

LA ARITMÉTICA MERCANTIL CASTELLANA EN LA EDAD MEDIA. UNA BREVE APROXIMACIÓN

BETSABÉ CAUNEDO DEL POTRO
Universidad Autónoma de Madrid

RESUMEN

Este trabajo trata de difundir la existencia de tres manuscritos de aritmética mercantil castellana escritos en el siglo XIV. Vendrían a demostrar que el Libro de Aritmética, localizado en la Real Colegiata de San Isidoro de León, y cuyo estudio ya publicamos en el año 2000, no es un ejemplar magnífico, pero raro y curioso, sino el más importante y completo de un pequeño elenco que muestra la existencia de una auténtica literatura técnica puesta al servicio de un comercio floreciente como lo fue el que se desarrolló en Castilla en la Baja Edad Media.

ABSTRACT

For the purpose of this study, we have concentrated on three Castilian manuscripts concerning commercial arithmetic. All them were written in the 14th century. The first manuscript, considered to be the most important, is the Libro de Arismética, which is kept amongst the manuscripts in the Royal Collegiate of San Isidoro in León (manuscript 46). As early as year 2000 a study of it was presented, allowing us to put back, by over 100 years the date which, up till then, had been used when speaking about treatises on mercantile arithmetic in the Peninsula. The Libro de Arismética is a magnificent copy, but is not rare, unique and therefore exceptional. These three manuscripts are proof of an authentic technical literature and of the existence of didactic activity at the service of the active, flourishing commerce, typical of Late Medieval Castile.

Palabras clave: Manuscritos, Aritmética mercantil, Literatura técnica, Actividad didáctica, Castilla, Baja Edad Media.

Keywords: Manuscripts, Commercial Arithmetic, Technical literature. Didactic activity. Late Medieval Castile.

El I Congreso Hispano-Francés de Matemáticas celebrado en Zaragoza en julio de 2007, que contó con una importante sección de Historia de las matemáticas y la generosa invitación de sus organizadores, me animó a participar en el mismo desde mi condición de medievista, y a pensar con entusiasmo en el trabajo que allí presenté, y que ahora, ofrezco a los lectores.

El objetivo del mismo es presentar tres manuscritos de aritmética comercial redactados en la Corona de Castilla a lo largo del siglo XIV. Su simple enunciado nos exige una breve explicación, pues no debemos acercarnos a ellos como a ejemplos periféricos, raros o curiosos, sino como muestra de una auténtica literatura técnica, puesta al servicio de un comercio floreciente e integradora junto a otros fenómenos de una auténtica realidad social.

La Corona de Castilla ya había madurado por entonces su espectacular proceso de expansión territorial que la había convertido en un espacio muy heterogéneo y poblado, y ya había madurado también el fenómeno de eclosión urbana. Numerosos y pujantes centros urbanos —el crecimiento de la población de las ciudades resultó asombroso— ofrecían unas nuevas condiciones de vida. Esta «nueva ciudad» aparece y se consagra como centro de negocios, poder o esparcimiento, presentando un conjunto de actividades profesionales muy diversificadas y ofreciendo la posibilidad de multiplicar los intercambios y las relaciones de toda clase. No debemos olvidar que el crecimiento estuvo caracterizado por el cambio y la innovación que ocasionaron no sólo transformaciones materiales sino también transformaciones en la forma de vivir y pensar. En esa nueva ciudad, muchos de sus hombres necesitaron claramente una mayor preparación para el ejercicio de su actividad. Una buena parte de esa formación iba a ser proporcionada por la aritmética ya que se hicieron imprescindibles cálculos precisos para resolver una serie de problemas que iban a resultar cotidianos. Toda la aritmética occidental de los siglos XIII, XIV y XV aparece íntimamente ligada a la expansión urbana y comercial y como herramienta de apoyo a unas actividades contables y fiscales. Las cuatro reglas que hasta entonces habían sido un misterio limitado a unos pocos especialistas, aislados en sus monasterios y afanados especialmente por establecer con exactitud la fecha de Pascua de Resurrección y el calendario eclesiástico¹, salen de esos muros, los superan, y se diseminan hasta convertirse en enseñanza obligada para todo aprendiz de mercader. Estas reglas no fueron útiles sólo para los mercaderes, sino también para todos aquellos que ejercieron profesiones relacionadas con lo que denominamos «oficios urbanos»: cambistas, banqueros, artesanos, arrendadores de impuestos, letrados, fabricantes de moneda... que formaban parte de una compleja red que comprendía distintos campos artesanales y abarcaba parcelas muy concretas y variadas de la actividad

comercial y mercantil. Y así, nos encontramos, con que sus necesidades promovieron un desarrollo de conocimientos que no estuvo causado por un interés teórico o filosófico, sino por las actividades prácticas que exigieron también su fijación por escrito, su difusión y trasmisión.

Las técnicas mercantiles evolucionaron desde el siglo XII. Primero lentamente, de la mano de mercaderes italianos, después con mayor celeridad. Ellos, pioneros en este campo, mostraron a sus asombrados compañeros como podían resultar tan importantes para la buena marcha de los negocios como las propias mercancías que cada vez más numerosas y variadas se ponían en circulación. La actividad se perfeccionó. Y este perfeccionamiento supuso, por ejemplo, que apareciesen nuevos sistemas de pago, que se intensificase el uso de la moneda y su puesta en circulación, que surgiesen nuevos tipos de sociedades y de participación de capital, también nuevos sistemas de contabilidad y contratación de seguros... Se crearon situaciones, de nuevo insistentes, estimuladoras del progreso técnico, como estimuladoras resultaron también las dificultades financieras. A mediados del siglo XIV, una fuerte caída, «crisis del siglo XIV», demostró que el beneficio no era seguro y que la quiebra y la ruina amenazaba a grandes y pequeños. Problemas como endeudamientos de las monarquías, pérdidas de créditos, quiebras de bancos, alteraciones monetarias, oscilaciones de la relación oro-plata²... convulsionaron a la sociedad europea sacudiendo con fuerza el mundo de las finanzas. La fuerte recaída demostraba que el crecimiento no estaba asegurado y que el ansiado beneficio podía fácilmente transformarse en pérdidas. El temor que esta posibilidad ofrecía sirvió de acicate para el hallazgo de recursos más eficaces aún, haciéndose más evidente la necesidad de conocimientos para gestionar con éxito diferentes negocios. Unos cálculos precisos resultaban totalmente necesarios. Los retos que su innovación imponía posiblemente asombraron a nuestros hombres de negocios. ¿Cómo no iba a hacerlo un nuevo sistema de numeración que les permitía visualizar con mayor claridad sus operaciones y beneficios? ¿cómo no el valor del 0? Ese símbolo tan extraordinario que dependía de donde estuviese colocado para que variara enormemente su importancia, incrementando o anulando el beneficio. Los números romanos no resultaban adecuados para llevar con orden y claridad sus nuevos libros de contabilidad ni para efectuar multiplicaciones, divisiones, operaciones con fracciones ... tan necesarias en cualquier tipo de transición. El nuevo sistema método les permitía llevar de manera más rápida y segura, con tinta y papel, operaciones diferentes, y lo que es más importante, les permitía y facilitaba la revisión de operaciones y detección de posibles errores. A pesar de sus enormes ventajas, que resultaron evidentes, este nuevo sistema se impuso lentamente.

Hemos expuesto hasta ahora las condiciones generales de crecimiento económico que facilitaron en gran parte el desarrollo de la aritmética comercial. También debemos referirnos al lugar en el que se generaron los documentos que vamos a presentar y que fue la Corona de Castilla. Ésta, participó activamente en el movimiento descrito experimentando las mismas transformaciones sociales y el consiguiente desarrollo técnico. Es más, lo hizo utilizando la ventaja que su inmejorable situación histórica le confería, al haberse realizado en su solar una importante ósmosis cultural entre Oriente y Occidente. Por eso, cuando la sociedad castellana necesitó hábiles manipulaciones para el cálculo y la aritmética pudo resucitar parte de su acervo cultural que en unas nuevas circunstancias resultaba útil. Insistimos en este aspecto porque las fuentes inmediatas de este tipo de obras hay que buscarlas tanto en el mundo latino como en el árabe. El influjo latino se dio sobre todo a través de autores como Boecio, Isidoro de Sevilla o Beda³ y el mundo árabe por medio de autores importantes como Mohammed ibn Musa al Khwarizmi, Abu Kamil o Maslama quienes enriquecieron la tradición occidental con la incorporación de ideas sobre aritmética de las civilizaciones orientales, no sólo con la notación posicional y la introducción del 0, sino también con libros específicos, de clara orientación práctica, como los *Liber Mahameleth*⁴, obras de aritmética comercial que contenían una serie de «recetas» para la resolución de problemas usuales en la vida cotidiana. Más tarde, esta doble y rica tradición se amalgama y hábilmente se adereza con una rica tradición judaica que se propagaría más allá de la Corona de Castilla y de los reinos peninsulares dada la movilidad de los miembros de esa comunidad, sobre todo, al producirse el profundo cambio de circunstancias históricas y sociológicas en el sur peninsular⁵. Así, con estas tres aportaciones, una nueva aritmética iba a difundirse por Europa desde principios del siglo XIII como consecuencia del contacto del mundo musulmán y la Europa latina en la amplia frontera sur-europea, desde el sur de Italia a la Corona de Castilla y a través de esa gran vía de comunicación que fue el Mediterráneo. Y aunque resulte difícil establecer familias y filiaciones entre los tratados de aritmética mercantil bajomedievales, sí que podríamos afirmar que los autores anónimos de los tres manuscritos a los que aquí nos referimos conocían toda esta rica tradición hispana. Probablemente también la italiana representada por el *Liber Abacci*⁶, dadas las relaciones entre Italia y los puertos del sur de la Corona de Castilla. Si se pueden establecer analogías y similitudes entre todos los tratados de aritmética comercial medievales es porque todos bebieron y se inspiraron en unas fuentes de raíz común pero a la vez diferentes⁷.

El texto más completo de los que vamos a comentar y que resulta el más conocido tras su publicación, es el titulado *El Arte del Alguarismo*, manuscrito 46 del fondo de la Real Colegiata de San Isidoro de León⁸. Sigue en su organización formal el plan común de toda la literatura aritmética de la época⁹, en donde después de un índice o resumen en el que se exponen los aspectos más generales y básicos de las distintas operaciones, se procede a la descripción y somera explicación de cada una y a la inserción de una colección más o menos larga de ejemplos prácticos. Se trata de una organización orientada por el carácter práctico de estas obras que se revela en la brevedad y aparente sencillez en la exposición. Se eliminan citas y cualquier disgregación para centrarse en lo que realmente se cree que interesa al mercader, al hombre de negocios y a todo aquel que quiera aprender el noble arte de la aritmética.

En concreto, el texto comienza con la preceptiva invocación religiosa en la que tras una alusión al misterio de la Trinidad y a la grandeza del Creador que non concedió *entendimiento* para que pudiésemos aprender las ciencias, hace un comentario sobre las siete artes liberales y ensalza el valor de la aritmética. En esta invocación hemos querido ver una clara impronta judía del autor del manuscrito, desconocido, ya que enfatiza en que primero fue la revelación a Moisés, después el cumplimiento de la ley ya dada¹⁰.

A continuación pasa a exponer el sistema de numeración indo-árabe para describir después, una a una, las siete operaciones aritméticas que se consideraban fundamentales: suma, resta, multiplicación, división, reparte proporcional, regla de tres y fracciones, y que el autor denomina *especies*. El sistema de numeración utilizado en el manuscrito, es como hemos dicho, el indo-arábigo, denominando a los símbolos utilizados, hoy cifras, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 *letras del alguarismo*; no así el 0, que recibe la categoría de *cifra*. El valor de cada una de las actuales cifras, que depende de su posición, es nombrado en el manuscrito como *presçio* de lo que valen las *letras del alguarismo*.

El texto incluye también una abundante colección de problemas, 192, que integran la mayor parte del manuscrito¹¹, resueltos correctamente tanto en su procedimiento matemático como en sus resultados¹². El tipo de problemas en esta abundante colección es muy variado: cálculo, agilidad mental, resolución de situaciones que tienen asociados números, precios de productos, tiempo transcurrido en la ocurrencia de sucesos, reparto de dinero o productos, intereses, geometría simple, aleaciones... y que podemos agrupar de la siguiente forma:

Cálculo.....	47	24,47%	(24%)
Cálculo (agilidad mental)	12	6,25%	(6%)
Precios productos	25	13,02%	(13%)
Tiempo	18	9,37%	9%)
Todo partes.....	5	2,60%	(3%)
Repartir dinero	13	6,77%	(7%)
Trueque	1	0,52%	1%)
Aleaciones.....	23	11,97%	(12%)
Interés	14	7,29%	(7%)
Cantidades dinero	26	13,54%	(14%)
Geometría	8	4,16%	(4%)

Según el procedimiento matemático empleado en su resolución vemos que predominan los ejercicios resueltos con fracciones que superan incluso a los que lo hacen con operaciones elementales. También es muy utilizada la regla de tres. Así resumimos la clasificación:

Operaciones elementales.....	52	27,08%	(27%)
Regla de tres.....	28	14,58%	(14%)
Proporciones	16	8,33%	(8%)
Fracciones	67	34,89%	(35%)
Aleaciones.....	23	11,97%	(12%)
Raíz cuadrada	5	2,60%	(3%)
Habilidad mental.....	1	0,52%	(1%)

El segundo manuscrito, titulado *De Arismetica*, que se conserva en muy buen estado en la Real Academia Española¹³, creemos que está incompleto aunque forma un todo coherente y perfectamente inteligible. No se inicia como ya dijimos que resultaba habitual con una invocación religiosa. Tampoco se presenta la obra ni se especifica su uso, valor y utilidad. Le falta el índice o pequeño resumen y también una parte fundamental en este tipo de manuales, una exposición general del sistema de numeración indo —arábigo— que es el que se utiliza en la

obra, del valor de posición y la explicación de cada una de las operaciones fundamentales. Prescinde de todos los aspectos generales y comienza directamente con una colección de problemas. En total 48 con un objetivo muy claro que el autor especifica al comienzo del libro ... *este libro es muy bueno y muy provechoso para saber partir e multiplicar enteros e rotos*¹⁴... Es evidente que quiere proporcionar al lector o estudiante unos conocimientos apropiados de las operaciones con fracciones. Utilizándolos los aplica a las operaciones de cambio y venta de mercancías insistiendo en su utilidad para el mercader.

Debemos destacar un planteamiento y resolución correcta de los problemas que componen esta colección, pues solamente hemos detectado errores en siete de los 48. Además, éstos, los atribuimos a la copia del documento y a la pérdida de datos en la misma pues en su mayoría pueden ser obviados, ya que simplemente por abstracción de las operaciones matemáticas realizadas por el autor se pueden obtener los datos correctos.

Atendiendo al procedimiento o recursos matemáticos utilizados para su solución, nos encontramos en este manuscrito con 42 problemas de fracciones, cuatro de proporciones y dos de operaciones elementales.

Operaciones elementales.....	2	4,16%.....	(4%)
Proporciones	4	8,33%.....	(8%)
Fracciones	42	87,50 %.....	(88%)

Vemos como se cumple el objetivo del autor de transmitir sus conocimientos de las operaciones con fracciones, en las que demuestra su maestría. Plantea los problemas con procedimientos adecuados, cortos y directos que permiten llegar rápidamente a las soluciones. También nos añade la facilidad de la «prueba» de la comprobación que él realiza en aquellos problemas de mayor complejidad en los que se podría tener alguna duda de la veracidad del resultado.

El manuscrito concluye con la inserción de diferentes tablas de multiplicar con la intención de facilitar su memorización y aprendizaje. El autor diferencia entre *Tablas menores* y *tablas mayores*¹⁵. Las menores consisten en una simple relación de las tablas del 1 al 9, mientras que las mayores, además de incluir las anteriores, ofrecen las de números más elevados: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 23, 29, 31, 33, 37, 41, 43, 47, 51, 53, 57, 59, 61 en las que también aparecen resultados de multiplicar números superiores a 10 que igualmente debían memorizarse.

El manuscrito 10.106 de la Biblioteca Nacional de Madrid, el tercero de los que vamos a presentar, se conserva en buen estado en esta institución, en la sección *Raros*¹⁶. Tiene un formato de libro (270 * 207 mm.) y consta de 81 folios, 16 no numerados y 65 con numeración arábigo, a lápiz, en el margen superior derecho. Está escrito en papel, en tinta negra, a no ser las iniciales en colores rojo y violeta, algunos epígrafes y los calderones en rojo. Aparece encuadernado (encuadernación en tabla, forrado de piel, con dos broches) con un *Libro de Agricultura*, título que se lee en el lomo. Está incompleto y algunos folios dislocados en su orden actual. Por ejemplo, el folio 13 está escrito al revés y al final del fol 16 V. último de la colección, aparecen dos líneas escritas cabeza abajo, que constituyen el principio del primer problema de la colección. A partir del folio 17 r aparece otro tratado escrito de mano diferente¹⁷.

El texto aritmético también está incompleto. Comienza truncado, con una muy somera explicación del sistema de numeración indoarábigo y del valor de posición, haciendo una clara referencia a que se había explicado con anterioridad¹⁸ y denominando a los números *feğuras*. No comenta el valor del 0, pero al señalar el valor de posición de las *feğuras* muestra su equivalencia con la numeración romana, haciendo ver la mayor facilidad y ventajas operativas del nuevo sistema, sobre todo si se manejan cantidades elevadas. Es a partir de las centenas cuando anota las cantidades con numeración romana.

*«tres feğuras asy puestas sinifican 321, III XXI, otrosi quatro feğuras asy fechas 4321 sinifican IIII M CCC XXI, otrosi çinco feğuras así puestas 54321 sinifican L IIII M CCC XXI... , otrosi nueve feğuras e tales 987654321 sinifican IX LXXXVII MM DC IIII M XXI ...»*¹⁹.

Introduce inmediatamente después una cuarta regla que es operar con fracciones²⁰, clara muestra de la pérdida de las primeras páginas del manuscrito y pasa a continuación a presentar diversos casos de división de fracciones: fracciones entre sí o con números enteros y también con números mixtos. Tras 27 ejercicios de este tipo, incorpora diferentes enunciados de problemas hasta completar el total de 76 que componen la colección, con ejercicios en los que aplica fundamentalmente la regla de tres y proporciones.

Observamos que los enunciados de estos problemas reflejan una clara proyección mercantil del documento, más marcada que en el caso de los dos manuscritos anteriores, encaminados también a resultar útiles a otros sectores urbanos, interesados por la práctica aritmética que le pudiesen proporcionar unos manuales útiles y sencillos escritos en lengua vulgar. Entre estos 76 problemas no aparece ninguno de los que se pueden calificar con la etiqueta común de aritmética recreativa. Tampoco se formula ninguno de los denominados «problemas de aves»,

ni de «cisterna», ni de reparto testamentarios, cálculo de edades, geometría simple o habilidad mental. Y se centra, sin embargo, en aquellos que suponen conversión de moneda y compraventa de mercancías y reparto de mercancías. Utiliza siempre unidades de peso y medidas diferentes, vigentes en mercados frecuentados, todos ellos mediterráneos. Mediterráneas son las ciudades que se reflejan, mediterráneas también las monedas y las mercancías. Venecia, Acre, Pisa, Marsella y Venecia son las ciudades y denominaciones más repetidas. Sicilia-Venecia y Acre-Venecia resultan ser los itinerarios y trayectos por los que circulan la mayor parte de las mercancías que se comercializan en estos ejercicios: sedas, paños de Pisa o Marsella, aceite, siempre al lado de las apetecidas especias: pimienta y clavo que se pagan fundamentalmente con besantes, quirantes, tarines, torneses y barceloneses ...

También nos ofrece este tercer manuscrito una muy interesante aportación al conocimiento de los problemas de aleaciones al introducir aleaciones de oro²¹. En total dedica 10 ejercicios de los 76 de la colección, en los que el autor, también anónimo, se esfuerza por evitar la repetición de enunciados planteados, efectuando una selección de gran calidad y aprovechamiento didáctico. Realiza todas las operaciones con sencillez, describiendo los cálculos de forma minuciosa y detallada y evitando repeticiones inútiles y tediosas que no redundarían más que en un peor aprovechamiento. Realmente consideramos muy acertada la selección que efectúa el autor de este tipo de problemas ya que no resulta fácil resumir de una forma completa y nítida la problemática de las aleaciones, de gran dificultad para el mercader²².

En cuanto a las operaciones realizadas, podemos concluir que se utilizan de manera amplia las fracciones así como las operaciones elementales: suma, resta, multiplicación y división.

★ ★ ★ ★

Estos son, por el momento, los tres manuscritos medievales de aritmética comercial que conocemos. Tras ellos, tenemos que esperar casi 100 años para encontrar una nueva oleada de manuales de aritmética cuya fecha de impresión rebasa la frontera de 1500, y que contemplamos como fruto de una amplia experiencia acumulada. El que inaugura este nuevo periodo es el trabajo de Mosén Juan de Andrés, impreso aquí en Zaragoza en 1515²³. Aunque más amplio que los textos medievales y mejor estructurado-10 tratados o partes cada una de las cuales está a su vez subdividida en diferentes apartados²⁴, no presenta grandes avances aritméticos, aunque sí un claro valor instrumental que el autor se esfuerza por realzar. De nuevo los mercaderes son sus principales destinatarios y por ello utiliza una terminología de clara proyección mercantil que no aparecía en los

manuscritos medievales. Así *regla de compañía con tiempo y sin tiempo, regla de las baratas simple o compuesta*, son conceptos que aparecen en este nuevo tratado, aunque para la resolución de estos problemas el autor utiliza las mismas operaciones que en el *Arte del Algarismo*.

Con esta breve mención al trabajo de Mosén Juan de Andrés, ya renacentista, concluimos nuestro trabajo.

NOTAS

1. Parecía la razón fundamental del estudio de la aritmética en algunos monasterios medievales, explicándose de este modo los estudios sobre cronología de Beda el Venerable, y en general de los escasos destellos aritméticos de Occidente durante la Alta Edad Media. Así lo constatan algunos historiadores de las matemáticas, pasándolos prácticamente por alto, por ejemplo, COLLETE, J.P. (1991) *Historia de las Matemáticas*, Madrid, Siglo XXI, pp. 222-3 o BOYER, C.B. (1999) *Historia de las Matemáticas*, Madrid, Alianza, 3ª edición, p. 322. También nos señalan como estudio «matemático» de Beda una obra sobre la representación de los números por medio de los dedos. Los Cálculos, *Computus*, que permitían establecer con precisión el año litúrgico siguió cultivándose en Occidente. En el siglo XV, Petrus de Alliaco, en su *Concordia astronomie cum teología*, que no es un libro de aritmética, sino de astronomía, insiste en el cómputo del calendario medieval, lo que también hace Nicolás de Cusa en su *Reparatio Kalendari*, ver HERNÁNDEZ ESTEVE, E. (1995) «Breve revisión comparada de los incunables de aritmética comercial anterior a la «Summa» de Luca Pacioli», VIII Congreso AECA, Sevilla, p. 174. También el italiano G. Arrigui insiste en la importancia de los calendarios perpetuos en todo el periodo medieval, ver por ejemplo, ARRIGUI, G. (1964) «Calendarii Perpetui in manuscriptii mediaevali della Biblioteca Riccardiana di Firenze», *Phycis*, 6, 65-70 y «Di alcuni «calendarii perpetui» in codici medioevali», *Rendiconti dell' Instituto Lombardo-Accademie di Science et Lettere*, 48, (1964), 125-32. No obstante, es necesario resaltar la existencia de pequeñas obras aritméticas de Beda y Alcuino de York, que no corresponden exactamente a estos fines, sino que intentan resolver situaciones que se presentan en la vida diaria.
2. CIPOLLA, C. (1994) *El gobierno de la moneda. Ensayos de historia monetaria*, Barcelona, Crítica, 153-159.
3. Una primera tradición clásica en el campo de la matemática llegó con Boecio (480-435), quien utilizando fuentes griegas compiló selecciones latinas de tratados elementales sobre aritmética, geometría y astronomía. Escribió *Institutio Aritmética*, una traducción resumen de la *Introductio Aritmética* de Nicómaco. Este texto fue la fuente de la aritmética que se estudió en Occidente durante muchos años. El nivel descendió en compilaciones posteriores: con Casiodoro (475-570) y con Isidoro de Sevilla (560-636), quien en el libro III de *Las Etimologías*, «*Acercas de las Matemáticas*», presenta las cuatro ciencias matemáticas. De Beda se reseña un tratado sobre el calendario eclesiástico y una obra sobre la representación de los números por medio de los dedos.

- Se cuenta con una edición reciente de esta obra de Boecio, A. (2002) *Institutio Arithmetica*, edición preparada por María Asunción SÁNCHEZ MANZANO, León, Secretariado DE Publicaciones y Medios Audiovisuales de la Universidad de León. Las Etimologías pueden consultarse en en OROZ RETA, J. y MARCOS CASQUERO, M. A. (1982) *Las Etimologías*, Madrid, Ed. Católica, introducción general de DÍAZ y DÍAZ, M. C.
4. Los trabajos de Mohammed Ibn al Khowarizmi y Abu Kamil pronto se conocieron en la Península. Queremos destacar la escuela de astrónomos andalusíes fundada por Maslama de Madrid en el siglo X, ya que sus miembros: Ibn al Samh y al-Zahrawi fueron todos cultivadores de la aritmética y la geometría. Estos tres autores escribieron obras siguiendo la línea de la aritmética práctica. Aunque no parecen conservarse, se tiene un testimonio importante acerca del género en una versión latina de la segunda mitad del siglo XII atribuida a Johannes Hispalensis que lleva el título *Liber Mahameleth* y que no sabemos si podría ser una adaptación de la obra de cualquiera de los tres autores citados anteriormente. Esta obra ha sido estudiada por el profesor SESIANO, J. (1968) en su trabajo «Le liber Mahameleth, un traité mathématique latin composé au XII siècle en Espagne», *Histoire des Mathématiques arabes*, Premier Colloque International sur l'Histoire des Mathématiques arabes, Alger, pp. 69-70 afirma no saber nada sobre su autor, más que su localización en Castilla en la segunda mitad del siglo XII. Poco después, él mismo, la atribuye aunque con algunas reservas a Juan Hispalensis, adelantando en unos años la fecha de elaboración, 1140, 1135-1153, «Der Liber Mahameleth», 8, *XVIII International Congress of History of Science*, Hamburg-München, 1989, y en su *Une Introduction à l'histoire de l'algebre*, p.100. Agradezco enormemente al profesor Sesiano el envío de estos trabajos, dadas las dificultades para su localización. Esperamos con interés la edición completa del *Liber Mahamelet* en la que está trabajando y en la que seguramente desvele claramente su autor.
 5. SÁENZ BADILLOS, A. (1998) «Aportaciones literarias, filosóficas y científicas de los judíos a la renovación intelectual del occidente europeo en el siglo XII», en, *Renovación Intelectual del occidente europeo en el siglo XII*, Pamplona, Gobierno de Navarra, Departamento de Educación y Cultura, pp. 315-48, nos habla del convulso siglo XII judío, del ocaso cultural de no pocas juderías y de su emigración hacia los reinos cristianos, Languedoc, Provenza, norte de África o Egipto, donde se sienten a vivir «entre hombres salvajes necesitados de un poco de ciencia»... pág. 316.
 6. En Italia los libros de aritmética mercantil se presentan básicamente como herederos de este tratado, de Leonardo de Pisa, Fibonacci, considerado como el primer manual occidental, escrito en latín y que difunde los conocimientos aritméticos indoarábigos. Fue publicado en 1202. VV.AA. A nivel general puede consultarse, *Leonardo Fibonacci. Il tempo, le opere, l'eredità scientifica*, Pisa, 1994. Muy interesante resulta la primera traducción del *Liber Abaci* a una lengua moderna, SIGLER, L. E. (2002) *Fibonacci's Liber Abaci. A translation into modern english of Leonardo Pisano's book of calculation*, New York, Springer, tras la edición que hizo en su día BONCOMPAGNI, B. (1857-1862) *Liber Abaci. In scritti di Leonardo Pisano*, Roma, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

7. No solamente Fibonacci las aprovecharía. Otros también pudieron hacerlo. Un posible origen hispano atribuye Jens Hoyrup al considerado primer tratado de álgebra en lengua vulgar, el *Tractatus Algorismi* de Jacopo de Firenze. Reivindica lo que él llama «particular idiosincrasia» para este tratado, y esa idiosincrasia es precisamente este origen hispano, desdeñando la vía tradicional de transmisión, la de Fibonacci, que consideran todos los tratados italianos. HOYRUP, J. (1999) «*Vat. Lat. 4826 Jacopo de Firenze, Tractatus algorismi. Preliminary transcription of the manuscript with occasional commentaries*», *Filosofi og Videnskabsteori Pa Roskilde Universitetscenter*, 3, 1-114, y HOYRUP, J. (2003) «*Jacopo da Firenze and the beginning of Italian Vernacular Algebra*», *Filosofi og Videnskabsteori Pa Roskilde Universitetscenter*, 2003, 6, 1-35.
8. Un estudio y edición del mismo publicamos en el año 2000, CAUNEDO DEL PORTO, B. y CÓRDOBA DE LA LLAVE, R. (2000) *El Arte del algarismo. Un libro castellano de aritmética comercial y de ensayo de moneda del siglo XIV. Ms. 46 de la Real Colegiata de San Isidoro de León. Estudio, edición, glosario e índices*, Salamanca, Junta de Castilla y León. Prólogo de Luis GARCÍA BALLESTER.
9. VAN EGMOND, W. (1980) En su importante catálogo: *Practical Mathematics in the Italian Renaissance: A Catalogue of Italian Abacus Manuscripts and printed book to 1600*, Florence, Instituto e Museo di Storia della Scienza, nos ofrece un esquema común para este tipo de obras. Comienzan con una breve introducción en la que no falta una invocación religiosa y una breve alusión al valor de la aritmética. Continúa explicando el nuevo sistema de numeración y el valor de posición, para describir después las operaciones aritméticas fundamentales. Concluye con lo que suele constituir la parte más característica de este tipo de obras, una colección mas o menos larga de problemas sobre: compra y venta de mercancías, contratación de obreros, distribución y preparación de alimentos, cambio de monedas e incluso pequeños ejercicios de geometría. En ocasiones se cierran con partes no aritméticas que podemos considerar material misceláneo. De los tres manuscritos que aquí presentamos, sólo *El Arte del Algarismo* cuenta con esta parte, en la que sobresale *El libro que enseña ensayar qualquier moneda*, manual que superando una transmisión oral en la enseñanza de un oficio artesanal nos enseña a mezclar dos o más metales fundiéndolos. Ha sido estudiado por Ricardo Córdoba de la Llave. En las últimas hojas del manuscrito aparece un pequeño listado con la ley de diferentes monedas: real, tornés, barcelonés... y cuatro folios en los que tras definir mutança, se dibujan unos pentagramas con notas.
10. Al lado de este detalle significativo, un Moisés carismático, que dio la los hebreos su patria, su religión, su ley, que sentó las bases de la Torá..., otros más débiles afloran avalando la condición de judío del autor del manuscrito como el que la obra se estructure en siete «especies» que nos recuerdan las siete «puertas» de Abraham ibn Ezra (1140-1167)... detalles de este tipo los comento en mi estudio completo del manuscrito, ver pp. 63-4.
11. Se van desarrollando desde el folio 22 r en el que finaliza la explicación de las *especies* hasta el final de la obra, sin otra interrupción que tres breves cortes. El primero lo aprovecha el autor para mostrarnos cómo se simplifican fracciones (fols. 59v-61 r), el

- segundo cómo se calculan raíces (fols. 106v-107r), y el tercero, el más largo es áquel en el que nos enseña a fundir metales (fols. 118v-137r), CAUNEDO DEL POTRO, B. y CÓRDOBA DE LA LLAVE, R. (2000) *El arte del Alguarismo...*
12. No obstante, existen los lógicos errores de copia, que en su mayoría pueden ser obviados, ya que simplemente por abstracción de las operaciones matemáticas realizadas por el autor, se pueden obtener los datos correctos. Ver, CAUNEDO DEL POTRO, B. y CÓRDOBA DE LA LLAVE, R. (2000) *El arte del Alguarismo...* p. 76
 13. Real Academia Española, Ms. 155, encuadernado en una miscelánea titulada *Escritos Diversos*. El tratado *De Arismetica*, como todos los demás escritos, están foliados con numeración arábiga moderna en el margen superior derecho. Ocupa los folios 144r.-164r. Ofrecemos también la foliación de los otros escritos: fols. 1-86v., *Dichos de sabios y filósofos*; fols. 92r.-119r., *Regimiento para conservar la salud de los omes*, elaborado según recoge el propio escrito en el fol 109 por el médico sevillano Estéfano de Sevilla; fols. 121r.-143r. *Glosas sobre el tratado de Domingo con las respuestas dirigidas al muy magnifico señor D. Diego Furtado de Mendoza, marqués de Santillana, conde del Real, acabado por metro y prosa*. A continuación inserta el tratado *De Arismetica*. En medio, fol.86v. *Apuntes sobre los nacimientos de Pedro (1947) y Diego de Molina (1451) hechos por su padre*; fol. 87r.-88r. *Notas sobre estaciones*; fol. 88r.-89v. *Regimiento de salud*; fols. 89v.-90r. *Várias recetas medicas*; fols. 90v.-91r. *Sentencias de Salomón*; fol. 91v. *notas sobre el componente de oro y plata de diferentes monedas*; y fols. 120r.y v. *notas sobre los signos del zodiaco*. Sobre este manuscrito he publicado un breve trabajo». De Arismetica. Un manual de Aritmética para mercaderes», *Cuadernos de Historia de España*, LXXVIII, 2003-2004, pp. 35-46.
 14. Real Academia Española, Ms. 155, fol. 145 r.
 15. Real Academia Española, Ms. 145, fol 161 r-164 r.
 16. De su existencia da noticia el trabajo de MILLAS VILLACROSA, (1942) *Las traducciones orientales en los manuscritos de la Biblioteca Catedral de Toledo*, Madrid, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Instituto Arias Montano pág. 91.
 17. Opinión de Millás Vallicrosa. La escritura de dos manos si resulta bastante evidente, pero no podemos afirmar con seguridad que constituyen dos tratados diferentes; bien puede ser que simplemente se continúe con el mismo tras un espacio en blanco.
 18. «... segunt que ya avemos dicho una fegura sola sinifica unidat, así como 1 senefica uno, e dos feguras en uno asi puestas sinifica veynte e uno...» B.N., Raros, Ms. 10.106.
 19. B.N. Raros, Ms. 10106.
 20. *Capitulo de la quarta de la postrimera regla abba, eso es partir por rotos e por enteros segunt que luego se sigue...* B.N. Raros, Ms. 10106.
 21. En los dos manuscritos anteriores los problemas de aleaciones se referían sólo a aleaciones de plata.
 22. En tres problemas se efectúan los cálculos necesarios para afinar oro o disminuir su pureza. En dos se mezclan cinco y tres tipos de oro y se calculan los quilates resultantes, mientras que en otros dos, se mezclan dos tipos de oro o plata con un tercero en cantidad desconocida y se calcula cómo obtener oro de un precio determinado. Otro resuel-

ve cómo mezclar tres tipos de oro para obtener oro de un precio determinado, mientras que otro realiza la mezcla de dos tipos de oro calculando las cantidades necesarias de cada uno de ellos para obtener oro de una determinada pureza. Por último, resuelve el problema de encontrar la proporción de cada metal en una aleación de tres metales.

El enunciado de estos problemas de aleaciones lo inserto en mi trabajo «Three Castilian Manuscripts on Mercantile Arithmetic: Their problems of alloys», presentada en el Coloquio *Culture monétaire, aspects mathématiques, technologiques et marchands (XIII-XVI siècle)*, celebrado en París y Orleans en Septiembre del 2004, (actas en prensa).

23. *Sumario breve de la practica de la Aritmética de todo el curso del arte mercantil bien declarado, el cual se llama maestro de cuenta.* Este tratado se cobija en la Biblioteca Nacional, sección Raros, 9124.
24. El primer *tratado*, que se compone de tres *capítulos*, lo dedica al número y a su definición. Enumera: número par, impar, cuadrado, cúbico, perfecto, imperfecto²⁵. En el segundo, explica las operaciones aritméticas básicas, que el autor denomina *espeçias*, término que también vimos emplear al autor del *Arte del Alguarismo* en el siglo XIV, y que son siete: nombrar, sumar, restar, multiplicar, partir, progresiones y raíces cuadradas y cúbicas²⁶. A cada una de estas operaciones dedica un capítulo, y tras habernos explicado en la primera *espeçia*, *nombrar*, el sistema de numeración indoarábigo y el sistema en base 10, sigue siempre la misma dinámica: define someramente en qué consiste la operación, la explica, y nos expone la forma de probar si está bien hecha. En el tercer *tratado*, define los quebrados y nos enseña a operar con ellos y también con los números mixtos. A la regla de tres dedica el *tratado* cuarto y el quinto, a la regla de compañía. La *regla de las baratas* se analiza en el *tratado* sexto. En el séptimo *tratado* contempla la operación de cambio y Los problemas de aleaciones los reúne y presenta en el *tratado* octavo. Pospone hasta el tratado noveno —que es el último en el que explica operaciones aritméticas, ya que en el décimo presenta y resuelve diferentes problemas— la regla que denomina de la *falsa posición*, que es sin duda, la que le resulta más difícil de entender y explicar, teniendo que recurrir para probar su importancia a la autoridad de los clásicos. En realidad, en esta regla, que se acerca desde el punto de vista aritmético a las proporciones, se parte de uno o dos presupuestos falsos para hallar uno verdadero. Ello constituye la esencia de la regla, pero desconcierta enormemente a nuestro autor, le cuesta entenderlo y refuerza su explicación invocando la autoridad de Aristóteles.

BIBLIOGRAFÍA

- ARRIGUI, G. (1964) «Calendarii Perpetui in manuscritii medievale della Biblioteca Riccardiana di Firenze». *Phycis*, 6, 65-70.
- (1964) «Di alcuni «calendarii perpetui» in codici medioevali». *Rendiconti dell' Instituto Lombardo-Accademie di Science et Lettere*, 48, 125-32.
- BOECIO, A. *Institutio Aritmética*. Edición preparada por María Asunción Sánchez Manzano. León, 2002.

- BONCOMPAGNI, B. (1857-1862) *Liber Abaci*. In *scritti di Leonardo Pisano*. Roma, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.
- BOYER, C.B. (1999) *Historia de las Matemáticas*. Madrid, Alianza.
- CAUNEDO DEL POTRO, B. y CÓRDOBA DE LA LLAVE, R. (2000) *El Arte del algarismo. Un libro castellano de aritmética comercial y de ensayo de moneda del siglo XIV*. (Ms. 46 de la Real Colegiata de San Isidoro de León). Estudio, edición, glosario e índices. Salamanca, Junta de Castilla y León. Prólogo de L. García Ballester.
- CIPOLLA, C. (1994) *El gobierno de la moneda. Ensayos de historia monetaria*. Barcelona, Crítica.
- COLLETE, J.P. (1991) *Historia de las Matemáticas*. Madrid, Siglo XXI, 3° ed.
- HERNÁNDEZ ESTEVE, E. (1995) «Breve revisión comparada de los incunables de aritmética comercial anterior a la «Summa» de Luca Pacioli». *VIII Congreso AECA*, Sevilla.
- HOYRUP, J. (1999) «Vat. Lat. 4826 Jacopo de Firenze, Tractatus algorismi.. Preliminary transcription of the manuscript with occasional commentaries», *Filosofi og Videnskabsteori Pa Roskilde Universitetscenter*, 3, 1-114.
- (2003) «Jacopo da Firenze and the beginning of Italian Vernacular Algebra». *Filosofi og Videnskabsteori Pa Roskilde Universitetscenter*, 6, 1-35.
- MILLAS VALLICROSA, J.M. (1942) *Las traducciones orientales en los manuscritos de la Biblioteca Catedral de Toledo*. Madrid, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Instituto Arias Montano.
- OROZ RETA, J. y MARCOS CASQUERO, M.A. (ed.). (1982) *Las Etimologías*. Madrid, Ed. Católica.
- SÁENZ BADILLOS, A. (1998) «Aportaciones literarias, filosóficas y científicas de los judíos a la renovación intelectual del occidente europeo en el siglo XII». En: *Renovación Intelectual del occidente europeo en el siglo XII*. Pamplona, Gobierno de Navarra, Departamento de Educación y Cultura, 315-348.
- SIGLER, L.E. (2002) *Fibonacci's Liber Abaci. A translation into modern english of Leonardo Pisano's book of calculation*. New York, Springer.
- SESIANO, J. (1968) «Le liber Mahameleth, un traité mathématique latin composé au XII siècle en Espagne». En: *Histoire des Mathématiques Arabes*, Premier Colloque International sur l'Histoire des Mathématiques Arabes, Alger, 69-70.
- (1989) «Der Liber Mahameleth». En: *XVIII International Congress of History of Science*. Hamburg-München.
- VAN EGMOND, W. (1980) *Practical Mathematics in the Italian Renaissance: A Catalogue of Italian Abacus Manuscripts and printed book to 1600*. Florence, Istituto e Museo di Storia della Scienza.
- VV.AA. (1994) *Leonardo Fibonacci. Il tempo, le opere, l'eredità científica*. Pisa.