mundo real [19]. Por ejemplo, algunos problemas considerados en la teoría vehicular, la biología y la teoría de colas llevan a ecuaciones integrales de este tipo [34]. Estas ecuaciones también se aplican en la teoría de la transferencia radiactiva, en la teoría del transporte de neutrones y en la teoría cinética de gases (véase [64] entre otros). Destacamos además el papel significativo que juegan en varias aplicaciones [30], como por ejemplo los modelos dinámicos de reactores químicos [22], que están gobernados por ecuaciones de control, justificando así su estudio y resolución [53].

La resolución de la ecuación integral (1.17) es equivalente a resolver la ecuación $F(x) = 0$, donde $F : \Omega \subset \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathcal{C}([a, b])$ y

$$[F(x)](s) = x(s) - f(s) - \int_a^b G(s, t)H(t, x(t)) dt, \quad s \in [a, b]. \quad (1.18)$$

Notemos que, como ya hemos visto, $\mathcal{C}([a, b])$ con la norma del máximo es un espacio de Banach y, por tanto, el operador (1.18) está definido entre dos espacios de Banach.

Cuando queremos aproximar una solución de la ecuación $F(\mathbf{x}) = 0$, donde el operador F está definido por $F : D \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ en un dominio abierto convexo no vacío D , mediante el método de Newton

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0 \in D, \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - [F'(\mathbf{x}_n)]^{-1}F(\mathbf{x}_n), \quad n \geq 0, \end{cases} \quad (1.19)$$

lo que hacemos es resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales en cada paso

$$F'(\mathbf{x}_n)(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) = -F(\mathbf{x}_n). \quad (1.20)$$

En cambio, si el operador es de la forma $F : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathcal{C}([a, b])$, no podemos utilizar la idea anterior porque no sabemos resolver la ecuación integral que corresponde a la ecuación (1.20) a partir de (1.18). Tampoco podemos aplicar directamente el método de Newton ya que no conocemos el operador $[F'(x)]^{-1}$ para (1.18).

Así, como primer paso, discretizamos la ecuación (1.17) para transformarla en un problema de dimensión finita. Consideramos entonces (1.17) con núcleo G la función de Green en $[a, b] \times [a, b]$ y aproximamos la integral que aparece en (1.17) usando la siguiente fórmula de cuadratura numérica de Gauss-Legendre con m nodos

$$\int_a^b q(t) dt \simeq \sum_{i=1}^m w_i q(t_i),$$

donde los nodos t_i y los pesos w_i son conocidos.

Si denotamos la aproximación de $x(t_i)$ por x_i y la de $f(t_i)$ por f_i ($i = 1, 2, \dots, m$), entonces la ecuación (1.17) se transforma en el siguiente sistema de ecuaciones no lineales

$$x_i = f_i + \sum_{j=1}^m a_{ij}H(t_j, x_j), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (1.21)$$

donde

$$a_{ij} = w_j G(t_i, t_j) = \begin{cases} w_j \frac{(b-t_i)(t_j-a)}{b-a} & \text{si } j \leq i, \\ w_j \frac{(b-t_j)(t_i-a)}{b-a} & \text{si } j > i. \end{cases}$$

Ahora, el sistema (1.21) se puede escribir como

$$F(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x} - \mathbf{f} - A\mathbf{z} = 0, \quad F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad (1.22)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_m)^T, & \mathbf{f} &= (f_1, f_2, \dots, f_m)^T, & A &= (a_{ij})_{i,j=1}^m, \\ \mathbf{z} &= (H(t_1, x_1), H(t_2, x_2), \dots, H(t_m, x_m))^T. \end{aligned}$$

1.5.2. Problemas conservativos

Es bien conocido que la energía se disipa en la acción de cualquier sistema dinámico real, generalmente a través de algún tipo de fricción. Sin embargo, en ciertas situaciones esta disipación es tan lenta que se puede despreciar en periodos de tiempo relativamente cortos. En tales casos se supone la ley de conservación de la energía, es decir, que la suma de la energía cinética y la energía potencial sea constante. Un sistema de este tipo se dice que es conservativo.

Si φ y ψ son funciones arbitrarias con la propiedad de que $\varphi(0) = 0$ y $\psi(0) = 0$, la ecuación general

$$\mu \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \psi \left(\frac{dx(t)}{dt} \right) + \varphi(x(t)) = 0 \quad (1.23)$$

puede ser interpretada como la ecuación del movimiento de una masa μ bajo la acción de una fuerza restauradora $-\psi \left(\frac{dx}{dt} \right)$. En general, estas fuerzas no son lineales, y la ecuación (1.23) se puede considerar como una ecuación básica de mecánica no lineal. En este trabajo vamos a considerar el caso especial de un sistema no lineal conservativo descrito por la ecuación

$$\mu \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \varphi(x(t)) = 0, \quad (1.24)$$

en la que la fuerza de amortiguación es nula y, en consecuencia, no hay disipación de energía. Diversos estudios de (1.23), con aplicaciones a un gran número de problemas físicos, se pueden encontrar en las referencias clásicas [9] y [97].

Ahora, consideramos el caso especial de un sistema no lineal conservativo descrito por la ecuación

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \phi(x(t)) = 0 \quad (1.25)$$

con condiciones de contorno

$$x(0) = x(1) = 0. \quad (1.26)$$

La resolución de la ecuación diferencial (1.25) es equivalente a resolver la ecuación $F(x) = 0$, donde $F : \mathcal{C}^2([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1])$ y

$$[F(x)](t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \phi(x(t)).$$

Notemos que, como ya hemos visto, $\mathcal{C}^2([0, 1])$ es un espacio de Banach con la norma $\|x\|_\infty = \max\{\|x\|_\infty, \|x'\|_\infty\}$ teniendo en cuenta que $\mathcal{C}([0, 1])$ es un espacio de Banach

para la norma $\|\cdot\|_\infty$, de manera que el operador anterior F está definido entre dos espacios de Banach.

Tal y como hemos indicado anteriormente, estamos interesados en aproximar una solución de una ecuación no lineal $F(x) = 0$, donde F es un operador definido en un dominio abierto convexo no vacío D de \mathbb{R}^m y tal que $F : D \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Así, a continuación, utilizamos un proceso de discretización para transformar el problema de contorno de segundo orden en un problema finito-dimensional. Transformamos entonces el problema (1.25)–(1.26) en un sistema de ecuaciones no lineales. Para ello se aproxima la segunda derivada por una fórmula numérica estándar.

En primer lugar, introducimos los puntos $t_j = jh$, $j = 0, 1, \dots, m+1$, donde $h = \frac{1}{m+1}$ y m es un entero apropiado. El esquema es entonces designado por la determinación de los números x_j y se espera aproximar los valores $x(t_j)$ de la solución exacta en los puntos t_j . Una aproximación estándar para la segunda derivada en estos puntos es

$$x_j'' \approx \frac{x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1}}{h^2}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

de manera que un procedimiento natural para obtener dicho esquema es exigir que los x_j satisfagan en cada punto t_j del interior de la malla la ecuación diferencial, y por la aproximación indicada, tenemos

$$x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1} + h^2\phi(x_j) = 0 \tag{1.27}$$

y, como x_0 y x_{m+1} están determinados por las condiciones de contorno, las incógnitas son x_1, x_2, \dots, x_m .

Adicionalmente, simplificamos mediante el uso de notación vectorial y matricial. Introducimos entonces los vectores

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_x = \begin{pmatrix} \phi(x_1) \\ \phi(x_2) \\ \vdots \\ \phi(x_m) \end{pmatrix}$$

y la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{pmatrix},$$

de manera que el sistema de ecuaciones, que surge de imponer que (1.27) se verifique para $j = 1, 2, \dots, m$, puede ser escrito de forma compacta

$$F(\mathbf{x}) \equiv A\mathbf{x} + h^2\mathbf{v}_x = 0, \tag{1.28}$$

donde F es una función de \mathbb{R}^m en \mathbb{R}^m .

Terminamos diciendo que, a lo largo de esta memoria, hemos denotado $\overline{B(x, \rho)} = \{y \in X; \|y - x\| \leq \rho\}$ y $B(x, \rho) = \{y \in X; \|y - x\| < \rho\}$.

Parte II

Una familia de métodos iterativos con memoria que no utiliza derivadas: los métodos tipo secante

Como ya se ha indicado en la introducción de esta memoria, uno de nuestros objetivos principales es el estudio de métodos iterativos que no utilizan derivadas en su algoritmo. En general, estos métodos iterativos tienen el inconveniente de que no es sencillo localizar puntos de salida a partir de los cuales se asegure la convergencia de los mismos.

En esta segunda parte de la memoria centraremos nuestra atención en la familia de métodos iterativos tipo secante que, en el caso escalar, viene dada por el algoritmo ([60]):

$$\begin{cases} \text{dados } t_{-1} \text{ y } t_0, \\ s_n = \lambda t_n + (1 - \lambda)t_{n-1}, \quad \lambda \in [0, 1], \\ t_{n+1} = t_n - \frac{s_n - t_n}{f(s_n) - f(t_n)} f(t_n), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

cuando se aplica a la ecuación escalar $f(t) = 0$. Esta familia surge a partir de las interpretaciones geométricas del método de la secante ([11],[61]) y el método de Newton ([70], [71]). Una característica importante de esta familia es que no utiliza derivadas en su algoritmo. Además, tiene orden de convergencia superlineal $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ([62]) y a medida que vamos considerando mayores valores de λ , próximos a uno, la velocidad de convergencia aumenta. Notemos que para $\lambda = 1$ se obtiene el método de Newton, cuyo orden de convergencia es, como bien sabemos, dos.

Son muchos los problemas planteados en Matemática Aplicada, Ingeniería y otras Ciencias, cuya resolución pasa por considerar el problema de aproximar localmente una raíz x^* de una ecuación

$$F(x) = 0.$$

Para contemplar una mayor generalidad de este tipo de ecuaciones, vamos a considerar que F es un operador definido en un subconjunto abierto convexo no vacío Ω de un espacio de Banach X y con valores en un espacio de Banach Y . En estas condiciones tan generales, como bien sabemos, la ecuación $F(x) = 0$ puede representar una ecuación escalar, un sistema de ecuaciones, una ecuación diferencial, una ecuación integral, etc.

Comenzamos extendiendo la familia de métodos tipo secante anterior a espacios de Banach con el objetivo de aproximar una solución x^* de la ecuación $F(x) = 0$. Así, como puede verse en [62], extendemos la familia anterior a espacios de Banach de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x_{-1}, x_0 \in \Omega, \\ y_n = \lambda x_n + (1 - \lambda)x_{n-1}, \quad \lambda \in [0, 1], \\ x_{n+1} = x_n - [y_n, x_n; F]^{-1} F(x_n), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

donde $[x, y; F]$ es un operador diferencia dividida de primer orden de F en los puntos x e y ([88]). La igualdad anterior no determina únicamente el operador $[x, y; F]$ salvo que X sea un espacio unidimensional.

Por una parte, tenemos que para $\lambda = 0$, obtenemos el método de la secante:

$$\begin{cases} x_{-1}, x_0 \in \Omega, \\ x_{n+1} = x_n - [x_{n-1}, x_n; F]^{-1} F(x_n), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

que tiene orden de convergencia superlineal $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ([88]). Por otra parte, si $\lambda = 1$, y el operador F es diferenciable, entonces $y_n = x_n$, $[y_n, x_n; F] = F'(x_n)$ y obtenemos el método de Newton:

$$\begin{cases} x_0 \in \Omega, \\ x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1}F(x_n), \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Aunque el método de la secante es menos utilizado que el método de Newton, su utilización tiene gran interés puesto que no requiere la evaluación del operador derivada primera de F .

En esta segunda parte de la memoria mostramos el principal problema que tiene el resultado de convergencia semilocal dado en [62] para la familia de métodos iterativos tipo secante y que se obtiene mediante una técnica basada en relaciones de recurrencia. Es conocido que las hipótesis de todo resultado de convergencia semilocal de métodos iterativos tiene dos partes diferenciadas. Por una parte, las condiciones iniciales exigidas a los puntos de salida; y por otra, las condiciones exigidas al operador F . Pues bien, aquí nos ocuparemos de analizar las condiciones iniciales para mejorar el resultado de convergencia semilocal dado en [62]. Para estudiar las restricciones que imponen las condiciones iniciales utilizaremos el dominio de parámetros ([24, 25, 47]) y la región de accesibilidad ([43, 47]). El dominio de parámetros de un método iterativo establece gráficamente en el plano real la relación entre los parámetros que se definen a partir de las condiciones iniciales impuestas. En cuanto a la región de accesibilidad, permite visualizar qué puntos podemos considerar como puntos de salida a partir de los cuales el método iterativo converge. Visualizaremos así perfectamente, utilizando el dominio de parámetros y la región de accesibilidad, el problema principal que presenta el resultado de convergencia semilocal dado en [62] para los métodos tipo secante. Este problema corresponde con la situación que se plantea habitualmente cuando aplicamos los métodos tipo secante para aproximar una solución de $F(x) = 0$: no es sencillo localizar puntos de salida a partir de los cuales se asegure la convergencia de los métodos tipo secante.

Resolveremos el problema anterior mediante dos procedimientos. En el capítulo 2, utilizaremos un método iterativo híbrido (predictor-corrector) que facilita la aplicabilidad de los métodos tipo secante y que está formado por un método iterativo predictor, el método modificado de la secante, que permite localizar puntos de salida a partir de los cuales se asegure la convergencia del método corrector, la familia de métodos iterativos tipo secante, y aprovechar así la convergencia superlineal de estos métodos. En el capítulo 3, obraremos de forma diferente y utilizaremos una nueva técnica para obtener un novedoso resultado de convergencia semilocal para los métodos tipo secante, que es menos exigente a la hora de obtener buenos puntos de salida para estos métodos. Además, el nuevo resultado de convergencia semilocal que se obtiene tiene la ventaja de que se puede aplicar a la resolución de ecuaciones en las que el operador implicado F es tanto diferenciable como no diferenciable.

Capítulo 2

Análisis de la accesibilidad de los métodos tipo secante mediante una teoría basada en relaciones de recurrencia

En este capítulo, una vez detectado correctamente el problema de la deficiente accesibilidad de los métodos tipo secante a partir del resultado de convergencia semilocal dado en [62], para resolverlo, consideraremos el método modificado de la secante en espacios de Banach ([10, 11]):

$$\begin{cases} z_{-1}, z_0 \in \Omega, \\ z_{n+1} = z_n - [z_{-1}, z_0; F]^{-1} F(z_n), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

con el objetivo principal de construir un método iterativo híbrido (predicor-corrector) que utilice el método modificado de la secante como predicor y la familia de métodos tipo secante como corrector. Para ello, analizaremos la convergencia semilocal del método modificado de la secante y, como las condiciones de convergencia impuestas a este método son más suaves que las impuestas a los métodos tipo secante en [62], veremos que se pueden mejorar los dominios de parámetros y las regiones de accesibilidad de los métodos tipo secante a partir del método modificado de la secante. Así, garantizaremos la convergencia de los métodos tipo secante saliendo desde los mismos puntos de salida a partir de los cuales está garantizada la convergencia del método modificado de la secante.

En la sección 2.1 presentamos el resultado de convergencia semilocal dado para los métodos tipo secante en [62], lo analizamos mediante su correspondiente dominio de parámetros y la región de accesibilidad de estos métodos, y vemos cuáles son las deficiencias que presenta. En la sección 2.2 introducimos el método modificado de la secante, estudiamos su convergencia semilocal y vemos la mejora que presenta con respecto a los métodos tipo secante en cuanto al dominio de parámetros y la región de accesibilidad. En la sección 2.3 construimos un método iterativo híbrido (predicor-corrector) que se beneficia de las ventajas de los métodos anteriores: los mayores dominio de parámetros y región de accesibilidad del método modificado de la secante (método predicor) y la velocidad de convergencia de los métodos tipo secante (método corrector). Analizaremos también su convergencia semilocal. Finalmente, en la sección 2.4, ilustramos todo

lo anterior con un sistema de ecuaciones no lineales.

2.1. Convergencia semilocal de los métodos tipo secante

En esta sección presentamos el resultado de convergencia semilocal dado en [62] para los métodos tipo secante y en el que la técnica de demostración está basada en relaciones de recurrencia. Para ello, suponemos que existe una diferencia dividida de primer orden $[x, y; F] \in \mathcal{L}(X, Y)$, para todo par de puntos distintos $x, y \in \Omega$, y que se cumplen las siguientes condiciones iniciales:

- (C1) $\|x_0 - x_{-1}\| = \alpha \neq 0$ con $x_{-1}, x_0 \in \Omega$,
- (C2) fijado $\lambda \in [0, 1)$, existe $A_0^{-1} = [y_0, x_0; F]^{-1}$ y es tal que $\|A_0^{-1}\| \leq \beta$,
- (C3) $\|A_0^{-1}F(x_0)\| \leq \eta$,
- (C4) $\|[x, y; F] - [u, v; F]\| \leq K(\|x - u\| + \|y - v\|)$, $K \geq 0$, $x, y, u, v \in \Omega$,
 $x \neq y, u \neq v$.

En primer lugar se definen las siguientes sucesiones reales de números positivos:

$$a_n = f(a_{n-1})g(a_{n-1})b_{n-1}, \quad b_n = f(a_{n-1})^2 a_{n-1} b_{n-1}, \quad n \geq 0, \quad (2.1)$$

donde

$$a_{-1} = \frac{\eta}{\alpha + \eta}, \quad a_0 = f(a_{-1})g(a_{-1})b_{-1}, \quad b_{-1} = \frac{K\beta\alpha^2}{\alpha + \eta}, \quad (2.2)$$

$$f(t) = \frac{1}{1-t}, \quad g(t) = (1-\lambda) + (1+\lambda)f(t)t, \quad \lambda \in [0, 1). \quad (2.3)$$

Notemos que tanto $f(t)$ como $g(t)$ son funciones crecientes en $\mathbb{R} - \{1\}$ y, además, $f(t) > 1$ en $(0, 1)$.

A partir de las condiciones iniciales (C1)–(C4), si x_1 está bien definido, se deduce que existe $A_0^{-1} = [y_0, x_0; F]^{-1}$ y

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_0\| &= \|A_0^{-1}F(x_0)\| \leq \eta = f(a_{-1})a_{-1}\|x_0 - x_{-1}\|, \\ K\|x_1 - x_0\|\|x_0 - x_{-1}\| &\leq K\beta\alpha = f(a_{-1})b_{-1}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

A continuación, se prueban mediante inducción sobre n las siguientes tres relaciones de recurrencia para $n \geq 1$:

- i_n) Existe $A_n^{-1} = [y_n - x_n; F]^{-1}$ y es tal que $\|A_n^{-1}\| \leq f(a_{-1})\|A_{n-1}^{-1}\|$,
- ii_n) $\|x_{n+1} - x_n\| \leq f(a_{-1})a_{-1}\|x_n - x_{n-1}\|$,
- iii_n) $K\|A_n^{-1}\|\|x_n - x_{n-1}\| \leq f(a_{-1})b_{n-1}$.

Para $n = 1$. Suponiendo que $a_0 < 1$ y $x_1 \in \Omega$, de (2.2) y (2.4), se sigue:

$$\begin{aligned} \|I - A_0^{-1}A_1\| &\leq \|A_0^{-1}\|\|A_0 - A_1\| \\ &\leq \|A_0^{-1}\|(\|y_1 - y_0\| + \|x_1 - x_0\|) \\ &\leq K\|A_0^{-1}\|[(1-\lambda) + (1+\lambda)f(a_{-1})a_{-1}]\|x_0 - x_{-1}\| \\ &\leq a_0 < 1. \end{aligned}$$

Entonces, por el lema de Banach sobre inversión de operadores, el operador A_1^{-1} existe y es tal que

$$\|A_1^{-1}\| \leq f(a_0)\|A_0^{-1}\|.$$

Por tanto, tenemos i_1).

Ahora, usando la fórmula de Taylor

$$F(x_1) = (F'(x_0) - A_0)(x_1 - x_0) + \int_0^1 (F'(x_0 + t(x_1 - x_0)) - F'(x_0))(x_1 - x_0)dt,$$

(C4) y $[x, x; F] = F'(x)$, se obtiene

$$\begin{aligned} \|F(x_1)\| &\leq K((1 - \lambda)\|x_0 - x_{-1}\| + \|x_1 - x_0\|)\|x_1 - x_0\| \\ &\leq Kg(a_{-1})\|x_0 - x_{-1}\|\|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

Como $\|A_1^{-1}\|$ existe, si x_2 está bien definido, se sigue

$$\|x_2 - x_1\| \leq f(a_0)\|A_0^{-1}\|\|F(x_1)\| \leq f(a_0)a_0\|x_1 - x_0\|,$$

y tenemos ii_2).

Notemos que, como consecuencia de (2.4) y i_1), se sigue iii_1), puesto que

$$K\|A_1^{-1}\|\|x_1 - x_0\| \leq Kf(a_0)\|A_0^{-1}\|\|x_1 - x_0\| \leq f(a_0)b_0.$$

Finalmente, suponiendo $a_n < 1$ y $x_n \in \Omega$, para todo $n \geq 1$, los casos i_{n+1}), ii_{n+1}) y iii_{n+1}) se demuestran de forma totalmente análoga y se completa la inducción.

En segundo lugar, para probar la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ que definen los métodos tipo secante, se estudian las sucesiones reales definidas en (2.1). Debemos probar que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy contenida en Ω y que $a_n < 1$, $\forall n \geq 0$.

Se empieza denotando la sucesión de Fibonacci por $\{\delta_n\}$, que se define como sigue

$$\delta_1 = \delta_2 = 1 \quad \text{y} \quad \delta_{n+2} = \delta_{n+1} + \delta_n, \quad n \geq 1, \quad (2.5)$$

$$s_n = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n, \quad n \geq 1, \quad (2.6)$$

y se demuestran por inducción las siguientes dos propiedades:

$$P1) \quad \delta_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] > \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

$$P2) \quad s_n = \delta_{n+2} - 1 \quad \text{y} \quad \mu_n = s_1 + s_2 + \cdots + s_n = \delta_{n+4} - (n + 3) \quad n \geq 1.$$

Para mayor detalle, consúltese [62].

A continuación, presentamos algunas propiedades de las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, dadas en (2.1), en el siguiente lema.

Lema 2.1. Sean las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ definidas en (2.1) y $\lambda \in [0, 1)$ fijo. Si

$$a_{-1} = \frac{\eta}{\alpha + \eta} < \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad b_{-1} = \frac{K\beta\alpha^2}{\alpha + \eta} < \frac{a_{-1}(1 - a_{-1})^2}{1 + \lambda(2a_{-1} - 1)}, \quad (2.7)$$

entonces

- a) $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son decrecientes,
 b) $\varphi = \frac{b_0}{b_{-1}} \in (0, 1)$ y $\frac{a_0}{1-a_0} < \varphi$,
 c) $a_n < \varphi^{\delta_n} a_{n-1}$ y $b_n < \varphi^{\delta_{n+1}} b_{n-1}$, para todo $n \geq 1$,
 d) $a_n < \varphi^{s_n} a_0$, para todo $n \geq 1$.

DEMOSTRACIÓN. a) Procedemos por inducción. De las hipótesis se tiene que $a_0 < a_{-1}$ y $b_0 < b_{-1}$. Si se verifican $a_{j-1} > a_j$ y $b_{j-1} > b_j$, para $j = 0, 1, \dots, n$, entonces

$$a_{n+1} < f(a_{n-1})g(a_{n-1})b_{n-1} = a_n \quad \text{y} \quad b_{n+1} < f(a_{n-1})^2 a_{n-1} b_{n-1} = b_n.$$

Luego $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son decrecientes.

b) Es obvio por hipótesis.

c) Usamos inducción. De $a_0 < a_{-1}$ y $b_0 < \varphi b_{-1}$ se deduce que

$$a_1 < f(a_{n-1})g(a_{n-1})\varphi b_{-1} = \varphi a_0 \quad \text{y} \quad b_1 < f(a_{n-1})^2 g(a_{-1})\varphi b_{-1} = \varphi b_0.$$

Si suponemos $b_j < \varphi \delta_{j+1} b_{j-1}$, para $j = 1, 2, \dots, n$, entonces

$$a_{n+1} < f(a_{n-1})g(a_{n-1})\varphi^{\delta_{n+1}} b_{n-1} = \varphi^{\delta_{n+2}} a_n,$$

$$b_{n+1} < f(a_{n-1})^2 (\varphi^n g(a_{n-1})) \varphi^{\delta_{n+1}} b_{n-1} < \varphi^{\delta_{n+1} + \delta_n} b_n = \varphi^{\delta_{n+2}} a_n.$$

d) es consecuencia de c). ■

A continuación, probamos el teorema de convergencia semilocal.

Teorema 2.2. Sean X e Y dos espacios de Banach, $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$ un operador definido en un conjunto abierto convexo no vacío Ω , $x_{-1}, x_0 \in \Omega$ dos puntos distintos y $\lambda \in [0, 1)$. Suponemos que se cumplen las condiciones (C1)–(C4) y (2.7). Si $B(x_0, r_0) \subseteq \Omega$, donde $r_0 = \frac{1-a_0}{1-2a_0} \eta$, entonces los métodos tipo secante convergen a una solución x^* de $F(x) = 0$ con R -orden de convergencia al menos $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Además, $x_n, x^* \in \overline{B(x_0, r_0)}$, la solución x^* es única en $B(x_0, \tau) \cap \Omega$, donde $\tau = \frac{1}{K\beta} - r_0 - (1-\lambda)\alpha$, y

$$\|x^* - x_n\| < \frac{\Delta^n}{1-\Delta} \eta \varphi^{\mu_{n-1}}, \quad n \geq 0, \quad (2.8)$$

donde $\varphi = \frac{b_0}{b_{-1}}$, $\Delta = \frac{a_0}{1-a_0}$, $\mu_{-1} = 0 = \mu_0$ y $\mu_n = s_1 + s_2 + \dots + s_n$, $n \geq 1$.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que $a_0 < 1$ y $a_n < 1$ para todo $n \geq 1$. Veamos que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy y que $x_n \in \overline{B(x_0, r_0)}$, para $n \geq 0$. Ahora, para $m \geq 1$, vemos que

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &\leq \|x_{n+m} - x_{n+m-1}\| + \|x_{n+m-1} - x_{n+m-2}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq f(a_{n+m-2})a_{n+m-2} \dots f(a_{n+1})a_{n+1}f(a_n)a_n \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\quad + f(a_{n+m-3})a_{n+m-3} \dots f(a_{n+1})a_{n+1}f(a_n)a_n \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\quad + \dots + f(a_n)a_n \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_{n+1} - x_n\| \end{aligned}$$

$$= \left[\prod_{j=n}^{n+m-2} f(a_j)a_j + \prod_{j=n}^{n+m-3} f(a_j)a_j + \cdots + f(a_n)a_n + 1 \right] \|x_{n+1} - x_n\|. \quad (2.9)$$

Como $\{a_j\}$ es decreciente y f es creciente, por el lema 2.1 y (2.9), para $n \geq 2$, se tiene

$$\|x_{n+m} - x_n\| = \prod_{j=n}^{n+m-2} \varphi^{s_j} \Delta^n [\Delta^{m-1} + \Delta^{m-2} + \cdots + 1] \|x_1 - x_0\|,$$

donde $\Delta < 1$, con lo que $a_0 < \frac{1}{2}$. Entonces,

$$\|x_{n+m} - x_n\| = (\varphi^{s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}}) \frac{\Delta^n(1-\Delta^m)}{1-\Delta} \|x_1 - x_0\|. \quad (2.10)$$

En (2.9), si $n = 1$, se tiene

$$\|x_{m+1} - x_1\| < \frac{\Delta(1-\Delta^m)}{1-\Delta} \|x_1 - x_0\|, \quad (2.11)$$

y, si $n = 0$, entonces

$$\|x_m - x_0\| < \frac{1-\Delta^m}{1-\Delta} < \frac{\eta}{1-\Delta} = r_0. \quad (2.12)$$

Por tanto, $x_n \in B(x_0, r_0)$, para todo $n \geq 1$, la sucesión $\{x_n\}$ está bien definida y es una sucesión de Cauchy. Luego, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^* \in \overline{B(x_0, r_0)}$.

Además, por (C4), existe F' y cumple $\|F'(x) - F'(y)\| = \|[x, x; F] - [y, y; F]\| \leq 2K\|x - y\|$, de manera que

$$F(x_n) = (F'(x_{n-1}) - A_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \int_0^1 (F'(x_{n-1} + t(x_n - x_{n-1})) - F'(x_{n-1}))(x_n - x_{n-1}) dt,$$

$$\|F(x_n)\| \leq K((1-\lambda)\|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \|x_n - x_{n-1}\|)\|x_n - x_{n-1}\|,$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F(x_n)\| = 0$ y, por la continuidad de F , vemos que x^* es solución de $F(x) = 0$, puesto que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F(x_n)\| = \|F(x^*)\| = 0.$$

También, haciendo $n \rightarrow \infty$ en (2.10), (2.11) y (2.12), se obtiene (2.8).

A continuación, probamos la unicidad de x^* . Sea z^* otra solución distinta de $F(x) = 0$ en $B(x_0, \tau) \cap \Omega$, donde $\tau = \frac{1}{K\beta} - r_0 - (1-\lambda)\alpha$. Si consideramos

$$F(z^*) - F(x^*) = \int_{x^*}^{z^*} F'(x) dx = \int_0^1 F'(x^* + t(z^* - x^*))(z^* - x^*) dt = 0,$$

y el operador $T = \int_0^1 F'(x^* + t(z^* - x^*)) dt$, entonces

$$\begin{aligned}
 \|A_0^{-1}T - I\| &\leq \|A_0^{-1}\| \|T - A_0\| \\
 &\leq \|A_0^{-1}\| \int_0^1 \|F'(x^* + t(z^* - x^*)) - A_0\| dt \\
 &= \|A_0^{-1}\| \int_0^1 \|F'(x^* + t(z^* - x^*)) - F'(x_0) + F'(x_0) - A_0\| dt \\
 &\leq \beta \left(\int_0^1 2K\|x^* + t(z^* - x^*) - x_0\| dt + \|F'(x_0) - A_0\| \right) \\
 &\leq \beta \left(\int_0^1 2K((1-t)\|x^* - x_0\| + t\|z^* - x_0\|) dt + K(1-\lambda)\alpha \right) \\
 &= K\beta((1-\lambda)\alpha + \|x^* - x_0\| + \|z^* - x_0\|) \\
 &< K\beta((1-\lambda)\alpha + r_0 + \tau) \\
 &= 1,
 \end{aligned}$$

de manera que el operador T es invertible y, por tanto, $z^* = x^*$.

Finalmente, las propiedades P1) y P2) implican que

$$\begin{aligned}
 \mu_{n-1} = \delta_{n+3} - (n+2) &> \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - (n+2), \\
 \varphi^{\mu_{n-1}} &< \frac{\left(\varphi^{\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}} \right)^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n}}{\varphi^{n+2}} < \frac{\varphi^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n}}{\varphi^{n+2}}.
 \end{aligned}$$

En consecuencia, desde (2.8), obtenemos

$$\|x^* - x_n\| \leq \left(\frac{\Delta}{\varphi} \right) \frac{\eta}{\varphi^2(1-\Delta)} \varphi^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n},$$

y como $\frac{\Delta}{\varphi} < 1$, el R -orden de convergencia de los métodos tipo secante es al menos $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, con lo que queda demostrado el teorema. ■

A continuación, vamos a detallar cuáles son los problemas que se deducen del anterior resultado de convergencia semilocal. Comenzaremos estudiando el dominio de parámetros asociado al teorema 2.2. Para representarlo gráficamente se colorean en el plano los valores de los parámetros correspondientes a los puntos que verifican las condiciones que se imponen en el teorema 2.2. Observamos que las condiciones (C1)–(C3) exigidas a los puntos de salida introducen los parámetros α , β y η , y la condición (C4) exigida al operador F introduce el parámetro fijo K . En primer lugar, expresamos las dos

condiciones dadas en (2.7) de forma explícita a partir de los valores que consideramos para construir el dominio de parámetros: $K\beta\eta$ y $K\beta\alpha$. Así, las dos condiciones dadas en (2.7) se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\frac{K\beta\eta}{K\beta\alpha + K\beta\eta} < \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad 1 < \frac{K\beta\eta}{(K\beta\alpha + K\beta\eta)(K\beta\alpha + K\beta\eta + \lambda(K\beta\eta - K\beta\alpha))}. \quad (2.13)$$

A continuación, considerando que representamos en el eje de abscisas los valores $K\beta\eta$ y en el de ordenadas los valores $K\beta\alpha$, dibujamos en la figura 2.1 los dominios de parámetros que están sujetos a las condiciones dadas en (2.13) para los métodos tipo secante tomando distintos valores de λ : $\lambda = 0$ (región verde), $\lambda = 0.25$ (región rosa), $\lambda = 0.5$ (región amarilla) y $\lambda = 0.75$ (región morada).

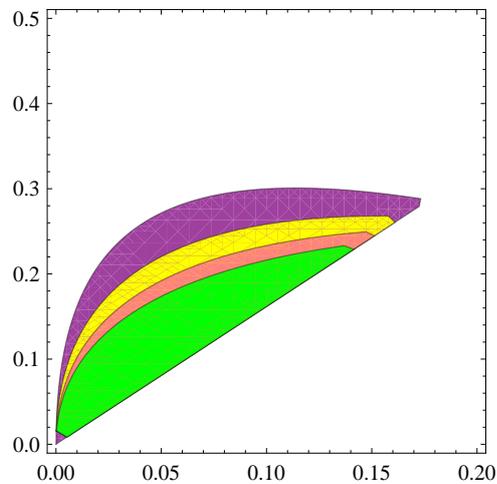


Figura 2.1: Dominios de parámetros de los métodos tipo secante correspondientes al teorema 2.2 con $\lambda = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ (regiones verde, rosa, amarilla y morada, respectivamente).

A partir de la figura 2.1 observamos dos situaciones que destacamos a continuación. En primer lugar, la elección de adecuados puntos de salida x_{-1} y x_0 para los métodos tipo secante es muy restrictiva, puesto que el dominio de parámetros es muy reducido. En segundo lugar, si consideramos un valor fijo de $K\beta\alpha$ perteneciente al dominio de parámetros, observamos que los posibles valores que se pueden considerar de $K\beta\eta$ para que los puntos de salida pertenezcan al dominio de parámetros, tienen una cota superior y una cota inferior para la cantidad $K\beta\eta$. Esto hace que incluso tomando la propia raíz como punto de salida ($K\beta\eta = 0$), no obtengamos puntos iniciales que verifiquen las condiciones del teorema 2.2, lo que resulta evidente a partir de la segunda condición de (2.13), puesto que obviamente nunca se verificará la desigualdad para $\alpha > 0$ y $\eta = 0$ (es decir, $x_0 = x^*$).

Sabemos que los puntos de salida de un método iterativo tienen asociados los parámetros dados en las condiciones iniciales. Para representar la región de accesibilidad del método iterativo, coloreamos los puntos cuyos parámetros asociados verifican las condiciones de convergencia y, en otro caso, no los coloreamos. La región de accesibilidad asociada a una solución de $F(x) = 0$ nos indica entonces el dominio de puntos de salida a partir de los cuales tenemos asegurada la convergencia del método iterativo

que se aplica; es decir, el conjunto de puntos de salida que satisfacen las condiciones de convergencia para el proceso iterativo considerado.

A continuación, vemos con un ejemplo académico cuál es la región de accesibilidad asociada a la raíz $z = 1$ de la ecuación compleja $F(z) = z^3 - 1 = 0$ cuando se aproxima mediante los métodos tipo secante. Considerando el cuadrado $[0.9, 1.3] \times [-0.2, 0.2]$ como dominio complejo, que únicamente contiene la raíz $z = 1$, obtenemos $K = 3|1.3 + 0.2i| = 3.9458\dots$. Tomando $z_{-1} = z_0 - d$, representamos la región de accesibilidad coloreando los puntos z_0 que verifiquen las condiciones de convergencia dadas en (2.13). Así, fijado $\alpha = |z_0 - z_{-1}| = |d|$, en las figuras 2.2–2.5 se muestran las regiones de accesibilidad de los métodos tipo secante para distintos valores de λ : $\lambda = 0$ (región verde), $\lambda = \frac{1}{4}$ (región rosa), $\lambda = \frac{1}{2}$ (región amarilla) y $\lambda = \frac{3}{4}$ (región morada).

Aquí, se observa que las regiones de accesibilidad de los métodos tipo secante que se han pintado tienen el problema de que no se puede garantizar la convergencia para ciertos valores de λ , aún estando cerca o en la misma raíz. Vemos que aparece una zona hueca en la región de accesibilidad que contiene a la propia raíz. Evidentemente esta restricción es consecuencia de la distancia entre los puntos de salida (o, equivalentemente, del valor de α) que no es suficientemente pequeña como para poder garantizar la convergencia en estas situaciones concretas.

Por otra parte, si se consideran valores de α más pequeños, se puede ver en las figuras 2.6–2.9 que, aunque se va reduciendo la zona hueca de convergencia, se reduce la región de accesibilidad. De hecho, se puede comprobar que para $\alpha = 1/64$ ya no existe región de accesibilidad dado que las condiciones (2.13) no se cumplen.

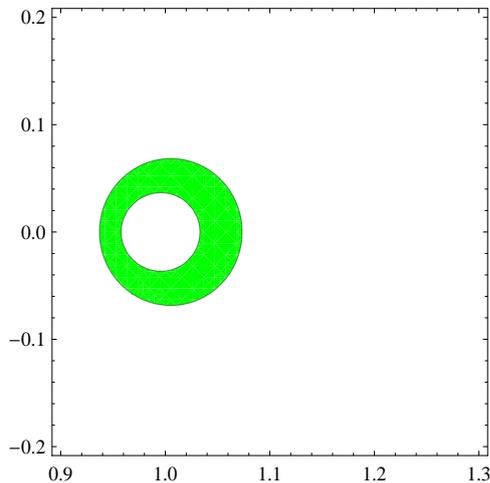


Figura 2.2: Región de accesibilidad asociada a la raíz $z = 1$ de la ecuación $F(z) = z^3 - 1 = 0$ cuando se aproxima mediante el método tipo secante correspondiente a $\lambda = 0$ y con $\alpha = \frac{1}{10}$.

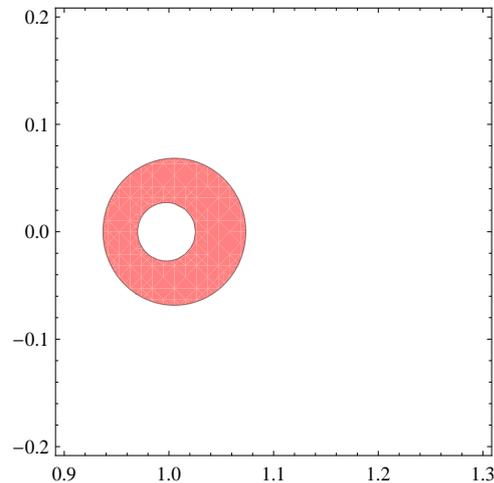


Figura 2.3: Región de accesibilidad asociada a la raíz $z = 1$ de la ecuación $F(z) = z^3 - 1 = 0$ cuando se aproxima mediante el método tipo secante correspondiente a $\lambda = \frac{1}{4}$ y con $\alpha = \frac{1}{10}$.

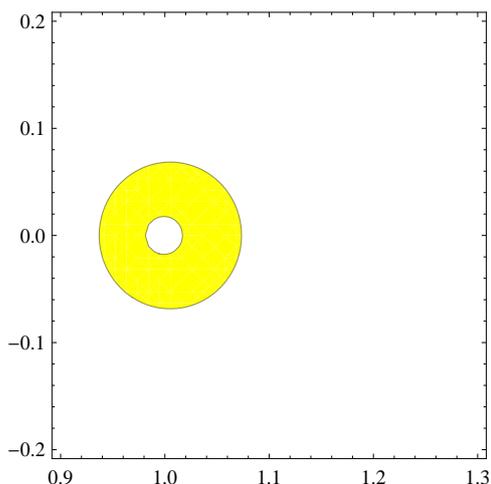


Figura 2.4: Región de accesibilidad asociada a la raíz $z = 1$ de la ecuación $F(z) = z^3 - 1 = 0$ cuando se aproxima mediante el método tipo secante correspondiente a $\lambda = \frac{1}{2}$ y con $\alpha = \frac{1}{10}$.

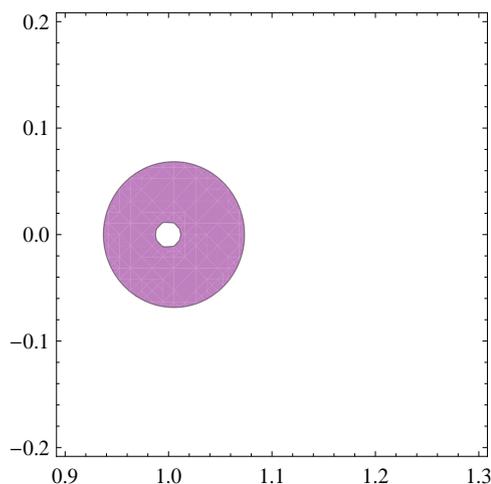


Figura 2.5: Región de accesibilidad asociada a la raíz $z = 1$ de la ecuación $F(z) = z^3 - 1 = 0$ cuando se aproxima mediante el método tipo secante correspondiente a $\lambda = \frac{3}{4}$ y con $\alpha = \frac{1}{10}$.

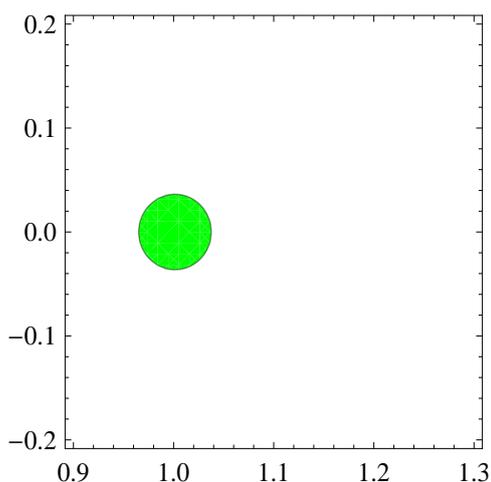


Figura 2.6: Región de accesibilidad asociada a la raíz $z = 1$ de la ecuación $F(z) = z^3 - 1 = 0$ cuando se aproxima mediante el método tipo secante correspondiente a $\lambda = 0$ y con $\alpha = \frac{1}{16}$.

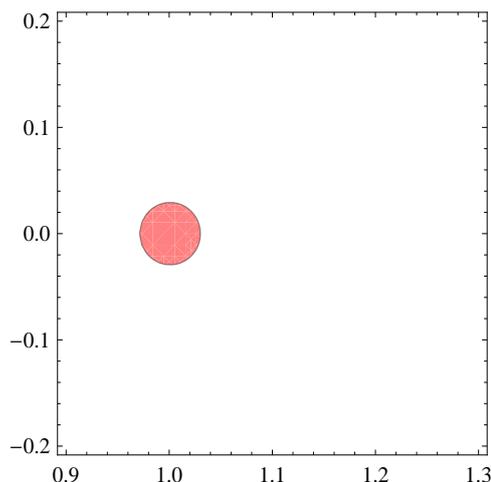


Figura 2.7: Región de accesibilidad asociada a la raíz $z = 1$ de la ecuación $F(z) = z^3 - 1 = 0$ cuando se aproxima mediante el método tipo secante correspondiente a $\lambda = \frac{1}{4}$ y con $\alpha = \frac{1}{20}$.

2.2. Convergencia semilocal del método modificado de la secante

Una vez descritos los problemas que se deducen del teorema 2.2 para los métodos tipo secante, introducimos ahora el método modificado de la secante y analizamos su convergencia semilocal. Suponemos que existe un operador diferencia dividida de pri-

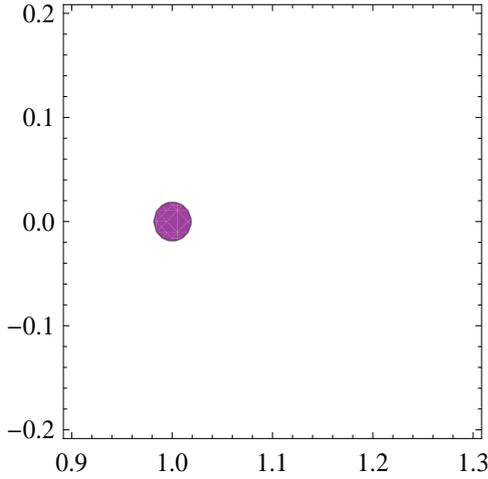


Figura 2.8: Región de accesibilidad asociada a la raíz $z = 1$ de la ecuación $F(z) = z^3 - 1 = 0$ cuando se aproxima mediante el método tipo secante correspondiente a $\lambda = \frac{3}{4}$ y con $\alpha = \frac{1}{32}$.

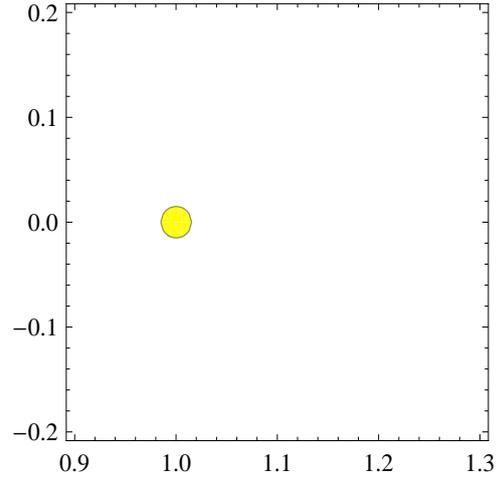


Figura 2.9: Región de accesibilidad asociada a la raíz $z = 1$ de la ecuación $F(z) = z^3 - 1 = 0$ cuando se aproxima mediante el método tipo secante correspondiente a $\lambda = \frac{1}{2}$ y con $\alpha = \frac{1}{40}$.

mer orden para cada par de puntos distintos $x, y \in \Omega$ y que se cumplen las siguientes condiciones iniciales:

- (H1) $\|z_0 - z_{-1}\| = \alpha_0 \neq 0$, con $z_{-1}, z_0 \in \Omega$,
- (H2) existe $L_0^{-1} = [z_{-1}, z_0; F]^{-1}$ y es tal que $\|L_0^{-1}\| \leq \gamma$,
- (H3) $\|L_0^{-1}F(z_0)\| \leq \varepsilon$,
- (H4) $\|[z, y; F] - [u, v; F]\| \leq K(\|z - u\| + \|y - v\|)$, $K \geq 0$, $z, y, u, v \in \Omega$,
 $z \neq y, u \neq v$.

Antes de probar la convergencia semilocal del método modificado de la secante bajo las condiciones (H1)–(H4), probaremos el siguiente lema técnico.

Lema 2.3. Sean (H1)–(H4). Si

$$K\gamma\alpha_0 < 1 \quad \text{y} \quad K\gamma\varepsilon < \frac{\sqrt{2(1 + (K\gamma\alpha_0)^2)} - (1 + K\gamma\alpha_0)}{2}, \quad (2.14)$$

entonces la ecuación

$$2K\gamma t^2 - (1 - K\gamma\alpha_0 + 2K\gamma\varepsilon)t + (1 + K\gamma\varepsilon)\varepsilon = 0 \quad (2.15)$$

tiene dos raíces reales positivas. Si denotamos por R la menor de ellas, se tiene que $K\gamma(2R + \alpha_0) < 1$ y $R > \varepsilon$.

DEMOSTRACIÓN. Como el discriminante de la ecuación (2.15) está dado por

$$\begin{aligned} \Delta &= (1 - K\gamma\alpha_0 + 2K\gamma\varepsilon)^2 - 8K\gamma\varepsilon(1 + K\gamma\varepsilon) \\ &= \left((1 - K\gamma\alpha_0 + 2K\gamma\varepsilon) + \sqrt{8K\gamma\varepsilon(1 + K\gamma\varepsilon)} \right) \left((1 - K\gamma\alpha_0 + 2K\gamma\varepsilon) - \sqrt{8K\gamma\varepsilon(1 + K\gamma\varepsilon)} \right), \end{aligned}$$

la ecuación (2.15) tiene dos raíces reales si y solo si $\Delta > 0$. Analizamos ahora los dos factores de Δ . Por hipótesis, tenemos que $K\gamma\alpha_0 < 1$, de manera que $\Delta > 0$ si

$$1 - K\gamma\alpha_0 + 2K\gamma\varepsilon > \sqrt{8K\gamma\varepsilon(1 + K\gamma\varepsilon)},$$

y operando llegamos a

$$(1 - K\gamma\alpha_0)^2 - 4(1 + K\gamma\alpha_0)K\gamma\varepsilon - 4(K\gamma\varepsilon)^2 > 0,$$

que nos conduce a la segunda condición dada en (2.14).

Notemos que

$$1 - K\gamma\alpha_0 + 2K\gamma\varepsilon > \sqrt{8K\gamma\varepsilon(1 + K\gamma\varepsilon)} > 0,$$

de manera que la menor raíz positiva de (2.15) es:

$$R = \frac{1 - K\gamma\alpha_0 + 2K\gamma\varepsilon - \sqrt{(1 - K\gamma\alpha_0)^2 - 4(1 + K\gamma\alpha_0)K\gamma\varepsilon - 4(K\gamma\varepsilon)^2}}{4K\gamma}. \quad (2.16)$$

Probamos a continuación que $K\gamma(2R + \alpha_0) < 1$. Para ello, necesitamos probar previamente que $K\gamma(2\varepsilon + \alpha_0) < 1$. A partir de la segunda condición dada en (2.14), tenemos

$$K\gamma\alpha_0 + 2K\gamma\varepsilon < \sqrt{2(1 + (K\gamma\alpha_0)^2)} - 1.$$

Además, como

$$\sqrt{2(1 + (K\gamma\alpha_0)^2)} - 1 < 1,$$

ya que $2(1 + (K\gamma\alpha_0)^2) < 4$, por verificarse $K\gamma\alpha_0 < 1$, tenemos que $K\gamma\alpha_0 + 2K\gamma\varepsilon = K\gamma(\alpha_0 + 2\varepsilon) < 1$. Ahora, observamos que la condición $K\gamma(2R + \alpha_0) < 1$ es equivalente a la condición

$$1 + K\gamma\alpha_0 + 2K\gamma\varepsilon - \sqrt{(1 - K\gamma\alpha_0 + 2K\gamma\varepsilon)^2 - 8K\gamma\varepsilon(1 + K\gamma\varepsilon)} < 2,$$

que se satisface trivialmente porque $K\gamma(\alpha_0 + 2\varepsilon) < 1$. La desigualdad $R > \varepsilon$ resulta fácil de probar a partir de (2.16). ■

Observemos que en el resultado anterior también podemos considerar la existencia de una raíz doble. Para ello, basta considerar las desigualdades no estrictas.

A continuación damos un lema técnico sobre la sucesión $\{z_n\}$ dada por el método modificado de la secante.

Lema 2.4. *Sea $\{z_n\}$ la sucesión dada por el método modificado de la secante. Supongamos (H1)–(H4). Si $z_{n-1} \neq z_n$ con $z_{n-1}, z_n \in \Omega$, entonces*

$$(i) \quad F(z_n) = (L_n - L_0)(z_n - z_{n-1}), \text{ donde } L_0 = [z_{-1}, z_0; F] \text{ y } L_n = [z_{n-1}, z_n; F],$$

$$(ii) \quad \|z_{n+1} - z_n\| \leq K\gamma(\|z_n - z_0\| + \|z_{n-1} - z_0\| + \|z_0 - z_{-1}\|)\|z_n - z_{n-1}\|.$$

DEMOSTRACIÓN. A partir del algoritmo del método modificado de la secante se sigue $F(z_{n-1}) + L_0(z_n - z_{n-1}) = 0$, de manera que

$$F(z_n) = F(z_n) - F(z_{n-1}) - L_0(z_n - z_{n-1}) = (L_n - L_0)(z_n - z_{n-1}).$$

Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned} \|z_{n+1} - z_n\| &\leq \|L_0^{-1}\| \|F(z_n)\| \\ &\leq \|L_0^{-1}\| \|L_n - L_0\| \|z_n - z_{n-1}\| \\ &\leq K\gamma(\|z_n - z_0\| + \|z_{n-1} - z_{-1}\|) \|z_n - z_{n-1}\| \\ &\leq K\gamma(\|z_n - z_0\| + \|z_{n-1} - z_0\| + \|z_0 - z_{-1}\|) \|z_n - z_{n-1}\|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A continuación, presentamos el siguiente resultado de convergencia semilocal para el método modificado de la secante.

Teorema 2.5. Sean X e Y dos espacios de Banach, $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$ un operador definido en un conjunto abierto convexo no vacío Ω y $z_{-1}, z_0 \in \Omega$ dos puntos distintos. Suponemos que existe $[z_{-1}, z_0; F]^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ y que se cumplen las condiciones (H1)–(H4) y (2.14). Si $B(z_0, R) \subseteq \Omega$, con R dado en (2.16), entonces la sucesión $\{z_n\}$ dada por el método modificado de la secante está bien definida y converge a una solución z^* de la ecuación $F(x) = 0$. Además $z_n, z^* \in \overline{B(z_0, R)}$ y z^* es única en $B(z_0, r) \cap \Omega$, donde $r = \frac{1}{K\gamma} - R - \alpha_0$.

DEMOSTRACIÓN. Comenzamos probando que la sucesión $\{z_n\}$ está bien definida, es decir, $z_n \in B(z_0, R) \subseteq \Omega$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo haremos por inducción sobre n . En primer lugar, consideramos $z_1 = z_0 - L_0^{-1}F(z_0)$, donde $L_0 = [z_{-1}, z_0; F]$. En este caso, por el lema 2.3, tenemos

$$\|z_1 - z_0\| = \|L_0^{-1}F(z_0)\| \leq \varepsilon < R.$$

Luego, $z_1 \in B(z_0, R) \subseteq \Omega$ y podemos definir $z_2 = z_1 - L_0^{-1}F(z_1)$.

A continuación, por el lema 2.4, tenemos

$$\|z_2 - z_1\| \leq K\gamma(\|z_1 - z_0\| + \|z_0 - z_{-1}\|) \|z_1 - z_0\| \leq K\gamma(\varepsilon + \alpha_0)\varepsilon.$$

Por tanto, teniendo en cuenta (2.15) y (2.16), como $K\gamma(2R + \alpha_0) < 1$, se sigue

$$\begin{aligned} \|z_2 - z_0\| &\leq \|z_2 - z_1\| + \|z_1 - z_0\| \\ &\leq (1 + K\gamma(\varepsilon + \alpha_0))\varepsilon \\ &\leq \left(1 + \frac{K\gamma(\varepsilon + \alpha_0)}{1 - K\gamma(2R + \alpha_0)}\right) \varepsilon = R. \end{aligned}$$

Luego, $z_2 \in B(z_0, R) \subseteq \Omega$ y podemos definir $z_3 = z_2 - L_0^{-1}F(z_2)$.

Utilizando inducción sobre n , suponemos que $z_j \in B(z_0, R) \subseteq \Omega$, para $j = 2, 3, \dots, n$,

$$\|z_n - z_{n-1}\| < K\gamma(2R + \alpha_0)\|z_{n-1} - z_{n-2}\|,$$

$$\|z_n - z_0\| \leq \left(1 + K\gamma(\varepsilon + \alpha_0) \sum_{i=0}^{n-2} (K\gamma(2R + \alpha_0))^i\right) \varepsilon < R.$$

Entonces, $z_{n+1} = z_n - L_0^{-1}F(z_n)$ está bien definido. Además,

$$\|z_{n+1} - z_n\| \leq K\gamma(\|z_n - z_0\| + \|z_{n-1} - z_0\| + \|z_0 - z_{-1}\|)\|z_n - z_{n-1}\| < K\gamma(2R + \alpha_0)\|z_n - z_{n-1}\|$$

$$\begin{aligned} \|z_{n+1} - z_0\| &\leq \|z_{n+1} - z_n\| + \|z_n - z_0\| \\ &\leq K\gamma(2R + \alpha_0)\|z_n - z_{n-1}\| + \|z_n - z_0\| \\ &\leq (K\gamma(2R + \alpha_0))^{n-1}\|z_2 - z_1\| + \|z_n - z_0\| \\ &\leq \left(K\gamma(\varepsilon + \alpha_0)(K\gamma(2R + \alpha_0))^{n-1} + K\gamma(\varepsilon + \alpha_0) \sum_{j=0}^{n-2} (K\gamma(2R + \alpha_0))^j + 1 \right) \varepsilon \\ &< \left(1 + \frac{K\gamma(\varepsilon + \alpha_0)}{1 - K\gamma(2R + \alpha_0)} \right) \varepsilon \\ &= R, \end{aligned}$$

de modo que la sucesión $\{z_n\}$ está bien definida.

Por otra parte, resulta evidente que

$$\|z_{n+1} - z_n\| \leq K\gamma(\varepsilon + \alpha_0)(K\gamma(2R + \alpha_0))^{n-1},$$

y, como $K\gamma(2R + \alpha_0) < 1$, se sigue que $\{z_n\}$ es una sucesión de Cauchy, y por tanto convergente a un punto $z^* \in B(z_0, R)$. Veamos que z^* es solución de la ecuación $F(x) = 0$. Como

$$\begin{aligned} \|F(z_n)\| &\leq \|L_0 - L_n\|\|z_n - z_{n-1}\| \\ &\leq K(\|z_n - z_0\| + \|z_{n-1} - z_{-1}\|)\|z_n - z_{n-1}\| \\ &< K(2R + \alpha_0)\|z_n - z_{n-1}\|, \end{aligned}$$

por la continuidad del operador F , es fácil ver que $F(z^*) = 0$.

Finalmente, probamos la unicidad de la solución z^* en $B(z_0, r) \cap \Omega$, donde $r = \frac{1}{K\gamma} - R - \alpha_0$. Suponemos entonces que tenemos otra solución distinta $y^* \in B(z_0, r) \cap \Omega$ de $F(x) = 0$. Consideramos

$$F(y^*) - F(z^*) = \int_{z^*}^{y^*} F'(u) du = \int_0^1 F'(z^* + t(y^* - z^*))(y^* - z^*) dt = 0,$$

y el operador $N = \int_0^1 F'(z^* + t(y^* - z^*)) dt$. Teniendo en cuenta

$$\begin{aligned}
 \|L_0^{-1}N - I\| &\leq \|L_0^{-1}\| \|N - L_0\| \\
 &\leq \|L_0^{-1}\| \int_0^1 \|F'(z^* + t(y^* - z^*)) - L_0\| dt \\
 &\leq \|L_0^{-1}\| \int_0^1 (\|F'(z^* + t(y^* - z^*)) - F'(z_0)\| + \|F'(z_0) - L_0\|) dt \\
 &\leq \gamma \int_0^1 2K \|z^* + t(y^* - z^*) - z_0\| dt + \gamma \|F'(z_0) - L_0\| \\
 &\leq \gamma \int_0^1 2K ((1-t)\|z^* - z_0\| + t\|y^* - z_0\|) dt + K\gamma \|z_0 - z_{-1}\| \\
 &< K\gamma(R + r + \alpha_0) \\
 &= 1,
 \end{aligned}$$

por el lema de Banach sobre inversión de operadores, se sigue que el operador N es invertible, y por tanto $y^* = z^*$. Notemos que $r > R > 0$, puesto que $K\gamma(2R + \alpha_0) < 1$, por cumplirse (2.14) (ver el lema 2.3). ■

Nuestro siguiente objetivo es comparar con mayor exactitud los dominios de parámetros de los métodos tipo secante con el del modificado de la secante. Para ello, tenemos que representar los mismos valores en los ejes de los planos donde pintamos los dominios de los parámetros. Para ello, tenemos que escribir β en función de γ , de manera que así representaremos los valores de los inversos de las mismas diferencias divididas. Entonces, si existe L_0^{-1} y $\|L_0^{-1}\| \leq \varepsilon$, tenemos

$$\|I - L_0^{-1}A_0\| \leq \|L_0^{-1}\| \|L_0 - A_0\| \leq \gamma K \|y_0 - x_{-1}\| \leq \gamma K \lambda \alpha$$

y, siempre que $\gamma K \lambda \alpha < 1$,

$$\|A_0^{-1}\| \leq \frac{\gamma}{1 - \gamma K \lambda \alpha} = \beta.$$

Como se puede observar en la figura 2.10, el dominio de parámetros del método modificado de la secante resuelve el problema que tenían los métodos tipo secante cuando los valores de α_0 o ε son pequeños. Fijando un valor de $K\gamma\alpha_0$ perteneciente al dominio de parámetros, observamos que el valor de $K\gamma\varepsilon$ solo está acotado superiormente (no inferiormente). Por ello, en las regiones de accesibilidad del método modificado de la secante no aparecen zonas huecas conteniendo a la raíz, tal y como ocurre en las de los métodos tipo secante.

Si consideramos de nuevo la ecuación compleja $F(z) = z^3 - 1 = 0$ y observamos las regiones de accesibilidad asociadas a la raíz $z = 1$ para el método modificado de la secante (región roja) y los métodos tipo secante con distintos valores de λ ($\lambda = 0$ (región verde), $\lambda = \frac{1}{4}$ (región rosa), $\lambda = \frac{1}{2}$ (región amarilla) y $\lambda = \frac{3}{4}$ (región morada)) en las condiciones indicadas anteriormente, vemos claramente la mejora que se consigue tomando distintos valores del parámetro α_0 en las figuras 2.11–2.19.

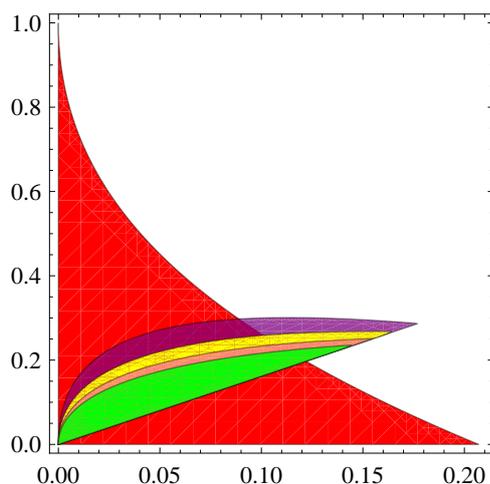


Figura 2.10: Dominios de parámetros del método modificado de la secante correspondiente al teorema 2.5 (región roja) y de los métodos tipo secante correspondientes al teorema 2.2 con $\lambda = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ (regiones verde, rosa, amarilla y morada, respectivamente).

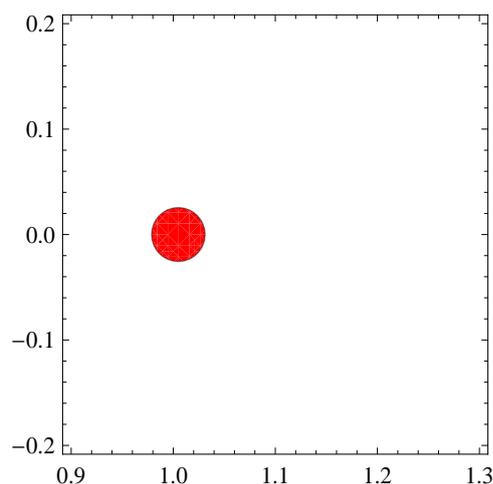


Figura 2.11: Región de accesibilidad asociada a la raíz $z = 1$ de la ecuación $F(z) = z^3 - 1 = 0$ cuando se aproxima mediante el método modificado de la secante secante con $\alpha = \frac{1}{4}$.

2.3. Método iterativo híbrido (predictor-corrector)

A partir de lo visto anteriormente, el objetivo principal es ahora construir, apoyándonos en el método modificado de la secante, una modificación de los métodos tipo secante que mejore su dominio de parámetros y su región de accesibilidad.

2.3.1. Construcción del método

Como se observa en la figura 2.10, los dominios de parámetros de los métodos tipo secante son más reducidos que el dominio de parámetros del método modificado de la

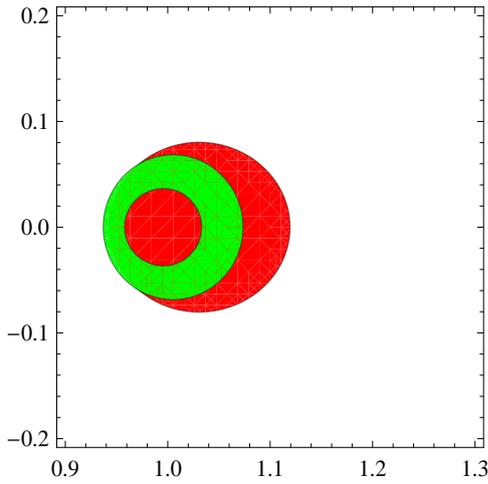


Figura 2.12: Regiones de accesibilidad asociadas a la raíz $z = 1$ de la ecuación $F(z) = z^3 - 1 = 0$ cuando se aproxima mediante el método modificado de la secante (región roja) y el método tipo secante correspondiente a $\lambda = 0$ (región verde) y con $\alpha = \frac{1}{8}$.

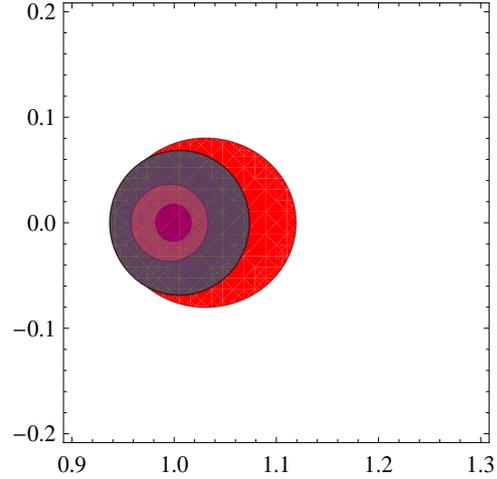


Figura 2.13: Regiones de accesibilidad asociadas a la raíz $z = 1$ de la ecuación $F(z) = z^3 - 1 = 0$ cuando se aproxima mediante el método modificado de la secante (región roja) y el método tipo secante correspondiente a $\lambda = \frac{3}{4}$ (región morada) y con $\alpha = \frac{1}{8}$.

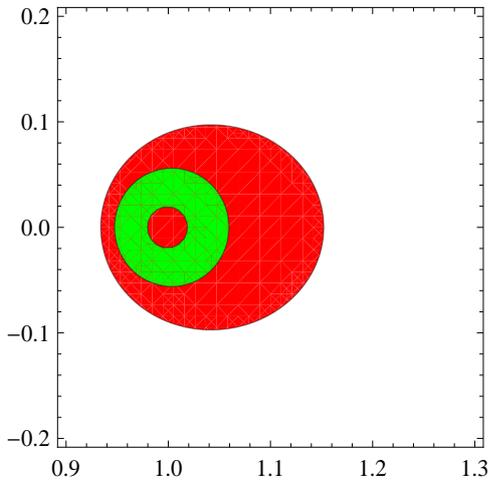


Figura 2.14: Regiones de accesibilidad asociadas a la raíz $z = 1$ de la ecuación $F(z) = z^3 - 1 = 0$ cuando se aproxima mediante el método modificado de la secante (región roja) y el método tipo secante correspondiente a $\lambda = 0$ (región verde) y con $\alpha = \frac{1}{10}$.

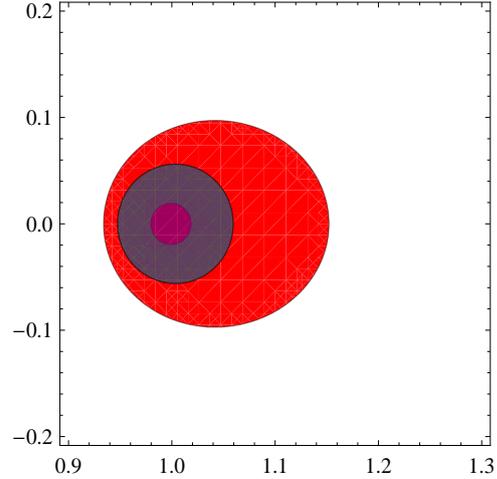


Figura 2.15: Regiones de accesibilidad asociadas a la raíz $z = 1$ de la ecuación $F(z) = z^3 - 1 = 0$ cuando se aproxima mediante el método modificado de la secante (región roja) y el método tipo secante correspondiente a $\lambda = \frac{3}{4}$ (región morada) y con $\alpha = \frac{1}{10}$.

secante. Trataremos entonces de asegurar que para una terna inicial $(\alpha_0, \gamma, \varepsilon)$ que satisfaga las condiciones dadas en (2.14), para estar así dentro del dominio de parámetros del método modificado de la secante, obtengamos una terna (α, β, η) que satisfaga las

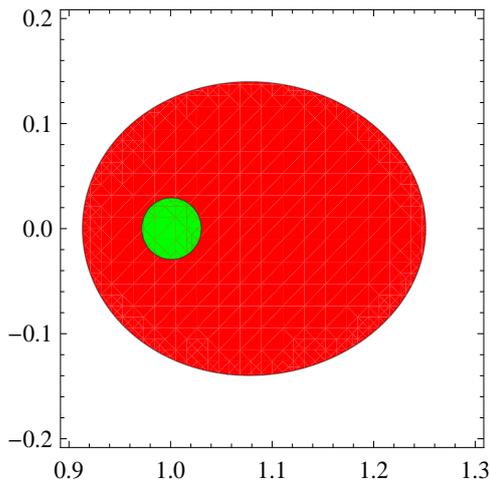


Figura 2.16: Regiones de accesibilidad asociadas a la raíz $z = 1$ de la ecuación $F(z) = z^3 - 1 = 0$ cuando se aproxima mediante el método modificado de la secante (región roja) y el método tipo secante correspondiente a $\lambda = 0$ (región verde) y con $\alpha = \frac{1}{20}$.

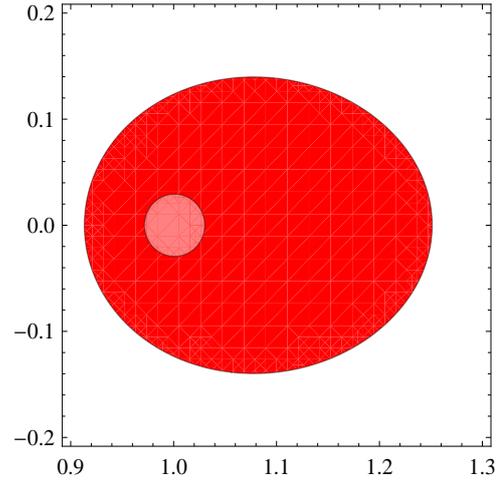


Figura 2.17: Regiones de accesibilidad asociadas a la raíz $z = 1$ de la ecuación $F(z) = z^3 - 1 = 0$ cuando se aproxima mediante el método modificado de la secante (región roja) y el método tipo secante correspondiente a $\lambda = \frac{1}{4}$ (región rosa) y con $\alpha = \frac{1}{20}$.

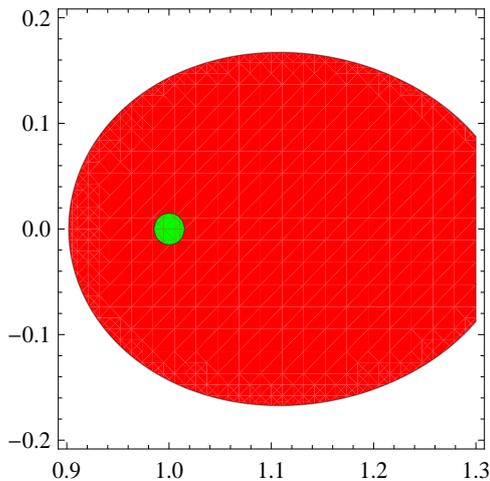


Figura 2.18: Regiones de accesibilidad asociadas a la raíz $z = 1$ de la ecuación $F(z) = z^3 - 1 = 0$ cuando se aproxima mediante el método modificado de la secante (región roja) y el método tipo secante correspondiente a $\lambda = 0$ (región verde) y con $\alpha = \frac{1}{40}$.

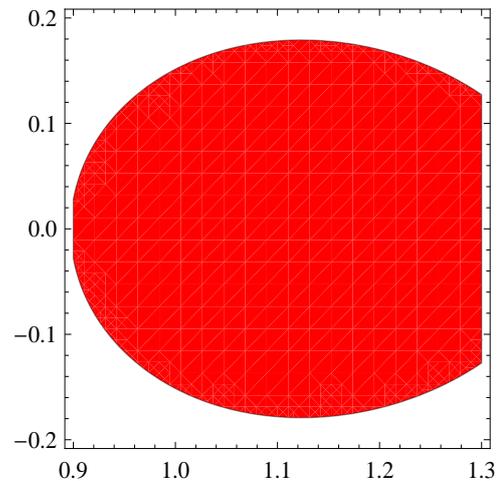


Figura 2.19: Regiones de accesibilidad asociadas a la raíz $z = 1$ de la ecuación $F(z) = z^3 - 1 = 0$ cuando se aproxima mediante el método modificado de la secante (región roja) y el método tipo secante correspondiente a $\lambda = 0$ y con $\alpha = \frac{1}{64}$.

condiciones dadas en (2.7), después de realizar un cierto número de iteraciones N_0 con el método modificado de la secante, de manera que estemos en condiciones de poder garantizar la convergencia de los métodos tipo secante. Cuando esto ocurra, podremos

considerar la terna $(\alpha_{N_0}, \beta_{N_0}, \eta_{N_0})$ como terna inicial (α, β, η) de los métodos tipo secante.

Nuestro objetivo inmediato es entonces construir una sencilla modificación de los métodos tipo secante que sea convergente cuando se toman como puntos de salida los mismos que garantizan la convergencia del método modificado de la secante. Así, consideramos el método iterativo híbrido (predictor-corrector) dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} z_{-1}, z_0 \in \Omega, \\ z_{i+1} = z_i - [z_0, z_{-1}; F]^{-1} F(z_i), \quad i = 0, 1, \dots, N_0 - 1, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x_{-1} = z_{N_0-1}, x_0 = z_{N_0}, \\ x_{n+1} = x_n - [\lambda x_n + (1 - \lambda)x_{n-1}, x_n; F]^{-1} F(x_n), \quad \lambda \in [0, 1), \quad n \geq 0, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.17)$$

donde z_{-1} y z_0 satisfacen (2.14), mientras que $x_{-1} = z_{N_0-1}$ y $x_0 = z_{N_0}$ satisfacen (2.7). Para que el método (2.17) sea convergente, nos planteamos dos cuestiones:

1. Localizar z_{-1} y z_0 de manera que el método predictor (método modificado de la secante) sea convergente.
2. Utilizando la convergencia del método predictor, calcular un valor N_0 tal que z_{N_0-1} y z_{N_0} sean considerados como puntos iniciales a partir de los cuales la convergencia del método corrector (la familia de métodos tipo secante para un valor fijo de λ) esté garantizada.

Así, utilizaremos el método modificado de la secante durante un número finito de pasos N_0 hasta que $z_{N_0-1} = x_{-1}$ y $z_{N_0} = x_0$ cumplan las condiciones dadas en (2.7), y después aplicaremos los métodos tipo secante en vez del método modificado de la secante. La clave del problema está entonces en garantizar la existencia de N_0 .

2.3.2. Convergencia semilocal del método

A continuación, vamos a estudiar la convergencia semilocal del método (2.17). A partir del método predictor, consideramos la siguiente situación. Dadas las aproximaciones iniciales z_{-1} y z_0 , consideramos la sucesión $\{z_n\}$ definida por el método modificado de la secante y denotamos $M = K\gamma(2R + \alpha_0)$.

Para que el método modificado de la secante sea convergente, sabemos que la terna inicial $(\alpha_0, \gamma, \varepsilon)$ debe verificar las condiciones dadas en (2.14). Nos planteamos ahora cómo encontrar N_0 de manera que, a partir de la iteración N_0 del método modificado de la secante, podamos considerar los métodos tipo secante con $x_{-1} = z_{N_0-1}$ y $x_0 = z_{N_0}$ cumpliendo (2.7), y, así vamos definiendo las ternas $(\alpha_n, \beta_n, \eta_n)$.

En primer lugar, observamos que la definición de la terna inicial $(\alpha_0, \beta_0, \eta_0)$ para los métodos tipo secante es inmediata sin más que tener en cuenta $\beta_0 = \frac{\gamma}{1 - M}$ y $\eta_0 = \varepsilon$, puesto que

$$\|I - L_0^{-1}A_0\| \leq \|L_0^{-1}\| \|L_0 - A_0\| \leq \gamma K \lambda \alpha_0 < \gamma K \alpha_0 < M < 1.$$

A continuación, procedemos de la siguiente forma.

- **Primer paso del método predictor:** definición de la terna $(\alpha_1, \beta_1, \eta_1)$.

Como

$$\|z_1 - z_0\| = \|L_0^{-1}F(z_0)\| \leq \varepsilon = \eta_0 = \alpha_1,$$

$$\begin{aligned} \|I - L_0^{-1}A_1\| &\leq \|L_0^{-1}\| \|L_0 - A_1\| \\ &\leq \gamma K (\|\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_0 - z_{-1}\| + \|z_1 - z_0\|) \\ &\leq \gamma K ((1 + \lambda)\|z_1 - z_0\| + \|z_0 - z_{-1}\|) \\ &\leq \gamma K ((1 + \lambda)R + \alpha_0) \\ &< M, \end{aligned}$$

$$\|A_1^{-1}\| = \|[\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_0, z_1; F]^{-1}\| \leq \frac{\gamma}{1 - M} = \beta_1,$$

$$\begin{aligned} \|F(z_1)\| &\leq \|L_1 - L_0\| \|z_1 - z_0\| \\ &\leq K (\|z_0 - z_{-1}\| + \|z_1 - z_0\|) \|z_1 - z_0\| \\ &\leq K(\alpha_0 + \varepsilon) \|z_1 - z_0\|, \end{aligned}$$

$$\|z_2 - z_1\| \leq \|L_0^{-1}\| \|F(z_1)\| \leq \gamma K(\alpha_0 + \varepsilon)\eta_0 \leq \gamma K(2R + \alpha_0)\eta_0 = M\eta_0 = \eta_1,$$

siempre que $M < 1$. Además, $\eta_1 = M\eta_0 < \eta_0$ si $M < 1$.

- **Segundo paso del método predictor:** definición de la terna $(\alpha_2, \beta_2, \eta_2)$.

Como

$$\|z_2 - z_1\| = \|L_0^{-1}F(z_1)\| \leq \|L_0^{-1}\| \|F(z_1)\| \leq \gamma K(\alpha_0 + \varepsilon)\eta_0 \leq \eta_1 = \alpha_2,$$

$$\begin{aligned} \|I - L_0^{-1}A_2\| &\leq \|L_0^{-1}\| \|L_0 - A_2\| \\ &\leq \gamma K (\|\lambda z_2 + (1 - \lambda)z_1 - z_{-1}\| + \|z_2 - z_0\|) \\ &\leq \gamma K ((1 + \lambda)\|z_2 - z_0\| + (1 - \lambda)\|z_1 - z_0\| + \|z_0 - z_{-1}\|) \\ &\leq \gamma K(2R + \alpha_0) \\ &= M, \end{aligned}$$

$$\|A_2^{-1}\| = \|[\lambda z_2 + (1 - \lambda)z_1, z_1; F]^{-1}\| \leq \frac{\gamma}{1 - M} = \beta_2,$$

$$\begin{aligned} \|F(z_2)\| &\leq \|L_2 - L_0\| \|z_2 - z_1\| \\ &\leq K (\|z_1 - z_{-1}\| + \|z_2 - z_0\|) \|z_2 - z_1\| \\ &\leq K(2R + \alpha_0) \|z_2 - z_1\|, \end{aligned}$$

$$\|z_3 - z_2\| \leq \|L_0^{-1}\| \|F(z_2)\| \leq \gamma K(2R + \alpha_0)\|z_2 - z_1\| \leq M\eta_1 = \eta_2,$$

siempre que $M < 1$. Además, $\alpha_2 = \eta_1 = M\eta_0 = M\alpha_1 < \alpha_1$ y $\eta_2 = M\eta_1 = M^2\eta_0 < \eta_0$ si $M < 1$.

- **n -ésimo paso del método predictor:** definición de la terna $(\alpha_n, \beta_n, \eta_n)$.

Como

$$\begin{aligned} \|z_n - z_{n-1}\| &= \|L_0^{-1}F(z_{n-1})\| \leq \|L_0^{-1}\| \|F(z_{n-1})\| \\ &\leq \gamma K(2R + \alpha_0) \|z_{n-1} - z_{n-2}\| \\ &\leq \gamma K(2R + \alpha_0) \eta_{n-2} \\ &= M \eta_{n-2} = \eta_{n-1} = \alpha_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|I - L_0^{-1}A_n\| &\leq \|L_0^{-1}\| \|L_0 - A_n\| \\ &\leq \gamma K (\|\lambda z_n + (1 - \lambda)z_{n-1} - z_{-1}\| + \|z_n - z_0\|) \\ &\leq \gamma K ((1 + \lambda)\|z_n - z_0\| + (1 - \lambda)\|z_{n-1} - z_0\| + \|z_0 - z_{-1}\|) \\ &\leq \gamma K(2R + \alpha_0) \\ &= M, \end{aligned}$$

$$\|A_n^{-1}\| = \left\| [\lambda z_n + (1 - \lambda)z_{n-1}, z_n; F]^{-1} \right\| \leq \frac{\gamma}{1 - M} = \beta_n,$$

$$\begin{aligned} \|F(z_n)\| &\leq \|L_n - L_0\| \|z_n - z_{n-1}\| \\ &\leq K (\|z_{n-1} - z_{-1}\| + \|z_n - z_0\|) \|z_n - z_{n-1}\| \\ &\leq K(2R + \alpha_0) \|z_n - z_{n-1}\|, \end{aligned}$$

$$\|z_{n+1} - z_n\| \leq \|L_0^{-1}\| \|F(z_n)\| \leq \gamma K(2R + \alpha_0) \|z_n - z_{n-1}\| \leq M \eta_{n-1} = \eta_n,$$

siempre que $M < 1$. Además, $\alpha_n = \eta_{n-1} = M^{n-1} \eta_0 = M^{n-1} \alpha_1 < \alpha_1$ y $\eta_n = M \eta_{n-1} = M^n \eta_0 < \eta_0$ si $M < 1$.

Una vez construida la terna $(\alpha_n, \beta_n, \eta_n)$ formada por las sucesiones reales $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ y $\{\eta_n\}$, buscamos un valor $N_0 \in \mathbb{N}$, de manera que la terna $(\alpha_{N_0}, \beta_{N_0}, \eta_{N_0})$ verifique las correspondientes condiciones de convergencia dadas en (2.7) para los métodos tipo secante.

En primer lugar, consideramos la correspondiente primera condición de (2.7):

$$\frac{\eta_{N_0}}{\alpha_{N_0} + \eta_{N_0}} < \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Como $\eta_n = M \eta_{n-1}$ y $\alpha_n = \eta_{n-1}$, la condición anterior se transforma en

$$\frac{M}{1 + M} < \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad M < \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Debido al tipo de sucesiones que hemos definido y las cotas que hemos utilizado, observamos que el cálculo de nuevas iteraciones con el método predictor no permite verificar la condición a partir de un n , luego esta condición tendremos que imponerla inicialmente. Notemos que esta condición no representa una restricción excesiva.

En segundo lugar, la correspondiente segunda condición de (2.7) se transforma en

$$K\beta_{N_0} < \frac{\eta_{N_0}}{(\alpha_{N_0} + \eta_{N_0})(\alpha_{N_0} + \eta_{N_0} - \lambda(\alpha_{N_0} - \eta_{N_0}))}.$$

Luego

$$\frac{K\gamma}{1-M} < \frac{M\eta_{N_0-1}}{(1+M)\eta_{N_0-1}(1+M-\lambda(1-M))\eta_{N_0-1}} = \frac{M}{(1+M)(1+M-\lambda(1-M))\eta_{N_0-1}},$$

de manera que

$$K\gamma\eta_{N_0-1} < \frac{M(1-M)}{(1+M)(1+M-\lambda(1-M))},$$

y así

$$M^{N_0-1}K\gamma\eta_0 < \frac{M(1-M)}{(1+M)(1+M-\lambda(1-M))}.$$

Teniendo en cuenta ahora que $M < 1$ y $\eta_0 = \varepsilon$, podemos escribir

$$N_0 > 1 + \frac{\log\left(\frac{M(1-M)}{(1+M)(1+M-\lambda(1-M))}\right) - \log(K\gamma\varepsilon)}{\log M}.$$

En consecuencia, si denotamos la parte entera del número real t por $[t]$ y tomamos

$$N_0 = 1 + \left[1 + \frac{\log\left(\frac{M(1-M)}{(1+M)(1+M-\lambda(1-M))}\right) - \log(K\gamma\varepsilon)}{\log M} \right], \quad (2.18)$$

fijado $\lambda \in [0, 1)$, ya podemos asegurar que los métodos tipo secante convergen cuando parten de los puntos $x_{-1} = z_{N_0-1}$ y $x_0 = z_{N_0}$, donde N_0 está definido en (2.18).

Finalmente, una vez estimado a priori el valor de N_0 , resumimos todo lo anterior en el siguiente resultado.

Teorema 2.6. Sean X e Y dos espacios de Banach, $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$ un operador definido en un conjunto abierto convexo no vacío Ω y $z_{-1}, z_0 \in \Omega$ dos puntos distintos. Suponemos que existe $[z_{-1}, z_0; F]^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ y que se cumplen las condiciones (H1)–(H4) y (2.14). Si $B(z_0, R) \subseteq \Omega$, con R dado en (2.16) y $M = K\gamma(2R + \alpha_0) < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, entonces la sucesión dada por el método híbrido (2.17) está bien definida y converge a una solución de la ecuación $F(x) = 0$, donde N_0 está definido en (2.18).

2.4. Aplicación

Hemos justificado anteriormente que la aplicación de los métodos tipo secante es más restrictiva que la del método modificado de la secante. Veamos con un ejemplo que esto es así. Consideramos la siguiente ecuación integral no lineal de tipo Hammerstein

$$x(s) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 G(s, t) x(t)^2 dt, \quad s \in [0, 1], \quad (2.19)$$

donde $x \in C[0, 1]$, $t \in [0, 1]$ y G es la función de Green en $[0, 1] \times [0, 1]$.

A continuación, transformamos la ecuación integral (2.19) en un problema de dimensión finita, tal y como se hizo en la sección 1.5.1, de manera que la ecuación (2.19) se transforma en el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$F(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x} - \mathbf{1} - \frac{1}{2} A \mathbf{v}_x = 0, \quad F : \mathbb{R}^8 \longrightarrow \mathbb{R}^8, \quad (2.20)$$

donde

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_8)^T, \quad \mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^8, \quad \mathbf{v}_x = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_8^2)^T.$$

Además, tomando el operador diferencia dividida $[\mathbf{u}, \mathbf{v}; F] = ([\mathbf{u}, \mathbf{v}; F]_{ij})_{i,j=1}^8 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^8, \mathbb{R}^8)$, con

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}; F]_{ij} = \frac{1}{u_j - v_j} (F_i(u_1, \dots, u_j, v_{j+1}, \dots, v_8) - F_i(u_1, \dots, u_{j-1}, v_j, \dots, v_8)),$$

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_8)^T$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_8)^T$, tenemos que $[\mathbf{u}, \mathbf{v}; F] = I - B$, donde $B = (b_{ij})_{i,j=1}^8$ con $b_{ij} = \frac{1}{2} a_{ij} (u_j + v_j)$.

Eligiendo $\mathbf{z}_{-1} = (9/10, 9/10, \dots, 9/10)^T$ y $\mathbf{z}_0 = (1, 1, \dots, 1)^T$ como puntos de salida y la norma del máximo, obtenemos $\alpha_0 = 0.1$, $\gamma = 1.1305\dots$, $\varepsilon = 0.0687\dots$, $K = 0.0617\dots$, $K\gamma\alpha_0 = 0.0069\dots$ y $K\gamma\varepsilon = 0.0047\dots$. Por tanto, se puede ver que se verifican las dos condiciones de (2.14) y podemos aplicar entonces el método modificado de la secante para aproximar una solución del sistema (2.20). Por contra, no podemos utilizar los métodos tipo secante, ya que la primera condición de (2.7) no se satisface, puesto que

$$\frac{\eta}{\alpha + \eta} = 0.4072\dots > \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0.3819\dots,$$

donde $\alpha = \alpha_0$ y $\eta = \varepsilon$.

Por el teorema 2.5, el método modificado de la secante es convergente y, después de ocho iteraciones y usando el criterio de parada $\|\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1}\| < 10^{-16}$, obtenemos la aproximación numérica $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_8^*)^T$ de la solución de (2.20) que vemos en la tabla 2.1. En la tabla 2.2 mostramos los errores $\|\mathbf{z}_n - \mathbf{x}^*\|$ obtenidos usando el mismo criterio de parada. Notemos que el vector dado en la tabla 2.1 es una buena aproximación de la solución del sistema (2.20), puesto que $\|F(\mathbf{x}^*)\| \leq C \times 10^{-16}$. Mostramos la sucesión $\{\|F(\mathbf{z}_n)\|\}$ en la tabla 2.2.

Además, por el teorema 2.5, la existencia de la solución está garantizada en $\overline{B(\mathbf{z}_0, 1.1683\dots)}$ y es única en $B(\mathbf{z}_0, 13.0286\dots)$.

Ahora, vamos a aplicar el método híbrido (2.17) con $\lambda = \frac{1}{2}$ para aproximar la solución de (2.20) dada en la tabla 2.1. Para esto, calculamos el valor N_0 determinado por el teorema 2.6. De acuerdo con la fórmula (2.18), $N_0 = 1$ para $\lambda = \frac{1}{2}$; por tanto, después de una iteración del método modificado de la secante, aplicamos el método tipo secante

i	x_i^*	i	x_i^*	i	x_i^*	i	x_i^*
1	1.005450...	3	1.051629...	5	1.069365...	7	1.025815...
2	1.025815...	4	1.069365...	6	1.051629...	8	1.005450...

Tabla 2.1: Aproximación de la solución \mathbf{x}^* de (2.20)

n	$\ \mathbf{z}_n - \mathbf{x}^*\ $	$\ F(\mathbf{z}_n)\ $
-1	$1.6936... \times 10^{-1}$	$1.5004... \times 10^{-1}$
0	$6.9365... \times 10^{-2}$	$6.1779... \times 10^{-2}$
1	$6.6461... \times 10^{-4}$	$5.9142... \times 10^{-4}$
2	$8.6314... \times 10^{-6}$	$7.6848... \times 10^{-6}$
3	$1.1194... \times 10^{-7}$	$9.9676... \times 10^{-8}$
4	$1.4513... \times 10^{-9}$	$1.2922... \times 10^{-9}$
5	$1.8814... \times 10^{-11}$	$1.6752... \times 10^{-11}$
6	$2.4390... \times 10^{-13}$	$2.1717... \times 10^{-13}$
7	$3.1619... \times 10^{-15}$	$2.8154... \times 10^{-15}$

Tabla 2.2: Errores absolutos obtenidos con el método modificado de la secante y $\{\|F(\mathbf{z}_n)\|\}$

correspondiente a $\lambda = \frac{1}{2}$ y obtenemos la solución aproximada dada en la tabla 2.1 después de tres iteraciones más. En la tabla 2.3 se pueden ver los errores $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\|$ con el criterio de parada $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}\| < 10^{-16}$, así como la sucesión $\{\|F(\mathbf{x}_n)\|\}$.

n	$\ \mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\ $	$\ F(\mathbf{x}_n)\ $
-1	$1.6936... \times 10^{-1}$	$1.5004... \times 10^{-1}$
0	$6.9365... \times 10^{-2}$	$6.1779... \times 10^{-2}$
1	$6.6461... \times 10^{-4}$	$5.9142... \times 10^{-4}$
2	$1.5148... \times 10^{-10}$	$1.3499... \times 10^{-10}$
3	$2.6106... \times 10^{-15}$	$2.3266... \times 10^{-15}$

Tabla 2.3: Errores absolutos obtenidos con el método híbrido (2.17) correspondiente a $\lambda = \frac{1}{2}$ y $\{\|F(\mathbf{x}_n)\|\}$

Capítulo 3

Una mejora de la accesibilidad de los métodos tipo secante mediante una modificación de la teoría basada en relaciones de recurrencia

En este capítulo, vamos a estudiar la convergencia semilocal los métodos tipo secante teniendo en cuenta dos objetivos. En primer lugar, a partir de una modificación de la técnica de demostración utilizada en [62], obtenemos un resultado nuevo de convergencia semilocal para los métodos tipo secante que mejora notablemente el dominio de parámetros que se obtiene en [62]. Además, el resultado aquí obtenido permitirá obtener un resultado nuevo de convergencia semilocal cuando el operador F es no diferenciable, situación no contemplada en [62] y que se deducirá gracias a la novedosa condición que se exige a la diferencia dividida de primer orden de F .

En la sección 3.1 mostramos el principal problema que presenta el estudio de la convergencia semilocal dado en [62] para los métodos tipo secante, que tal y como hemos visto en el capítulo anterior, es que el correspondiente dominio de parámetros es reducido, lo que limita la aplicación de estos métodos para resolver $F(x) = 0$. En la sección 3.2 vemos que el dominio de parámetros anterior se puede mejorar utilizando una variante de la técnica de demostración de la convergencia semilocal presentada en [62], que como hemos dicho anteriormente nos va a permitir considerar situaciones en las que el operador F es no diferenciable. Finalmente, en la sección 3.3, ilustraremos lo anterior con dos sistemas no lineales, uno diferenciable y otro no diferenciable.

3.1. Planteamiento del problema

Hemos visto en el capítulo anterior que en [62] se presentan los métodos tipo secante y se da un resultado de convergencia semilocal bajo la exigencia de que exista la diferencia dividida de primer orden del operador F para cada par de puntos distintos en Ω y que se cumplan las siguientes condiciones iniciales:

$$(C1) \quad \|x_0 - x_{-1}\| = \alpha \neq 0 \text{ con } x_{-1}, x_0 \in \Omega,$$

$$(C2) \quad \text{fijado } \lambda \in [0, 1], \text{ existe } A_0^{-1} = [y_0, x_0; F]^{-1} \text{ y es tal que } \|A_0^{-1}\| \leq \beta,$$

$$(C3) \quad \|[y_0, x_0; F]^{-1}F(x_0)\| \leq \eta,$$

$$(C4) \quad \|[x, y; F] - [u, v; F]\| \leq K(\|x - u\| + \|y - v\|), \quad K \geq 0, \quad x, y, u, v \in \Omega, \\ x \neq y, \quad u \neq v.$$

Se obtienen entonces condiciones suficientes para que se dé la convergencia semilocal de los métodos tipo secante y que están dadas en el siguiente resultado, ya introducido en el capítulo anterior (teorema 2.2).

Teorema 3.1. *Sean X e Y dos espacios de Banach, $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$ un operador definido en un conjunto abierto convexo no vacío Ω , $x_{-1}, x_0 \in \Omega$ dos puntos distintos y $\lambda \in [0, 1)$. Supongamos que se cumplen las condiciones (C1)–(C4). Si $B(x_0, r) \subseteq \Omega$, donde $r = \frac{1-a}{1-2a}\eta$ y*

$$a = \frac{\eta}{\alpha + \eta} < \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad y \quad b = \frac{K\beta\alpha^2}{\alpha + \eta} < \frac{a(1-a)^2}{1 + \lambda(2a-1)}, \quad (3.1)$$

entonces los métodos tipo secante convergen a una solución x^* de la ecuación $F(x) = 0$ con R -orden de convergencia al menos $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Además, si $x_n, x^* \in B(x_0, r)$, la solución x^* es única en $B(x_0, \tau) \cap \Omega$, donde $\tau = \frac{1}{K\beta} - r - (1 - \lambda)\alpha$.

Hemos visto en el capítulo anterior que las condiciones (3.1) con $\lambda \in [0, 1)$, considerando $x = K\beta\eta$ e $y = K\beta\alpha$, permiten construir el correspondiente dominio de parámetros, que es la región del plano xy cuyos puntos aseguran que las condiciones de convergencia se cumplen y proporcionan la convergencia de los métodos tipo secante. De nuevo, para representarlo gráficamente, se colorean en el plano xy los valores de los parámetros que verifican las condiciones (3.1) que se imponen en el teorema 3.1. Observamos de nuevo que las condiciones iniciales (C1)–(C3) exigidas a los puntos de salida introducen los parámetros α , β y η , mientras que la condición (C4) exigida al operador introduce el parámetro fijo K . En primer lugar expresaremos las dos condiciones de forma explícita a partir de los valores que se consideran para construir el dominio de parámetros: $x = K\beta\eta$ e $y = K\beta\alpha$, de manera que las condiciones (3.1) se transforman en

$$\frac{x}{x+y} < \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad y \quad 1 < \frac{x}{(x+y)(x+y + \lambda(x-y))}. \quad (3.2)$$

A continuación, dibujamos en la figura 3.1 los dominios de parámetros que están sujetos a las condiciones (3.2) para distintos valores de $\lambda \in [0, 1)$: $\lambda = 0$ (región verde), $\lambda = \frac{1}{4}$ (región rosa), $\lambda = \frac{1}{2}$ (región amarilla) y $\lambda = \frac{3}{4}$ (región morada).

Recordamos las dos situaciones que se observan en la figura 3.1, que es la misma que la figura 2.1 del capítulo anterior. En primer lugar, la elección de adecuados puntos de salida x_{-1} y x_0 para los métodos tipo secante es muy restrictiva, puesto que el dominio de parámetros es muy reducido, lo que limita las posibilidades de elegir buenas aproximaciones iniciales x_{-1} y x_0 . En segundo lugar, observamos que si consideramos un valor fijo de $K\beta\alpha$ perteneciente al dominio de parámetros, los posibles valores que se pueden tomar de $K\beta\eta$, para que pertenezcan al dominio de parámetros, tienen cotas superior e inferior. Esto hace que incluso tomando la propia raíz como punto de salida, $K\beta\eta = 0$, no obtengamos valores de los parámetros de salida que verifiquen el resultado

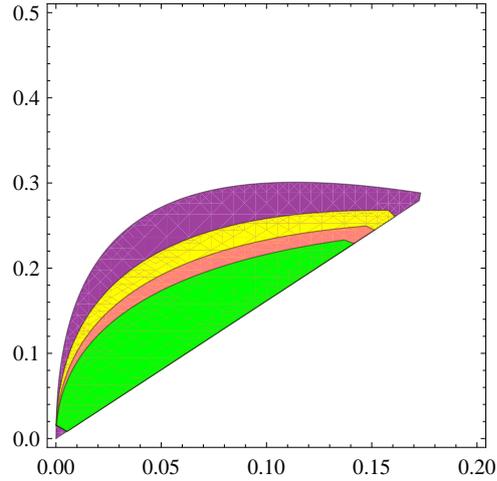


Figura 3.1: Dominios de parámetros de los métodos tipo secante correspondientes al teorema 3.1 con $\lambda = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ (regiones verde, rosa, amarilla y morada, respectivamente).

de convergencia semilocal, lo que resulta evidente a partir de la segunda condición de (3.2), puesto que obviamente nunca se verificará la desigualdad para $\alpha > 0$ y $\eta = 0$ (es decir, $x_0 = x^*$). Para eliminar estas deficiencias, utilizamos una técnica diferente a la utilizada en [62]. Tenemos como primer objetivo de este capítulo mejorar notablemente el dominio de parámetros de los métodos tipo secante (figura 3.1) que se obtiene a partir del teorema 3.1.

Por otra parte, si consideramos ecuaciones integrales no lineales de tipo Hammerstein mixto, como las presentadas en la sección 1.5.1 con (1.17) y

$$H(t, x(t)) = \delta x(t)^2 + \mu |x(t)|, \quad \delta, \mu \in \mathbb{R}, \quad \mu \neq 0,$$

y las transformamos, mediante un proceso de discretización, en sistemas de ecuaciones no lineales de la forma

$$F(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x} - \mathbf{f} - A(\delta \mathbf{v}_x + \mu \mathbf{w}_x) = 0, \quad F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad (3.3)$$

donde $\mathbf{v}_x = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_m^2)^T$, $\mathbf{w}_x = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_m|)^T$, $\delta, \mu \in \mathbb{R}$ y $\mu \neq 0$, es obvio que la función F definida en (3.3) es no lineal y no diferenciable. Además, en este caso, $[\mathbf{u}, \mathbf{v}; F] = I - (\delta B + \mu C)$, donde $B = (b_{ij})_{i,j=1}^m$ con $b_{ij} = a_{ij}(u_j + v_j)$ y $C = (c_{ij})_{i,j=1}^m$ con $c_{ij} = a_{ij} \frac{|u_j| - |v_j|}{u_j - v_j}$, de manera que

$$\|[\mathbf{x}, \mathbf{y}; F] - [\mathbf{u}, \mathbf{v}; F]\| \leq L + K(\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|) \text{ con } L = 2|\mu| \|A\| \text{ y } K = |\delta| \|A\|. \quad (3.4)$$

Por tanto, si en vez de exigir la condición (C4) para la diferencia dividida de primer orden del operador F , exigimos una condición del tipo (3.4) a F en el espacio de Banach X , la dada por

$$\| [x, y; F] - [u, v; F] \| \leq L + K(\|x - u\| + \|y - v\|); L, K \geq 0; x, y, u, v \in \Omega; x \neq y; u \neq v, \quad (3.5)$$

podremos considerar situaciones en las que el operador F sea no diferenciable, como por ejemplo la indicada anteriormente para la función F definida en (3.3).

Así, para el caso anterior, vamos a obtener un nuevo resultado de convergencia semilocal exigiendo la condición (3.5) al operador F , resultado que para $L = 0$ nos permitirá mejorar los dominios de parámetros obtenidos en [62] para los métodos tipo secante cuando el operador F es diferenciable, mientras que para $L \neq 0$ nos permitirá obtener un resultado nuevo de convergencia semilocal cuando el operador F es no diferenciable.

3.2. Mejora del dominio de puntos de salida

Nuestro primer objetivo es entonces ampliar el dominio de parámetros de los métodos tipo secante. Para ello desarrollaremos una nueva técnica para analizar la convergencia semilocal de estos métodos, que además nos va a permitir utilizar los métodos tipo secante para resolver ecuaciones en las que el operador F es no diferenciable. Como en [62], exigimos que exista una diferencia dividida de primer orden del operador F para cada par de puntos distintos de Ω .

Por otra parte, si la sucesión $\{x_n\}$ está generada por los métodos tipo secante, resulta evidente que existirán todas las diferencias divididas de primer orden $[y_k, x_k; F]$, salvo que $x_k = y_k$, en cuyo caso resulta evidente que x_k es una solución de la ecuación $F(x) = 0$ y entonces $x_n = x_k$, para todo $n \geq k$, de manera que la sucesión $\{x_n\}$ es convergente a $x_k \equiv x^*$ solución de $F(x) = 0$.

Teniendo en cuenta estas ideas, comenzamos dando un lema técnico que utilizaremos posteriormente.

Lema 3.2. *Sea $\{x_n\}$ la sucesión dada por los métodos tipo secante. Si $x_{m-1} \neq x_m$ con $x_{m-1}, x_m \in \Omega$, entonces*

$$F(x_m) = ([x_m, x_{m-1}; F] - A_{m-1})(x_m - x_{m-1}), \quad \text{donde } A_{m-1} = [y_{m-1}, x_{m-1}; F].$$

DEMOSTRACIÓN. A partir de la definición de $\{x_n\}$ se sigue que

$$F(x_m) + [y_{m-1}, x_{m-1}; F](x_m - x_{m-1}) = 0,$$

de manera que

$$\begin{aligned} F(x_m) &= F(x_m) - F(x_{m-1}) - [y_{m-1}, x_{m-1}; F](x_m - x_{m-1}) \\ &= [x_m, x_{m-1}; F](x_m - x_{m-1}) - [y_{m-1}, x_{m-1}; F](x_m - x_{m-1}) \\ &= ([x_m, x_{m-1}; F] - A_{m-1})(x_m - x_{m-1}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A continuación presentamos el nuevo resultado de convergencia semilocal para los métodos tipo secante.

Teorema 3.3. *Sean X e Y dos espacios de Banach y $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$ un operador no lineal definido en un dominio abierto convexo no vacío Ω . Suponemos que existe $[x, y; F] \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\forall x, y \in \Omega$ ($x \neq y$), y que se cumplen las condiciones (C1), (C2), (C3) y (3.5). Fijado $\lambda \in [0, 1)$, si la ecuación*

$$h(t) = t \left(1 - \frac{m}{1 - \beta(L + K(2t + (1 - \lambda)\alpha))} \right) - \eta = 0, \quad (3.6)$$

donde $m = \max\{\beta(L + K((1 - \lambda)\alpha + \eta)), \beta(L + (2 - \lambda)K\eta)\}$ tiene al menos una raíz positiva, y denotamos por R la raíz positiva más pequeña de (3.6),

$$\beta(L + K(2R + (1 - \lambda)\alpha)) < 1 \quad (3.7)$$

y $\overline{B(x_0, R)} \subset \Omega$, entonces los métodos tipo secante, empezando en x_{-1} y x_0 , está bien definida y converge a una solución x^* de $F(x) = 0$. Además, la solución x^* y las iteraciones x_n pertenecen a $\overline{B(x_0, R)}$ y x^* es única en $B(x_0, R)$.

DEMOSTRACIÓN. Comenzamos probando que la sucesión $\{x_n\}$ está bien definida, es decir, $x_n \in B(x_0, R) \subset \Omega$, $\forall n \in \mathbb{N}$. A partir de (C3) se sigue que x_1 está bien definida y que $\|x_1 - x_0\| = \|A_0^{-1}F(x_0)\| \leq \eta < R$, por ser R solución de (3.6). Luego $x_1 \in B(x_0, R)$.

A continuación, utilizando (3.5) vemos que

$$\begin{aligned} \|I - A_0^{-1}A_1\| &\leq \|A_0^{-1}\| \|A_0 - A_1\| \\ &\leq \beta(L + K(\|y_1 - y_0\| + \|x_1 - x_0\|)) \\ &\leq \beta(L + K((1 + \lambda)\|x_1 - x_0\| + (1 - \lambda)\|x_0 - x_{-1}\|)) \\ &\leq \beta(L + K((1 + \lambda)R + (1 - \lambda)\alpha)) \\ &\leq \beta(L + K(2R + (1 - \lambda)\alpha)) < 1, \end{aligned}$$

y por el lema de Banach sobre inversión de operadores, tenemos que A_1^{-1} existe y es tal que

$$\|A_1^{-1}\| \leq \frac{\beta}{1 - \beta(L + K(2R + (1 - \lambda)\alpha))}.$$

Además, por el lema 3.2, se sigue que $F(x_1) = ([x_1, x_0; F] - A_0)(x_1 - x_0)$, de manera que

$$\begin{aligned} \|F(x_1)\| &\leq \|[x_1, x_0; F] - A_0\| \|x_1 - x_0\| \\ &\leq (L + K\|y_0 - x_1\|)\|x_1 - x_0\| \\ &\leq (L + K(\|y_0 - x_0\| + \|x_1 - x_0\|))\|x_1 - x_0\| \\ &\leq (L + K((1 - \lambda)\alpha + \eta))\|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \|x_2 - x_1\| &\leq \|A_1^{-1}\| \|F(x_1)\| \\ &\leq \frac{\beta(L + K((1 - \lambda)\alpha + \eta))}{1 - \beta(L + K(2R + (1 - \lambda)\alpha))} \|x_1 - x_0\| \\ &\leq P \|x_1 - x_0\| \\ &< \eta, \end{aligned}$$

donde $P = \frac{m}{1 - \beta(L + K(2R + (1 - \lambda)\alpha))} < 1$, y

$$\|x_2 - x_0\| \leq \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leq (1 + P)\|x_1 - x_0\| = \frac{1 - P^2}{1 - P} \|x_1 - x_0\| < \frac{\eta}{1 - P} = R.$$

Por lo tanto, $x_2 \in B(x_0, R)$.

Ahora, podemos demostrar por inducción matemática sobre n que se cumplen los siguientes ítems para $n \in \mathbb{N}$:

- El operador A_{n-1}^{-1} existe y es tal que $\|A_{n-1}^{-1}\| \leq \frac{\beta}{1 - \beta(L + K(2R + (1 - \lambda)\alpha))}$,
- $\|x_n - x_{n-1}\| \leq P \|x_{n-1} - x_{n-2}\| \leq P^{n-1} \|x_1 - x_0\| < \eta$,
- $\|x_{n+1} - x_0\| \leq \frac{1 - P^{n+1}}{1 - P} \|x_1 - x_0\| < \frac{\eta}{1 - P} = R$,

siempre que $A_i = [y_i, x_i; F]$ sea invertible y $x_{i+1} \in B(x_0, R)$, $\forall i = 1, 2, \dots, n - 2$.

En primer lugar, por hipótesis, vemos que

$$\begin{aligned}
 \|I - A_0^{-1}A_n\| &\leq \|A_0^{-1}\| \|A_0 - A_n\| \\
 &\leq \beta(L + K(\|y_n - y_0\| + \|x_n - x_0\|)) \\
 &\leq \beta(L + K(\lambda\|x_n - x_0\| + (1 - \lambda)\|x_{n-1} - x_{-1}\| + \|x_n - x_0\|)) \\
 &\leq \beta(L + K((1 + \lambda)\|x_n - x_0\| + (1 - \lambda)\|x_{n-1} - x_{-1}\|)) \\
 &\leq \beta(L + K((1 + \lambda)\|x_n - x_0\| + (1 - \lambda)\|x_{n-1} - x_0\| + (1 - \lambda)\|x_0 - x_{-1}\|)) \\
 &< \beta(L + K(2R + (1 - \lambda)\alpha)) \\
 &< 1.
 \end{aligned}$$

Además,

$$\|A_n^{-1}\| \leq \frac{\beta}{1 - \beta(L + K(2R + (1 - \lambda)\alpha))}.$$

En segundo lugar, por el lema 3.2, tenemos que $F(x_n) = ([x_n, x_{n-1}; F] - A_{n-1})(x_n - x_{n-1})$, de manera que

$$\begin{aligned}
 \|F(x_n)\| &\leq \|[x_n, x_{n-1}; F] - A_{n-1}\| \|x_n - x_{n-1}\| \\
 &\leq (L + K\|y_{n-1} - x_{n-1}\|) \|x_n - x_{n-1}\| \\
 &\leq (L + K(\|y_{n-1} - x_{n-1}\| + \|x_n - x_{n-1}\|)) \|x_n - x_{n-1}\| \\
 &\leq (L + K((1 - \lambda)\|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \|x_n - x_{n-1}\|)) \|x_n - x_{n-1}\| \\
 &\leq (L + (2 - \lambda)K\eta) \|x_n - x_{n-1}\|.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - x_n\| &\leq \|A_n^{-1}\| \|F(x_n)\| \\
 &\leq \frac{\beta(L + (2 - \lambda)K\eta)}{1 - \beta(L + K(2R + (1 - \lambda)\alpha))} \|x_n - x_{n-1}\| \\
 &\leq \frac{m}{1 - \beta(L + K(2R + (1 - \lambda)\alpha))} \|x_n - x_{n-1}\| \\
 &= P \|x_n - x_{n-1}\| \\
 &\leq P^n \|x_1 - x_0\| \\
 &< \eta,
 \end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_0\| &\leq \sum_{i=0}^{n+1} \|x_i - x_{i-1}\| \leq (P^n + P^{n-1} + \cdots + P + 1)\|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{1 - P^{n+1}}{1 - P} \|x_1 - x_0\| \\ &< \frac{\eta}{1 - P} = R, \end{aligned}$$

por ser $P < 1$. Luego $x_{n+1} \in B(x_0, R)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Una vez probado que la sucesión $\{x_n\}$ está bien definida, vemos que es una sucesión de Cauchy. En efecto, como

$$\begin{aligned} \|x_{n+j} - x_n\| &\leq \|x_{n+j} - x_{n+j-1}\| + \|x_{n+j-1} - x_{n+j-2}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq (P^{j-1} + P^{j-2} + \cdots + P + 1)\|x_{n+1} - x_n\| \\ &= \frac{1 - P^j}{1 - P} \|x_{n+1} - x_n\| \\ &< \frac{P^n}{1 - P} \|x_1 - x_0\|, \end{aligned}$$

para $j \geq 1$, y $P < 1$, es claro que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Por tanto, la sucesión $\{x_n\}$ es convergente.

Ahora, si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$, vemos que x^* es una solución de $F(x) = 0$. Como

$$\|F(x_n)\| \leq (L + (2 - \lambda)K\eta)\|x_n - x_{n-1}\|$$

y $\|x_n - x_{n-1}\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, por la continuidad del operador F , se sigue fácilmente que $F(x^*) = 0$.

Finalmente, probamos la unicidad de la solución x^* en $\overline{B(x_0, R)}$. Suponemos que tenemos otra solución distinta $y^* \in \overline{B(x_0, R)}$ de la ecuación $F(x) = 0$. Sea $A = [y^*, x^*; F]$. Si A es invertible, tenemos que $x^* = y^*$, puesto que $A(y^* - x^*) = F(y^*) - F(x^*)$. Para ver que A es invertible, por el lema de Banach, basta con ver que $\|I - A_0^{-1}A\| < 1$. En efecto,

$$\begin{aligned} \|I - A_0^{-1}A\| &\leq \|A_0^{-1}\| \|A_0 - A\| \\ &\leq \|A_0^{-1}\| \|[y_0, x_0; F] - [y^*, x^*; F]\| \\ &\leq \beta(L + K(\|y^* - y_0\| + \|x^* - x_0\|)) \\ &\leq \beta(L + K(\|y^* - x_0\| + \|x_0 - y_0\| + \|x^* - x_0\|)) \\ &\leq \beta(L + K(R + (1 - \lambda)\alpha + R)) \\ &= \beta(L + K(2R + (1 - \lambda)\alpha)) \\ &< 1. \end{aligned}$$

Luego el operador A^{-1} existe. ■

Notemos que las diferencias divididas utilizadas existen, ya que si existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x_j = x_{j-1}$, entonces $x_{j-1} = x^*$ (la solución buscada). Además, si $x_{j-1} = y_{j-1} = \lambda x_{j-1} + (1-\lambda)x_{j-2}$, entonces $x_{j-1} = x_{j-2}$, de manera que $x_{j-2} = x^*$. En ambos casos, la sucesión $\{x_n\}$ es convergente trivialmente.

Una vez probada la convergencia semilocal de los métodos tipo secante, nuestro siguiente objetivo es ver cuál es el dominio de parámetros de esta familia de métodos. Para ello, transformamos la ecuación (3.6) en la siguiente ecuación equivalente:

$$2K\beta t^2 + (\beta(L + K((1-\lambda)\alpha - 2\eta)) + m - 1)t + \eta(1 - \beta(L + (1-\lambda)K\alpha)) = 0, \quad (3.8)$$

y vemos cuándo tiene raíces reales positivas. La ecuación anterior tendrá dos raíces reales positivas si

$$\beta(L + K((1-\lambda)\alpha - 2\eta)) + m - 1 < 0, \quad (3.9)$$

$$1 - \beta(L + (1-\lambda)K\alpha) > 0, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (\beta(L + K((1-\lambda)\alpha - 2\eta)) + m - 1)^2 - 8K\beta\eta(1 - \beta(L + (1-\lambda)K\alpha)) \\ &= (\beta(L + K((1-\lambda)\alpha - 2\eta)) + m - 1 + \sqrt{8K\beta\eta(1 - \beta(L + (1-\lambda)K\alpha))}) \\ &\quad \times (\beta(L + K((1-\lambda)\alpha - 2\eta)) + m - 1 - \sqrt{8K\beta\eta(1 - \beta(L + (1-\lambda)K\alpha))}) > 0. \end{aligned}$$

Observamos que los dos factores de Δ son < 0 si

$$\beta(L + K((1-\lambda)\alpha - 2\eta)) + m + \sqrt{8K\beta\eta(1 - \beta(L + (1-\lambda)K\alpha))} < 1. \quad (3.11)$$

Además, se cumple (3.9) si se satisface (3.11). Por lo tanto, la ecuación (3.8) tendrá dos raíces reales positivas si se cumplen (3.10) y (3.11). Si la ecuación (3.8) tiene dos raíces reales positivas, entonces la raíz positiva más pequeña es:

$$R = \frac{1}{4K\beta} (1 - m - \beta(L + K((1-\lambda)\alpha - 2\eta)) - \sqrt{(\beta(L + K((1-\lambda)\alpha - 2\eta)) + m - 1)^2 - 8K\beta\eta(1 - \beta(L + (1-\lambda)K\alpha))}). \quad (3.12)$$

Notemos que también podemos considerar que la ecuación (3.8) tenga una raíz doble sin más que tener en cuenta la desigualdad no estricta en (3.11).

A continuación veremos cuándo se cumple la condición (3.7) que aparece en el teorema 3.3. Para ello, distinguiremos los siguientes dos casos:

- $\alpha \geq \eta \Rightarrow m = \beta(L + K((1-\lambda)\alpha + \eta)),$
- $\alpha \leq \eta \Rightarrow m = \beta(L + (2-\lambda)K\eta).$

Si $\alpha \geq \eta$, entonces

$$R = \frac{1}{4K\beta} (1 - \beta(2L + K(2(1-\lambda)\alpha - \eta)) - \sqrt{(\beta(2L + K(2(1-\lambda)\alpha - \eta)) - 1)^2 - 8K\beta\eta(1 - \beta(L + (1-\lambda)K\alpha))})$$

y de (3.7) se sigue

$$\frac{1}{2} \left(1 + K\beta\eta - \sqrt{(\beta(2L + K(2(1-\lambda)\alpha - \eta)) - 1)^2 - 8K\beta\eta(1 - \beta(L + (1-\lambda)K\alpha))} \right) < 1,$$

$$\sqrt{(\beta(2L + K(2(1-\lambda)\alpha - \eta)) - 1)^2 - 8K\beta\eta(1 - \beta(L + (1-\lambda)K\alpha))} > K\beta\eta - 1.$$

Para que se cumpla la última desigualdad basta con que $K\beta\eta - 1 < 0$, es decir,

$$K\beta\eta < 1. \quad (3.13)$$

Por lo tanto la condición (3.7) del teorema 3.3 se cumple si se verifica (3.13) cuando $\alpha \geq \eta$.

Por otra parte, si $\alpha \leq \eta$, entonces

$$R = \frac{1}{4K\beta} \left(1 - \beta(2L + K((1-\lambda)\alpha - \lambda\eta)) \right. \\ \left. - \sqrt{(\beta(2L + K((1-\lambda)\alpha - \lambda\eta)) - 1)^2 - 8K\beta\eta(1 - \beta(L + (1-\lambda)K\alpha))} \right)$$

y de (3.7) se sigue

$$\frac{1}{2} \left(1 + K\beta((1-\lambda)\alpha + \eta) \right. \\ \left. - \sqrt{(\beta(2L + K((1-\lambda)\alpha - \eta)) - 1)^2 - 8K\beta\eta(1 - \beta(L + (1-\lambda)K\alpha))} \right) < 1,$$

$$\sqrt{(\beta(2L + K((1-\lambda)\alpha - \eta)) - 1)^2 - 8K\beta\eta(1 - \beta(L + (1-\lambda)K\alpha))} > K\beta((1-\lambda)\alpha + \eta) - 1.$$

Para que se cumpla la desigualdad anterior basta con que $K\beta((1-\lambda)\alpha + \eta) - 1 < 0$, es decir,

$$K\beta((1-\lambda)\alpha + \eta) < 1. \quad (3.14)$$

Por lo tanto la condición (3.7) del teorema 3.3 se cumple si se verifica (3.14) cuando $\alpha \leq \eta$.

En consecuencia, las condiciones de convergencia que se imponen a los parámetros α , β , η , L y K , como son que la ecuación (3.6) tenga al menos una raíz real positiva y que la raíz positiva más pequeña de (3.6), denotada por R , cumpla (3.7), se van a cumplir siempre que se verifiquen (3.10), (3.11) y (3.13) cuando $\alpha \geq \eta$ o (3.10), (3.11) y (3.14) cuando $\alpha \leq \eta$. Así, enunciaremos entonces el siguiente resultado, cuya demostración se sigue fácilmente sin más que satisfacer las hipótesis del teorema 3.3.

Corolario 3.4. Sean X e Y dos espacios de Banach y $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$ un operador no lineal definido en un dominio abierto convexo no vacío Ω . Suponemos que existe $[x, y; F] \in \mathcal{L}(X, Y) \forall x, y \in \Omega (x \neq y)$ y que una vez fijado $\lambda \in [0, 1)$ se cumplen las condiciones (C1), (C2), (C3), (3.5), (3.10) y (3.11). Además, si se cumplen (3.13) cuando $\alpha \geq \eta$ o (3.14) cuando $\alpha \leq \eta$ y $B(x_0, R) \subset \Omega$, donde R está definido en (3.12) con $m = \max\{\beta(L + K((1-\lambda)\alpha + \eta)), \beta(L + (2-\lambda)K\eta)\}$, entonces la sucesión $\{x_n\}$ dada por los métodos tipo secante, empezando en x_{-1} y x_0 , está bien definida y converge a una solución x^* de $F(x) = 0$. Además, la solución x^* y las iteraciones x_n pertenecen a $B(x_0, R)$ y x^* es única en $B(x_0, R)$.

A continuación, dibujamos el dominio de parámetros asociado al resultado anterior de convergencia semilocal. Para ello, seguimos el mismo criterio que antes y distinguimos dos casos: el caso diferenciable, $L = 0$, y el no diferenciable, $L \neq 0$.

Comenzamos con el caso diferenciable. Como se puede ver en las figuras 3.2 y 3.3, el nuevo dominio de parámetros (figura 3.2) resuelve el problema que tienen los métodos tipo secante en el dominio de parámetros correspondiente al teorema 3.1 (figura 3.1) cuando los valores de α y η son pequeños. Fijado un valor de $K\beta\alpha$ perteneciente al dominio de parámetros, observamos que el valor de $K\beta\eta$ sólo está acotado superiormente y no inferiormente.

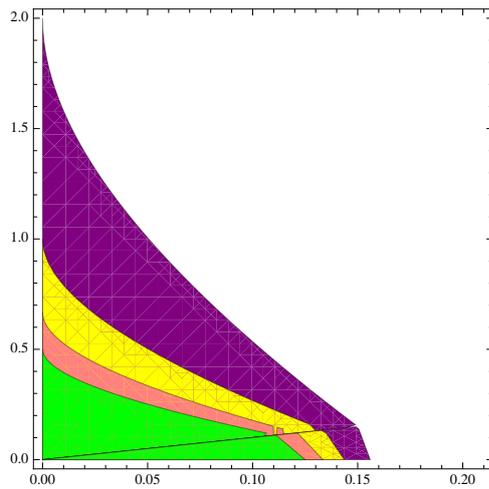


Figura 3.2: Dominios de parámetros de los métodos tipo secante correspondientes al teorema 3.3 con $L = 0$; verde para $\lambda = 0$; rosa para $\lambda = 1/4$, amarillo para $\lambda = 1/2$ y morado para $\lambda = 3/4$.

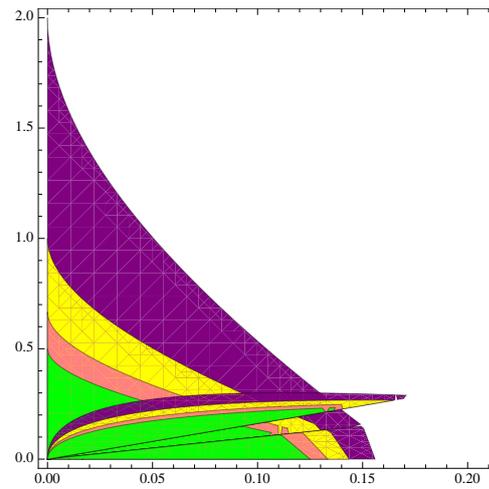


Figura 3.3: Dominios de parámetros de los métodos tipo secante correspondientes a los teoremas 3.1 y 3.3 con $L = 0$; verde para $\lambda = 0$; rosa para $\lambda = 1/4$, amarillo para $\lambda = 1/2$ y morado para $\lambda = 3/4$.

En segundo lugar, representaremos el dominio de parámetros correspondiente al teorema 3.3 cuando F es no diferenciable, $L \neq 0$. En este caso el dominio de parámetros depende de la cantidad $L\beta$, que tiene que cumplir que $L\beta < \frac{1}{2}$, sin más que observar la condición (3.11). Así, dibujamos los casos $L\beta = \frac{1}{10}$ y $L\beta = \frac{1}{5}$ en las figuras 3.4 y 3.5, respectivamente. Observamos que el dominio de parámetros se reduce al aumentar el valor de $L\beta$, pero sigue teniendo buenas características locales.

3.3. Aplicación

A continuación ilustramos todo lo visto en la sección anterior con dos sistemas de ecuaciones no lineales. En primer lugar, consideramos un sistema de ecuaciones no lineales diferenciable y vemos que no podemos garantizar la convergencia semilocal de los métodos tipo secante mediante el teorema 3.1, mientras que si lo podemos hacer a partir del teorema 3.3. En segundo lugar, consideramos un sistema de ecuaciones no

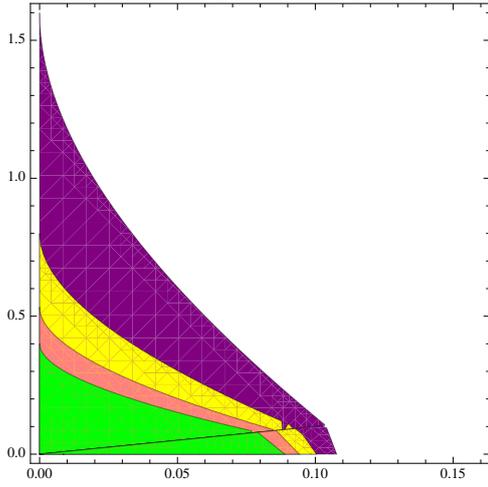


Figura 3.4: Dominios de parámetros de los métodos tipo secante correspondientes al teorema 3.3 con $L\beta = \frac{1}{10}$; verde para $\lambda = 0$; rosa para $\lambda = 1/4$, amarillo para $\lambda = 1/2$ y morado para $\lambda = 3/4$.

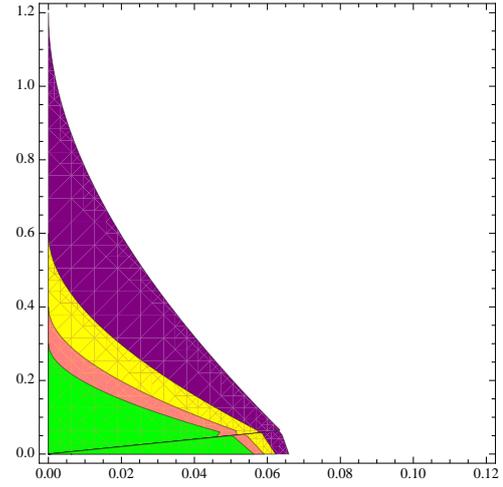


Figura 3.5: Dominios de parámetros de los métodos tipo secante correspondientes al teorema 3.3 con $L\beta = \frac{1}{5}$; verde para $\lambda = 0$; rosa para $\lambda = 1/4$, amarillo para $\lambda = 1/2$ y morado para $\lambda = 3/4$.

lineales no diferenciable y vemos que el teorema 3.3 garantiza la convergencia semilocal de los métodos tipo secante.

3.3.1. Sistema de ecuaciones no lineales diferenciable

Sea la siguiente ecuación integral no lineal de tipo Hammerstein

$$x(s) = 1 + \int_0^1 G(s, t) x(t)^2 dt, \quad s \in [0, 1], \quad (3.15)$$

donde $x \in C[0, 1]$ y G es la función de Green en $[0, 1] \times [0, 1]$.

A continuación, usamos un proceso de discretización que la transforme en un problema de dimensión finita, tal y como se hizo en la sección 1.5.1, de manera que la ecuación integral (3.15) se transforma en el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$F(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x} - \mathbf{1} - A\mathbf{v}_x = 0, \quad F : \mathbb{R}^8 \longrightarrow \mathbb{R}^8, \quad (3.16)$$

donde

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_8)^T, \quad \mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^8, \quad \mathbf{v}_x = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_8^2)^T.$$

En este caso, el operador diferencia dividida es $[\mathbf{u}, \mathbf{v}; F] = I - B$, donde $B = (b_{ij})_{i,j=1}^8$ con $b_{ij} = a_{ij}(u_j + v_j)$.

Eligiendo $\mathbf{x}_{-1} = \left(\frac{9}{10}, \frac{9}{10}, \dots, \frac{9}{10}\right)^T$ y $\mathbf{x}_0 = (1, 1, \dots, 1)^T$ como puntos de salida, $\lambda = \frac{1}{2}$ y la norma del máximo, obtenemos $\alpha = 0.1$, $\beta = 1.3035\dots$, $\eta = 0.1556\dots$ y $K =$

0.1235... Vemos entonces que la primera condición de (3.1) del teorema 3.1 no se cumple puesto que

$$\frac{\eta}{\alpha + \eta} = 0.6088... > \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0.3819...$$

En consecuencia, no podemos garantizar la convergencia del método tipo secante con $\lambda = \frac{1}{2}$ mediante el teorema 3.1 dado en [62]. Sin embargo, si que la podemos garantizar mediante el teorema 3.3, puesto que la correspondiente ecuación (3.6) es

$$h(t) = t \left(1 - \frac{(0.0376...)}{1 - (0.1610...)(2t + 0.05)} \right) - (0.1556...) = 0,$$

que tiene dos raíces reales positivas y la más pequeña, denotada por $R = 0.1621...$, cumple la condición (3.7), puesto que

$$\beta K(2R + (1 - \lambda)\alpha) = 0.0602... < 1.$$

En este caso, utilizando el método tipo secante correspondiente a $\lambda = \frac{1}{2}$, después de cinco iteraciones y usando el criterio de parada $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}\| < 10^{-16}$, obtenemos la aproximación numérica $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_8^*)^T$ de una solución de (3.16) que vemos en la tabla 3.1. En la tabla 3.2 mostramos los errores $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\|$ obtenidos usando el mismo criterio de parada. Notemos que el vector dado en la tabla 3.1 es una buena aproximación de la solución del sistema (3.16), puesto que $\|F(\mathbf{x}^*)\| \leq C \times 10^{-16}$. Mostramos la sucesión $\{\|F(\mathbf{x}_n)\|\}$ en la tabla 3.2.

Además, por el teorema 3.3, la existencia y unicidad de la solución está garantizada en la bola $B(\mathbf{x}_0, 0.1621...)$.

i	x_i^*	i	x_i^*	i	x_i^*	i	x_i^*
1	1.012239...	3	1.118079...	5	1.159804...	7	1.058428...
2	1.058428...	4	1.159804...	6	1.118079...	8	1.012239...

Tabla 3.1: Aproximación de la solución \mathbf{x}^* de (3.16)

n	$\ \mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\ $	$\ F(\mathbf{x}_n)\ $
-1	$2.5980... \times 10^{-1}$	$2.0008... \times 10^{-1}$
0	$1.5980... \times 10^{-1}$	$1.2355... \times 10^{-1}$
1	$4.1222... \times 10^{-3}$	$3.1494... \times 10^{-3}$
2	$4.1117... \times 10^{-5}$	$3.1489... \times 10^{-5}$
3	$1.0346... \times 10^{-8}$	$9.9173... \times 10^{-9}$
4	$2.5597... \times 10^{-14}$	$1.9590... \times 10^{-14}$

Tabla 3.2: Errores absolutos obtenidos con el método tipo secante correspondiente a $\lambda = \frac{1}{2}$ y $\|F(\mathbf{x}_n)\|$

3.3.2. Sistema de ecuaciones no lineales no diferenciable

Consideramos ahora la siguiente ecuación integral no lineal de tipo Hammerstein

$$x(s) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \int_0^1 G(s, t) (x(t)^2 + |x(t)|) dt, \quad s \in [0, 1], \quad (3.17)$$

donde $x \in C[0, 1]$ y G es la función de Green en $[0, 1] \times [0, 1]$.

A continuación, tal y como se hizo en la sección 1.5.1, transformamos (3.17) en el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$F(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}A(\mathbf{v}_x + \mathbf{w}_x) = 0, \quad F : \mathbb{R}^8 \longrightarrow \mathbb{R}^8, \quad (3.18)$$

donde

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_8)^T, \quad \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)^T, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^8,$$

$$\mathbf{v}_x = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_8^2)^T, \quad \mathbf{w}_x = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_8|)^T.$$

En este caso, el operador diferencia dividida es $[\mathbf{u}, \mathbf{v}; F] = I - \frac{3}{4}(C + D)$, donde $C = (c_{ij})_{i,j=1}^8$ con $c_{ij} = a_{ij}(u_j + v_j)$ y $D = (d_{ij})_{i,j=1}^8$ con $d_{ij} = a_{ij} \frac{|u_j| - |v_j|}{u_j - v_j}$.

Eligiendo $\mathbf{x}_{-1} = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \dots, \frac{2}{5}\right)^T$ y $\mathbf{x}_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)^T$ como puntos de salida, $\lambda = \frac{3}{4}$ y la norma del máximo, obtenemos $\alpha = 0.1$, $\beta = 1.2170\dots$, $\eta = 0.0824\dots$, $L = 0.1853\dots$ y $K = 0.0926\dots$. La ecuación (3.6) se reduce ahora a

$$h(t) = t \left(1 - \frac{(0.2376\dots)}{1 - (1.2170\dots)((0.1863\dots) + (0.0926\dots)(2t + 0.0250\dots))} \right) - (0.0824\dots) = 0,$$

que tiene dos raíces reales positivas y la más pequeña, denotada por $R = 0.1211\dots$, cumple la condición (3.7), puesto que

$$\beta(L + K(2R + (1 - \lambda)\alpha)) = 0.2557\dots < 1.$$

Así, podemos garantizar la convergencia semilocal del método tipo secante correspondiente a $\lambda = \frac{3}{4}$ mediante el teorema 3.3. Después de cuatro iteraciones y usando el criterio de parada $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}\| < 10^{-16}$, obtenemos la aproximación numérica $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_8^*)^T$ de una solución (3.18) que vemos en la tabla 3.3. En la tabla 3.4 mostramos los errores $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\|$ obtenidos usando el mismo criterio de parada. Notemos que el vector dado en la tabla 3.3 es una buena aproximación de la solución del sistema (3.18), puesto que $\|F(\mathbf{x}^*)\| \leq C \times 10^{-16}$. Mostramos la sucesión $\{\|F(\mathbf{x}_n)\|\}$ en la tabla 3.4.

Es más, por el teorema 3.3, la existencia y unicidad de la solución está garantizada en la bola $B(\mathbf{x}_0, 0.1211\dots)$.

i	x_i^*	i	x_i^*	i	x_i^*	i	x_i^*
1	0.506462...	3	0.561738...	5	0.583219...	7	0.530722...
2	0.530722...	4	0.583219...	6	0.561738...	8	0.506462...

Tabla 3.3: Aproximación de la solución \mathbf{x}^* de (3.18)

n	$\ \mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\ $	$\ F(\mathbf{x}_n)\ $
-1	$1.8321 \dots \times 10^{-1}$	$1.5189 \dots \times 10^{-1}$
0	$8.3221 \dots \times 10^{-2}$	$6.9501 \dots \times 10^{-2}$
1	$7.8399 \dots \times 10^{-4}$	$6.5351 \dots \times 10^{-4}$
2	$1.4181 \dots \times 10^{-6}$	$1.1832 \dots \times 10^{-6}$
3	$2.3181 \dots \times 10^{-11}$	$1.9352 \dots \times 10^{-11}$

Tabla 3.4: Errores absolutos obtenidos con el método tipo secante correspondiente a $\lambda = \frac{3}{4}$ y $\|F(\mathbf{x}_n)\|$

Parte III

**Un método iterativo punto a punto que
no utiliza derivadas: el método de
Steffensen**

En esta parte de la memoria consideraremos un operador $F : \Omega \subset X \rightarrow X$, donde Ω es un dominio abierto convexo no vacío contenido en un espacio de Banach X , y nos planteamos la aproximación de una solución de la ecuación

$$F(x) = 0$$

mediante un proceso iterativo punto a punto que no evalúe derivadas del operador F en cada paso. Este tipo de procesos iterativos tienen gran interés debido a que la derivada del operador F puede ser costosa de evaluar o porque incluso puede no existir, situaciones que son desfavorables para la aplicación del método de Newton, cuyo algoritmo, como bien sabemos, está dado por

$$\begin{cases} x_0 \in \Omega, \\ x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1}F(x_n), \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Usualmente la no utilización de derivadas pasa por la aproximación de éstas. Así, como bien sabemos en el caso de espacios de Banach, podemos considerar el concepto de diferencia dividida. Es conocido ([88]) que, dado $x \in X$, si consideramos un punto $y \in X$ distinto, próximo a x , el operador $[x, y; F]$ representa una aproximación de $F'(x)$. Utilizando este hecho, es habitual construir procesos iterativos que utilizan diferencias divididas en vez de derivadas.

Como en la primera parte de esta memoria, nuestro punto de partida es el método de Newton. Para eliminar de su algoritmo la evaluación de las derivadas del operador F , utilizaremos una aproximación de $F'(x)$ a partir de determinada diferencia dividida. Como nuestro objetivo singular de esta parte de la memoria es la construcción de un proceso iterativo punto a punto, teniendo en cuenta las características del operador considerado, tomando como nodos x y $x + F(x)$, podemos utilizar éstos para considerar la aproximación $F'(x) \approx [x, x + F(x); F]$. A partir de esta aproximación se define el método de Steffensen ([3],[5],[12]), que está dado por el siguiente algoritmo

$$\begin{cases} x_0 \in \Omega, \\ y_n = x_n + F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - [x_n, y_n; F]^{-1}F(x_n), \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Evidentemente, el método de Steffensen es un método iterativo punto a punto. Además, como la aproximación de la derivada del operador F considerada en este caso es de segundo orden, es conocido que el método de Steffensen tiene convergencia cuadrática [12]. Por otra parte, como resulta evidente, este proceso iterativo tiene el mismo coste computacional que el método de Newton. Por tanto, la eficiencia computacional ([84], [98]) del método de Steffensen es la misma que la del método de Newton. Pese a las buenas características que tiene el método de Steffensen, misma eficiencia computacional que el método de Newton y la no evaluación de derivadas, es mucho menos utilizado que el método de Newton para aproximar soluciones de $F(x) = 0$. Nuestro objetivo principal se va a centrar entonces en mejorar la aplicabilidad del método de Steffensen.

Un aspecto importante a tener en cuenta cuando se estudia la aplicabilidad de un proceso iterativo es el conjunto de puntos de salida que podemos considerar para garantizar

la convergencia del proceso iterativo a una solución de $F(x) = 0$ a partir de cualquiera de sus puntos; esto es lo que llamamos accesibilidad del proceso iterativo, que se puede observar experimentalmente mediante las conocidas cuencas de atracción, que son el conjunto de todos los puntos de salida a partir de los cuales el proceso iterativo converge a una solución de $F(x) = 0$, fijada una tolerancia o un número máximo de iteraciones ([85]).

A continuación, en las figuras III.1–III.2 mostramos las cuencas de atracción asociadas a las tres raíces $z^* = 1$, $z^{**} = \exp \frac{2\pi i}{3}$ y $z^{***} = \exp \frac{-2\pi i}{3}$ de la ecuación $F(z) = z^3 - 1 = 0$, donde $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, cuando aplicamos respectivamente los métodos de Newton y de Steffensen. Para representar las cuencas de atracción hemos considerado un rectángulo en el plano complejo $D \subset \mathbb{C}$ y asignado un color para cada raíz a la cual el método iterativo elegido converge. Identificamos las cuencas de atracción de las tres raíces, cuando las aproximamos por el método de Newton y por el método de Steffensen, con el objetivo de comparar las regiones de accesibilidad de ambos métodos.

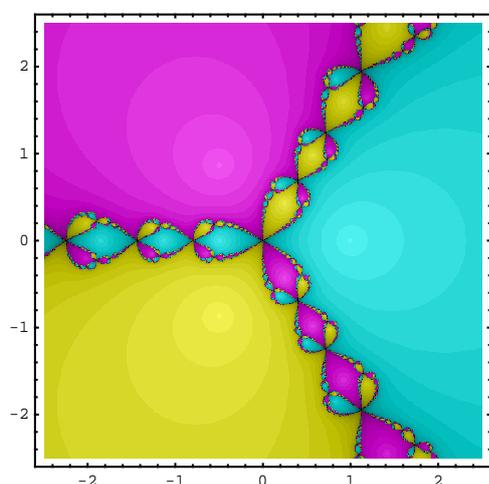


Figura III.1: Cuencas de atracción asociadas a las raíces de $F(z) = z^3 - 1 = 0$ para el método de Newton.

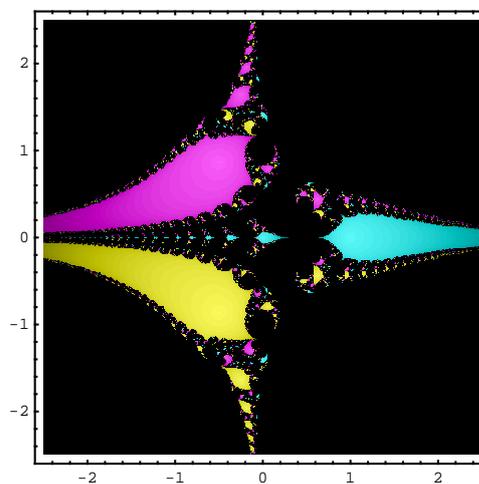


Figura III.2: Cuencas de atracción asociadas a las raíces de $F(z) = z^3 - 1 = 0$ para el método de Steffensen.

En la práctica, consideramos una malla de 512×512 puntos en D y elegimos estos puntos como z_0 . Utilizamos el rectángulo $[-2.5, 2.5] \times [-2.5, 2.5]$ que contiene a las tres raíces. Los métodos iterativos, empezando en un punto $z_0 \in D$, pueden converger a cualquiera de las raíces o, eventualmente, diverger. En todos los casos, utilizamos la tolerancia 10^{-3} y un máximo de 50 iteraciones. Si no obtenemos la tolerancia deseada con 50 iteraciones, no se continúa y decidimos que el método iterativo no converge a ninguna solución comenzando en z_0 . En particular, hemos utilizado los colores cyan, magenta y amarillo para las cuencas de atracción de las soluciones z^* , z^{**} y z^{***} . El color se hace más claro o más oscuro según sea el número de iteraciones utilizadas para alcanzar una solución con la precisión fijada. Hemos pintado de negro los puntos del rectángulo correspondientes a las aproximaciones iniciales a partir de las cuales no se alcanza ninguna de las soluciones con tolerancia 10^{-3} en un máximo de 50 iteraciones. Para otras estrategias se puede consultar [101] y las referencias allí dadas. Los gráficos

se han generado con Mathematica 5.1 [103].

Vemos que las cuencas de atracción, cuando aplicamos el método de Steffensen, se reducen considerablemente con respecto a las del método de Newton, lo que justifica claramente que el método de Steffensen sea menos utilizado que el método de Newton para resolver ecuaciones no lineales.

Aparte del estudio empírico de la accesibilidad de un proceso iterativo dado por las cuencas de atracción, podemos realizar un estudio de la accesibilidad del proceso iterativo a partir de las condiciones de convergencia impuestas al proceso iterativo, tal y como se ha realizado en la segunda parte de esta memoria para los métodos tipo secante mediante el dominio de parámetros.

En el primer capítulo de esta parte de la memoria realizamos un estudio de la convergencia semilocal del método de Steffensen en condiciones de tipo Kantorovich, de manera que podamos comparar su accesibilidad con la del método de Newton. Así, veremos que el dominio de parámetros asociado a la convergencia semilocal del método de Steffensen es más pequeño que el asociado a la del método de Newton. Para solventar esta situación construiremos un método iterativo híbrido (predictor-corrector) que no evalúe derivadas en cada paso y con la misma accesibilidad que el método de Newton.

La utilización de la teoría de Kantorovich en el primer capítulo de esta parte de la memoria para estudiar la convergencia semilocal de los métodos iterativos nos obliga a considerar ecuaciones con operadores diferenciables. Así, en el segundo capítulo, modificaremos las condiciones de convergencia consideradas en el primero y desarrollaremos una nueva teoría que permite aproximar las soluciones de ecuaciones con operadores cualesquiera, tanto si son diferenciables como si no lo son. Para ello, utilizamos una novedosa técnica basada en relaciones de recurrencia que proporciona nuevos resultados de convergencia semilocal. Después, a partir del estudio de los dominios de parámetros asociados a estos nuevos resultados, construiremos también un método iterativo híbrido (predictor-corrector) aplicable a ecuaciones con operadores cualesquiera y con una buena accesibilidad de la solución.

Capítulo 4

Análisis de la accesibilidad del método de Steffensen mediante la teoría de Kantorovich

Comenzamos este capítulo realizando un estudio de la convergencia semilocal del método de Steffensen en condiciones de tipo Kantorovich. Hemos visto antes que para establecer un resultado de convergencia semilocal se exigen dos tipos de condiciones: condiciones sobre el operador y condiciones sobre los puntos de salida. Como nuestro primer interés se centra en el estudio comparativo de la accesibilidad de los métodos de Newton y de Steffensen a partir de la teoría de Kantorovich, exigiremos la misma condición al operador F , que F' sea Lipschitz continua, es decir:

$$\|F'(x) - F'(y)\| \leq K \|x - y\|, \quad K \geq 0, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Notemos en primer lugar que, a partir de esta condición, siempre existe la diferencia dividida

$$[x, y; F] = \int_0^1 F'(x + \tau(x - y)) d\tau$$

para cualesquiera que sean los puntos $x, y \in \Omega$. Si $x = y$ entonces $[x, x; F] = F'(x)$, [88]. Luego el método de Steffensen está definido en cada paso.

A partir del estudio de la convergencia semilocal del método de Steffensen, que realizaremos mediante la teoría de Kantorovich, probaremos que la accesibilidad del método de Newton es mucho mejor que la que se obtiene para el método de Steffensen en las mismas condiciones.

En la sección 4.1, enunciamos el resultado de convergencia semilocal dado por Kantorovich [71] para el método de Newton y obtenemos un teorema de convergencia semilocal para el método de Steffensen. Luego, a partir de ambos resultados, comparamos la accesibilidad de ambos métodos. Adelantamos que las diferencias observadas experimentalmente con las cuencas de atracción para la ecuación $F(z) = z^3 - 1 = 0$ se confirman con el estudio teórico.

A continuación, en la sección 4.2, consideramos el método modificado de Newton, cuyo algoritmo está dado por

$$\begin{cases} z_0 \in \Omega, \\ z_{n+1} = z_n - [F'(z_0)]^{-1} F(z_n), \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Observamos que no se evalúa F' en un nuevo punto en cada paso, sino que basta con localizar un punto z_0 de Ω donde F' exista. Veremos más adelante que este método tiene la misma accesibilidad que el método de Newton.

Teniendo esto en cuenta, en la sección 4.3, construimos un método iterativo híbrido (predictor-corrector) que tenga la misma eficiencia y accesibilidad que el método de Newton y que no evalúe derivadas en cada paso. En particular, saliendo desde los mismos puntos de salida que el método modificado de Newton, garantizamos la convergencia del método híbrido con la misma velocidad de convergencia que con el método de Steffensen, de manera que mejoramos la accesibilidad del método de Steffensen. Finalmente, en la sección 4.4, veremos una aplicación en la que consideramos un sistema de ecuaciones no lineales que ilustra todo lo anterior.

4.1. Convergencia semilocal del método de Steffensen

Para realizar el estudio planteado en la introducción, normalizamos las condiciones iniciales exigidas sobre el punto de salida y sobre el operador. De este modo, garantizamos tanto la convergencia como la comparación de la accesibilidad de los métodos que vamos a estudiar.

Así, suponemos que existe el operador $\Gamma_0 = [F'(x_0)]^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$, para algún $x_0 \in \Omega$, y que se satisfacen las siguientes condiciones:

$$(C1) \quad \|F(x_0)\| \leq \delta,$$

$$(C2) \quad \|\Gamma_0\| = \|[F'(x_0)]^{-1}\| \leq \beta,$$

$$(C3) \quad \|F'(x) - F'(y)\| \leq K\|x - y\|, \quad K \geq 0, \quad x, y \in \Omega.$$

Comenzamos el estudio recordando el resultado clásico de convergencia semilocal del método de Newton a una solución de la ecuación $F(x) = 0$ a partir de las condiciones iniciales previamente descritas. La demostración de este teorema puede encontrarse en [71].

Teorema 4.1 (Teorema clásico de Newton-Kantorovich). *Sea $F : \Omega \subseteq X \rightarrow X$ un operador una vez continuamente diferenciable Fréchet definido en un dominio abierto convexo no vacío Ω de un espacio de Banach X . Supongamos que se verifican las condiciones (C1)–(C3), $K\delta\beta^2 \leq \frac{1}{2}$ y $\overline{B(x_0, t^*)} \subseteq \Omega$, siendo $t^* = (1 - \sqrt{1 - 2K\delta\beta^2})/(K\beta)$. Entonces la ecuación $F(x) = 0$ tiene una solución x^* y el método de Newton es convergente a esta solución x^* a partir de x_0 . Además, $x_n, x^* \in \overline{B(x_0, t^*)}$, para todo $n \geq 0$. Por otra parte, si $K\delta\beta^2 < \frac{1}{2}$, x^* es la única solución de $F(x) = 0$ en $B(x_0, t^{**}) \cap \Omega$, donde $t^{**} = (1 + \sqrt{1 - 2K\delta\beta^2})/(K\beta)$.*

A partir del resultado de convergencia semilocal anterior, si queremos estudiar la accesibilidad del método de Newton, basta con tener en cuenta que, dado $x_0 \in \Omega$, el método tiene asociados dos parámetros (δ, β) , dados en (C1) y (C2). Así, a partir de la condición de convergencia $K\delta\beta^2 \leq \frac{1}{2}$, podemos definir el dominio de parámetros correspondiente al teorema 4.1, que viene dado por el conjunto $\{(\delta, \beta) \in \mathbb{R}^2 / K\delta\beta^2 \leq \frac{1}{2}\}$. Observemos que K es siempre una cantidad fija, de manera que no influye en el dominio de parámetros.

En la figura 4.1 mostramos el dominio de parámetros asociado al método de Newton que viene determinado por la condición $K\delta\beta^2 \leq 1/2$ del teorema 4.1. Notemos que hemos pintado en el eje de abscisas los valores del parámetro β y en el eje de ordenadas los valores $K\delta$.

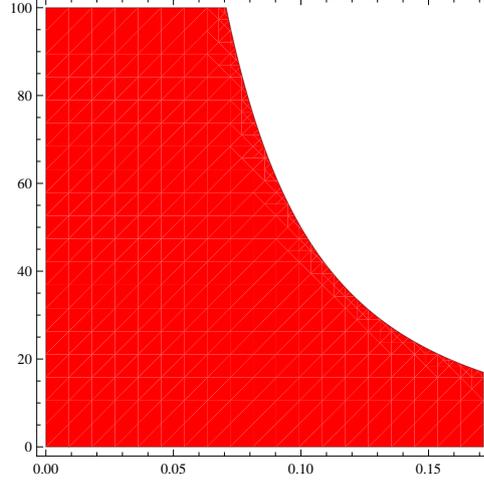


Figura 4.1: Dominio de parámetros del método de Newton.

A continuación, vamos a dar condiciones iniciales sobre el punto de salida y sobre el operador F para garantizar la convergencia semilocal del método de Steffensen. Posteriormente, estableceremos su dominio de parámetros y haremos un estudio comparativo de esta región con la asociada al método de Newton.

En primer lugar, establecemos la convergencia semilocal del método de Steffensen, bajo las condiciones (C1)–(C3), de manera similar a la del método de Newton. Para ello, utilizamos la conocida la técnica de las sucesiones mayorizantes ([71]).

Lo primero que vamos a probar es la existencia de $[x_0, y_0; F]^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$ para cualesquiera $x_0, y_0 \in \Omega$. Así,

$$\begin{aligned} \|I - \Gamma_0[x_0, y_0; F]\| &\leq \|\Gamma_0\| \|F'(x_0) - [x_0, y_0; F]\| \\ &= \|\Gamma_0\| \left\| F'(x_0) - \int_0^1 F'(x_0 + \tau(y_0 - x_0)) d\tau \right\| \\ &\leq \|\Gamma_0\| \int_0^1 \|F'(x_0 + \tau(y_0 - x_0)) - F'(x_0)\| d\tau \\ &\leq \frac{1}{2} K\delta\beta, \end{aligned}$$

de modo que si $K\delta\beta < 2$, entonces existe $[x_0, y_0; F]^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$ para algunos $x_0, y_0 \in \Omega$ y tales que

$$\|[x_0, y_0; F]^{-1}\| \leq \frac{2\beta}{2 - K\delta\beta} = b.$$

A continuación, definimos el polinomio cuadrático

$$q(s) = \frac{M}{2}s^2 - \frac{s}{b} + \delta, \quad M = K \left(1 + \frac{1}{b}\right), \quad s \in [0, s'], \quad (4.1)$$

tal que $s^* \leq s^{**} < s'$, donde hemos denotado la raíz positiva más pequeña del polinomio q por $s^* = \frac{1 - \sqrt{1 - 2M\delta b^2}}{Mb}$ y la mayor por $s^{**} = \frac{1 + \sqrt{1 - 2M\delta b^2}}{Mb}$, y la sucesión $\{s_n\}$ definida por

$$\begin{cases} s_0 = 0, \\ s_{n+1} = s_n - \frac{q(s_n)}{q'(s_n)}, \quad n \geq 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Ahora, en el siguiente lema, damos la característica más importante de la sucesión (4.2).

Lema 4.2. *La sucesión $\{s_n\}$ dada en (4.2) converge de manera creciente a s^* .*

La demostración del lema anterior es inmediata sin más que tener en cuenta que la sucesión $\{s_n\}$ es monótona no decreciente y está acotada superiormente por s^* .

Teorema 4.3. *Sea $F : \Omega \subseteq X \rightarrow X$ un operador una vez continuamente diferenciable Fréchet definido en un dominio abierto convexo no vacío Ω de un espacio de Banach X . Si se cumplen las condiciones (C1)–(C3), se satisfacen las condiciones*

$$K\delta\beta \leq 2, \quad M\delta b^2 \leq \frac{1}{2} \quad (4.3)$$

y $B(x_0, s^* + \delta) \subseteq \Omega$, entonces, a partir de x_0 , el método de Steffensen converge a una solución x^* de $F(x) = 0$. Además, x^* es la única solución de $F(x) = 0$ en $B(x_0, s^{**} + \delta) \cap \Omega$, donde $s^{**} = \frac{1 + \sqrt{1 - 2M\delta b^2}}{Mb}$.

DEMOSTRACIÓN. Probamos la convergencia semilocal del método de Steffensen haciendo uso de un proceso inductivo.

Notemos que

$$\|x_1 - x_0\| = \|[x_0, y_0; F]^{-1}F(x_0)\| \leq b\delta = s_1 - s_0 < s^* + \delta,$$

de manera que $x_1 \in B(x_0, s^* + \delta) \subseteq \Omega$ y podemos definir x_2 . Ahora,

$$\begin{aligned} F(x_1) &= F(x_1) - F(x_0) - [x_0, y_0; F](x_1 - x_0) \\ &= \int_{x_0}^{x_1} (F'(z) - F'(x_0)) dz + (F'(x_0) - [x_0, y_0; F])(x_1 - x_0) \\ &= \int_0^1 (F'(x_0 + \tau(x_1 - x_0)) - F'(x_0)) d\tau(x_1 - x_0) + (F'(x_0) - [x_0, y_0; F])(x_1 - x_0). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\|F(x_1)\| &\leq \frac{K}{2}\|x_1 - x_0\|^2 + \frac{K}{2}\|F(x_0)\|\|x_1 - x_0\| \\
&\leq \frac{K}{2}(s_1 - s_0)^2 + \frac{K}{2}q(s_0)(s_1 - s_0) \\
&= \frac{K}{2}(1 - q'(s_0))(s_1 - s_0)^2 \\
&= \frac{M}{2}(s_1 - s_0)^2 \\
&= q(s_1).
\end{aligned}$$

Ahora, puesto que la sucesión $\{s_n\}$ dada en (4.2) es creciente y el polinomio q dado en (4.1) es decreciente en $[0, s^*]$, se tiene

$$\|y_1 - x_0\| \leq \|x_1 - x_0\| + \|F(x_1)\| \leq s_1 - s_0 + q(s_1) < s^* + q(s_0) = s^* + \delta.$$

Notemos que para poder definir x_2 necesitamos de la existencia del operador $[x_1, y_1; F]^{-1}$. Teniendo en cuenta nuevamente que la sucesión (4.2) es creciente y el polinomio (4.1) es decreciente en $[0, s^*]$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\|I - \Gamma_0[x_1, y_1; F]\| &\leq \|\Gamma_0\| \|F'(x_0) - [x_1, y_1; F]\| \\
&= \|\Gamma_0\| (\|F'(x_0) - F'(x_1)\| + \|F'(x_1) - [x_1, y_1; F]\|) \\
&\leq \|\Gamma_0\| \left(K\|x_1 - x_0\| + \int_0^1 \|F'(x_1 + \tau(y_1 - x_1)) - F'(x_1)\| d\tau \right) \\
&\leq \|\Gamma_0\| \left(K\|x_1 - x_0\| + \frac{K}{2}\|F(x_1)\| \right) \\
&\leq \|\Gamma_0\| \left(K(s_1 - s_0) + \frac{K}{2}q(s_1) \right) \\
&\leq \|\Gamma_0\| \left(Ks_1 + \frac{K}{2}q(s_0) \right) \\
&\leq \|\Gamma_0\| K \left(1 - \frac{q'(s_0)}{2} \right) s_1 \\
&\leq \beta \left(q'(s_1) + \frac{1}{b} \right) \\
&\leq \beta \left(q'(s_1) + \frac{1}{\beta} \right) \\
&< 1,
\end{aligned}$$

de modo que existe el operador $[x_1, y_1; F]^{-1}$ y es tal que

$$\|[x_1, y_1; F]^{-1}\| \leq \frac{\beta}{1 - \|I - \Gamma_0[x_1, y_1; F]\|} \leq \frac{-1}{q'(s_1)}.$$

Entonces, se sigue

$$\|x_2 - x_1\| \leq \frac{-q(s_1)}{q'(s_1)} \leq s_2 - s_1,$$

$$\|x_2 - x_0\| \leq \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leq s_2 - s_0 < s^* < s^* + \delta,$$

luego $x_2 \in B(x_0, s^* + \delta) \subseteq \Omega$, lo que permite definir y_2 .

Ahora, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} F(x_n) &= F(x_n) - F(x_{n-1}) - [x_{n-1}, y_{n-1}; F](x_n - x_{n-1}) \\ &= \int_{x_{n-1}}^{x_n} (F'(z) - F'(x_{n-1})) dz + (F'(x_{n-1}) - [x_{n-1}, y_{n-1}; F])(x_n - x_{n-1}) \\ &= \int_0^1 (F'(x_{n-1} + \tau(x_n - x_{n-1})) - F'(x_{n-1})) d\tau(x_n - x_{n-1}) \\ &\quad + (F'(x_{n-1}) - [x_{n-1}, y_{n-1}; F])(x_n - x_{n-1}) \\ &= \int_0^1 (F'(x_{n-1} + \tau(x_n - x_{n-1})) - F'(x_{n-1})) d\tau(x_n - x_{n-1}) \\ &\quad + \int_0^1 (F'(x_{n-1}) - F'(x_{n-1} + \tau(y_{n-1} - x_{n-1})) d\tau)(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} q(s_n) &= q(s_n) - q(s_{n-1}) - q'(s_{n-1})(s_n - s_{n-1}) \\ &= \int_0^1 (q'(s_{n-1} + \tau(s_n - s_{n-1})) - q'(s_{n-1})) d\tau(s_n - s_{n-1}) \\ &= M \int_0^1 \tau(s_n - s_{n-1})^2 d\tau \\ &= \frac{M}{2}(s_n - s_{n-1})^2, \end{aligned}$$

se tiene

$$\|F(x_n)\| \leq q(s_n), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

puesto que

$$\begin{aligned} \|F(x_n)\| &\leq \int_0^1 K\tau \|x_n - x_{n-1}\|^2 d\tau + \int_0^1 K\tau \|F(x_{n-1})\| \|x_n - x_{n-1}\| d\tau \\ &\leq \frac{K}{2}(s_n - s_{n-1})^2 + \frac{K}{2}q(s_{n-1})(s_n - s_{n-1}) \\ &= \frac{K}{2}(1 - q'(s_{n-1}))(s_n - s_{n-1})^2 \\ &\leq \frac{M}{2}(s_n - s_{n-1})^2 \\ &= q(s_n). \end{aligned}$$

Entonces, como q es decreciente en $[0, s^*]$, se sigue:

$$\|y_n - x_0\| \leq \|x_n - x_0\| + \|F(x_n)\| \leq s_n + q(s_n) < s^* + q(s_0) < s^* + \delta,$$

y por tanto $y_n \in B(x_0, s^* + \delta) \subseteq \Omega$.

A continuación probamos la existencia del operador $[x_n, y_n; F]^{-1}$. Como

$$\begin{aligned} \|I - \Gamma_0[x_n, y_n; F]\| &\leq \|\Gamma_0\| \|F'(x_0) - [x_n, y_n; F]\| \\ &= \|\Gamma_0\| (\|F'(x_0) - F'(x_n)\| + \|F'(x_n) - [x_n, y_n; F]\|) \\ &\leq \|\Gamma_0\| \left(K\|x_n - x_0\| + \int_0^1 \|F'(x_n + \tau(y_n - x_n)) - F'(x_n)\| d\tau \right) \\ &\leq \|\Gamma_0\| \left(K\|x_n - x_0\| + \frac{K}{2}\|F(x_n)\| \right) \\ &\leq \|\Gamma_0\| \left(K(s_n - s_0) + \frac{K}{2}q(s_n) \right) \\ &\leq \|\Gamma_0\| \left(Ks_n - \frac{K}{2}q'(s_n)(s_n - s_{n-1}) \right) \\ &\leq \|\Gamma_0\| K \left(1 - \frac{q'(s_0)}{2} \right) s_n \\ &\leq \beta \left(q'(s_n) + \frac{1}{b} \right) \\ &\leq \beta \left(q'(s_n) + \frac{1}{\beta} \right) \\ &< 1, \end{aligned}$$

tenemos que el operador $[x_n, y_n; F]^{-1}$ existe y

$$\|[x_n, y_n; F]^{-1}\| \leq \frac{\beta}{1 - \|I - \Gamma_0[x_n, y_n; F]\|} \leq \frac{-1}{q'(s_n)}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &\leq \|[x_n, y_n; F]^{-1}\| \|F(x_n)\| \leq \frac{-q(s_n)}{q'(s_n)} = s_{n+1} - s_n, \\ \|x_{n+1} - x_0\| &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - x_0\| \leq s_{n+1} - s_0 < s^* < s^* + \delta, \end{aligned}$$

y como $\{s_n\}$ es una sucesión de Cauchy, se deduce que $\{x_n\}$ también lo es y, por tanto, $\{x_n\}$ converge a $x^* \in \overline{B(x_0, s^* + \delta)}$. Veamos que x^* es solución de la ecuación $F(x) = 0$. Hemos probado que $\|F(x_n)\| \leq q(s_n)$, de manera que por continuidad tenemos que $F(x^*) = 0$.

A continuación probaremos la unicidad de solución. Suponemos que tenemos otra solución $z^* \in B(x_0, s^{**} + \delta) \cap \Omega$ de la ecuación $F(x) = 0$ distinta de x^* . Consideramos

$$F(z^*) - F(x^*) = \int_{x^*}^{z^*} F'(x) dx = \int_0^1 F'(x^* + t(z^* - x^*))(z^* - x^*) dt = 0,$$

y el operador $N = \int_0^1 F'(x^* + t(z^* - x^*)) dt$. Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \|\Gamma_0 N - I\| &\leq \|\Gamma_0\| \|N - F'(x_0)\| \\ &\leq \|\Gamma_0\| \int_0^1 \|F'(x^* + t(z^* - x^*)) - F'(x_0)\| dt \\ &\leq \beta K \int_0^1 ((1-t)\|x^* - x_0\| + t(\|z^* - x_0\|)) dt \\ &< \frac{\beta K}{2} \left(\frac{2}{Mb} + \delta \right) \\ &< 1, \end{aligned}$$

puesto que $K\delta\beta \leq 2$, el operador N es invertible y por tanto $x^* = z^*$. ■

En la figura 4.2 está representado el dominio de parámetros del método de Steffensen que está sujeto a las condiciones dadas en (4.3). Notemos que en el eje de abscisas estamos representando los valores β y en el de ordenadas los valores $K\delta$.

En la figura 4.3, mostramos el dominio de parámetros del método de Steffensen junto con el del método de Newton. A la vista de la figura, observamos que la accesibilidad del método de Steffensen se reduce de forma considerable con respecto a la del método de Newton.

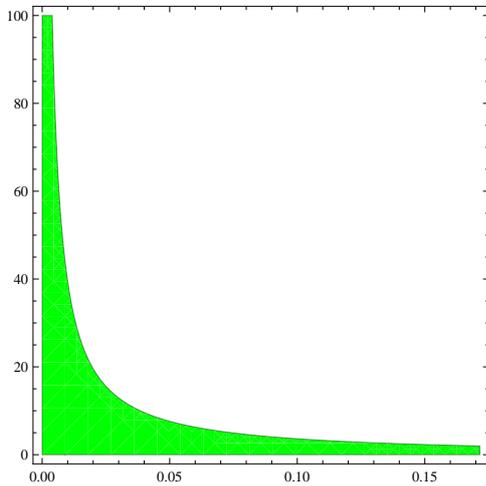


Figura 4.2: Dominio de parámetros del método de Steffensen.

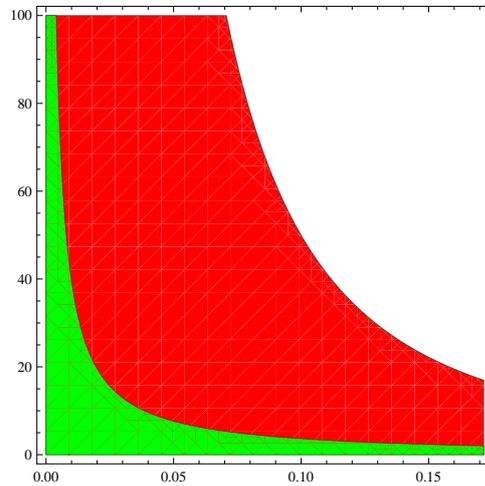


Figura 4.3: Dominios de parámetros de los métodos de Newton (región roja) y de Steffensen (región verde).

Buscando un cierto paralelismo con las cuencas de atracción, consideramos la otra forma experimental de estudiar la accesibilidad de un proceso iterativo. Dado un punto, éste tiene asociados los parámetros correspondientes y, si éstos verifican las condiciones

de convergencia, coloreamos dicho punto, y en otro caso, no lo coloreamos. Recordamos que la región que queda entonces coloreada es lo que hemos llamado región de accesibilidad del método iterativo.

Una vez más, la región de accesibilidad de un método iterativo nos indica experimentalmente el dominio de puntos de salida a partir de los cuales tenemos asegurada la convergencia del método iterativo, es decir, el conjunto de puntos de salida que satisfacen las condiciones de convergencia para dicho método iterativo.

En las figuras 4.4–4.5 se muestran las regiones de accesibilidad asociadas a los métodos de Newton y de Steffensen cuando se aplican a la resolución de la ecuación $F(z) = z^3 - 1 = 0$ una vez fijado $K = 6|1.6 + 0.2i|$. Notemos la gran diferencia que existe entre las dos regiones de accesibilidad asociadas a ambos métodos, tal y como ocurría con las cuencas de atracción asociadas a las soluciones de $F(z) = z^3 - 1 = 0$, figuras III.1–III.2. Esto vuelve a poner de manifiesto la reducida accesibilidad del método de Steffensen.

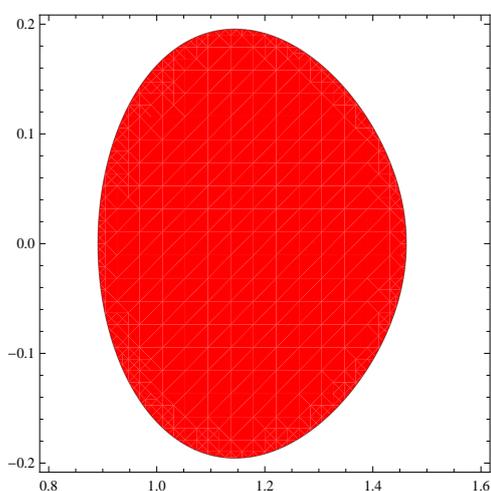


Figura 4.4: Región de accesibilidad para el método de Newton cuando $F(z) = z^3 - 1 = 0$ y $K = 6|1.6 + 0.2i|$.

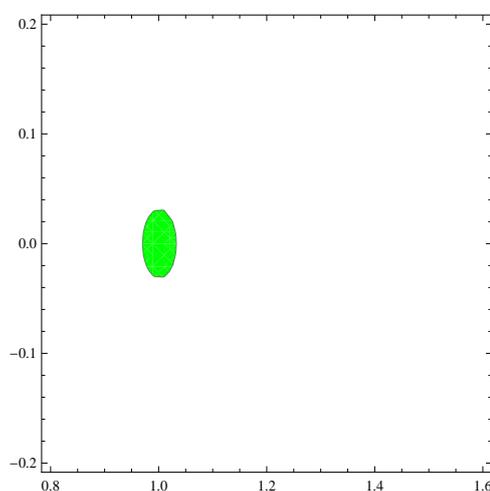


Figura 4.5: Región de accesibilidad para el método de Steffensen cuando $F(z) = z^3 - 1 = 0$ y $K = 6|1.6 + 0.2i|$.

4.2. Convergencia semilocal del método modificado de Newton

Acabamos de ver que el método de Steffensen tiene peor accesibilidad de soluciones que el método de Newton. Sin embargo, como veremos a continuación, el método modificado de Newton mantiene la accesibilidad de soluciones del método de Newton, pero pierde velocidad de convergencia, puesto que su orden de convergencia es lineal. Esto nos hace considerar un método iterativo híbrido (predictor-corrector) formado por los métodos modificado de Newton y de Steffensen. Así, mediante un método predictor con buena accesibilidad y un método corrector con buena eficiencia, obtendremos un método híbrido con características similares a las del método de Newton.

Comenzamos viendo que el método modificado de Newton tiene la misma accesibilidad que el método de Newton. Establecemos entonces bajo qué condiciones para el operador F y el punto de salida podemos garantizar la convergencia del método modificado de Newton a una solución de la ecuación $F(x) = 0$. Para ello suponemos que existe el operador $\bar{\Gamma}_0 = [F'(z_0)]^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$, para algún $z_0 \in \Omega$, y que se satisfacen las siguientes condiciones:

$$(H1) \quad \|F(z_0)\| \leq \delta_0,$$

$$(H2) \quad \|\bar{\Gamma}_0\| = \|[F'(z_0)]^{-1}\| \leq \beta_0,$$

$$(H3) \quad \|F'(x) - F'(y)\| \leq K\|x - y\|, \quad K \geq 0, \quad x, y \in \Omega.$$

A partir de (H1)–(H3) definimos el siguiente polinomio cuadrático:

$$p(t) = \frac{K}{2}t^2 - \frac{t}{\beta_0} + \delta_0, \quad t \in [t_0, t'], \quad (4.4)$$

donde $t^* \leq t^{**} \leq t'$, y denotamos por t^* y t^{**} sus dos raíces positivas. Definimos también la función

$$h(t) = t + \beta_0 p(t). \quad (4.5)$$

Ahora sea la sucesión $\{t_n\}$ definida por:

$$\begin{cases} t_0 = 0, \\ t_{n+1} = h(t_n) = t_n + \beta_0 p(t_n), \quad n \geq 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Lema 4.4. *La sucesión (4.6) converge de manera creciente a t^* .*

DEMOSTRACIÓN. De (4.6), se sigue que

$$t_1 - t_0 = \beta_0 p(t_0) > 0,$$

$$t_1 - t^* = h(t_0) - h(t^*) = h'(\theta_0)(t_0 - t^*) < 0,$$

de modo que $t_1 > t_0$ y $t_1 < t^*$. Supongamos que $t_k \geq t_{k-1}$ y $t_k < t^*$ para $k = 1, 2, \dots, n-1$. Entonces, puesto que $t_{n-1} < t^*$, se tiene que $p(t_{n-1}) \geq 0$ y

$$t_n - t_{n-1} = \beta_0 p(t_{n-1}) \geq 0.$$

Además,

$$t_n - t^* = h(t_{n-1}) - h(t^*) = h'(\theta_{n-1})(t_{n-1} - t^*) < 0.$$

Por tanto, la sucesión $\{t_n\}$ es creciente y $t_n < t^*$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, existe $l = \lim_n t_n$.

Ahora bien,

$$l = \lim_n t_{n+1} = \lim_n (t_n + \beta_0 p(t_n)).$$

Entonces, $\beta_0 p(l) = 0$, de donde se sigue que $l = t^*$. ■

Teorema 4.5. Sea $F : \Omega \subseteq X \rightarrow X$ un operador una vez continuamente diferenciable Fréchet definido en un dominio abierto convexo no vacío Ω de un espacio de Banach X . Supongamos que existe $\bar{\Gamma}_0 = [F'(z_0)]^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$, para algún $z_0 \in B(z_0, t^*) \subseteq \Omega$, donde t^* es la menor raíz positiva del polinomio (4.4), y que se cumplen las condiciones (H1)–(H3). Si

$$K\delta_0\beta_0^2 \leq \frac{1}{2}, \quad (4.7)$$

entonces el método modificado de Newton converge a una solución x^* de la ecuación $F(x) = 0$. Además, si $K\delta_0\beta_0^2 < \frac{1}{2}$, x^* es la única solución de $F(x) = 0$ en $B(x_0, t^{**}) \cap \Omega$, donde $t^{**} = \frac{1 + \sqrt{1 - 2K\delta_0\beta_0^2}}{K\beta_0}$.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar consideramos $z_1 = z_0 - \bar{\Gamma}_0 F(z_0)$. En este caso,

$$\|z_1 - z_0\| = \|\bar{\Gamma}_0 F(z_0)\| \leq \beta_0 \delta_0 < t_1 - t_0 < t^*.$$

Luego, $z_1 \in B(z_0, t^*) \subseteq \Omega$ y podemos definir $z_2 = z_1 - \bar{\Gamma}_0 F(z_1)$.

Ahora,

$$\begin{aligned} F(z_1) &= F(z_1) - F(z_0) - F'(z_0)(z_1 - z_0) \\ &= \int_{z_0}^{z_1} (F'(u) - F'(z_0)) du \\ &= \int_0^1 (F'(z_0 + \tau(z_1 - z_0)) - F'(z_0)) d\tau(z_1 - z_0), \end{aligned}$$

y

$$\|F(z_1)\| \leq \frac{K}{2} \|z_1 - z_0\|^2 \leq \frac{K}{2} (t_1 - t_0)^2,$$

de forma que

$$\|z_2 - z_1\| \leq \frac{\beta_0 K}{2} t_1^2.$$

Teniendo en cuenta que la sucesión (4.6) cumple que $t_2 - t_1 = \beta_0 p(t_1) = \frac{\beta_0 K t_1^2}{2}$, se sigue

$$\|z_2 - z_1\| \leq t_2 - t_1$$

y

$$\|z_2 - z_0\| \leq \|z_2 - z_1\| + \|z_1 - z_0\| \leq t_2 - t_0 < t^*.$$

Luego, $z_2 \in B(z_0, t^*) \subseteq \Omega$ y podemos definir z_3 .

Ahora, desde

$$\begin{aligned} F(z_n) &= F(z_n) - F(z_{n-1}) - F'(z_0)(z_n - z_{n-1}) \\ &= \int_{z_{n-1}}^{z_n} (F'(u) - F'(z_0)) du \\ &= \int_0^1 (F'(z_{n-1} + \tau(z_n - z_{n-1})) - F'(z_0)) d\tau(z_n - z_{n-1}), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 p(t_n) &= p(t_n) - p(t_{n-1}) + \frac{1}{\beta_0}(t_n - t_{n-1}) \\
 &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} (p'(\omega) - p'(t_0)) d\omega \\
 &= \int_0^1 (p'(t_{n-1} + \tau(t_n - t_{n-1})) - p'(t_0)) d\tau(t_n - t_{n-1}) \\
 &= K \left((t_{n-1} - t_0) + \frac{1}{2}(t_n - t_{n-1}) \right) (t_n - t_{n-1}),
 \end{aligned}$$

se tiene

$$\|F(z_n)\| \leq p(t_n), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

puesto que

$$\begin{aligned}
 \|F(z_n)\| &\leq \int_0^1 K (\|z_{n-1} - t_0\| + \tau \|z_n - z_{n-1}\|) d\tau \|z_n - z_{n-1}\| \\
 &\leq K \left((t_{n-1} - t_0) + \frac{1}{2}(t_n - t_{n-1}) \right) (t_n - t_{n-1}).
 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\|z_n - z_{n-1}\| \leq \beta_0 p(t_n) = t_n - t_{n-1},$$

y por tanto, como la sucesión $\{t_n\}$ es de Cauchy, se deduce que la sucesión $\{z_n\}$ también lo es y, en consecuencia, $\{z_n\}$ converge a $x^* \in B(z_0, t^*)$. Veamos que x^* es solución de la ecuación $F(x) = 0$. Hemos probado que $\|F(z_n)\| \leq p(t_n)$, de manera que $F(x^*) = 0$ por continuidad.

Finalmente, suponemos que existe otra solución $z^* \in B(z_0, t^{**}) \cap \Omega$ de la ecuación $F(x) = 0$ y distinta de x^* . Consideramos

$$F(z^*) - F(x^*) = \int_{x^*}^{z^*} F'(x) dx = \int_0^1 F'(x^* + t(z^* - x^*))(z^* - x^*) dt = 0$$

y el operador $N = \int_0^1 F'(x^* + t(z^* - x^*)) dt$. Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
 \|\bar{\Gamma}_0 N - I\| &\leq \|\bar{\Gamma}_0\| \|N - F'(z_0)\| \\
 &\leq \|\bar{\Gamma}_0\| \int_0^1 \|F'(x^* + t(z^* - x^*)) - F'(z_0)\| dt \\
 &\leq \beta_0 K \int_0^1 ((1-t)\|x^* - z_0\| + t\|z^* - z_0\|) dt \\
 &< \frac{K\beta_0}{2}(t^{**} + t^*) \\
 &= 1,
 \end{aligned}$$

vemos que el operador N es invertible y por tanto $x^* = z^*$. ■

En la figura 4.6 está representado el dominio de parámetros del método modificado de Newton sujeto a la condición (4.7), donde en el eje de abscisas se representan los valores β_0 y en el de ordenadas los valores $K\delta_0$. Observamos que este dominio de parámetros coincide con el del método de Newton, figura 4.1.

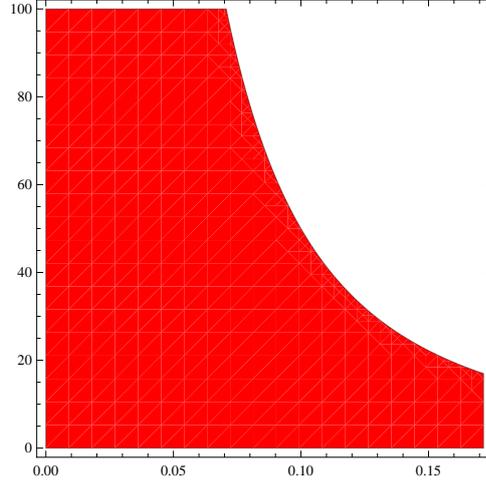


Figura 4.6: Dominio de parámetros del método modificado de Newton.

Para dar estimaciones del error cometido con el método modificado de Newton, utilizamos un procedimiento dado por Ostrowski en [84] que permite acotar el error en función de las raíces del polinomio (4.4).

Teorema 4.6. *En las condiciones del teorema 4.5, consideramos el polinomio (4.4) y sean t^* y t^{**} sus dos raíces reales positivas y tales que $t^* \leq t^{**}$. Entonces, para el método modificado de Newton, se obtienen las siguientes cotas de error:*

i) Si $t^* < t^{**}$,

$$\frac{((t^{**} - t^*)t^*)^{n+1}}{(t^{**})^{n+1} - (t^*)^{n+1}} < t^* - t_n < \frac{t^*(t^{**} - t^*)(t^*K\beta_0)^n}{t^{**} - t^*(t^*K\beta_0)^n}.$$

ii) Si $t^* = t^{**}$,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n t^* \leq t^* - t_n \leq t^*.$$

DEMOSTRACIÓN. Demostramos en primer lugar el apartado i). A partir de (4.4), como $t^* < t^{**}$, tenemos que

$$p(t) = \frac{K}{2}(t^* - t)(t^{**} - t).$$

Si denotamos $a_n = t^* - t_n$ y $b_n = t^{**} - t_n$, para todo $n \geq 0$, entonces $p(t_n) = \frac{K}{2}a_nb_n$, $p'(t_0) = \frac{-1}{\beta_0}$ y

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= t^* - t_{n+1} = t^* - t_n - \beta_0 p(t_n) = a_n - \frac{K\beta_0}{2}a_nb_n \\ b_{n+1} &= t^{**} - t_{n+1} = t^{**} - t_n - \beta_0 p(t_n) = b_n - \frac{K\beta_0}{2}a_nb_n. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n (2 - K\beta_0(t^{**} - t_n))}{b_n (2 - K\beta_0(t^* - t_n))},$$

y puesto que la función

$$Q(t) = \frac{2 - K\beta_0(t^{**} - t)}{2 - K\beta_0(t^* - t)}$$

es estrictamente creciente, se sigue

$$\frac{t^*}{t^{**}} = Q(t_0) \leq Q(t) \leq Q(t^*) = K\beta_0 t^*,$$

de manera que

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n}{b_n} Q(t_n) \leq \frac{a_n}{b_n} Q(t^*) \leq \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} Q(t^*)^2 \leq \dots \leq \frac{a_0}{b_0} Q(t^*)^{n+1} = \frac{t^*}{t^{**}} (K\beta_0 t^*)^{n+1},$$

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n}{b_n} Q(t_n) \geq \frac{a_n}{b_n} Q(t_0) \geq \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} Q(t_0)^2 \geq \dots \geq \frac{a_0}{b_0} Q(t_0)^{n+1} = \left(\frac{t^*}{t^{**}} \right)^{n+2}.$$

Como $b_{n+1} = (t^{**} - t^*) + a_{n+1}$, obtenemos

$$\frac{(t^{**} - t^*)(t^*)^{n+2}}{(t^{**})^{n+2} - (t^*)^{n+2}} < t^* - t_{n+1} < \frac{t^*(t^{**} - t^*)(t^* K\beta_0)^{n+1}}{t^{**} - t^*(t^* K\beta_0)^{n+1}}.$$

En segundo lugar vemos *ii*). Partiendo de (4.4), si $t^* = t^{**}$, entonces $a_n = b_n$ y $p(t_n) = \frac{K}{2} a_n^2$, de manera que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{K\beta_0}{2} a_n.$$

Ahora teniendo en cuenta que la función

$$R(t) = 1 - \frac{K\beta_0}{2} (t^* - t)$$

es estrictamente creciente, se sigue que $\frac{1}{2} = R(t_0) \leq R(t) \leq R(t^*) = 1$ y, como $a_{n+1} = R(t_n)a_n$, entonces

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq a_n \leq \dots \leq a_0 \leq t^* - t_0 = t^*, \\ a_{n+1} &\geq \frac{1}{2} a_n \geq \dots \geq \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} a_0 = \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} t^*. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} t^* \leq t^* - t_{n+1} \leq t^*. \quad \blacksquare$$

Notemos que a partir de este resultado resulta evidente que el método modificado de Newton tiene al menos convergencia lineal.

En la figura 4.7 observamos, al igual que ocurría para el método de Newton, la gran diferencia existente entre los dominios de parámetros asociados a los métodos modificado de Newton y de Steffensen que surgen de imponer las condiciones que garantizan la convergencia de ambos métodos.

En la figura 4.8 se muestran las regiones de accesibilidad, fijado el valor $K = 6|1.6 + 0.2i|$, asociadas a los métodos modificado de Newton y de Steffensen, cuando se aplican a la resolución de la ecuación $F(z) = z^3 - 1 = 0$. Notemos que también hay una gran diferencia entre las dos regiones de accesibilidad asociadas a ambos métodos. Esto nos indica que el dominio de puntos de salida para obtener una aproximación de una solución de $F(z) = z^3 - 1 = 0$ para el método modificado de Newton es mucho mayor que para el de Steffensen.

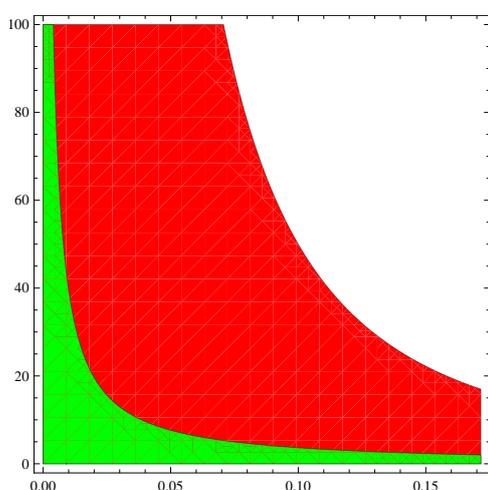


Figura 4.7: Dominios de parámetros de los métodos modificado de Newton (región roja) y de Steffensen (región verde).

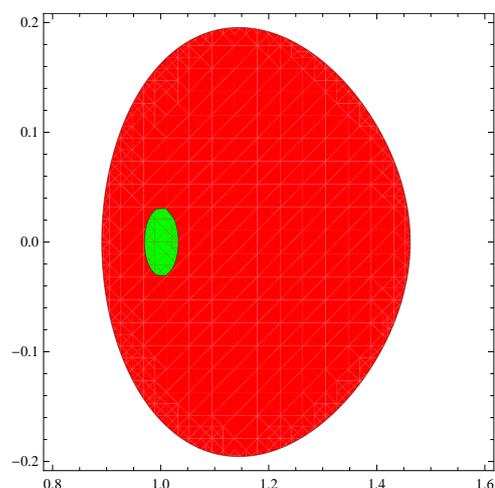


Figura 4.8: Regiones de accesibilidad de los métodos modificado de Newton (región roja) y de Steffensen (región verde) para $F(z) = z^3 - 1 = 0$ y $K = 6|1.6 + 0.2i|$.

4.3. Método iterativo híbrido (predictor-corrector)

A partir de las situaciones anteriores, ahora nos planteamos construir una modificación del método de Steffensen que mejore su accesibilidad a una solución de $F(x) = 0$, utilizando el método modificado de Newton como método predictor.

4.3.1. Construcción del método

Como se observa en la figura 4.7, el dominio de parámetros del método de Steffensen está contenido en el dominio de parámetros del método modificado de Newton. Por tanto, las condiciones exigidas al método de Steffensen para garantizar su convergencia semilocal son evidentemente más restrictivas que las exigidas al método modificado de Newton.

Tratamos entonces de asegurar que para un par inicial (δ_0, β_0) que satisfaga la condición (4.7), es decir que esté dentro del dominio de parámetros del método modificado de Newton, obtengamos un par (δ, β) que satisfaga las condiciones dadas en (4.3), después de realizar un cierto número N_0 de iteraciones con el método modificado de Newton, de manera que estemos en condiciones de poder garantizar la convergencia del método de Steffensen al empezar en la iteración N_0 obtenida mediante el método modificado de Newton. De este modo, se puede considerar el par $(\delta_{N_0}, \beta_{N_0})$, asociado a la iteración N_0 obtenida con el método modificado de Newton, como el par (δ, β) asociado a la iteración inicial x_0 del método de Steffensen.

Nuestro objetivo principal es construir una sencilla modificación del método de Steffensen de manera que este método converja empezando en los mismos puntos de salida que el método modificado de Newton. Consideramos entonces el método iterativo híbrido (predicor-corrector) dado por el siguiente algoritmo

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} z_0 \in \Omega, \\ z_{i+1} = z_i - [F'(z_0)]^{-1}F(z_i), \quad i = 0, 1, \dots, N_0 - 1, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x_0 = z_{N_0}, \\ y_n = x_n + F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - [x_n, y_n; F]^{-1}F(x_n), \quad n \geq 0, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.8)$$

donde z_0 satisface (4.7), mientras que $x_0 = z_{N_0}$ satisface (4.3). Para que este algoritmo sea convergente nos planteamos dos cuestiones:

1. Localizar z_0 de manera que el método predictor, el método modificado de Newton, sea convergente.
2. Utilizando la convergencia del método predictor, calcular un valor N_0 tal que z_{N_0} sea considerado como punto de salida del método corrector, el método de Steffensen, de manera que a partir de este punto podamos asegurar la convergencia de éste.

La idea es usar el método modificado de Newton durante un número finito de pasos N_0 hasta que $z_{N_0} = x_0$ cumpla las condiciones dadas en (4.3), y aplicar después el método de Steffensen en vez del método modificado de Newton. La clave del problema reside entonces en garantizar la existencia de N_0 .

4.3.2. Convergencia semilocal del método

A continuación, vamos a estudiar la convergencia semilocal del método (4.8).

Método predictor: el método modificado de Newton

Consideramos la situación inicial a partir del método modificado de Newton. Dada la aproximación inicial z_0 , partimos del par (δ_0, β_0) definido a partir de (H1) y (H2):

$$\|\bar{\Gamma}_0\| = \|[F'(z_0)]^{-1}\| \leq \beta_0, \quad \|F(z_0)\| \leq \delta_0.$$

Para la convergencia del método debe verificarse la condición (4.7):

$$K\delta_0\beta_0^2 \leq \frac{1}{2}.$$

Iterando, se van definiendo los pares (δ_n, β_n) a partir del cumplimiento de las condiciones (H1) y (H2), de modo que

$$\|F(z_n)\| \leq p(t_n) = \delta_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{K}{2}a_n b_n = \delta_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{K^2}{2}a_n b_n = K\delta_n,$$

donde $a_n = t^* - t_n$ y $b_n = t^{**} - t_n$, siendo t^* y t^{**} ($t^* \leq t^{**}$) las dos raíces positivas de (4.4). Por el teorema 4.6, tenemos

$$\begin{aligned} K\delta_n = Kp(t_n) &< \frac{K^2}{2} \frac{t^* t^{**} (t^{**} - t^*)}{t^{**} - t^* (t^* K\beta_0)^n} (t^* K\beta_0)^n \\ &= \frac{K t^* t^{**} \sqrt{1 - 2K\delta_0\beta_0^2}}{\beta_0 (t^{**} - t^* (t^* K\beta_0)^n)} (t^* K\beta_0)^n \\ &< \frac{K t^* t^{**} (t^* K\beta_0)^n}{\beta_0 (t^{**} - t^* (t^* K\beta_0)^n)} (1 - t^* K\beta_0) \end{aligned} \quad (4.9)$$

A continuación, expresando β_n en función de β_0 y considerando

$$\|I - \bar{\Gamma}_0 F'(z_n)\| \leq \|\bar{\Gamma}_0\| \|F'(z_0) - F'(z_n)\| \leq K\beta_0 \|z_0 - z_n\| \leq K\beta_0 t^*,$$

obtenemos

$$\|\bar{\Gamma}_n\| = \|[F'(z_n)]^{-1}\| \leq \beta, \quad \text{donde} \quad \beta = \beta_n = \frac{\beta_0}{1 - K\beta_0 t^*}.$$

Con lo que, tras aplicar este método, obtenemos el par (δ_n, β) para algún $n \in \mathbb{N}$.

Método corrector: el método de Steffensen

El par (δ_n, β) debe verificar ahora las condiciones de convergencia dadas en (4.3) para el método de Steffensen:

$$K\delta\beta \leq 2 \quad \text{y} \quad M\delta b^2 \leq \frac{1}{2},$$

donde $\delta = \delta_n$, $b = \frac{2\beta}{2 - K\delta\beta}$ y $M = K\left(1 + \frac{1}{b}\right)$. Por tanto, sustituyendo los parámetros δ y β del método predictor en (4.3), se tendrá:

- Si $K\delta\beta \leq 2$, entonces $K\delta_n \leq \frac{2}{\beta}$,
- Si $M\delta b^2 \leq \frac{1}{2}$, entonces $\frac{1}{2} \geq M\delta_n b^2 = K\left(1 + \frac{2 - K\delta_n\beta}{2\beta}\right)\delta_n\left(\frac{2\beta}{2 - K\delta_n\beta}\right)^2$, que es equivalente a

$$5\beta^2(K\delta_n)^2 - 4\beta(3 + 2\beta)(K\delta_n) + 4 \geq 0,$$

que se verifica si

$$K\delta_n \leq P, \quad \text{donde} \quad P = \frac{2(3+2\beta)\beta - 4\sqrt{\beta^2 + 3\beta + 1}}{5\beta^2}.$$

Luego,

$$K\delta_n \leq \min \left\{ \frac{2}{\beta}, P \right\} = \begin{cases} P & \text{si } \beta \leq 2.5303\dots \\ \frac{2}{\beta} & \text{si } \beta \geq 2.5303\dots \end{cases} \quad (4.10)$$

Definición de N_0

Ahora vamos a definir N_0 de manera que indique cuando se da el salto del método predictor al método corrector. Notemos que la sucesión $\{\delta_n\}$ es decreciente, con lo que buscamos el primer valor de n en (4.9) que verifique (4.10). Veámoslo:

- Si $\beta \leq 2.5303\dots$, entonces

$$K\delta_n < \frac{Kt^*t^{**}(K\beta_0)^n t^*}{\beta_0(t^{**} - t^*(t^*K\beta_0)^n)}(1 - K\beta_0 t^*) < P.$$

Tomando logaritmos, encontramos un valor $N_0 \in \mathbb{N}$, de manera que el par $(\delta_{N_0}, \beta_{N_0})$ satisfaga las condiciones de convergencia (4.3) del método corrector, y así obtenemos:

$$N_0 \geq \frac{\log \left(\frac{P\beta_0 t^{**}}{t^*(P\beta_0 + Kt^{**}(1 - t^*K\beta_0))} \right)}{\log(t^*K\beta_0)}.$$

Luego

$$N_0 = 1 + \left\lceil \frac{\log \left(\frac{P\beta_0 t^{**}}{t^*(P\beta_0 + Kt^{**}(1 - K\beta_0 t^*))} \right)}{\log(K\beta_0 t^*)} \right\rceil.$$

- Si $\beta \geq 2.5303\dots$, entonces

$$K\delta_n < \frac{Kt^*t^{**}(t^*K\beta_0)^n}{\beta_0(t^{**} - t^*(t^*K\beta_0)^n)}(1 - t^*K\beta_0) < \frac{2}{\beta}.$$

Tomando de nuevo logaritmos y procediendo como en el caso anterior, encontramos un valor $N_0 \in \mathbb{N}$, de manera que el par $(\delta_{N_0}, \beta_{N_0})$ satisfaga las condiciones de convergencia (4.3) del método corrector, obteniendo:

$$N_0 = 1 + \left\lceil \frac{\log \left(\frac{2\beta_0 t^{**}}{t^*(2\beta_0 + K\beta t^{**}(1 - K\beta_0 t^*))} \right)}{\log(K\beta_0 t^*)} \right\rceil.$$

Por tanto, podemos asegurar que el método corrector es convergente partiendo del punto $x_0 = z_{N_0}$.

A partir de los comentarios y resultados previos, queda probado el siguiente teorema de convergencia semilocal para el método iterativo híbrido (predictor-corrector) dado en (4.8).

Teorema 4.7. *Sea X un espacio de Banach y $F : \Omega \subseteq X \rightarrow X$ un operador una vez continuamente diferenciable Fréchet definido en un conjunto abierto convexo no vacío Ω y $z_0 \in \Omega$. Suponemos que existe el operador $\bar{\Gamma}_0 = [F'(z_0)]^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$, que se satisfacen las condiciones (H1)–(H3) y que $B(z_0, t^*) \subseteq \Omega$, con t^* la menor raíz positiva del polinomio dado en (4.4). Si además $K\delta_0\beta_0^2 \leq \frac{1}{2}$, entonces existe $N_0 \in \mathbb{N}$ de forma que el algoritmo (4.8) es convergente con*

$$N_0 = \begin{cases} 1 + \left\lceil \frac{\log\left(\frac{P\beta_0 t^{**}}{t^*(P\beta_0 + Kt^{**}(1 - K\beta_0 t^*))}\right)}{\log(K\beta_0 t^*)} \right\rceil & \text{si } \beta \leq 2.5303\dots, \\ 1 + \left\lceil \frac{\log\left(\frac{2\beta_0 t^{**}}{t^*(2\beta_0 + K\beta t^{**}(1 - K\beta_0 t^*))}\right)}{\log(K\beta_0 t^*)} \right\rceil & \text{si } \beta \geq 2.5303\dots, \end{cases} \quad (4.11)$$

y $\beta = \frac{\beta_0}{1 - K\beta_0 t^*}$.

4.4. Aplicación

Presentamos una aplicación donde vemos que no podemos aplicar el método de Steffensen para aproximar una solución del problema discreto, que surge de discretizar una ecuación integral no lineal de Hammerstein, porque no se cumplen las condiciones de convergencia del teorema 4.3. Sin embargo, apoyándonos en el método híbrido (4.8), vemos que podemos aplicar el método de Steffensen a partir de cierta iteración.

En principio, parece que la aplicación del método de Steffensen es más restrictiva que la del método modificado de Newton. Veamos que esto es así en el siguiente ejemplo.

Consideramos la siguiente ecuación integral no lineal mixta de tipo Hammerstein

$$x(s) = 1 + \int_0^1 G(s, t)x(t)^2 dt, \quad s \in [0, 1], \quad (4.12)$$

donde $x \in C[0, 1]$, $t \in [0, 1]$ y el núcleo G es la función de Green en $[0, 1] \times [0, 1]$.

A continuación, usamos un proceso de discretización que transforma (4.12) en un problema finito dimensional, tal y como se hizo en la sección 1.5.1, manera que la ecuación (4.12) se transforma en el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$F(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x} - \mathbf{1} - A\mathbf{v}_x = 0, \quad F : \mathbb{R}^8 \longrightarrow \mathbb{R}^8, \quad (4.13)$$

donde

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_8)^T, \mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T, A = (a_{ij})_{i,j=1}^8, \mathbf{v}_x = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_8^2)^T.$$

Además, $F'(\mathbf{x}) = I - 2AD(\mathbf{x})$, con $D(\mathbf{x}) = \text{diag}\{x_1, x_2, \dots, x_8\}$.

Eligiendo como punto de salida $\mathbf{z}_0 = (1.7, 1.7, \dots, 1.7)^T$ y la norma del máximo, obtenemos $\delta_0 = 0.6713\dots$, $\beta_0 = 1.6549\dots$, $K = 0.2471\dots$, $K\delta_0\beta_0^2 = 0.4543\dots < \frac{1}{2}$. Por tanto, podemos aplicar el método modificado de Newton para resolver el sistema (4.13), puesto que se verifica la condición (4.7) del teorema 4.5. Por contra, no podemos aplicar el método de Steffensen, ya que no se verifica la segunda condición de (4.3) del teorema 4.3, puesto que

$$M\delta b^2 = 0.9286\dots > \frac{1}{2},$$

donde $\delta = \delta_0$, $b = 1.9182\dots$ y $M = 0.3759\dots$

Como el método modificado de Newton es convergente por el teorema 4.5, lo aplicamos para obtener la aproximación numérica $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_8^*)^T$ de la solución del sistema (4.13) y mostrada en la tabla 4.1, después de 20 iteraciones y usando como criterio de parada $\|\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1}\| < 10^{-16}$. En la tabla 4.2 se muestran los errores $\|\mathbf{z}_n - \mathbf{x}^*\|$ obtenidos con el mismo criterio de parada. Notemos que el vector dado en la tabla 4.1 es una buena aproximación de la solución del sistema (4.13), puesto que $\|F(\mathbf{x}^*)\| \leq C \times 10^{-16}$. Mostramos la sucesión $\{\|F(\mathbf{z}_n)\|\}$ en la tabla 4.2.

i	x_i^*	i	x_i^*	i	x_i^*	i	x_i^*
1	1.012239...	3	1.118079...	5	1.159804...	7	1.058428...
2	1.058428...	4	1.159804...	6	1.118079...	8	1.012239...

Tabla 4.1: Aproximación de la solución \mathbf{x}^* de (4.13)

n	$\ \mathbf{z}_n - \mathbf{x}^*\ $	$\ F(\mathbf{z}_n)\ $
0	$6.8776\dots \times 10^{-1}$	$6.7130\dots \times 10^{-1}$
1	$6.1560\dots \times 10^{-2}$	$4.6960\dots \times 10^{-2}$
2	$1.1811\dots \times 10^{-2}$	$8.9776\dots \times 10^{-3}$
3	$2.0931\dots \times 10^{-3}$	$1.5942\dots \times 10^{-3}$
4	$3.7465\dots \times 10^{-4}$	$2.8588\dots \times 10^{-4}$
5	$6.6908\dots \times 10^{-5}$	$5.0952\dots \times 10^{-5}$
\vdots	\vdots	\vdots
19	$2.2532\dots \times 10^{-15}$	$1.7180\dots \times 10^{-15}$

Tabla 4.2: Errores absolutos obtenidos con el método modificado de Newton y $\{\|F(\mathbf{z}_n)\|\}$

Por otra parte, si aplicamos el método híbrido (4.8) para aproximar la solución dada en la tabla 4.1 con el mismo punto de salida, sólo necesitamos calcular el valor de N_0 a partir del teorema 4.7 teniendo en cuenta el valor $\beta = 5.4777\dots$. Si nos fijamos en

la fórmula (4.11), obtenemos $N_0 = 1$. Por tanto, después de una iteración del método modificado de Newton, podemos aplicar el método de Steffensen, obteniendo la aproximación numérica de la solución dada en la tabla 4.1 tras realizar cuatro iteraciones más con este método. En la tabla 4.3 se muestran los errores $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\|$ cuando usamos el criterio de parada $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}\| < 10^{-16}$, así como la sucesión $\{\|F(\mathbf{x}_n)\|\}$.

n	$\ \mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\ $	$\ F(\mathbf{x}_n)\ $
0	$6.8776 \dots \times 10^{-1}$	$6.7130 \dots \times 10^{-1}$
1	$6.1560 \dots \times 10^{-2}$	$4.6960 \dots \times 10^{-2}$
2	$8.2751 \dots \times 10^{-4}$	$6.3230 \dots \times 10^{-4}$
3	$1.4582 \dots \times 10^{-7}$	$1.1158 \dots \times 10^{-7}$
4	$4.4982 \dots \times 10^{-15}$	$3.4428 \dots \times 10^{-15}$

Tabla 4.3: Errores absolutos obtenidos con el método híbrido (4.8) y $\{\|F(\mathbf{x}_n)\|\}$

Capítulo 5

Una mejora de la accesibilidad del método de Steffensen mediante una modificación de la teoría basada en relaciones de recurrencia

El estudio realizado en el capítulo anterior se restringe a la situación en la que el operador F es diferenciable Fréchet. Evidentemente, una de las características que tiene el método de Steffensen es que no necesita que el operador F sea diferenciable Fréchet, simplemente necesita que exista una diferencia dividida definida en el dominio Ω .

Habitualmente para probar la convergencia semilocal de este proceso iterativo se imponen dos condiciones básicas ([3], [5],[12]):

- (I) Dados dos puntos cualesquiera $x, y \in \Omega$, distintos, existe la diferencia dividida de primer orden $[x, y; F]$.
- (II) La diferencia dividida verifica la condición

$$\|[x, y; F] - [u, v; F]\| \leq K(\|x - u\| + \|y - v\|) \quad (5.1)$$

para $K \geq 0$, $x, y, u, v \in \Omega$ con $x \neq y$ y $u \neq v$.

La condición (5.1) se puede suavizar considerando la condición

$$\|[x, y; F] - [u, v; F]\| \leq K(\|x - u\|^p + \|y - v\|^p) \quad (5.2)$$

para $K \geq 0$, $p \in (0, 1]$, $x, y, u, v \in \Omega$ con $x \neq y$ y $u \neq v$. La condición (5.1) dice que la diferencia dividida de primer orden es Lipschitz continua en Ω y la condición (5.2) dice que la diferencia dividida es (K, p) -Hölder continua en Ω .

Si ahora consideramos una diferencia dividida de primer orden para la que existe una función $\omega : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ no decreciente en sus dos argumentos tal que

$$\|[x, y; F] - [u, v; F]\| \leq \omega(\|x - u\|, \|y - v\|) \quad (5.3)$$

para $x, y, u, v \in \Omega$ con $x \neq y$ y $u \neq v$, es claro que si $\omega(s, t) = K(s + t)$ o $\omega(s, t) = K(s^p + t^p)$, obtenemos como casos particulares las condiciones (5.1) y (5.2) respectivamente. En estos casos, como $\omega(0, 0) = 0$, F es diferenciable (véase [88]). Por tanto, los

resultados de convergencia semilocal para el método de Steffensen dados habitualmente por otros autores exigen veladamente que el operador F sea diferenciable.

En este capítulo nos planteamos la obtención de un resultado de convergencia semilocal para el método de Steffensen cuando se aplica a ecuaciones en las que el operador F puede no ser diferenciable. Para ello, consideramos las condiciones (I) y (5.3), teniendo en cuenta que $\omega(0, 0) \neq 0$ si el operador F es no diferenciable.

Por otra parte, dada la generalidad de las condiciones de convergencia que vamos a considerar, veremos, a partir del dominio de parámetros asociado al resultado de convergencia semilocal, que la accesibilidad de la solución va a ser restrictiva en determinadas condiciones. Para solventar esta dificultad, construiremos un método iterativo híbrido (predicor-corrector).

En la sección 5.1 obtenemos un resultado de convergencia semilocal para el método de Steffensen que permite aplicar este método a la resolución de ecuaciones con determinados operadores no diferenciables. Para ello, utilizaremos una nueva técnica de demostración de la convergencia semilocal basada en determinadas relaciones de recurrencia que proporciona novedosos resultados acerca de la convergencia semilocal. Después, analizamos el dominio de parámetros asociado al resultado obtenido, observando que en determinadas situaciones es un resultado muy restrictivo. En la sección 5.2, pensando en la construcción de un método iterativo híbrido (predicor-corrector) que tenga las características comentadas anteriormente, obtenemos un nuevo resultado de convergencia semilocal, en las mismas condiciones (I) y (5.3), para el método modificado de la secante ([88]). Veremos que el dominio de parámetros de este método es menos restrictivo que el del método de Steffensen. Así, en la sección 5.3, construimos un método iterativo híbrido (predicor-corrector) que se beneficia del buen dominio de parámetros del método predictor (el método modificado de la secante) y de la velocidad de convergencia del método corrector (el método de Steffensen). Terminamos con la sección 5.4, donde veremos dos aplicaciones en las que se aproximan las soluciones de dos sistemas no lineales, uno diferenciable y otro no diferenciable, mediante el método híbrido previamente construido, pero que no se pueden aproximar mediante el método de Steffensen.

5.1. Convergencia semilocal del método de Steffensen

A lo largo del capítulo exigiremos que para cada par de puntos distintos $x, y \in \Omega$ exista una diferencia dividida de primer orden que denotaremos por $[x, y; F]$.

Por otra parte, para la sucesión $\{x_n\}$ generada por el método de Steffensen, es claro que existen todas las diferencias divididas de primer orden $[x_k, x_k + F(x_k); F]$, salvo que $x_k = x_k + F(x_k)$, en cuyo caso resulta evidente que x_k es una solución de la ecuación $F(x) = 0$ y en este caso tenemos que $x_n = x_k$ para todo $n \geq k$, de manera que la sucesión $\{x_n\}$ es convergente a $x_k \equiv x^*$ solución de $F(x) = 0$.

5.1.1. Análisis general

Comenzamos con un lema técnico que utilizaremos posteriormente.

Lema 5.1. Sea $\{x_n\}$ la sucesión dada por el método de Steffensen. Si $x_{m-1} \neq x_m$ con $x_{m-1}, x_m \in \Omega$, entonces

$$F(x_m) = ([x_m, x_{m-1}; F] - A_{m-1})(x_m - x_{m-1}), \text{ donde } A_{m-1} = [x_{m-1}, x_{m-1} + F(x_{m-1}); F].$$

DEMOSTRACIÓN. A partir de la definición de $\{x_n\}$ se sigue que

$$F(x_{m-1}) + [x_{m-1}, x_{m-1} + F(x_{m-1}); F](x_m - x_{m-1}) = 0,$$

de manera que

$$\begin{aligned} F(x_m) &= F(x_m) - F(x_{m-1}) - [x_{m-1}, x_{m-1} + F(x_{m-1}); F](x_m - x_{m-1}) \\ &= [x_m, x_{m-1}; F](x_m - x_{m-1}) - [x_{m-1}, x_{m-1} + F(x_{m-1}); F](x_m - x_{m-1}) \\ &= ([x_m, x_{m-1}; F] - A_{m-1})(x_m - x_{m-1}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A continuación presentamos un resultado de convergencia semilocal para el método de Steffensen. Para ello, dados $x_0, x_0 + F(x_0) \in \Omega$, notemos que $x_0 \neq x_0 + F(x_0)$, ya que en otro caso x_0 es una solución de $F(x) = 0$ y $x_n = x_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponemos las siguientes condiciones:

$$(C_1) \quad \|F(x_0)\| \leq \delta,$$

$$(C_2) \quad \text{existe } A_0^{-1} = [x_0, x_0 + F(x_0); F]^{-1} \text{ y es tal que } \|A_0^{-1}\| \leq \beta,$$

$$(C_3) \quad \|F(x)\| \leq \sigma, \quad x \in \Omega,$$

$$(C_4) \quad \|[x, y; F] - [u, v; F]\| \leq \omega(\|x - u\|, \|y - v\|); \quad x, y, u, v \in \Omega; \quad x \neq y; u \neq v, \\ \text{donde } \omega : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ es una función continua no decreciente en los} \\ \text{dos argumentos.}$$

Teorema 5.2. Sea $F : \Omega \subseteq X \rightarrow X$ un operador no lineal definido en un dominio abierto convexo no vacío Ω de un espacio de Banach X y con valores en X . Suponemos que existe $[x, y; F] \in \mathcal{L}(X, X)$, $\forall x, y \in \Omega$ ($x \neq y$), y que se cumplen las condiciones (C_1) – (C_4) . Si la ecuación

$$h(t) \equiv (\sigma - t) \left(1 - \frac{\beta \omega(\eta, \sigma)}{1 - \beta \omega(t, t + \delta)} \right) + \eta = 0, \quad (5.4)$$

donde $\eta = \delta\beta$, tiene al menos una raíz real positiva, y denotamos por R la raíz positiva más pequeña de (5.4),

$$\beta (\omega(\eta, \sigma) + \omega(R, R + \delta)) < 1 \quad (5.5)$$

y $\overline{B(x_0, R)} \subset \Omega$, entonces el método de Steffensen, empezando en x_0 , está bien definido y converge a una solución x^* de $F(x) = 0$. Además, la solución x^* y las iteraciones x_n pertenecen a $\overline{B(x_0, R)}$ y x^* es única en $B(x_0, R)$.

DEMOSTRACIÓN. Comenzamos probando que la sucesión $\{x_n\}$ está bien definida, es decir, $x_n \in B(x_0, R) \subset \Omega$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Notemos que la raíz real positiva más pequeña R de la ecuación (5.4) satisface que

$$R = \frac{\eta}{1 - \beta} + \sigma, \quad (5.6)$$

donde $\eta = \delta\beta$ y $P = \frac{\beta \omega(\eta, \sigma)}{1 - \beta \omega(R, R + \delta)}$.

A partir de (C_1) – (C_2) se sigue que x_1 está bien definida y

$$\|x_1 - x_0\| \leq \|A_0^{-1}\| \|F(x_0)\| \leq \beta\delta = \eta < R,$$

por (5.6). Luego, $x_1 \in B(x_0, R)$. Además, de nuevo por (5.6), $\|x_1 + F(x_1) - x_0\| \leq \|x_1 - x_0\| + \|F(x_1)\| \leq \eta + \sigma < R$, de manera que $x_1 + F(x_1) \in B(x_0, R)$.

A continuación, utilizando (C_4) , vemos que

$$\begin{aligned} \|I - A_0^{-1}A_1\| &\leq \|A_0^{-1}\| \|A_0 - A_1\| \\ &\leq \beta \omega(\|x_1 - x_0\|, \|x_1 + F(x_1) - x_0 - F(x_0)\|) \\ &\leq \beta \omega(\|x_1 - x_0\|, \|x_1 + F(x_1) - x_0\| + \|F(x_0)\|) \\ &\leq \beta \omega(\eta, \eta + \delta) \\ &\leq \beta \omega(R, R + \delta) \\ &< 1, \end{aligned}$$

y por el lema de Banach sobre inversión de operadores, tenemos que A_1^{-1} existe y es tal que

$$\|A_1^{-1}\| \leq \frac{\beta}{1 - \beta \omega(R, R + \delta)}.$$

Además, por el lema 5.1, se sigue que $F(x_1) = ([x_1, x_0; F] - A_0)(x_1 - x_0)$, de manera que

$$\begin{aligned} \|F(x_1)\| &\leq \|[x_1, x_0; F] - A_0\| \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \omega(\|x_1 - x_0\|, \|F(x_0)\|) \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \omega(\eta, \delta) \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \omega(\eta, \sigma) \|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

En consecuencia, como $P < 1$, se sigue que

$$\|x_2 - x_1\| \leq \|A_1^{-1}\| \|F(x_1)\| \leq P \|x_1 - x_0\| < \eta,$$

$$\|x_2 - x_0\| \leq \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leq (1 + P) \|x_1 - x_0\| = \frac{1 - P^2}{1 - P} \|x_1 - x_0\| < \frac{\eta}{1 - P} < R.$$

Por lo tanto, $x_2 \in B(x_0, R)$. Además, como

$$\|x_2 + F(x_2) - x_0\| \leq \|x_2 - x_0\| + \|F(x_2)\| < \frac{\eta}{1 - P} + \sigma = R,$$

es claro que $x_2 + F(x_2) \in B(x_0, R)$.

Ahora podemos demostrar por inducción matemática sobre n que se cumplen los siguientes ítems para $n \in \mathbb{N}$:

- El operador A_n^{-1} existe y es tal que $\|A_n^{-1}\| \leq \frac{\beta}{1 - \beta \omega(R, R + \delta)}$,

- $\|F(x_n)\| \leq \omega(\eta, \sigma) \|x_n - x_{n-1}\|$,
- $\|x_{n+1} - x_n\| \leq P \|x_n - x_{n-1}\| \leq P^n \|x_1 - x_0\| < \eta$,

siempre que $A_i = [x_i, x_i + F(x_i); F]$ sea invertible y $x_{i+1}, x_{i+1} + F(x_{i+1}) \in B(x_0, R)$, $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$.

En primer lugar, vemos que

$$\begin{aligned}
\|I - A_0^{-1}A_n\| &\leq \|A_0^{-1}\| \|A_0 - A_n\| \\
&\leq \beta \omega(\|x_n - x_0\|, \|x_n - x_0 + F(x_n) - F(x_0)\|) \\
&\leq \beta \omega(\|x_n - x_0\|, \|x_n + F(x_n) - x_0\| + \|F(x_0)\|) \\
&\leq \beta \omega(R, R + \delta) \\
&< 1,
\end{aligned}$$

por hipótesis. Además,

$$\|A_n^{-1}\| \leq \frac{\beta}{1 - \beta \omega(R, R + \delta)}.$$

En segundo lugar, por el lema 5.1, tenemos

$$F(x_n) = ([x_n, x_{n-1}; F] - A_{n-1} \|x_n - x_{n-1}\|)(x_n - x_{n-1}),$$

de manera que

$$\begin{aligned}
\|F(x_n)\| &\leq \|[x_n, x_{n-1}; F] - A_{n-1}\| \|x_n - x_{n-1}\| \\
&\leq \omega(\|x_n - x_{n-1}\|, \|F(x_{n-1})\|) \|x_n - x_{n-1}\| \\
&\leq \omega(\eta, \sigma) \|x_n - x_{n-1}\|.
\end{aligned}$$

Como ya hemos indicado anteriormente, existen todas las diferencias divididas de primer orden utilizadas porque, en otro caso, si existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x_j + F(x_j) = x_j$, obtendríamos que $F(x_j) = 0$ y, por tanto, $x_n = x_j$, $n \geq j$, de manera que $\{x_n\}$ converge a x_j , lo que indicaría que ya habríamos alcanzado una solución de $F(x) = 0$ y el resultado quedaría entonces probado.

En tercer lugar, vemos que

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x_n\| &\leq \|A_n^{-1}\| \|F(x_n)\| \\
&\leq \frac{\beta \omega(\eta, \sigma)}{1 - \beta \omega(R, R + \delta)} \|x_n - x_{n-1}\| \\
&= P \|x_n - x_{n-1}\| \\
&\leq P^n \|x_1 - x_0\| \\
&< \eta.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - x_0\| &\leq \sum_{i=0}^{n+1} \|x_i - x_{i-1}\| \\
 &\leq (P^n + P^{n-1} + \dots + P + 1) \|x_1 - x_0\| \\
 &\leq \frac{1 - P^{n+1}}{1 - P} \|x_1 - x_0\| \\
 &< \frac{\eta}{1 - P} < R, \\
 \|x_{n+1} + F(x_{n+1}) - x_0\| &\leq \|x_{n+1} - x_0\| + \|F(x_{n+1})\| \\
 &< \frac{\eta}{1 - P} + \sigma \\
 &= R,
 \end{aligned}$$

por (5.6) y ser $P < 1$. Luego, $x_{n+1}, x_{n+1} + F(x_{n+1}) \in B(x_0, R)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Una vez probado que la sucesión $\{x_n\}$ dada por el método de Steffensen está bien definida, vemos que es una sucesión de Cauchy. En efecto, como

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+j} - x_n\| &\leq \|x_{n+j} - x_{n+j-1}\| + \|x_{n+j-1} - x_{n+j-2}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \\
 &\leq (P^{j-1} + P^{j-2} + \dots + P + 1) \|x_{n+1} - x_n\| \\
 &< \frac{P^n}{1 - P} \|x_1 - x_0\|,
 \end{aligned}$$

para $j \geq 1$, y $P < 1$, es claro que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Por tanto, la sucesión $\{x_n\}$ es convergente.

Ahora, si $\lim_n x_n = x^*$, vemos que x^* es una solución de $F(x) = 0$. Como

$$\|F(x_n)\| \leq \omega(\eta, \sigma) \|x_n - x_{n-1}\|$$

y $\|x_n - x_{n-1}\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, por la continuidad del operador F se sigue fácilmente que $F(x^*) = 0$.

Finalmente, probamos la unicidad de la solución x^* en $\overline{B(x_0, R)}$. Supongamos entonces que tenemos otra solución $y^* \in \overline{B(x_0, R)}$, $y^* \neq x^*$, de la ecuación $F(x) = 0$. Sea $A = [y^*, x^*; F]$. Si A es invertible, tenemos $x^* = y^*$, puesto que $A(y^* - x^*) = F(y^*) - F(x^*)$. Para ver que A es invertible, por el Lema de Banach basta con ver que $\|I - A_0^{-1}A\| < 1$. En efecto, si $x_0 \neq x_0 + F(x_0)$, entonces por hipótesis,

$$\begin{aligned}
 \|I - A_0^{-1}A\| &\leq \|A_0^{-1}\| \|A_0 - A\| \leq \|A_0^{-1}\| \|[x_0, x_0 + F(x_0); F] - [y^*, x^*; F]\| \\
 &\leq \beta \omega(\|y^* - x_0\|, \|x^* - x_0 - F(x_0)\|) \\
 &\leq \beta \omega(\|y^* - x_0\|, \|x^* - x_0\| + \|F(x_0)\|) \\
 &\leq \beta \omega(R, R + \delta) < 1.
 \end{aligned}$$

Luego el operador A^{-1} existe. ■

5.1.2. Casos particulares

Es conocido que el operador F es diferenciable si la función ω que aparece en (C_4) cumple $\omega(0, 0) = 0$ (véase [88]). En otro caso, el operador F es no diferenciable. En esta sección vamos a analizar dos casos particulares de la función ω , uno no diferenciable y otro diferenciable.

5.1.2.1. Caso no diferenciable

Es conocido que en la discretización de ecuaciones diferenciales e integrales ([37], [38]), cuando el operador F no es diferenciable, la función ω que aparece en (C_4) es habitualmente de la forma

$$\omega(s, t) = L + K(s + t), \quad \text{con } L, K \in \mathbb{R}_+. \quad (5.7)$$

En este caso, la ecuación (5.4) del teorema 5.2 se transforma en la siguiente ecuación cuadrática equivalente:

$$\begin{aligned} & 2K\beta t^2 + (2L\beta + K\beta(\delta - \eta) - K\beta\sigma - 1)t \\ & + \eta(1 - L\beta - K\beta\delta) + \sigma(1 - 2L\beta - K\beta(\eta + \delta)) - K\beta\sigma^2 = 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

y la condición (5.5) del teorema 5.2 en la condición:

$$\beta(2L + K(2R + \eta + \delta + \sigma)) < 1. \quad (5.9)$$

Analizamos a continuación la ecuación (5.8). Vemos entonces cuando tiene raíces reales positivas. Si se verifican las condiciones

$$2L\beta + K\beta(\delta - \eta) - K\beta\sigma - 1 < 0 \quad (5.10)$$

y

$$\eta(1 - L\beta - K\beta\delta) + \sigma(1 - 2L\beta - K\beta(\eta + \delta)) - K\beta\sigma^2 > 0, \quad (5.11)$$

la ecuación (5.8) tendrá dos raíces reales positivas. Por otra parte, como

$$\begin{aligned} \Delta &= (2L\beta + K\beta(\delta - \eta) - K\beta\sigma - 1)^2 \\ &\quad - 8K\beta \left[\eta(1 - L\beta - K\beta\delta) + \sigma(1 - 2L\beta - K\beta(\eta + \delta)) - K\beta\sigma^2 \right] \\ &= (2L\beta + K\beta(\delta - \eta) - K\beta\sigma - 1 \\ &\quad + \sqrt{8K\beta \left[\eta(1 - L\beta - K\beta\delta) + \sigma(1 - 2L\beta - K\beta(\eta + \delta)) - K\beta\sigma^2 \right]}) \\ &\quad \times (2L\beta + K\beta(\delta - \eta) - K\beta\sigma - 1 \\ &\quad - \sqrt{8K\beta \left[\eta(1 - L\beta - K\beta\delta) + \sigma(1 - 2L\beta - K\beta(\eta + \delta)) - K\beta\sigma^2 \right]}), \end{aligned}$$

$\Delta > 0$ si los dos factores de Δ son < 0 , lo que se cumple cuando

$$\begin{aligned} & 2L\beta + K\beta(\delta - \eta) - K\beta\sigma \\ & + \sqrt{8K\beta \left[\eta(1 - L\beta - K\beta\delta) + \sigma(1 - 2L\beta - K\beta(\eta + \delta)) - K\beta\sigma^2 \right]} < 1. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Además se cumple (5.10) si se cumple (5.12). Por lo tanto, la ecuación (5.8) tendrá dos raíces reales positivas si se cumplen (5.11) y (5.12). En este caso, la raíz positiva más pequeña es:

$$R = \frac{1}{4K\beta} (1 - 2L\beta - K\beta(\delta - \eta) + K\beta\sigma - \sqrt{(2L\beta + K\beta(\delta - \eta) - K\beta\sigma - 1)^2 - 8K\beta [\eta(1 - L\beta - K\beta\delta) + \sigma(1 - 2L\beta - K\beta(\eta + \delta)) - K\beta\sigma^2]}) \quad (5.13)$$

Notemos que también podemos considerar que la ecuación (5.8) tenga una raíz doble sin más que tener en cuenta la desigualdad no estricta en (5.12).

A continuación vemos cuándo se cumple la condición (5.9), condición equivalente a la condición (5.5) del teorema 5.2. Para ello, sustituimos el valor de R en (5.9), de manera que

$$\frac{1}{2} (1 + 2L\beta + 3K\beta\sigma + K\beta\delta + 3K\beta\eta - \sqrt{(2L\beta + K\beta(\delta - \eta) - K\beta\sigma - 1)^2 + 8K\beta [K\beta\sigma^2 + \eta(L\beta + K\beta\delta - 1) + \sigma(2L\beta + K\beta(\eta + \delta) - 1)]}) < 1.$$

Luego, la condición (5.5) del teorema 5.2 es equivalente a

$$1 - 2L\beta - 3K\beta\sigma - K\beta\delta - 3K\beta\eta + \sqrt{(2L\beta + K\beta(\delta - \eta) - K\beta\sigma - 1)^2 + 8K\beta [K\beta\sigma^2 + \eta(L\beta + K\beta\delta - 1) + \sigma(2L\beta + K\beta(\eta + \delta) - 1)]} > 0. \quad (5.14)$$

En consecuencia, las condiciones de convergencia que se imponen a los parámetros δ , β , σ , L y K , como son que la ecuación (5.8) tenga al menos una raíz real positiva y que la raíz positiva más pequeña de (5.8), denotada por R , cumple (5.9), se van a cumplir siempre que se verifiquen (5.11), (5.12) y (5.14). Así, enunciaremos entonces el siguiente resultado, cuya demostración se sigue fácilmente sin más que satisfacer las hipótesis del teorema 5.2 cuando la función ω es la dada en (5.7).

Corolario 5.3. *Sea $F : \Omega \subseteq X \rightarrow X$ un operador no lineal definido en un dominio abierto convexo no vacío Ω de un espacio de Banach X y con valores en X . Supongamos que existe $[x, y; F] \in \mathcal{L}(X, X)$, $\forall x, y \in \Omega$ ($x \neq y$), y que se cumplen las condiciones (C_1) – (C_4) , siendo ω la función que se define en (5.7). Además, si se cumplen (5.11), (5.12), (5.14) y $\overline{B(x_0, R)} \subset \Omega$, donde R está definido en (5.13), entonces el método de Steffensen, empezando en x_0 , está bien definido y converge a una solución x^* de $F(x) = 0$. Además, la solución x^* y las iteraciones x_n pertenecen a $\overline{B(x_0, R)}$ y x^* es única en $\overline{B(x_0, R)}$.*

El corolario 5.3 nos permite visualizar el dominio de parámetros, que es la región del plano cuyos valores representan los parámetros correspondientes a los puntos de salida que satisfacen las condiciones de convergencia requeridas en el corolario 5.3 y a partir de los cuales el método de Steffensen converge bajo las condiciones (C_1) – (C_4) , donde ω es la función que se define en (5.7). Para representarlo gráficamente, consideramos $x = \beta$ (eje de abscisas) e $y = K\delta$ (eje de ordenadas) y coloreamos en el plano xy los valores de los parámetros que verifican las condiciones (5.11), (5.12) y (5.14) que se exigen en el corolario 5.3. Observamos que las condiciones iniciales (C_1) – (C_2) , exigidas al punto inicial, definen los parámetros δ y β , mientras que las condiciones (C_3) – (C_4) , exigidas al operador, definen los parámetros fijos σ , L y K .

Si nos fijamos en las condiciones (5.11), (5.12) y (5.14) del corolario 5.3, vemos que los valores de L y $K\sigma$ están libres, de manera que podemos considerar dos situaciones: una, fijando L y variando $K\sigma$; y dos, fijando $K\sigma$ y variando L . Para la primera situación, a la vista de la figura 5.1, podemos decir que el dominio de parámetros es mayor cuanto menor es el valor de $K\sigma$. Para la segunda situación, a la vista de la figura 5.2, podemos decir que el dominio de parámetros es mayor cuanto menor es el valor de L .

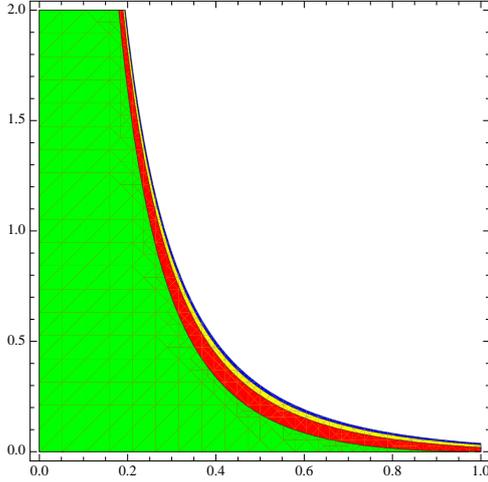


Figura 5.1: Dominios de parámetros del método de Steffensen correspondientes al corolario 5.3 con $L = \frac{1}{5}$ y $K\sigma = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}$ (regiones verde, roja, amarilla y azul, respectivamente).

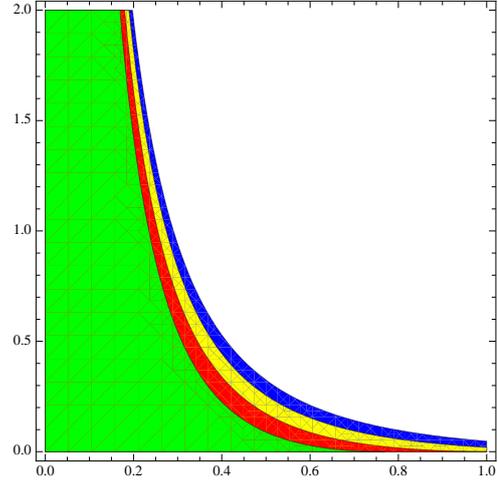


Figura 5.2: Dominios de parámetros del método de Steffensen correspondientes al corolario 5.3 con $K\sigma = \frac{1}{10}$ y $L = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ (regiones verde, roja, amarilla y azul, respectivamente).

5.1.2.2. Caso diferenciable

Si hacemos $L = 0$ en (5.7), obtenemos $\omega(s, t) = K(s+t)$, de manera que la condición (C_4) se reduce ahora a una condición Lipschitz para la diferencia dividida de primer orden del operador F . En este caso, el resultado análogo al corolario 5.3 para operadores diferenciables es el siguiente.

Corolario 5.4. Sea $F : \Omega \subseteq X \rightarrow X$ un operador no lineal definido en un dominio abierto convexo no vacío Ω de un espacio de Banach X y con valores en X . Supongamos que existe $[x, y; F] \in \mathcal{L}(X, X)$, $\forall x, y \in \Omega$ ($x \neq y$), y que se cumplen las condiciones (C_1) – (C_4) , siendo ω la función que se define en (5.7) con $L = 0$. Además, si se cumplen (5.11), (5.12), (5.14) con $L = 0$ y $B(x_0, R) \subset \Omega$, donde R está definido en (5.13) con $L = 0$, entonces el método de Steffensen, empezando en x_0 , está bien definido y converge a una solución x^* de $F(x) = 0$. Además, la solución x^* y las iteraciones x_n pertenecen a $B(x_0, R)$ y x^* es única en $B(x_0, R)$.

En el caso en que el operador F sea diferenciable, el corolario 5.4 nos proporciona una situación totalmente análoga a la primera del corolario 5.3, puesto que $L = 0$ es fijo y al variar el valor de $K\sigma$, obtenemos unos dominios de parámetros análogos a los del corolario 5.3 cuando L es fijo. Véase la figura 5.3.

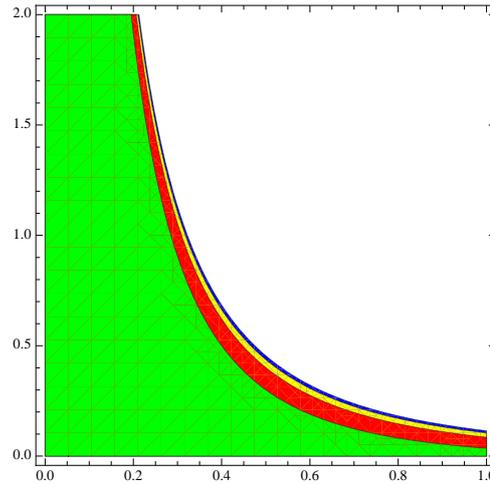


Figura 5.3: Dominios de parámetros del método de Steffensen correspondientes al corolario 5.4 con $L = 0$ y $K\sigma = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}$ (regiones verde, roja, amarilla y azul, respectivamente).

5.2. Convergencia semilocal del método modificado de la secante

Una vez descritos los problemas que tiene el dominio de parámetros del método de Steffensen, consideramos el método modificado de la secante

$$\begin{cases} z_{-1}, z_0 \in \Omega, \\ z_{n+1} = z_n - [z_{-1}, z_0; F]^{-1} F(z_n), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

que como veremos tiene un mejor dominio de parámetros que el método de Steffensen. Sin embargo, el método modificado de la secante tiene convergencia lineal. Por lo tanto, utilizaremos este método para obtener buenos puntos de salida para el método de Steffensen. Comenzaremos estudiando su convergencia semilocal bajo las siguientes hipótesis:

- (H₁) $\|z_0 - z_{-1}\| = \alpha \neq 0$ con $z_{-1}, z_0 \in \Omega$,
- (H₂) $\|F(z_0)\| \leq \delta_0$,
- (H₃) existe $L_0^{-1} = [z_{-1}, z_0; F]^{-1}$ y es tal que $\|L_0^{-1}\| \leq \gamma$,
- (H₄) $\|[x, y; F] - [u, v; F]\| \leq L + K(\|x - u\| + \|y - v\|)$, $L, K \in \mathbb{R}_+$; $x, y, u, v \in \Omega$;
 $x \neq y$; $u \neq v$.

Analizaremos el dominio de parámetros del método modificado de la secante, destacando que es mayor que el del método de Steffensen. Como hemos indicado en la introducción, construiremos un proceso iterativo híbrido predictor-corrector que utiliza el método modificado de la secante como método predictor aprovechando su mayor dominio de parámetros. Antes, damos el siguiente lema técnico.

Lema 5.5. Sea $\{z_n\}$ la sucesión dada por el método modificado de la secante. Si $z_{m-1} \neq z_m$ con $z_{m-1}, z_m \in \Omega$, entonces

$$i) F(z_m) = (L_m - L_0)(z_m - z_{m-1}), \text{ donde } L_0 = [z_{-1}, z_0; F] \text{ y } L_m = [z_{m-1}, z_m; F].$$

$$ii) \|z_{m+1} - z_m\| \leq \gamma(L + K(\|z_m - z_0\| + \|z_{m-1} - z_0\| + \|z_0 - z_{-1}\|))\|z_m - z_{m-1}\|.$$

DEMOSTRACIÓN. A partir del algoritmo del método modificado de la secante se sigue que $F(z_{m-1}) + L_0(z_m - z_{m-1}) = 0$, de manera que

$$F(z_m) = F(z_m) - F(z_{m-1}) - L_0(z_m - z_{m-1}) = (L_m - L_0)(z_m - z_{m-1}).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \|z_{m+1} - z_m\| &\leq \|L_0^{-1}\| \|F(z_m)\| \leq \|L_0^{-1}\| \|L_m - L_0\| \|z_m - z_{m-1}\| \\ &\leq \gamma(L + K(\|z_{m-1} - z_{-1}\| + \|z_m - z_0\|))\|z_m - z_{m-1}\| \\ &\leq \gamma(L + K(\|z_{m-1} - z_0\| + \|z_0 - z_{-1}\| + \|z_m - z_0\|))\|z_m - z_{m-1}\|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A continuación presentamos un resultado de convergencia semilocal para el método modificado de la secante.

Teorema 5.6. *Sea X un espacio de Banach y $F : \Omega \subseteq X \rightarrow X$ un operador no lineal definido en un dominio abierto convexo no vacío Ω . Supongamos que existe $[z_0, z_{-1}; F]^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$ para $z_{-1}, z_0 \in \Omega$ ($z_{-1} \neq z_0$) y que se cumplen las condiciones (H_1) – (H_4) . Si la ecuación*

$$t = \left(1 + \frac{\gamma(L + K(\alpha + \eta_0))}{1 - \gamma(L + K(\alpha + 2t))} \right) \eta_0, \quad (5.15)$$

donde $\eta_0 = \delta_0 \gamma$, tiene al menos una raíz positiva, y denotamos por r la raíz positiva más pequeña de (5.15),

$$M = \gamma(L + K(\alpha + 2r)) < 1 \quad (5.16)$$

y $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$, entonces la sucesión $\{z_n\}$ dada por el método modificado de la secante, empezando en z_{-1} y z_0 , está bien definida y converge a una solución z^* de $F(x) = 0$. Además, $z_n, z^* \in B(z_0, r)$ y z^* es única en $B(z_0, r)$.

DEMOSTRACIÓN. Comenzamos probando que la sucesión $\{z_n\}$ está bien definida; es decir, $z_n \in B(z_0, r) \subset \Omega$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Notemos que la raíz real positiva más pequeña r de la ecuación (5.15) satisface

$$r = \left(1 + \frac{\gamma(L + K(\alpha + \eta_0))}{1 - M} \right) \eta_0. \quad (5.17)$$

A partir de (H_2) , (H_3) y (5.16), se sigue que z_1 está bien definido y que $\|z_1 - z_0\| = \|L_0^{-1}F(z_0)\| \leq \gamma\delta_0 = \eta_0 < r$, como consecuencia de (5.17). Luego, $z_1 \in B(z_0, r)$.

A continuación, podemos definir $z_2 = z_1 - L_0^{-1}F(z_1)$ y

$$\begin{aligned} \|z_2 - z_1\| &= \|L_0^{-1}F(z_1)\| = \|L_0^{-1}(L_1 - L_0)(z_1 - z_0)\| \\ &\leq \|L_0^{-1}\| \|L_1 - L_0\| \|z_1 - z_0\| \\ &\leq \gamma(L + K(\|z_0 - z_{-1}\| + \|z_1 - z_0\|))\|z_1 - z_0\| \\ &\leq \gamma(L + K(\alpha + \gamma\delta_0))\|z_1 - z_0\|. \end{aligned}$$

Además, por (5.17), también se tiene

$$\begin{aligned} \|z_2 - z_0\| &\leq \|z_2 - z_1\| + \|z_1 - z_0\| \leq (1 + \gamma(L + K(\alpha + \gamma\delta_0))) \|z_1 - z_0\| \\ &\leq (1 + \gamma(L + K(\alpha + \eta_0))) \eta_0 < r. \end{aligned}$$

Luego, $z_2 \in B(z_0, r)$.

Suponemos ahora, para $i = 1, 2, \dots, n$, que

$$\|z_i - z_{i-1}\| < \gamma(L + K(\alpha + \eta_0))M^{i-2}\|z_1 - z_0\|,$$

$$\|z_i - z_0\| < \left(1 + \gamma(L + K(\alpha + \eta_0)) \frac{1 - M^{i-1}}{1 - M}\right) \|z_1 - z_0\| < r.$$

Entonces, $z_{n+1} = z_n - L_0^{-1}F(z_n)$ está bien definido y

$$\begin{aligned} \|z_{n+1} - z_n\| &= \|L_0^{-1}F(z_n)\| \\ &= \|L_0^{-1}(L_n - L_0)(z_n - z_{n-1})\| \\ &\leq \|L_0^{-1}\| \|L_n - L_0\| \|z_n - z_{n-1}\| \\ &\leq \gamma(L + K(\|z_n - z_0\| + \|z_{n-1} - z_0\| + \|z_0 - z_{-1}\|)) \|z_n - z_{n-1}\| \\ &< \gamma(L + K(2r + \alpha)) \|z_n - z_{n-1}\| \\ &= M \|z_n - z_{n-1}\| \\ &< \gamma(L + K(\alpha + \eta_0))M^{n-1} \|z_1 - z_0\|. \end{aligned}$$

Notemos que las diferencias divididas de primer orden L_n existen ya que si $z_n = z_{n-1}$, z_{n-1} es una solución de $F(x) = 0$, luego la sucesión $\{z_n\}$ es convergente y el resultado quedaría probado.

Además, por (5.16), también tenemos que

$$\begin{aligned} \|z_{n+1} - z_0\| &\leq \|z_{n+1} - z_n\| + \|z_n - z_0\| \\ &< (\gamma(L + K(\alpha + \eta_0))(M^{n-1} + \dots + M + 1) + 1) \|z_1 - z_0\| \\ &= \left(1 + \gamma(L + K(\alpha + \eta_0)) \frac{1 - M^n}{1 - M}\right) \|z_1 - z_0\| \\ &< \left(1 + \frac{\gamma(L + K(\alpha + \eta_0))}{1 - M}\right) \|z_1 - z_0\| \\ &\leq \left(1 + \frac{\gamma(L + K(\alpha + \eta_0))}{1 - M}\right) \eta_0 \\ &= r, \end{aligned}$$

Luego, $z_{n+1} \in B(z_0, r)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Veamos ahora que la sucesión $\{z_n\}$ es de Cauchy. Como

$$\begin{aligned}
\|z_{n+j} - z_n\| &\leq \|z_{n+j} - z_{n+j-1}\| + \|z_{n+j-1} - z_{n+j-2}\| + \cdots + \|z_{n+1} - z_n\| \\
&< (M^{j-1} + M^{j-2} + \cdots + M + 1)\|z_{n+1} - z_n\| \\
&= \frac{1 - M^j}{1 - M} \|z_{n+1} - z_n\| \\
&< \frac{1 - M^j}{1 - M} \gamma(L + K(\alpha + \eta_0)) M^{n-1} \|z_1 - z_0\| \\
&< \frac{M^{n-1}}{1 - M} \gamma(L + K(\alpha + \eta_0)) \|z_1 - z_0\|,
\end{aligned}$$

para $j \geq 1$ y $M < 1$, se sigue que $\{z_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Por tanto, $\{z_n\}$ es convergente.

Ahora, si $\lim_n z_n = z^*$, vemos que z^* es una solución de $F(x) = 0$. Como

$$\|F(z_n)\| < (L + K(\alpha + 2r)) \|z_n - z_{n-1}\|$$

y $\|z_n - z_{n-1}\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, por la continuidad del operador F se sigue fácilmente que $F(z^*) = 0$.

Terminamos probando la unicidad de la solución z^* en $\overline{B(z_0, r)}$. Suponemos entonces que existe otra solución $y^* \in \overline{B(z_0, r)}$, $y^* \neq z^*$, de la ecuación $F(x) = 0$. Sea $T = [y^*, z^*; F]$. Si T es invertible, tenemos que $z^* = y^*$, puesto que $T(y^* - z^*) = F(y^*) - F(z^*)$. Para ver que T es invertible, por el Lema de Banach basta con ver que $\|I - L_0^{-1}T\| < 1$. En efecto, por hipótesis,

$$\begin{aligned}
\|I - L_0^{-1}T\| &\leq \|L_0^{-1}\| \|L_0 - T\| \leq \|L_0^{-1}\| \|[z_{-1}, z_0; F] - [y^*, z^*; F]\| \\
&\leq \gamma(L + K(\|y^* - z_{-1}\| + \|z^* - z_0\|)) \\
&\leq \gamma(L + K(\|y^* - z_0\| + \|z_0 - z_{-1}\| + \|z^* - z_0\|)) \\
&\leq \gamma(L + K(2r + \alpha)) < 1.
\end{aligned}$$

Luego el operador T^{-1} existe. ■

Una vez probada la convergencia semilocal del método modificado de la secante, nuestro siguiente objetivo es ver cuál es el dominio de parámetros de este método. Para ello, transformamos la ecuación (5.15) en la siguiente ecuación equivalente:

$$2K\gamma t^2 + (\gamma(L + K(\alpha - 2\eta_0)) - 1)t + \eta_0(1 + K\gamma\eta_0) = 0, \quad (5.18)$$

y vemos cuándo tiene raíces reales positivas. La ecuación anterior tendrá dos raíces reales positivas si $\gamma(L + K(\alpha - 2\eta_0)) - 1 < 0$ y

$$\begin{aligned}
\Delta &= (\gamma(L + K(\alpha - 2\eta_0)) - 1)^2 - 8K\gamma\eta_0(1 + K\gamma\eta_0) \\
&= (\gamma(L + K(\alpha - 2\eta_0)) - 1 + \sqrt{8K\gamma\eta_0(1 + K\gamma\eta_0)}) \\
&\quad \times (\gamma(L + K(\alpha - 2\eta_0)) - 1 - \sqrt{8K\gamma\eta_0(1 + K\gamma\eta_0)}) > 0.
\end{aligned}$$

Observamos que los dos factores de Δ son < 0 si

$$\gamma(L + K(\alpha - 2\eta_0)) + \sqrt{8K\gamma\eta_0(1 + K\gamma\eta_0)} < 1. \quad (5.19)$$

Luego, $\Delta > 0$ si se cumple (5.19). También $\gamma(L + K(\alpha - 2\eta_0)) - 1 < 0$ como consecuencia de (5.19). En el caso anterior la raíz positiva más pequeña de (5.18) es:

$$r = \frac{1}{4K\gamma} \left(1 - \gamma(L + K(\alpha - 2\eta_0)) - \sqrt{(\gamma(L + K(\alpha - 2\eta_0)) - 1)^2 - 8K\gamma\eta_0(1 + K\gamma\eta_0)} \right) \quad (5.20)$$

A continuación es fácil probar que la desigualdad (5.16) que aparece en el teorema 5.6 se cumple si

$$K\gamma\eta_0 < 1, \quad \text{donde} \quad \eta_0 = \delta_0\gamma. \quad (5.21)$$

Para ello, basta con sustituir el valor de r en (5.16) y utilizar (5.19) para ver que

$$\sqrt{8K\gamma\eta_0(1 + K\gamma\eta_0)} > 4K\gamma\eta_0,$$

de donde se sigue lo anterior.

En consecuencia, las condiciones de convergencia que se imponen a los parámetros α , δ_0 , γ , L y K , como son que la ecuación (5.15) tenga al menos una raíz real positiva y que la raíz real positiva más pequeña de (5.15), denotada por r , cumpla (5.16), se van a cumplir siempre que se cumplan (5.19) y (5.21). Así, enunciaremos entonces el siguiente resultado, cuya demostración se sigue fácilmente sin más que satisfacer las hipótesis del teorema 5.6.

Notemos que también podemos considerar que la ecuación (5.18) tenga una raíz positiva doble sin más que tener en cuenta la desigualdad no estricta en (5.19).

Corolario 5.7. *Sea X un espacio de Banach y $F : \Omega \subseteq X \rightarrow X$ un operador no lineal definido en un dominio abierto convexo no vacío Ω . Supongamos que existe $[z_{-1}, z_0; F]^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$, para $z_{-1}, z_0 \in \Omega$, y que se cumplen las condiciones (H_1) – (H_4) , (5.19), (5.21) y $B(z_0, r) \subset \Omega$, donde r está definido en (5.20). Entonces, la sucesión $\{z_n\}$ dada por el método modificado de la secante, empezando en z_{-1} y z_0 , está bien definida y converge a una solución z^* de $F(x) = 0$. Además, $z_n, z^* \in B(z_0, r)$ y z^* es única en $B(z_0, r)$.*

A continuación, dibujamos el dominio de parámetros asociado al corolario 5.7. Para ello, seguimos el mismo criterio que para el corolario 5.3, distinguiendo dos casos: el caso no diferenciable ($L \neq 0$) y el diferenciable ($L = 0$). Antes destacamos que para representar gráficamente el dominio de parámetros, consideramos $x = \gamma$ (eje de abscisas) e $y = K\delta_0$ (eje de ordenadas) y coloreamos en el plano los valores de los parámetros que verifican las condiciones (5.19) y (5.21) que se exigen en el corolario 5.7. Notemos que las condiciones iniciales (H_1) – (H_3) , exigidas a los puntos iniciales, definen los parámetros α , δ_0 y γ , mientras que la condición (H_4) , exigida al operador, define los parámetros fijos L y K .

Comenzamos con el caso no diferenciable. Si nos fijamos en las condiciones (5.19) y (5.21) del corolario 5.7, vemos que los valores de L y $K\alpha$ están libres, de manera que podemos considerar dos situaciones: una, fijando L y variando $K\alpha$; y dos, fijando $K\alpha$ y variando L . Para la primera situación, véase la figura 5.4, que nos muestra que el dominio

de parámetros es mayor cuanto menor es el valor de $K\alpha$. Para la segunda situación, véase la figura 5.5, que nos muestra que el dominio de parámetros es mayor cuanto menor es el valor de L , tal y como ocurre para el método de Steffensen, pero destacando que el dominio de parámetros del método modificado de la secante es significativamente mayor que el correspondiente al del método de Steffensen.

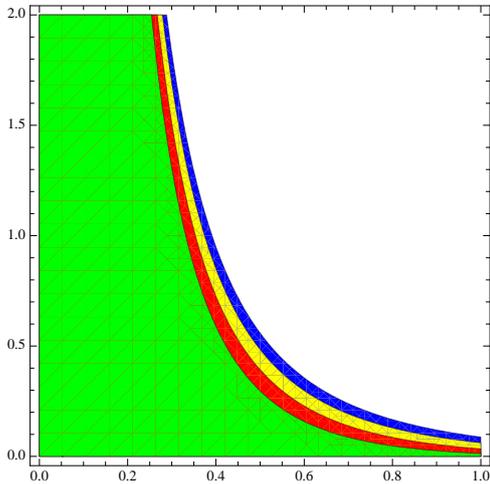


Figura 5.4: Dominios de parámetros del método modificado de la secante correspondientes al corolario 5.7 con $L = \frac{1}{5}$ y $K\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ (regiones verde, roja, amarilla y azul, respectivamente).

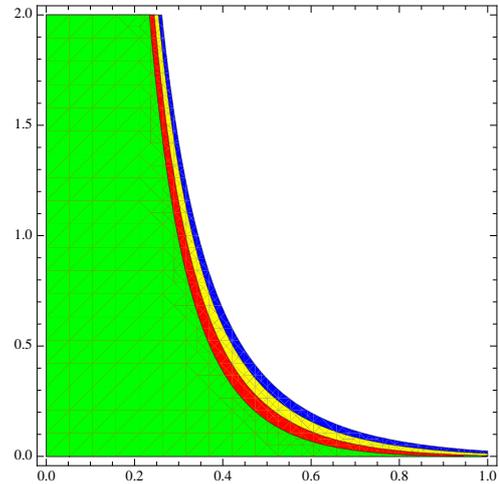


Figura 5.5: Dominios de parámetros del método modificado de la secante correspondientes al corolario 5.7 con $K\alpha = \frac{1}{2}$ y $L = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ (regiones verde, roja, amarilla y azul, respectivamente).

En el caso en que el operador F sea diferenciable ($L = 0$), la situación es totalmente análoga a la del caso no diferenciable donde L es fijo y $K\alpha$ variable, de manera que el dominio de parámetros es mayor cuanto menor es el valor de $K\alpha$. Véase la figura 5.6.

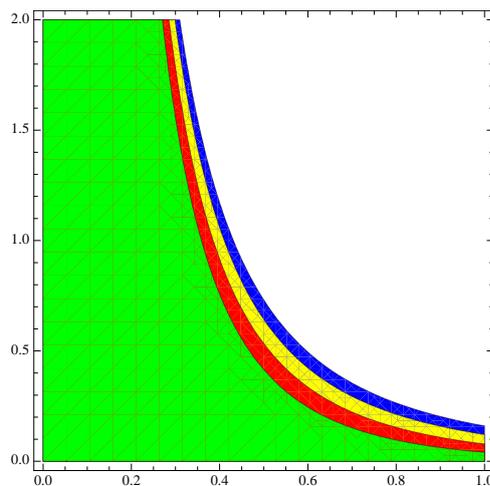


Figura 5.6: Dominios de parámetros del método modificado de la secante correspondientes al corolario 5.7 con $L = 0$ y $K\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ (regiones verde, roja, amarilla y azul, respectivamente).

A simple vista, si observamos las figuras 5.1, 5.2 y 5.3, vemos que el dominio de parámetros del método de Steffensen es limitado con respecto al del método modificado de la secante, véanse las figuras 5.4, 5.5 y 5.6 y destacamos especialmente la reducción que se presenta en las proximidades del eje de abscisas.

Así, nuestro siguiente objetivo es comparar con mayor exactitud los dominios de parámetros de los métodos de Steffensen y modificado de la secante. Para ello, tenemos que representar en los ejes x e y de los planos donde vamos a pintar los dominios de parámetros los mismos valores. Está claro que el eje y representa los mismos valores para los dos métodos porque δ y δ_0 corresponden a $\|F(x_0)\|$ y $\|F(z_0)\|$, respectivamente, obteniéndose ambos valores a partir del punto de salida de cada método. Para que podamos representar los mismos valores en el eje x , escribimos β en función de γ , de manera que ahora representamos en el eje x los valores de los inversos de las mismas diferencias divididas. Así, si existe L_0^{-1} y $\|L_0^{-1}\| \leq \gamma$, entonces

$$\|A_0^{-1}\| \leq \frac{\gamma}{1 - \gamma(L + K(\alpha + \delta_0))} = \beta,$$

siempre que $\gamma(L + K(\alpha + \delta_0)) < 1$, puesto que

$$\|I - L_0^{-1}A_0\| \leq \|L_0^{-1}\| \|L_0 - A_0\| \leq \gamma(L + K(\alpha + \delta_0)).$$

Ya podemos entonces comparar los dominios de parámetros de ambos métodos. Si observamos las figuras 5.7 y 5.8, correspondientes al caso no diferenciable, vemos que el dominio de parámetros del método modificado de la secante es mayor que el del método de Steffensen. Análogamente, observamos lo mismo en las figuras 5.9 y 5.10 correspondientes al caso diferenciable.

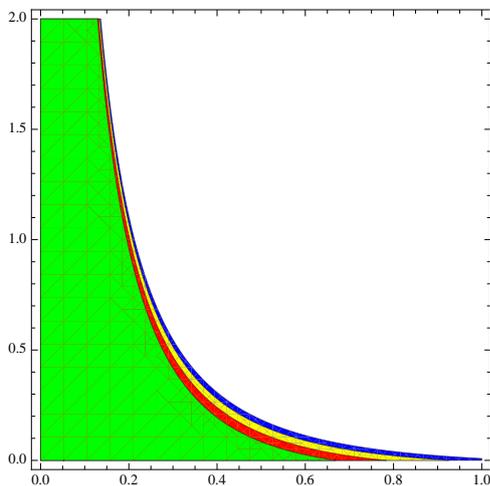


Figura 5.7: Dominios de parámetros del método de Steffensen correspondientes al corolario 5.3 con $K\sigma = \frac{1}{5}$ y $L = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ (regiones verde, roja, amarilla y azul, respectivamente) con $K\alpha = \frac{1}{5}$.

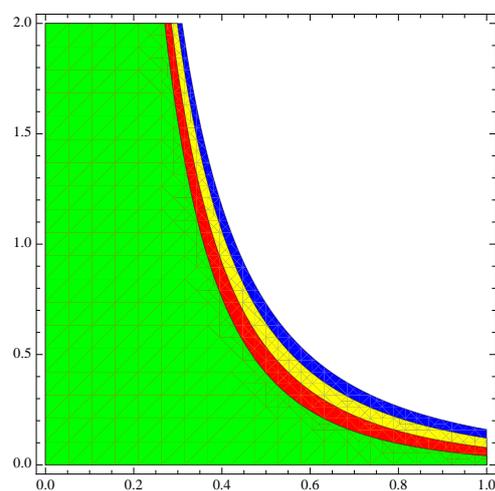


Figura 5.8: Dominios de parámetros del método modificado de la secante correspondientes al corolario 5.7 con $K\alpha = \frac{1}{5}$ y $L = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ (regiones verde, roja, amarilla y azul, respectivamente).

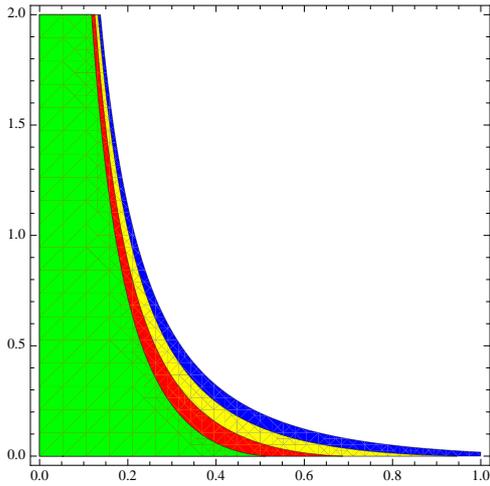


Figura 5.9: Dominios de parámetros del método de Steffensen correspondientes al corolario 5.4 con $L = 0$, $K\sigma = \frac{1}{5}$ y $K\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ (regiones verde, roja, amarilla y azul, respectivamente).

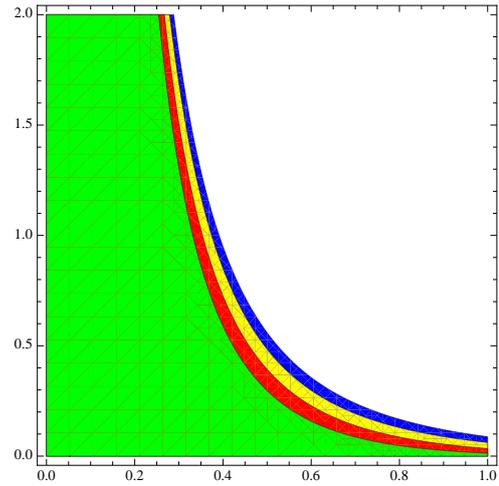


Figura 5.10: Dominios de parámetros del método modificado de la secante correspondientes al corolario 5.7 con $L = 0$ y $K\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ (regiones verde, roja, amarilla y azul, respectivamente).

5.3. Método iterativo híbrido (predictor-corrector)

A la vista de todas las figuras anteriores acerca de los dominios de parámetros de los métodos de Steffensen y modificado de la secante, observamos que tenemos muchas más posibilidades de localizar más puntos de salida para obtener la convergencia semilocal del método modificado de la secante que para la del método de Steffensen. Por tanto, las condiciones que garantizan la convergencia semilocal del método de Steffensen son más restrictivas que las que garantizan la convergencia semilocal del método modificado de la secante.

5.3.1. Construcción del método

Nuestro objetivo inmediato va a consistir entonces en asegurar que para un par (δ_0, γ) que satisfaga las condiciones del corolario 5.7, es decir, que (δ_0, γ) esté dentro del dominio de parámetros del método modificado de la secante, obtengamos un par $(\delta_{N_0}, \beta_{N_0})$ que satisfaga las condiciones del corolario 5.3, después de realizar un cierto número N_0 de iteraciones con el método modificado de la secante, y así asegurar la convergencia del método de Steffensen al empezar este método en la iteración N_0 obtenida previamente mediante el método modificado de la secante. Cuando esto ocurra, podemos considerar el par $(\delta_{N_0}, \beta_{N_0})$ como par inicial (δ, β) para el método de Steffensen.

Para ello, construimos una sencilla modificación del método de Steffensen que sea convergente cuando se tomen como puntos de salida los mismos que en el método modificado de la secante que garantizan su convergencia. Así, consideramos el siguiente

método iterativo híbrido (predicor-corrector):

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} z_{-1}, z_0 \in \Omega, \\ z_{j+1} = z_j - [z_{-1}, z_0; F]^{-1} F(z_j), \quad j = 0, 1, \dots, N_0 - 1, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x_0 = z_{N_0} \in \Omega, \\ x_{n+1} = x_n - [x_n, x_n + F(x_n); F]^{-1} F(x_n), \quad n \geq 0, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (5.22)$$

donde z_{-1} y z_0 satisfacen las condiciones del corolario 5.7 y x_0 satisfaga las condiciones del corolario 5.3.

Para que (5.22) sea convergente, nos planteamos entonces dos cuestiones:

1. Localizar z_{-1} y z_0 de manera que el método predicor (método modificado de la secante) sea convergente.
2. A partir de la convergencia del método predicor, garantizar la existencia de un valor $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que z_{N_0} se pueda tomar como punto inicial $x_0 = z_{N_0}$ a partir del cual esté asegurada la convergencia del método corrector (método de Steffensen).

Así, utilizaremos el método modificado de la secante durante un número finito de pasos N_0 hasta que $z_{N_0} = x_0$ cumpla las condiciones exigidas para que el método de Steffensen sea convergente, y después, aplicaremos el método de Steffensen en vez del método modificado de la secante. La clave del problema reside entonces en garantizar la existencia de N_0 .

5.3.2. Convergencia semilocal del método

A continuación, estudiamos la convergencia semilocal del método iterativo híbrido (predicor-corrector) (5.22). A partir del método predicor (método modificado de la secante), consideramos la siguiente situación. Dadas las aproximaciones iniciales z_{-1} y z_0 , consideramos la sucesión $\{z_n\}$ dada por el método modificado de la secante y

$$\|z_0 - z_{-1}\| = \alpha, \quad \|F(z_0)\| \leq \delta_0, \quad \|[z_{-1}, z_0; F]^{-1}\| \leq \gamma.$$

Para que el método modificado de la secante sea convergente, se tienen que cumplir las condiciones del corolario 5.3. Después, iterando se van definiendo los pares (δ_n, β_n) .

En primer lugar, observamos que la definición del par inicial (δ_0, β_0) para el método de Steffensen es inmediato sin más que tener en cuenta que $\beta_0 = \frac{\gamma}{1 - \gamma(L + K(\alpha + \delta_0))}$. A continuación, procedemos de la siguiente forma.

- **Primer paso del método predicor:** definición del par (δ_1, β_1) .

Notemos

$$\begin{aligned} \|F(z_1)\| &\leq \|L_1 - L_0\| \|z_1 - z_0\| \\ &\leq (L + K(\|z_0 - z_{-1}\| + \|z_1 - z_0\|)) \|z_1 - z_0\| \\ &\leq (L + K(\alpha + \gamma\delta_0)) \gamma\delta_0 \\ &< \gamma(L + K(2r + \alpha)) \delta_0 \\ &= M\delta_0 = \delta_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|I - L_0^{-1}A_1\| &\leq \|L_0^{-1}\| \|L_0 - A_1\| \\
&\leq \gamma (L + K(\|z_1 - z_{-1}\| + \|z_1 - z_0\| + \|F(z_1)\|)) \\
&\leq \gamma (L + K(2\|z_1 - z_0\| + \|z_0 - z_{-1}\| + \|F(z_1)\|)) \\
&\leq \gamma (L + K(2r + \alpha + \delta_1)) \\
&\leq \gamma (L + K(2r + \alpha + M\delta_0)) \\
&= Q,
\end{aligned}$$

$$\|A_1^{-1}\| = \|[z_1, z_1 + F(z_1); F]^{-1}\| \leq \frac{\gamma}{1-Q} = \beta_1,$$

siempre que

$$Q = \gamma (L + K(2r + \alpha + M\delta_0)) < 1. \quad (5.23)$$

Además, $\delta_1 = M\delta_0 < \delta_0$, puesto que $M < 1$ si se cumple (5.23).

- **Segundo paso del método predictor:** definición del par (δ_2, β_2) .

Notemos

$$\begin{aligned}
\|F(z_2)\| &\leq \|L_2 - L_0\| \|z_2 - z_1\| \\
&\leq (L + K(\|z_1 - z_{-1}\| + \|z_2 - z_0\|)) \|z_2 - z_1\| \\
&\leq (L + K(2r + \alpha)) \|L_0^{-1}\| \|F(z_1)\| \\
&< \gamma (L + K(2r + \alpha)) \delta_1 \\
&= M\delta_1 = \delta_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|I - L_0^{-1}A_2\| &\leq \|L_0^{-1}\| \|L_0 - A_2\| \\
&\leq \gamma (L + K(\|z_2 - z_{-1}\| + \|z_2 - z_0\| + \|F(z_2)\|)) \\
&\leq \gamma (L + K(2\|z_2 - z_0\| + \|z_0 - z_{-1}\| + \|F(z_2)\|)) \\
&\leq \gamma (L + K(2r + \alpha + \delta_2)) \\
&= \gamma (L + K(2r + \alpha + M^2\delta_0)) \\
&< \gamma (L + K(2r + \alpha + M\delta_0)) \\
&= Q,
\end{aligned}$$

$$\|A_2^{-1}\| = \|[z_2, z_2 + F(z_2); F]^{-1}\| \leq \frac{\gamma}{1-Q} = \beta_2,$$

siempre que $Q < 1$. Además, $\delta_2 = M^2\delta_0 < \delta_0$, puesto que $M < 1$ si se cumple (5.23).

• **n -ésimo paso del método predictor:** definición del par (δ_n, β_n) .

Notemos

$$\begin{aligned} \|F(z_n)\| &\leq \|L_n - L_0\| \|z_n - z_{n-1}\| \\ &\leq (L + K(\|z_{n-1} - z_{-1}\| + \|z_n - z_0\|)) \|z_n - z_{n-1}\| \\ &\leq (L + K(2r + \alpha)) \|L_0^{-1}\| \|F(z_{n-1})\| \\ &< \gamma(L + K(2r + \alpha)) \delta_{n-1} \\ &= M \delta_{n-1} = \delta_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|I - L_0^{-1}A_n\| &\leq \|L_0^{-1}\| \|L_0 - A_n\| \\ &\leq \gamma(L + K(\|z_n - z_{-1}\| + \|z_n - z_0\| + \|F(z_n)\|)) \\ &\leq \gamma(L + K(2\|z_n - z_0\| + \|z_0 - z_{-1}\| + \|F(z_n)\|)) \\ &\leq \gamma(L + K(2r + \alpha + \delta_n)) \\ &= \gamma(L + K(2r + \alpha + M^n \delta_0)) \\ &< \gamma(L + K(2r + \alpha + M \delta_0)) \\ &= Q, \end{aligned}$$

$$\|A_n^{-1}\| = \|[z_n, z_n + F(z_n); F]^{-1}\| \leq \frac{\gamma}{1-Q} = \beta_n,$$

siempre que $Q < 1$. Además, $\delta_n = M^n \delta_0 < \delta_0$, puesto que $M < 1$ si se cumple (5.23).

Una vez construido el par (δ_n, β_n) a partir de las sucesiones $\{\delta_n\}$ y $\{\beta_n\}$, tenemos que asegurar la existencia de un $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que el par $(\delta_{N_0}, \beta_{N_0})$ satisfaga las condiciones de convergencia exigidas al método de Steffensen en el corolario 5.3. Si observamos las condiciones (5.11), (5.12) y (5.14) del corolario 5.3 y tenemos en cuenta que $\delta_n < \delta_{n-1}$ y $\beta_n = \frac{\gamma}{1-Q} \equiv \text{constante}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, por ser $M < 1$ y $Q < 1$, entonces podemos asegurar las siguientes tres afirmaciones.

Primero, siempre que

$$\sigma(1 - 2L\beta) - K\beta\sigma^2 > 0, \quad (5.24)$$

donde $\beta = \frac{\gamma}{1-Q}$, existirá $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que se cumpla la condición (5.11) del corolario 5.3; es decir,

$$\eta_{N_1}(1 - L\beta_{N_1} - K\beta_{N_1}\delta_{N_1}) + \sigma(1 - 2L\beta_{N_1} - K\beta_{N_1}(\eta_{N_1} + \delta_{N_1})) - K\beta_{N_1}\sigma^2 > 0,$$

donde $\eta_{N_1} = \delta_{N_1}\beta_{N_1}$.

Segundo, siempre que

$$2L\beta - K\beta\sigma + \sqrt{8K\beta[\sigma(1 - 2L\beta) - K\beta\sigma^2]} < 1, \quad (5.25)$$

donde $\beta = \frac{\gamma}{1-Q}$, existirá $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que se cumpla la condición (5.12) del corolario 5.3; es decir,

$$\begin{aligned} &2L\beta_{N_2} + K\beta_{N_2}(\delta_{N_2} - \eta_{N_2}) - K\beta_{N_2}\sigma \\ &+ \sqrt{8K\beta_{N_2}[\eta_{N_2}(1 - L\beta_{N_2} - K\beta_{N_2}\delta_{N_2}) + \sigma(1 - 2L\beta_{N_2} - K\beta_{N_2}(\eta_{N_2} + \delta_{N_2})) - K\beta_{N_2}\sigma^2]} < 1, \end{aligned}$$

donde $\eta_{N_2} = \delta_{N_2} \beta_{N_2}$. Notemos que (5.25) implica (5.24).

Tercero, siempre que

$$1 - 2L\beta - 3K\beta\sigma + \sqrt{(2L\beta - K\beta\sigma - 1)^2 + 8K\beta [K\beta\sigma^2 + \sigma(2L\beta - 1)]} > 0, \quad (5.26)$$

donde $\beta = \frac{\gamma}{1-Q}$, existirá $N_3 \in \mathbb{N}$ tal que se cumpla la condición (5.14) del corolario 5.3; es decir,

$$\begin{aligned} & 1 - 2L\beta_{N_3} - 3K\beta_{N_3}\sigma - K\beta_{N_3}\delta_{N_3} - 3K\beta_{N_3}\eta_{N_3} \\ & + \sqrt{(2L\beta_{N_3} + K\beta_{N_3}(\delta_{N_3} - \eta_{N_3}) - K\beta_{N_3}\sigma - 1)^2 + 8K\beta_{N_3}[\dots]} > 0, \\ & [\dots] \equiv K\beta_{N_3}\sigma^2 + \eta_{N_3}(L\beta_{N_3} + K\beta_{N_3}\delta_{N_3} - 1) + \sigma(2L\beta_{N_3} + K\beta_{N_3}(\eta_{N_3} + \delta_{N_3}) - 1), \end{aligned}$$

donde $\eta_{N_3} = \delta_{N_3} \beta_{N_3}$.

En consecuencia, podemos tomar $N_0 = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, elegir $x_0 = z_{N_0}$ y aplicar el método de Steffensen a partir de la aproximación inicial $x_0 = z_{N_0}$ para garantizar la convergencia del método híbrido (5.22).

Para terminar, resumimos todo lo anterior en el siguiente resultado.

Teorema 5.8. *Sea X un espacio de Banach y $F : \Omega \subseteq X \rightarrow X$ un operador no lineal definido en un dominio abierto convexo no vacío Ω . Supongamos que existe $[x, y; F] \in \mathcal{L}(X, X)$, $\forall x, y \in \Omega$, ($x \neq y$) y que se cumplen las condiciones (H_1) – (H_4) , (C_3) , (5.19), (5.21), (5.23), (5.25), (5.26) y $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$, donde r está dado en (5.20). Entonces, existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $x_0 = z_{N_0}$, la sucesión $\{x_n\}$ dada por el método híbrido (5.22) está bien definida y converge a una solución de $F(x) = 0$.*

5.4. Aplicación

Ilustramos ahora el estudio realizado anteriormente con dos sistemas no lineales siendo uno diferenciable y otro no diferenciable.

Consideramos el caso particular del problema conservativo dado en la sección 1.5.2 y descrito por la ecuación (1.25) con las condiciones de contorno (1.26). A continuación, tal y como se hace en la sección 1.5.2, lo transformamos en el sistema de ecuaciones no lineales (1.28). Así,

$$F(\mathbf{x}) \equiv A\mathbf{x} + h^2 v_{\mathbf{x}} = 0, \quad F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (5.27)$$

donde

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad v_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \phi(x_1) \\ \phi(x_2) \\ \vdots \\ \phi(x_m) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{pmatrix}, \quad h = \frac{1}{m+1}.$$

A partir de ahora centraremos nuestra atención en la resolución de dos sistemas particulares de la forma (5.27), siendo uno diferenciable y otro no diferenciable.

5.4.1. Sistema de ecuaciones no lineales diferenciable

La distribución constante de la temperatura se conoce en una varilla homogénea de longitud 1 en la que, como consecuencia de una reacción química o algún proceso de calor, el calor se genera a una velocidad $\phi(x(t))$ por unidad de tiempo y por unidad de longitud, siendo $\phi(x(t))$ una función dada por el exceso de temperatura x de la varilla sobre la temperatura circulante. Consideramos el problema en el que al final de la varilla, $t = 0$ y $t = 1$, se mantienen esas temperaturas, discretizamos el correspondiente problema de contorno dado por (1.25)–(1.26), y aproximamos una solución del sistema no lineal que surge de la discretización. Por ejemplo, elegimos la ley exponencial, $\phi(x(t)) = \exp(x(t))$, para la generación del calor.

Teniendo en cuenta ahora que la solución de (1.25)–(1.26) con $\phi(x(t)) = \exp(x(t))$ es de la forma

$$x(s) = \int_0^1 G(s, t) \exp(x(t)) dt, \quad (5.28)$$

donde $G(s, t)$ es la función de Green en $[0, 1] \times [0, 1]$, podríamos localizar la solución $x^*(t)$ en algún dominio. Así, tendríamos

$$\|x^*(s)\| - \frac{1}{8} \exp(\|x^*(s)\|) \leq 0,$$

de modo que $\|x^*(t)\| \in [0, \varrho_1] \cup [\varrho_2, +\infty]$, donde $\varrho_1 = 0.1444\dots$ y $\varrho_2 = 3.2616\dots$ son las dos raíces reales positivas de la ecuación escalar $8t - \exp(t) = 0$.

Observando el resultado de convergencia semilocal presentado anteriormente, vemos que sólo se podría garantizar la convergencia semilocal a una solución $x^*(s)$ que verificase $\|x^*(s)\| \in [0, \varrho_1]$. Así, consideraríamos el dominio

$$\Omega = \{x(s) \in C^2[0, 1]; \|x(s)\| \leq \log(7/4), s \in [0, 1]\},$$

ya que $\varrho_1 < \log\left(\frac{7}{4}\right) < \varrho_2$.

A la vista de cuál sería el dominio Ω para la ecuación (5.28), podemos considerar (5.27) con $F : \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^8$ y

$$\tilde{\Omega} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^8; \|\mathbf{x}\| \leq \log(7/4)\}.$$

De acuerdo con lo anterior, consideramos $v_x = (\exp(x_1), \exp(x_2), \dots, \exp(x_8))^t$. Por tanto, la primera derivada de la función F definida en (5.27) está dada por

$$F'(\mathbf{x}) = A + h^2 \text{diag}(v'_x),$$

donde $v'_x = (\exp(x_1), \exp(x_2), \dots, \exp(x_8))$. Además,

$$F'(\mathbf{x}) - F'(\mathbf{y}) = h^2 \text{diag}(\mathbf{z}),$$

donde $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_8)^t$ y $\mathbf{z} = (\exp(x_1) - \exp(y_1), \exp(x_2) - \exp(y_2), \dots, \exp(x_8) - \exp(y_8))$. Ahora,

$$\|F'(\mathbf{x}) - F'(\mathbf{y})\| \leq h^2 \max_{1 \leq i \leq 8} |\exp(c_i)| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

donde $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_8)^t \in \tilde{\Omega}$ y $h = \frac{1}{9}$, de modo que

$$\|F'(\mathbf{x}) - F'(\mathbf{y})\| \leq \frac{7}{4} h^2 \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \quad (5.29)$$

Considerando (véase [88])

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}; F] = \int_0^1 F'(\tau \mathbf{x} + (1 - \tau) \mathbf{y}) d\tau,$$

teniendo en cuenta

$$\int_0^1 \|\tau(\mathbf{x} - \mathbf{u}) + (1 - \tau)(\mathbf{y} - \mathbf{v})\| d\tau \leq \frac{1}{2} (\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|),$$

y (5.29), tenemos

$$\begin{aligned} \|[\mathbf{x}, \mathbf{y}; F] - [\mathbf{u}, \mathbf{v}; F]\| &\leq \int_0^1 \|F'(\tau \mathbf{x} + (1 - \tau) \mathbf{y}) - F'(\tau \mathbf{u} + (1 - \tau) \mathbf{v})\| d\tau \\ &\leq \frac{7}{4} h^2 \int_0^1 (\tau \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\| + (1 - \tau) \|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|) d\tau \\ &= \frac{7}{8} h^2 (\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|). \end{aligned}$$

En consecuencia, $L = 0$ y $K = \frac{7}{648}$.

Eligiendo como punto de salida $\mathbf{x}_0 = (0, 0, \dots, 0)^t$, se obtiene $\delta = \frac{1}{81}$, $\beta = 11.177516\dots$ y $\sigma = 2.260068\dots$, de manera que la condición (5.12) del corolario 5.3 no se verifica, pues

$$\begin{aligned} &2L\beta + K\beta(\delta - \eta) - K\beta\sigma \\ &+ \sqrt{8K\beta [\eta(1 - L\beta - K\beta\delta) + \sigma(1 - 2L\beta - K\beta(\eta + \delta)) - K\beta\sigma^2]} = 1.008409\dots > 1. \end{aligned}$$

Por tanto, según el corolario 5.3, no podemos aplicar el método de Steffensen para aproximar una solución discreta de (5.27) con $\phi(s) = \exp(s)$.

En cambio, si que podemos aplicar el método modificado de la secante considerando como puntos de salida $\mathbf{z}_{-1} = (\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \dots, \frac{1}{10})^t$ y $\mathbf{z}_0 = (0, 0, \dots, 0)^t$. En este caso obtenemos $\alpha = \frac{1}{10}$, $\delta_0 = \frac{1}{81}$, $\gamma = 11.237220\dots$ y las condiciones (5.19) y (5.21) del corolario 5.7 se cumplen, pues

$$\gamma(L + K(\alpha - 2\eta_0)) + \sqrt{8K\gamma\eta_0(1 + K\gamma\eta_0)} = 0.348583\dots < 1,$$

$$K\gamma\eta_0 = 0.016840\dots < 1,$$

$B(\mathbf{z}_0, r) \subset \tilde{\Omega} = B\left(0, \log\left(\frac{7}{4}\right)\right)$, donde $r = 0.142949\dots$ Por tanto, el método modificado de la secante converge a una solución de (5.27) con $\phi(s) = \exp(s)$, la aproximación a la solución viene dada por el vector $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_8^*)^t$ dado en la tabla 5.1 y después

n	x_i^*	n	x_i^*	n	x_i^*	n	x_i^*
1	0.05481058...	3	0.12475178...	5	0.13893761...	7	0.09657993...
2	0.09657993...	4	0.13893761...	6	0.12475178...	8	0.05481058...

Tabla 5.1: Aproximación de la solución \mathbf{x}^* de (5.27) con $\phi(s) = \exp(s)$

n	$\ \mathbf{z}_n - \mathbf{x}^*\ $	$\ F(\mathbf{z}_n)\ $
-1	$4.5189... \times 10^{-1}$	$8.6355... \times 10^{-2}$
0	$1.3893... \times 10^{-1}$	$1.2345... \times 10^{-2}$
1	$2.0650... \times 10^{-4}$	$3.5930... \times 10^{-5}$
2	$1.8172... \times 10^{-6}$	$2.4568... \times 10^{-7}$
3	$1.6473... \times 10^{-8}$	$2.1641... \times 10^{-9}$
4	$1.4969... \times 10^{-10}$	$1.9617... \times 10^{-11}$
5	$1.3603... \times 10^{-12}$	$1.7826... \times 10^{-13}$
6	$1.2364... \times 10^{-14}$	$1.6200... \times 10^{-15}$

Tabla 5.2: Errores absolutos obtenidos con el método modificado de la secante y $\{\|F(\mathbf{z}_n)\|\}$

de siete iteraciones con una tolerancia de 10^{-16} . Observamos que $\|\mathbf{x}^*\| = 0.138937... \leq \log(\frac{7}{4})$ y \mathbf{x}^* es única en la bola $\overline{B(\mathbf{z}_0, 0.142949...)}$. En la tabla 5.2 se muestran los errores $\|\mathbf{z}_n - \mathbf{x}^*\|$ utilizando el criterio de parada $\|\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1}\| < 10^{-16}$. Notemos que el vector dado en la tabla 5.1 es una buena aproximación de la solución del sistema (5.27) con $\phi(s) = \exp(s)$, pues $\|F(\mathbf{x}^*)\| \leq C \times 10^{-16}$. Mostramos la sucesión $\{\|F(\mathbf{z}_n)\|\}$ en la tabla 5.2.

Por otra parte, es fácil ver que se puede aplicar el método híbrido (5.22) porque se cumplen las condiciones (5.23), (5.25) y (5.26) del teorema 5.8, puesto que

$$Q = \gamma(L + K(2r + \alpha + M\delta_0)) = 0.046914... < 1,$$

$$2L\beta - K\beta\sigma + \sqrt{8K\beta[\sigma(1 - 2L\beta) - K\beta\sigma^2]} = 0.992752... < 1,$$

$$1 - 2L\beta - 3K\beta\sigma + \sqrt{(2L\beta - K\beta\sigma - 1)^2 + 8K\beta[K\beta\sigma^2 + \sigma(2L\beta - 1)]} = 0.272879... > 0,$$

respectivamente, de manera que está garantizada la convergencia semilocal del método (5.22) para un cierto $N_0 \in \mathbb{N}$. Así, la primera aproximación dada por el método modificado de la secante ($N_0 = 1$) cumple las condiciones (5.11), (5.12) y (5.14) del corolario 5.3:

$$\eta_{N_0}(1 - L\beta_{N_0} - K\beta_{N_0}\delta_{N_0}) + \sigma(1 - 2L\beta_{N_0} - K\beta_{N_0}(\eta_{N_0} + \delta_{N_0})) - K\beta_{N_0}\sigma^2 = 1.634456... > 0,$$

$$\begin{aligned} & 2L\beta_{N_0} + K\beta_{N_0}(\delta_{N_0} - \eta_{N_0}) - K\beta_{N_0}\sigma \\ & + \sqrt{8K\beta_{N_0}[\eta_{N_0}(1 - L\beta_{N_0} - K\beta_{N_0}\delta_{N_0}) + \sigma(1 - 2L\beta_{N_0} - K\beta_{N_0}(\eta_{N_0} + \delta_{N_0})) - K\beta_{N_0}\sigma^2]} \\ & = 0.988806... < 1, \end{aligned}$$

$$1 - 2L\beta_{N_0} - 3K\beta_{N_0}\sigma - K\beta_{N_0}\delta_{N_0} - 3K\beta_{N_0}\eta_{N_0}$$

$$+ \sqrt{(2L\beta_{N_0} + K\beta_{N_0}(\delta_{N_0} - \eta_{N_0}) - K\beta_{N_0}\sigma - 1)^2 + 8K\beta_{N_0}[\dots]} = 0.337742... > 0,$$

donde $[\dots] \equiv K\beta_{N_0}\sigma^2 + \eta_{N_0}(L\beta_{N_0} + K\beta_{N_0}\delta_{N_0} - 1) + \sigma(2L\beta_{N_0} + K\beta_{N_0}(\eta_{N_0} + \delta_{N_0}) - 1)$, respectivamente.

Por tanto, después de una aproximación del método modificado de la secante, podemos aplicar el método de Steffensen para aproximar la solución \mathbf{x}^* dada en la tabla 5.1, que se obtiene después de dos aproximaciones más con el método de Steffensen con una tolerancia de 10^{-16} . En la tabla 5.3 se muestran los errores $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\|$ y la sucesión $\{\|F(\mathbf{x}_n)\|\}$ utilizando el mismo criterio de parada que antes.

n	$\ \mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\ $	$\ F(\mathbf{x}_n)\ $
-1	$4.5189 \dots \times 10^{-1}$	$8.6355 \dots \times 10^{-2}$
0	$1.3893 \dots \times 10^{-1}$	$1.2345 \dots \times 10^{-2}$
1	$2.0650 \dots \times 10^{-4}$	$3.5930 \dots \times 10^{-5}$
2	$1.9072 \dots \times 10^{-9}$	$2.4981 \dots \times 10^{-10}$

Tabla 5.3: Errores absolutos obtenidos con el método híbrido (5.22) y $\{\|F(\mathbf{x}_n)\|\}$

5.4.2. Sistema de ecuaciones no lineales no diferenciable

Consideramos ahora un sistema no diferenciable de ecuaciones no lineales, el dado por (5.27) con

$$\mathbf{v}_x = (v_1, v_2, \dots, v_8)^t, \quad v_i = \frac{1}{3}x_i^2 + |x_i| + 1, \quad i = 1, 2, \dots, 8. \quad (5.30)$$

Notemos que si consideramos un sistema de ecuaciones del tipo (5.27), donde la función $\phi(s)$ es no diferenciable, entonces la función F es no diferenciable y satisface (5.3) con $\omega(0, 0) \neq 0$ (como veremos más adelante), no podemos aplicar los resultados de convergencia semilocal en los que $\omega(0, 0) = 0$ y que generalmente son los que se aplican.

Como en \mathbb{R}^8 podemos considerar diferencias divididas de primer orden que no necesitan que la función sea diferenciable [88], consideramos la diferencia dividida de primer orden dada por $[\mathbf{u}, \mathbf{v}; F] = ([\mathbf{u}, \mathbf{v}; F]_{ij})_{i,j=1}^8 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^8, \mathbb{R}^8)$, donde

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}; F]_{ij} = \frac{1}{u_j - v_j} (F_i(u_1, \dots, u_j, v_{j+1}, \dots, v_8) - F_i(u_1, \dots, u_{j-1}, v_j, \dots, v_8)),$$

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_8)^t$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_8)^t$, de modo que

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}; F] = A + h^2 \text{diag}(\mathbf{z}),$$

donde $z_i = \frac{u_i + v_i}{3} + \frac{|u_i| - |v_i|}{u_i - v_i}$, para $i = 1, 2, \dots, 8$, y $h = \frac{1}{9}$. Así, para la norma del máximo,

$$\|[\mathbf{x}, \mathbf{y}; F] - [\mathbf{u}, \mathbf{v}; F]\| \leq \max_{1 \leq i \leq 8} \left| \frac{x_i - u_i}{3} + \frac{y_i - v_i}{3} + \frac{|x_i| - |y_i|}{x_i - y_i} - \frac{|u_i| - |v_i|}{u_i - v_i} \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq h^2 \left(\frac{1}{3} \max_{1 \leq i \leq 8} |x_i - u_i + y_i - v_i| + \max_{1 \leq i \leq 8} \left| \frac{|x_i| - |y_i|}{x_i - y_i} - \frac{|u_i| - |v_i|}{u_i - v_i} \right| \right) \\ &\leq \frac{h^2}{3} (\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|) + 2h^2 = \omega(\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|, \|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|), \end{aligned}$$

de manera que $\omega(s, t) = h^2 \left(\frac{s+t}{3} + 2 \right)$, $L = \frac{2}{81}$ y $K = \frac{1}{243}$.

Además, $\|A\| = 4$ y

$$\|\mathbf{v}_x\| \leq \frac{1}{3} \max_{1 \leq i \leq 8} |x_i^2| + \max_{1 \leq i \leq 8} |x_i| + 1 \leq \frac{1}{3} \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{x}\| + 1.$$

De esta última expresión se sigue que

$$\|F(\mathbf{x})\| \leq 4\|\mathbf{x}\| + h^2 \left(\frac{1}{3} \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{x}\| + 1 \right) = g(\|\mathbf{x}\|).$$

Luego $\|F(\mathbf{x})\|$ no está acotada porque $g(s)$ es una función creciente, y por tanto, no podemos aplicar el corolario 5.3.

Para solventar la dificultad anterior y poder aplicar el corolario 5.3, una alternativa es localizar una raíz de la ecuación (5.27) en algún dominio y buscar alguna cota superior para $\|F(\mathbf{x})\|$ en él. Para esto, teniendo en cuenta que $\|A^{-1}\| = 10$ y que la solución \mathbf{x}^* de (5.27) y (5.30) satisface

$$\|\mathbf{x}^*\| \leq h^2 \|A^{-1}\| \|\mathbf{v}_{\mathbf{x}^*}\|,$$

se obtiene $10\|\mathbf{x}^*\|^2 - 213\|\mathbf{x}^*\| + 30 \geq 0$, de modo que $\|\mathbf{x}^*\| \in [0, \varrho_1] \cup [\varrho_2, +\infty]$, donde $\varrho_1 = 0.141789\dots$ y $\varrho_2 = 21.158211\dots$ son las dos raíces reales positivas de la ecuación escalar $10t^2 - 213t + 30 = 0$.

A partir de lo anterior, podemos considerar $F : \Omega \subset \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^8$ con

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^8; \|\mathbf{x}\| < 7/10\},$$

ya que $\varrho_1 < \frac{7}{10} < \varrho_2$. En este caso, a partir de (5.27), $\|F(\mathbf{x})\| \leq 2.823004\dots = \sigma$.

Si elegimos como punto de salida $\mathbf{x}_0 = (0, 0, \dots, 0)^T$, obtenemos $\delta = \frac{1}{81}$ y $\beta = 11.174798\dots$, de manera que la condición (5.12) del corolario 5.3 no se verifica, ya que

$$\begin{aligned} &2L\beta + K\beta(\delta - \eta) - K\beta\sigma \\ &+ \sqrt{8K\beta \left[\eta(1 - L\beta - K\beta\delta) + \sigma(1 - 2L\beta - K\beta(\eta + \delta)) - K\beta\sigma^2 \right]} = 1.016375\dots \geq 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, según el corolario 5.3, no podemos aplicar el método de Steffensen para aproximar una solución de (5.27) con (5.30).

En cambio, sí que podemos aplicar el método modificado de la secante. Para ello, basta con tomar como puntos de salida $\mathbf{z}_{-1} = \left(-\frac{1}{10}, -\frac{1}{10}, \dots, -\frac{1}{10}\right)^T$ y $\mathbf{z}_0 = (0, 0, \dots, 0)^T$. En este caso, obtenemos $\alpha = \frac{1}{10}$, $\delta_0 = \frac{1}{8}$, $\gamma = 9.019689\dots$ y las condiciones (5.19) y (5.21) del corolario 5.7 se cumplen, puesto que

$$\gamma(L + K(\alpha - 2\eta_0)) + \sqrt{8K\gamma\eta_0(1 + K\gamma\eta_0)} = 0.400369\dots < 1,$$

$$K\gamma\eta_0 = 0.004133\dots < 1,$$

$B(\mathbf{z}_0, r) \subset \Omega = B\left(0, \frac{7}{10}\right)$, donde $r = 0.145009\dots$. Luego el método modificado de la secante converge a una solución de (5.27) y (5.30), la dada por el vector $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_8^*)^t$ en la tabla 5.4, después de diecinueve iteraciones con una tolerancia de 10^{-16} . Observamos que $\|\mathbf{x}^*\| = 0.13855711\dots \leq \frac{7}{10}$ y \mathbf{x}^* es única en la bola $B(\mathbf{z}_0, 0.145009\dots)$. En la tabla 5.5 mostramos los errores $\|\mathbf{z}_n - \mathbf{x}^*\|$ utilizando el criterio de parada $\|\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1}\| < 10^{-16}$. Notemos que el vector dado en la tabla 5.4 es una buena aproximación de la solución del sistema (5.27) con v_x definido en (5.30), ya que $\|F(\mathbf{x}^*)\| \leq C \times 10^{-16}$. Mostramos la sucesión $\{\|F(\mathbf{z}_n)\|\}$ en la tabla 5.5.

n	x_i^*	n	x_i^*	n	x_i^*	n	x_i^*
1	0.05468713...	3	0.12442184...	5	0.13855711...	7	0.09634112...
2	0.09634112...	4	0.13855711...	6	0.12442184...	8	0.05468713...

Tabla 5.4: Aproximación de la solución \mathbf{x}^* de (5.27) y (5.30)

n	$\ \mathbf{z}_n - \mathbf{x}^*\ $	$\ F(\mathbf{z}_n)\ $
-1	$2.3855\dots \times 10^{-1}$	$1.1362\dots \times 10^{-1}$
0	$1.3855\dots \times 10^{-1}$	$1.2345\dots \times 10^{-2}$
1	$2.7202\dots \times 10^{-2}$	$2.8463\dots \times 10^{-3}$
2	$5.3229\dots \times 10^{-3}$	$5.7127\dots \times 10^{-4}$
3	$1.0416\dots \times 10^{-3}$	$1.1224\dots \times 10^{-4}$
4	$2.0387\dots \times 10^{-4}$	$2.1982\dots \times 10^{-5}$
5	$3.9903\dots \times 10^{-5}$	$4.3029\dots \times 10^{-6}$
\vdots	\vdots	\vdots
18	$1.9859\dots \times 10^{-14}$	$2.6627\dots \times 10^{-15}$

Tabla 5.5: Errores absolutos obtenidos con el método modificado de la secante y $\{\|F(\mathbf{z}_n)\|\}$

Por otra parte, es fácil ver que se puede aplicar el método híbrido (5.22) porque se cumplen las condiciones (5.23), (5.25) y (5.26) del teorema 5.8:

$$Q = \gamma(L + K(2r + \alpha + M\delta_0)) = 0.237293\dots < 1,$$

$$2L\beta - K\beta\sigma + \sqrt{8K\beta[\sigma(1 - 2L\beta) - K\beta\sigma^2]} = 0.999986\dots < 1,$$

$$1 - 2L\beta - 3K\beta\sigma + \sqrt{(2L\beta - K\beta\sigma - 1)^2 + 8K\beta[K\beta\sigma^2 + \sigma(2L\beta - 1)]} = 0.007699\dots > 0,$$

respectivamente, de manera que está garantizada la convergencia semilocal del método (5.22) para un determinado $N_0 \in \mathbb{N}$. Por tanto, después de dos aproximaciones del método modificado de la secante ($N_0 = 2$), se cumplen las condiciones (5.11), (5.12) y (5.14) del corolario 5.3:

$$\eta_{N_0}(1 - L\beta_{N_0} - K\beta_{N_0}\delta_{N_0}) + \sigma(1 - 2L\beta_{N_0} - K\beta_{N_0}(\eta_{N_0} + \delta_{N_0})) - K\beta_{N_0}\sigma^2 = 0.885410\dots > 0,$$

$$\begin{aligned}
 & 2L\beta_{N_0} + K\beta_{N_0}(\delta_{N_0} - \eta_{N_0}) - K\beta_{N_0}\sigma \\
 & + \sqrt{8K\beta_{N_0} \left[\eta_{N_0}(1 - L\beta_{N_0} - K\beta_{N_0}\delta_{N_0}) + \sigma(1 - 2L\beta_{N_0} - K\beta_{N_0}(\eta_{N_0} + \delta_{N_0})) - K\beta_{N_0}\sigma^2 \right]} \\
 & = 0.998721\dots < 1, \\
 & 1 - 2L\beta_{N_0} - 3K\beta_{N_0}\sigma - K\beta_{N_0}\delta_{N_0} - 3K\beta_{N_0}\eta_{N_0} \\
 & + \sqrt{(2L\beta_{N_0} + K\beta_{N_0}(\delta_{N_0} - \eta_{N_0}) - K\beta_{N_0}\sigma - 1)^2 + 8K\beta_{N_0}[\dots]} = 0.087772\dots > 0,
 \end{aligned}$$

donde $[\dots] \equiv K\beta_{N_0}\sigma^2 + \eta_{N_0}(L\beta_{N_0} + K\beta_{N_0}\delta_{N_0} - 1) + \sigma(2L\beta_{N_0} + K\beta_{N_0}(\eta_{N_0} + \delta_{N_0}) - 1)$, respectivamente.

Ahora, después de dos aproximaciones del método modificado de la secante, podemos aplicar el método de Steffensen para aproximar la solución \mathbf{x}^* dada en la tabla 5.4, que se obtiene después de tres aproximaciones con el método de Steffensen y una tolerancia de 10^{-16} . En la tabla 5.6 mostramos los errores absolutos $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\|$ y la sucesión $\{\|F(\mathbf{x}_n)\|\}$ utilizando el mismo criterio de parada que antes.

n	$\ \mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\ $	$\ F(\mathbf{x}_n)\ $
-1	$2.3855\dots \times 10^{-1}$	$1.1362\dots \times 10^{-1}$
0	$1.3855\dots \times 10^{-1}$	$1.2345\dots \times 10^{-2}$
1	$2.7202\dots \times 10^{-2}$	$2.8463\dots \times 10^{-3}$
2	$5.3229\dots \times 10^{-3}$	$5.7127\dots \times 10^{-4}$
3	$8.5147\dots \times 10^{-7}$	$1.0405\dots \times 10^{-7}$
4	$2.1147\dots \times 10^{-14}$	$2.6189\dots \times 10^{-15}$

Tabla 5.6: Errores absolutos obtenidos con el método híbrido (5.22) y $\{\|F(\mathbf{x}_n)\|\}$

Conclusiones y cuestiones abiertas

A lo largo de toda esta memoria, dos han sido las cuestiones que más nos han preocupado y a las que hemos tratado de dar respuesta. Por un lado, nos hemos preocupado de analizar la convergencia semilocal de métodos iterativos que no utilizan derivadas, tanto con memoria como punto a punto, cuando se aplican a la resolución de ecuaciones no lineales, destacando el nuevo punto de vista, introducido y basado en una técnica de demostración novedosa que consiste en una sencilla modificación de la teoría de las relaciones de recurrencia desarrollada a lo largo de todos estos últimos años por nuestro grupo de investigación PRIENOL, dando lugar a resultados más que interesantes, como se puede ver en numerosas publicaciones ([40], [41], [44], [45], [56], [58]).

Tal y como hemos visto, esta nueva técnica tiene la ventaja de que se puede aplicar a situaciones en las que el operador implicado en la ecuación a resolver es no diferenciable, lo que ya no es tan común en la literatura matemática que trata el estudio de la convergencia semilocal de métodos iterativos. Esto no ha sido un inconveniente para recordar otras técnicas de demostración de la convergencia semilocal, como es la conocida técnica de las sucesiones mayorizantes, que originalmente fue desarrollada por Kantorovich para probar la convergencia semilocal del método de Newton en espacios de Banach y que después ha sido utilizada frecuentemente por otros autores como para que en la actualidad sea la técnica clásica por antonomasia, sin olvidarnos, por supuesto, de la técnica basada en relaciones de recurrencia desarrollada por el grupo PRIENOL.

Hay que destacar especialmente las ventajas que presenta la nueva técnica de demostración de la convergencia semilocal que permite mejorar los dominios de puntos de salida de los métodos iterativos aquí considerados y, como hemos indicado anteriormente, estudiar situaciones en las que el operador implicado no es diferenciable.

Por otro lado, la obtención de aproximaciones iniciales suficientemente buenas como para que los métodos iterativos aquí considerados fueran convergentes ha sido el otro aspecto al que hemos prestado especialmente nuestra atención en esta memoria. Para llevar a cabo este logro nos hemos apoyado en alguna de las características que tiene la nueva técnica de demostración de la convergencia semilocal y, sobre todo, en la construcción de métodos iterativos híbridos (predictor-corrector) que, al combinar dos métodos iterativos, uno con un dominio de puntos de salida amplio y otro con una buena velocidad de convergencia, tiene la utilidad de poder aprovechar la ventaja de cada uno de los dos métodos iterativos que combina, dando lugar así a métodos iterativos que se pueden tener en cuenta a la hora de resolver ecuaciones no lineales.

A la hora de aproximar soluciones de ecuaciones no lineales mediante métodos iterativos hemos tenido en cuenta el hecho de que la derivada primera Fréchet del operador implicado fuese difícil de evaluar en cada paso de iteración, costosa de calcular o que

no existiese. Por esto, hemos considerado métodos iterativos que no utilizan derivadas. Para ello, nos hemos apoyado en el método de Newton aproximando la derivada del operador que aparece en su algoritmo por una diferencia dividida de primer orden, dando lugar así a dos clases de métodos iterativos: los métodos tipo secante, que se obtienen a partir de la interpretación geométrica de los métodos de Newton y de la secante en el caso real, y el método de Steffensen, que se construye a partir de la idea de mantener el orden de convergencia del método de Newton.

Siguiendo en la línea de esta memoria, varias son las cuestiones que quedan abiertas para tratar de estudiar en un futuro inmediato. Dos ideas que surgen de forma natural después de la lectura de esta memoria son: por un lado, la construcción de métodos iterativos a partir de la aproximación de las derivadas que aparecen en los algoritmos de métodos iterativos de orden superior mediante diferencias divididas; y por otro lado, utilizar diferentes diferencias divididas para aproximar la derivada primera del operador que aparece en el método de Newton. Siempre manteniendo el orden de convergencia de los métodos iterativos originales. Con respecto a la primera idea, podríamos partir de métodos punto a punto de tercer orden como son los métodos de Halley ([42]) y de Chebychev ([106]). Con respecto a la segunda, podríamos utilizar procedimientos de interpolación lineal parecidos al presentado por Kurchatov para el método de Newton en [74] y posteriormente mejorado por Shakno en [96].

Hemos puesto de manifiesto en esta memoria que el hecho de no tener que evaluar la derivada del operador implicado en cada paso de la iteración de un método iterativo es importante, como consecuencia de que ésta puede no existir o ser costosa de evaluar. Está claro entonces cuál sería un siguiente paso: no tener que calcular operadores inversos en la aplicación de un método iterativo, dando lugar así a procesos iterativos “libres de inversos”. Esta idea la introduce Moser en [81] donde modifica el método de Newton introduciendo una aproximación del inverso de la derivada primera en cada paso de la iteración y presentando un nuevo método tipo Newton que no evalúa operadores inversos y que utiliza la misma cantidad de información en cada paso que el método de Newton. Este método fue mejorado primero por Ulm ([100]) y redescubierto más tarde por Hald ([57]). La idea que surge de todo lo anterior para desarrollar en el futuro consiste en extender lo propuesto por Moser para el método de Newton a otros métodos iterativos que no utilicen derivadas, procurando además no perder velocidad de convergencia.

Recientemente, han aparecido métodos tipo Steffensen óptimos de cuarto orden que no utilizan derivadas [78] y [91]. Pensamos que es factible encontrar otros métodos de la misma clase de órdenes superiores, que puedan ser (o no) óptimos. Un enfoque tradicional en los métodos tipo Steffensen ([1], [7]) para sistemas no lineales es la sustitución de cada una de las derivadas parciales que componen la matriz jacobiana por su correspondiente diferencia dividida. Conjugando las dos ideas que acabamos de exponer, se puede pensar en el diseño de métodos en los que no se haga uso de la matriz jacobiana ni de su aproximación por diferencias divididas, como por ejemplo, métodos tipo Broyden, conservando en la medida de lo posible el orden de convergencia del método de partida.

Compaginar las distintas técnicas de demostración de la convergencia semilocal de un método iterativo que se han presentado en esta memoria es una cuestión interesante de abordar porque podría permitir mejorar los dominios de los puntos de salida del

método iterativo. Habría que analizar con detenimiento el tipo de condiciones iniciales que habría que imponer.

No queremos terminar sin recordar algunas de las fuentes de inspiración que hemos tenido a lo largo de la elaboración de esta memoria en algún momento u otro, aunque no hayan sido objeto de un estudio detallado: [15], [14], [2], [8], [6], [24], [25], [28], [29], [33], [54], [55], [104], [105]. La mayoría de sus autores han colaborado de una forma u otra con nuestro grupo de investigación PRIENOL. A todos ellos, una vez más, gracias.

Bibliografía

- [1] ALARCÓN, V., AMAT, S., BUSQUIER, S. Y LÓPEZ, D. J., *A Steffensen's type method in Banach spaces with applications on boundary-value problems*, J. Comput. Appl. Math., **216**, n° 1: 243–250, 2008.
- [2] AMAT, S., BLANDA, J. Y BUSQUIER, S., *A Steffensen's type method with modified functions*, Riv. Mat. Univ. Parma (7), **7**: 125–133, 2007.
- [3] AMAT, S. Y BUSQUIER, S., *Convergence and numerical analysis of a family of two-step Steffensen's methods*, Comput. Math. Appl., **49**, **2**: 13–22, 2005.
- [4] AMAT, S. Y BUSQUIER, S., *On a Steffensen's type method and its behavior for semismooth equations*, Appl. Math. Comput., **177**, n° 2: 819–823, 2006.
- [5] AMAT, S. Y BUSQUIER, S., *A two-step Steffensen's method under modified convergence conditions*, J. Math. Anal. Appl., **324**, n° 2: 1084–1092, 2006.
- [6] AMAT, S., BUSQUIER, S. Y CANDELA, V., *A class of quasi-Newton generalized Steffensen methods on Banach spaces*, J. Comput. Appl. Math., **149**, n° 2: 397–406, 2002.
- [7] AMAT, S., BUSQUIER, S. Y CANDELA, V., *Third order Steffensen methods for fixed point equations in Banach spaces*, Int. Math. J., **3**, n° 12: 1357–1365, 2003.
- [8] AMAT, S., BUSQUIER, S. Y GUTIÉRREZ, J. M., *A new local convergence theorem for Steffensen's type methods*, Internat. J. Appl. Sci. comput., **13**, n° 1: 14–19, 2006.
- [9] ANDRONOW, A. A. Y CHAIKIN, C. E., *Theory of oscillations*, Princeton University Press, New Jersey, 1949.
- [10] ARGYROS, I. K., *The Secant method and fixed points of nonlinear operators*, Monatsh. Math., **106**, **2**: 85–94, 1988.
- [11] ARGYROS, I. K., *On the Secant Method*, Publ. Math. Debrecen, **43**: 223–238, 1993.
- [12] ARGYROS, I. K., *A new convergence theorem for Steffensen's method on Banach spaces and applications*, Southwest J. Pure Appl. Math., **1**: 23–29, 1997.
- [13] ARGYROS, I. K. Y CHEN, D., *Results on the Chebyshev method in Banach spaces*, Proyecciones, **12**, **2**: 119–128, 1993.
- [14] ARGYROS, I. K. Y HILOUT, S., *On a secant-like method for solving generalized equations* Math. Bohem. **133**, **3**: 313–320, 2008.

-
- [15] ARGYROS, I. K. Y HILOUTS, S., *On a class of secant-like methods for solving nonlinear equations*, Numerical Algorithms, **54**, 4: 485–501, 2010.
- [16] ATKINSON, K. E., *The numerical solution of a nonlinear boundary integral equation on smooth surfaces*, IMA J. of Numer. Anal., **14**: 461–483, 1994.
- [17] BALAZS, M. Y GOLDNER, G., *On existence of divided differences in linear spaces*, Rev. Anal. Number. Theorie Approximation, **2**: 5–9, 1973.
- [18] BANACH, S., *Théorie des opérations linéaires*, Chelsea, 2^a edición, New York, 1963.
- [19] BANÁS, J., ROCHA MARTIN, C. J. Y SADARANGANI, K., *On solutions of a quadratic integral equation of Hammerstein type*, Math. Comput. Modelling, **43**: 97–104, 2006.
- [20] BEAUZAMY, B., *Introduction to Banach spaces and their geometry*, North Holland, 1985.
- [21] BERBERIAN, S. K., *Lectures in functional analysis and operator theory*, Springer Verlag, 1974.
- [22] BRUNS, D. D. Y BAILEY, J. E., *Nonlinear feedback control for operating a nonisothermal CSTR near an unstable steady state*, Chem. Eng. Sci., **32**: 257–264, 1977.
- [23] BURMEISTER, W., *Inversionsfreie verfahren zur lösung nicht linearer opertorgleichungen*, ZAMM (Z. Angew. Math. Mech.), **52**: 101–110, 1972.
- [24] CANDELA, V. Y MARQUINA, A., *Recurrence relations for rational cubic methods I: the Halley method*, Computing, **44**: 169–184, 1990.
- [25] CANDELA, V. Y MARQUINA, A., *Recurrence relations for rational cubic methods II: the Chebyshev method*, Computing, **45**: 355–367, 1990.
- [26] CARTAN, H., *Calcul différentiel*, Hermann, 1971.
- [27] CHEN, D., ARGYROS, I. K. Y QIAN, Q. S., *A note on the Halley method in Banach spaces*, Appl. Math. Comput., **58**: 215–224, 1993.
- [28] CORDERO, A., HUESO, J.L., MARTÍNEZ, E. Y TORREGROSA, J.R., *Accelerated methods of order $2p$ for systems of nonlinear equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **233**: 2696–2702, 2010.
- [29] CORDERO, A., HUESO, J.L., MARTÍNEZ, E. Y TORREGROSA, J.R., *New modifications of Potra-Pták's method with optimal fourth and eighth order of convergence*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **234**, 10: 2969–2976, 2010.
- [30] CORDUNEANU, C., *Integral Equations and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [31] CURTAIN, R. F. Y PRITCHARD, A. J., *Functional analysis in modern applied mathematics*, Academic Press, 1977.
- [32] DAY, M. M., *Normed linear spaces*, Springer Verlag, 1958.
-

- [33] DEDIEU, J-P, *Newton's method and some complexity aspects of the zero-finding problem*, Foundations of computational mathematics (Oxford, 1999), 45–67, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **284**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [34] DEIMLING, K., *Nonlinear functional analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1985.
- [35] DENNIS, J. E., JR., *Toward a Unified Convergence Theory for Newton-Like Methods*. Article in Nonlinear functional analysis and applications. Edited by L. B. Rall, Academic Press, New York, **43**: 425–472, 1970.
- [36] DUNFORD, N. Y SCHWARTZ, J. T., *Linear operators. Part I: General theory*, Interscience Publishers Inc., 1958.
- [37] EZQUERRO, J. A., GRAU-SÁNCHEZ, M. Y HERNÁNDEZ, M. A., *Solving non-differentiable equations by a new one-point iterative method with memory*, J. Complexity, **28**, 48–58, 2012.
- [38] EZQUERRO, J. A., GRAU-SÁNCHEZ, M., HERNÁNDEZ, M. A. Y NOGUERA, M., *Semilocal convergence of secant-like methods for differentiable and non-differentiable operator equations*, J. Math. Anal. Appl., **398**, 100–112, 2013.
- [39] EZQUERRO, J. A., GUTIÉRREZ, J. M., HERNÁNDEZ, M. A., ROMERO, N. Y RUBIO, M. J., *El método de Newton: de Newton a Kantorovich*, La Gaceta de la RSME, **13**, **1**: 53–76, 2010.
- [40] EZQUERRO, J. A., GUTIÉRREZ, J. M., HERNÁNDEZ, M. A., ROMERO, N. Y RUBIO, M. J., *Relaciones de recurrencia en el método de Newton. Contribuciones científicas en honor de Mirian Andrés Gómez*, Servicio de publicaciones de la Universidad de La Rioja, 319–333, 2010.
- [41] EZQUERRO, J. A., GUTIÉRREZ, J. M., HERNÁNDEZ, M. A. Y SALANOVA, M. A., *The Application of an Inverse-Free Jarratt-Type Approximation to Nonlinear Integral Equations of Hammerstein-Type*, Computers and Mathematics with Applications, **36**: 9–20, 1998.
- [42] EZQUERRO, J. A., GUTIÉRREZ, J. M., HERNÁNDEZ, M. A. Y SALANOVA, M. A., *El método de Halley: posiblemente el método más redescubierto del mundo*, Margarita mathematica, 205–220, Univ. La Rioja, Logroño, 2001.
- [43] EZQUERRO, J. A. Y HERNÁNDEZ, M. A., *Region of accessibility for a class of Newton-type iterations*, Proyecciones, **17**, **1**: 71–76, 1998.
- [44] EZQUERRO, J. A. Y HERNÁNDEZ, M. A., *Recurrence relations for Chebyshev-type methods*, Appl. Math. Optim. **41**: 227–236, 2000.
- [45] EZQUERRO, J. A. Y HERNÁNDEZ, M. A., *Generalized differentiability conditions for Newton's method*, IMA J. Numer. Anal. **22**, **2**: 187–205, 2002.
- [46] EZQUERRO, J. A. Y HERNÁNDEZ, M. A., *Halley's method for operators with unbounded second derivative*, Appl. Numer. Math., **57** (3): 354–360, 2007.

-
- [47] EZQUERRO, J. A. Y HERNÁNDEZ, M. A., *An improvement of the region of accessibility of Chebyshev's method from Newton's method*, Math. Comp., **78**, **267**: 1613–1627, 2009.
- [48] EZQUERRO, J. A., HERNÁNDEZ, M. A. Y ROMERO, N., *Solving nonlinear integral equations of Fredholm type with high order iterative methods*, J. Comput. Appl. Math., **236**, **6**: 1449–1463, 2011.
- [49] EZQUERRO, J. A., HERNÁNDEZ, M. A. Y ROMERO, N., *An extension of Gander's result for quadratic equations*, J. Comput. Anal. Math. **234**: 960–971, 2010.
- [50] EZQUERRO, J. A., HERNÁNDEZ, M. A., ROMERO, N. Y VELASCO, A. I., *On Steffensen's method on Banach spaces*, J. Comput. Appl. Math., **249**: 9–23, 2013.
- [51] EZQUERRO, J. A., HERNÁNDEZ, M. A. Y SALANOVA, M. A., *A discretization scheme for some conservative problems*, J. Comput. Appl. Math., **115**, no. 1-2, 181–192, 2000.
- [52] FARACI, F. Y MOROZ, V., *Solutions of Hammerstein integral equations via a variational principle*, J. Integral Equations. Anal., **15**, **4**: 385–402, 2003.
- [53] GANESH, M. Y JOSHI, M. C., *Numerical solvability of Hammerstein integral equations of mixed type*, IMA J. Numer. Anal., **11**: 21–31, 1991.
- [54] GRAU-SÁNCHEZ, M., GRAU, A. Y NOGUERA, M., *Frozen divided difference scheme for solving systems of nonlinear equations*, J. Comput. Appl. Math. **235**: 1739–1743, 2011.
- [55] GRAU-SÁNCHEZ M. Y NOGUERA, M., *A technique to choose the most efficient method between secant method and some variants*, Appl. Math. Comput. **218**, **11**: 6415–6426, 2012.
- [56] GUTIÉRREZ, J. M. Y HERNÁNDEZ, M. A., *New Recurrence Relations for Chebyshev Method*, Appl. Math. Lett., **10**, **2**: 63–65, 1997.
- [57] HALD, O. H., *On a Newton-Moser type method*, Numer. Math., **23**: 411–425, 1975.
- [58] HERNÁNDEZ, M. A., *The Newton method for operators with Hölder continuous first derivative*, J. Optim. Theory Appl., **109**: 631–648, 2001.
- [59] HERNÁNDEZ, M. A. Y ROMERO, N., *On a characterization of some Newton-like methods of R-order at least three*, J. Comput. Appl. Math., **183**, **1**: 53–66, 2005.
- [60] HERNÁNDEZ, M. A. Y RUBIO, M. J., *A uniparametric family of iterative processes for solving nondifferentiable equations*, J. Math. Anal. Appl., **275**: 821–834, 2002.
- [61] HERNÁNDEZ, M. A. Y RUBIO, M. J., *The secant method for nondifferentiable operators*, Appl. Math. Lett., **15**: 395–399, 2002.
- [62] HERNÁNDEZ, M. A., RUBIO, M. J. Y EZQUERRO, J. A., *Secant-like methods for solving nonlinear integral equations of the Hammerstein type*, J. Comput. Appl. Math., **115**: 245–254, 2000.
-

- [63] HERNÁNDEZ, M. A. Y SALANOVA, M. A., *Modification of the Kantorovich assumptions for semilocal convergence of the Chebyshev method*, J. Comput. Appl. Math., **126**, 1-2: 131–143, 2000.
- [64] HU, S., KHAVANIN, M. Y ZHUANG, W., *Integral equations arising in the kinetic theory of gases*, Appl. Anal., **34**: 261–266, 1989.
- [65] ISAACSON, E. Y KELLER, H. B., *Analysis of numerical methods*, John Wiley Sons, Inc., New York, 1966.
- [66] JEROME, J. W. Y VARGA, R. S., *Generalizations of spline functions and applications to nonlinear boundary value and eigenvalue problems, theory and applications of spline functions*, Academic Press, New York, 1969.
- [67] KANTOROVICH, L. V., *Functional analysis and applied mathematics* (en ruso), Uspekhi Matematicheskikh Nauk, **3**, **6**: 89–185, 1948.
- [68] KANTOROVICH, L. V., *On Newton's method for functional equations*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **59**: 1237–1240, 1948.
- [69] KANTOROVICH, L. V., *On Newton's method*, Trudy Mathematica Inst Steklov, **28**, 1949.
- [70] KANTOROVICH, L. V., *The majorant principle and Newton's method* (en ruso), Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **76**: 17–20, 1951.
- [71] KANTOROVICH, L. V. Y AKILOV, G. P., *Functional analysis*, Pergamon Press, New York, 1982.
- [72] KELLER, H. B., *Numerical methods for two-point boundary value problems*, Dover Publications, New York, 1992.
- [73] KREYSZIG, E., *Introductory functional analysis with applications*, Wiley, 191978.
- [74] KURCHATOV, V.A., *On a method of linear interpolation for the solution of functional equations*, (en ruso) Dokl. Akad. Nauk SSSR **198**, **3**: 524–526, 1971; translation in Soviet Math. Dokl. **12**: 835–838, 1971.
- [75] LAARSONEN, P., *Ein übergradatisch konvergenter intertiver algorithmus*, Ann. Acad. Sci. fenn. Ser. A I, **405**: 1–10, 1969.
- [76] LINDENSTRUSS, J. Y TZAFRIRI, L., *Classical Banach spaces I*, Springer Verlag, 1977.
- [77] LINDENSTRUSS, J. Y TZAFRIRI, L., *Classical Banach spaces II*, Springer Verlag, 1979.
- [78] LIU, Z., ZHENG, Q. Y ZHAO, P., *A variant of Steffensen's method of fourth-order convergence and its applications*, Applied Mathematics and Computation, **216**: 1978–1983, 2010.
- [79] LUND, J. Y VOGEL, C., *A Fully-Galerkin method for the solution of an inverse problem in a parabolic partial differential equation, numerical solution of an inverse*, Inverse Problems, **6**: 205–217, 1990.

-
- [80] MOSER, J., *A rapidly convergent iteration method and nolinear partial differential equations*, Ann. Scuola. Norm. Pisa, **20**: 256–315, 1966.
- [81] MOSER, J., *Stable and random motions in dynamical systems with special emphasis on celestial mechanics*, Herman Weil Lectures, Annals of Mathematics Studies **77**, (Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1973).
- [82] ORTEGA, J. M. Y RHEINBOLDT, W. C., *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, Academic Press, 1970.
- [83] OSTROWSKI, A. M., *Solution of equations in Euclidean and Banach spaces*, Academic Press, New York, 1943.
- [84] OSTROWSKI, A. M., *Solution of equations and systems of equations*, Academic Press, New York, 1966.
- [85] PLAZA, S. Y ROMERO, N., *Attracting cycles for the relaxed Newton's method*, J. Comput. Appl. Math., **235**, **1**: 3238–3244, 2011
- [86] PORTER, D. Y STIRLING, D., *Integral equations: a practical treatment, from spectral theory to applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [87] POTRA, F. A., *On a modified secant method*, Anal. Number. Theor. Approx., **8**, **2**: 203–214, 1979.
- [88] POTRA, F. A. Y PTÁK, V., *Nondiscrete induction and iterative processes*, Pitman, New York, 1984.
- [89] RALL, L. B. , *Computational solution of nonlinear operator equations*, Robert E. Krieger Publishing Company, Michigan, 1979.
- [90] RASHIDINIA, J. Y ZAREBNIA, M., *New approach for numerical solution of Hammers-tein integral equations*, Appl. Math. Comput., **185**: 147–154, 2007.
- [91] REN, H., WU, Q. Y BI, W., *A class of two-step Steffensen type methods with fourth-order convergence*, Applied Mathematics and Computation, **209**: 206–210, 2009.
- [92] RUDIN, W., *Functional Analysis*, Alhambra, Madrid, 1979.
- [93] SCHMIDT, J. W., *Eine übertragung der regula falsi auf gleichungen in Banachraum. I, II. Z. Angew. Math. Mech.*, **43** **1-8**: 97–100, 1963.
- [94] SCHRÖDER, J., *Nichtlineare majoranten beim verfahren der schrittweisen näherung*. Arch. Math. (Basel), **7**: 471–484, 1956.
- [95] SERGEEV, A., *On the method of chords*. Sibirsk. Mat. Z., **2**: 282–289, 1961.
- [96] SHAKHNO, S.M., *On a Kurchatov's method of linear interpolation for solving nonlinear equations*, Proc. Appl. Math. Mech. **4**: 650–651, 2004.
- [97] STOKER, J. J., *Nonlinear vibrations*, Interscience-Wiley, New York, 1950.
-

- [98] TRAUB, J. F., *Iterative methods for the solution of equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.
- [99] ULM, S., *On the generalized divided differences. I, II*, Izv. Akad. Nauk Eston. SSR, Ser. Fitz. Mat., **16**: 146–156, 1967.
- [100] ULM, S., *On iterative methods with successive approximation of the inverse operator*, Cel. Mech. Dynam. Systems, **74**: 95–109, 1999.
- [101] VARONA, J. L., *Graphic and numerical comparison between iterative methods*, Math. Intelligencer, **24**: 37–46, 2002.
- [102] WOJTASZCZYK, P., *Banach spaces for analysis*, Cambridge University Press, 1991.
- [103] WOLFRAM, S., *The Mathematica book, 5th ed.*, Wolfram Media / Cambridge University Press, 2003.
- [104] YAKOUBSOHN, J-C., *Finding zeros of analytic functions: theory for secant type methods*, J. Complexity 15, no. 2: 239–281, 1999.
- [105] YAKOUBSOHN, J-C., *Contraction, robustness, and numerical path-following using secant maps*, Real computation and complexity (Schloss Dagstuhl, 1998). J. Complexity 16, **1**: 286–310, 2000.
- [106] YAMAMOTO, T., *On the method of tangent hyperbolas in Banach spaces*, J. Comput. Appl. Math. **21**: 75–86, 1988.
- [107] YPMA, T. J., *Convergence of Newton-Like iterative methods*, Numer. Math., **45**: 241–251, 1984.

- ¿Por favor, podría indicarme qué dirección he de seguir?
- Eso depende – le contestó el Gato – de adonde quieras ir.
- No me importa el lugar – dijo Alicia.
- En ese caso – le contestó el Gato – tampoco importa la dirección que tomes.

Alicia en el país de las maravillas, 1865

« Puedes llegar a cualquier parte, siempre que andes lo suficiente »

Lewis Carroll, 1832-1898
Matemático y escritor británico
