LOS FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA TEORÍA DE LAS FINANZAS (II): INCLUYENDO INCERTIDUMBRE Y RIESGO

Ulises Cárcamo C.[1]

RESUMEN

Para incluir modelos relativos a las decisiones financieras en condiciones de incertidumbre, necesitamos extender la teoría básica incorporando los entes adecuados.

Un primer paso en este proceso es una aproximación a la Teoría de la Utilidad. En ella, los objetos básicos son las loterías que representan situaciones de elección en condiciones de riesgo. Se presenta un conjunto de axiomas para una teoría de la elección en condiciones de riesgo. Los resultados de la teoría se pueden entender fácilmente a partir de su interpretación geométrica.

Las aplicaciones a las finanzas requieren de una generalización de esa teoría y de unos supuestos adicionales. Aquellas se presentan de dos maneras: intuitiva y semi-formal.

Se presenta un modelo sencillo pero poderoso que incluye las principales características de otros modelos más avanzados.

ABSTRACT

To include models of financial decisions under uncertainty we need to extend the basic theory incorporating adequate objects.

Utility Theory is a first approximation. The basic objects are lotteries that represent situations of choice under risk. A set of axioms for a theory of choice under risk is presented. The results of such a theory can be easily understood by their geometrical meanings.

The financial applications require a generalization of that theory and some additional assumptions. They are presented in both intuitive and semi-formal way.

A simple but powerful model is presented. It encompasses the main features of more advanced ones.

INTRODUCCIÓN

Ésta es una segunda parte de la introducción a las matemáticas de las finanzas. La primera parte se encuentra en el número 12 de esta revista, Semestre Económico, y a ella nos referiremos siempre como "la primera parte".

En la primera parte, que trata de los fundamentos en condiciones de incertidumbre, el punto de partida fue un conjunto de axiomas para la elección racional.

Acá daremos un segundo conjunto de axiomas para la elección racional de un individuo en un ambiente de riesgo.

Los axiomas que se presentarán corresponden a una versión de los axiomas de Von Neumann y Morgenstern.

Utilizaremos esos axiomas para construir, de manera semi-formal una teoría para la toma de decisiones bajo riesgo.

Esta teoría es fundamental no solo en finanzas sino también en otras ramas aplicadas que tratan con decisiones en condiciones de riesgo, como la teoría de los seguros y la ingeniería económica, y por esto se tratará detalladamente, aunque no de manera exhaustiva.

Después, aplicaremos los conceptos básicos de la teoría a ciertos modelos financieros básicos.

Dominar algunos campos de la interfase matemáticas-finanzas requiere de disciplina y cierto tiempo de dedicación a ambas áreas del conocimiento. Sin embargo, una vez que el lector haya comprendido los conceptos que se presentan en esta serie de artículos, puede, con entera confianza, abordar otros más complejos.

En esta segunda parte también seguimos los lineamientos de Fama y Miller (1972).

PARTE I:

REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA DE LAS NOCIONES RELACIONADAS CON EL RIESGO

El aspecto más fundamental ahora es que no se conoce con certeza cuál de los posibles resultados de una situación dada ocurrirá en el futuro. El máximo conocimiento que podemos tener acerca de la ocurrencia de esos resultados es una distribución de probabilidades.

Para comenzar, podemos asumir que la distribución de probabilidades es objetiva y todos los participantes del mercado tienen acceso a ella o, por lo menos, pueden obtener estimaciones de ella[2].

Con el fin de representar formalmente la noción de riesgo y caracterizar las actitudes del Tomador de Decisiones (T.D.) con respecto al riesgo, es necesario construir una teoría, con sus axiomas, definiciones y consecuencias, que nos sirva de representación para las situaciones riesgosas y de la manera como se reacciona ante ellas.

Debido al las limitaciones en cuanto a extensión de este artículo, no se harán pruebas rigurosas de todos los resultados, aunque se los tratará de justificar de la manera más clara posible. Los lectores interesados en pruebas rigurosas pueden encontrarlas en los textos y artículos de las referencias bibliográficas.

Un constructo formal para la representación del riesgo

El tomador de decisiones (T.D) se enfrenta a un conjunto de alternativas que involucran riesgo. Cada una de esas alternativas tiene un cierto número de posibles resultados, mutuamente excluyentes, y no se sabe con certeza cuál resultado ocurrirá, en el momento de tomar la decisión.

Por ahora se establecerá una teoría para un número finito de resultados. Con ciertas complicaciones técnicas, la teoría se puede extender a conjuntos infinitos de posibles resultados.

Loterías simples

Consideramos, primero, alternativas que dan N resultados a los que es posible asignar un valor numérico.

Ejemplo 1

Supongamos que usted hace la siguiente inversión: Comprar N-1 unidades de un bien perecedero[3] a $1.000, la unidad y quiere vender el máximo posible de estos a $3.000 cada uno, dentro de un período fijo de tiempo. Los que no se venden durante ese período simplemente se desechan, asumiendo una pérdida de $1.000 por cada uno.

Los N posibles resultados en términos de utilidad monetaria serán: -1.000 (N -1)(no se vende ninguno), (-N + 4) 1.000, (se vende 1), . . . , 2000 (N-1) (se venden todos).

Si se conoce la distribución de probabilidades del conjunto de posibles resultados, entonces se tiene lo que se llama en la literatura de riesgos ***una lotería***.

Éste es precisamente primer elemento teórico para estudiar estas alternativas.

Definición 1 (Lotería simple)

Una lotería simple es una lista doble L = (r_1, r_2, . . ., r_N; p_1, p_2, . . .p_N) donde los r_i, i = 1, . . .,N son los resultados numéricos y p_1, p_2, . . ., p_N, las respectivas probabilidades asociadas. Además, se supone que $\sum_{k=1}^{N} p_k = 1$, es decir, el conjunto de posibles resultados describe completamente el fenómeno, y $p_k \geq 0$ para todo k.

Cuando p_j = 1, para algún j, se dice que la lotería es **degenerada**.

Loterías equivalentes

Dos loterías, no degeneradas, L_1 y L_2 son equivalentes, si tienen los mismos resultados posibles y las mismas probabilidades asignadas a cada uno de esos resultados.

Dos loterías degeneradas L_3 y L_4 son equivalentes, si los resultados seguros son iguales.

En virtud de esta equivalencia, si r es el resultado seguro, la lotería se denotará simplemente mediante L= (r ; 1), sin hacer alusión a ningún otro posible resultado y se leerá "***r se obtiene con certeza***".

Cuando se mencionan posibles resultados, con certeza, o ***recompensas***, siempre se supondrán equivalentes a una lotería degenerada.

Una representación simplificada y representación geométrica

Si se tienen claramente definidos los resultados posibles, entonces la lotería se puede representar utilizando únicamente la distribución de probabilidades y en este caso se escribiría como una lista simple: L= (p_1, p_2, . . .p_N).

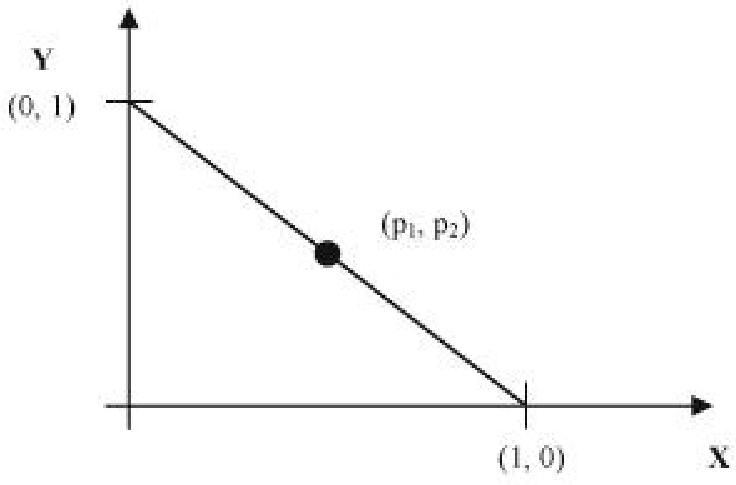
Una de las ventajas de esta representación simplificada es la facilidad para interpretación geométrica.

Por ejemplo, el conjunto todas las posibles loterías con dos resultados se puede representar como el segmento de la recta x + y =1, correspondiente al primer cuadrante del plano XY.

Cada punto (x, y) corresponde a una lotería específica, en particular; los extremos del segmento corresponden a las dos loterías degeneradas.

De igual manera, el conjunto de todas las posibles loterías con tres resultados se puede representar como la porción del plano x + y +z = 1 que está en el primer octante. Cada punto en este triángulo corresponde a una lotería específica, en particular, los vértices corresponden a las tres loterías degeneradas.

Figura 1. Conjunto de todas las posibles loterías con dos resultados



En general, el conjunto de todas las loterías posibles con N resultados, L*, se puede representar como un punto en el N-simplex[4] < de dimensión (N-1) > :

$$\Delta = \left\{ x = (x_1, \cdots, x_N) \in R_+^N : x_1 + x_2 + \cdots + x_N = 1 \right\}$$

Loterías compuestas

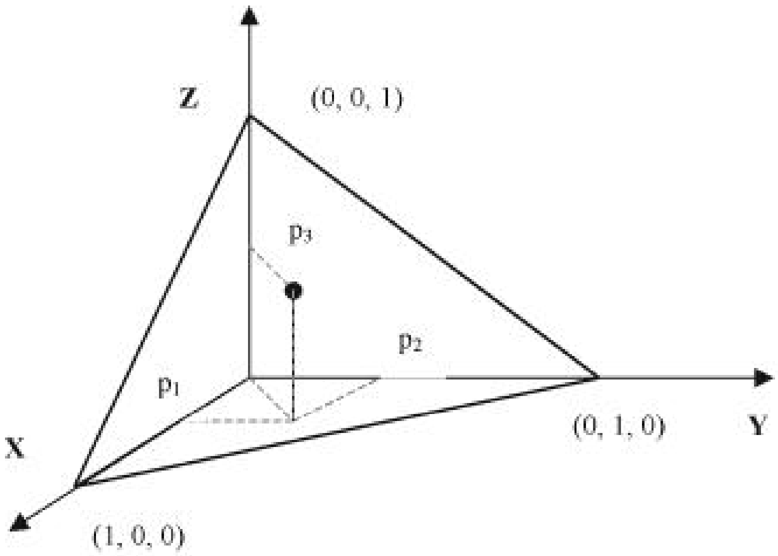
Muchas veces se tiene que, por lo menos, uno de los resultados posibles de una alternativa lleva a una lotería.

Por ejemplo, supongamos que usted tiene $250.000 y le ofrecen la oportunidad de inversión que se presenta en el ejemplo 1 con bienes perecederos y un período tiempo en seis meses y Ud. Dice: "Ok. Esperemos al final de este mes. Si la tasa de interés para los depósitos a 6 meses (DTF) sube un 0.5 %, entonces coloco este dinero en un depósito a término (que pagaría, por ejemplo, el 2.5%) por ejemplo, si no, entonces invierto en el negocio de los bienes perecederos".

Supongamos que la probabilidad de que la tasa de interés suba 0.5 % es 0.4, se piensan comprar 250 de esos artículos y existe igual probabilidad de vender cualquier número de ellos, entre 0 y 250, inclusive. En este caso usted se enfrenta a una lotería donde uno de los resultados es participar en otra lotería: La inversión en los bienes perecederos.

Estos casos se generalizan con la noción de lotería compuesta.

Figura 2. Conjunto de todas las posibles loterías con tres resultados



Ejemplo 2

En el ejemplo mencionado anteriormente se tiene: $L_1 = (256.250,\ L_2;\ 0.4,\ 0.6)$; donde $L_2 = (-250.000,\ -247.000,\ . . .,\ 500.000;\ 1/251, . . ., 1/251)$.

Definición 2

Si L_1, L_2, . . ., L_k son loterías simples (algunas, posiblemente, degeneradas) y si α_1, α_2, . . ., α_k son probabilidades, entonces la lotería $L= (L_1, L_2, . . .,L_k; \alpha_1, \alpha_2, . . ., \alpha_k)$ se llama una lotería compuesta[5].

Equivalencia de una lotería compuesta a una lotería simple

Si $L= (L_1, L_2, . . .,L_k; \alpha_1, \alpha_2, . . ., \alpha_k)$ es una lotería compuesta y $L_i = (r_{1i}, r_{2i}, ..., r_{Nii}; p_{1i}, p_{2i}, . . .,p_{Nii})$, para $i = 1, 2, . . .k$. La lotería simple $L_s = (r_{11}, . . ., r_{N11}, r_{21}, . . ., r_{N21}, . . .,r_{k1}, . . ., r_{Nkk}; p_{11}, . . ., p_{N11}, . . .,p_{k1}, . . . , p_{Nkk})$, donde $p_{ij} = \alpha_i . p_{ji} = P(Li) . P(r_{ji}/L_j)$, es una lotería equivalente a L.

En general suponemos que cuando se trata de una lotería compuesta, el T.D toma sus decisiones basado en la lotería simple equivalente. Éste será uno de los axiomas que se enuncian adelante.

Ejemplo 3

L= (256.250, -250.000, -247.000, . . ., 500.000; 0.4, 6/2510, 6/2510/, . . .,6/2510) es la lotería simple que es equivalente a la compuesta dada.

Relación de preferencia para loterías

Una vez que se ha establecido un modelo matemático para las alternativas que involucran riesgo, el segundo paso es establecer la noción de preferencia entre ellas.

Sea C un conjunto de todos los resultados posibles y sea L* es conjunto de todas las loterías simples sobre C. Asumimos que el T.D tiene una relación de preferencia[6], π definida en L* que es completa y transitiva, es decir, que satisface los siguientes axiomas[7]:

Axioma 1 (Completitud)

Dadas dos loterías cualesquiera de L*, L_1 y L_2, siempre es cierto uno y solo uno de los siguientes enunciados:

A. $L_1 \, \pi L_2$ (el T.D. prefiere L_2 a L_1)

B. $L_2 \, \pi L_1$ (el T.D. prefiere L_1 a L_2)

C. $L_1 \approx L_2$ (Al T.D. le es indiferente escoger entre L_1 y L_2).

Axioma 2 (Transitividad)

Si $L_1 \, \pi \, L_2$ y $L_2 \, \pi \, L_3$, entonces $L_1 \, \pi \, L_3$.

Axioma 3 (Continuidad)

Si el T.D. prefiere las recompensa r_1 a la recompensa r_2 y si prefiere r_2 a r_3, entonces existe una probabilidad c, $0 < c < 1$, tal que le es indiferente escoger entre las dos loterías $L_1 = (r_2 ; 1)$ y $L_2 = (r_1, r_3 ; c, 1 - c)$.

Axioma 4 (Independencia)

Supóngase que el T.D es indiferente entre las recompensas r_1 y r_2. Sea r_3 cualquier otra recompensa, entonces, para cualquier probabilidad c, $0 < c < 1$, le es indiferente escoger entre las dos loterías $L_1 = (r_1, r_3 : c, 1 - c)$ y $L_2 = (r_2, r_3; c, 1 - c)$.

Axioma 5 (Axioma de la probabilidad desigual)

Supóngase que el T.D. prefiere la recompensa r_1 a la recompensa r_2. Entonces, entre dos loterías cuyos únicos resultados posibles son r_1 y r_2, él preferirá aquella que tenga una mayor probabilidad de obtener r_1.

Axioma 6 (Axioma de la lotería compuesta)

Si L es una lotería compuesta y L_1, es la lotería simple equivalente, entonces al T.D. le es indiferente escoger entre las dos.

Axioma 7 (Axioma de no saciedad)

Dadas dos recompensas r_1 y r_2, tales que $r_1 > r_2$, el T.D. siempre preferirá r_1 a r_2.

Definición 3 (Elección racional)

Si la preferencia T.D. satisface los anteriores axiomas, se dice de él que su elección es "**racional**".

La Importancia del axioma de continuidad

De entre estos axiomas, el axioma de continuidad es clave en la descripción de la elección en situaciones de riesgo[8]:

Para el T.D. es equivalente la situación de riesgo representada en la lotería $L_2 = (r_1, r_3; c, 1 - c)$ y la situación de certeza representada en la lotería $L_1(r_2; 1)$. Esto implica que el T.D. está dispuesto a aceptar el riesgo para una cierta probabilidad de obtener la mayor recompensa de las tres posibles (ésta a su vez incluye la probabilidad de obtener la menor recompensa).

Naturalmente, esta probabilidad depende de los gustos personales del T.D., y de su capacidad de absorber pérdidas, entre otras cosas.

Ejemplo 4

A cierto individuo quien tiene disponibles \$1.000.000 en este momento le proponen una inversión que le puede reportar en total \$2.000.000 (dobla su capital disponible) con una probabilidad de 0.6, o \$500.000 (reduce su capital disponible a la mitad) con una probabilidad de 0.4.

Si él acepta, 0.6 es el valor de c, especificado por el axioma. Supongamos que él no acepte; el axioma implica que si modificamos las condiciones de la inversión, de tal manera que la probabilidad con que él puede doblar su capital disponible (bajo las mismas circunstancias) aumenta, en algún momento se alcanzará un valor con el que él aceptará invertir.

Utilidad en el sentido de Von Newmann y Morgenstern

La probabilidad postulada por el axioma de continuidad es clave en la noción de utilidad en el sentido de Von Newmann y Morgenstern que se define a continuación:

Definición 4 (Utilidad de una recompensa)

Sean $r_1, r_2, \ldots, r_{M-1}, r_M$ las recompensas ordenadas ascendentemente, asociadas a m resultados posibles de una lotería no degenerada L. La utilidad de la recompensa r_i, $(1 < i \leq M-1)$, $u(r_i)$, el el valor q_i, $0 < q_i < 1$, tal que el T.D es indiferente entre las dos loterías $L_1(r_i; 1)$ y $L_2(r_1, r_M; 1 - q_i, q_i)$. Por definición, $u(r_1) = 0$, $u(r_M) = 1$.

Ejemplo 5

Refiriéndonos al ejemplo 4, para el individuo que acepta inmediatamente la propuesta de inversión, la utilidad de \$1.000.000 es 0.6, mientras que las utilidades de $2.000.000 y $500.000 son, respectivamente 1 y 0.

Si es necesario modificar las condiciones de inversión de tal manera que para que otro individuo acepte invertir, la probabilidad de obtener $2.000.000 sea 0.85, entonces esta probabilidad es la utilidad de $1.000.000 para él. Es un individuo más cauteloso con respecto al riesgo.

Definición 5 (Función de utilidad)

La función que a cada recompensa r_i, le asigna su utilidad, $u(r_i)$ se llama la **función de utilidad del tomador de decisiones**.

La definición anterior se puede extender al conjunto de todas las loterías, L* de la siguiente manera:

Definición 6 (Forma de utilidad esperada para lotería)

La función de utilidad U: L* $\rightarrow$ R tiene **forma de utilidad esperada** si existe una asignación de números $(u_1, \ldots, u_N)$ a los N posibles resultados, de tal manera que toda lotería simple de $L = (p_1, \ldots, p_N)$ de L* se tiene que $U(L) = u_1p_1 + \ldots + u_Np_N$. (1)

Una función de utilidad U: L* $\rightarrow$ R con la forma de utilidad esperada se llama **función de utilidad esperada de Von Neumann y Morgenstern**.

Lema 1 (Linealidad de la función de utilidad esperada)

Una función de utilidad U: L* $\rightarrow$ R tiene forma de utilidad esperada si y solo si es lineal, es decir, si y solo si, para todo conjunto de k loterías, $L_1, \ldots, L_k$ de L* y toda distribución de probabilidades $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, $\alpha_i \geq 0$ y $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1$,

satisface $$U\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j L_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j U(L_j). \quad (2)$$

Definición 7 (Extensión de la función de utilidad del T.D. para loterías de L*)

Si u es la función de utilidad del T.D. y si $L = (r_1, \ldots, r_N; p_1, \ldots, p_N)$, la utilidad de L con forma de utilidad esperada, U(L) se define mediante:

$$U(L) = E(u(L)) = \sum_{k=1}^{N} p_k . u(r_k). \quad (3)$$

El teorema de la utilidad esperada

Teorema 1

Si la relación de preferencia del T.D. satisface los axiomas 1-6, entonces existe una función de utilidad, U, definida en L* . Esta función de utilidad caracteriza la preferencia entre loterías dos loterías L_1 y L_2 de L* de la manera siguiente:

- $L_1 \,\pi\, L_2$ si y solo si $U(L_1) < U(L_2)$
- $L_2 \,\pi\, L_1$ si y solo si $U(L_2) < U(L_1)$
- $L_1 \approx L_2$ si y solo si $U(L_1) = U(L_2)$

Invariancia de la preferencia bajo ciertas transformaciones afines[9] de la utilidad

De acuerdo con la definición 4, el mejor y el peor resultados de una lotería tienen utilidades 1 y 0, respectivamente. No es necesario que tengan estos valores, dado que transformaciones afines de la utilidad preservan la preferencia, como lo enuncia el siguiente lema.

Lema 2

Dada una función de utilidad cualquiera $u = u(x)$, defínase $v = v(x)$ mediante $v(x) = a.\,u(x) + c$, donde $a > 0$. Entonces, dadas dos loterías cualesquiera L_1 y L_2 , el T.D.:

1. Preferirá L_1 a L_2, usando v si y solo si prefiere L_1 a L_2, usando u.
2. Será indiferente entre L_1 y L_2, usando v, si y solo si, es indiferente ante las dos usando u.

Justificación

Si $L_1 = (r_1, r_2, \ldots, r_N; p_1, p_2, \ldots, p_N)$ y $L_2 = (s_1, s_2, \ldots, s_N; q_1, q_2, \ldots, q_N)$, es fácil comprobar que $E(v(L_1)) = a.E(u(L_1)) + c$, y $E(v(L_2)) = a.E(u(L_2)) + c$ $(a > 0)$. Por lo tanto, $E(v(L_1)) > E(v(L_2))$ si y solo si $E(u(L_1)) > E(u(L_2))$ y también $E(v(L_1)) = E(v(L_2))$ si y solo si $E(u(L_1)) = E(u(L_2))$.

Utilidad para el resultado de una lotería degenerada

En la definición 4, se estableció la noción de utilidad para los posibles resultados de una lotería no degenerada. En es caso de una lotería degenerada (o simplemente recompensas con certeza), para ser consistentes con el Teorema de la Utilidad Esperada y con el axioma de no saciedad, conviene definir la utilidad del único resultado plausible como igual a la unidad.

Obtención de la función de utilidad de un individuo dado

Como la preferencia entre loterías está basada en la función utilidad del T.D. relativa a las recompensas, un aspecto muy importante es el establecer una metodología para obtener la función de utilidad de un individuo.

En teoría es posible obtener esta función por medio de una "entrevista" en la que se le hace al T.D. una serie de preguntas para descubrir las utilidades de cada uno de los resultados posibles de una lotería dada y luego extrapolar los valores de la función para valores no contenidos en ese conjunto de resultados.

El lector interesado puede consultar los textos de Raiffa y Winston, citados en la bibliografía, entre otros.

En el resto de este artículo, en aras de la simplicidad, supondremos que la función de utilidad del T.D. es conocida o que es fácil de obtener.

Actitudes de los individuos con respecto al riesgo

Cuando se observa la conducta de los individuos con respecto al riesgo se pueden encontrar tres tendencias: Aquellos que buscan el riesgo (literalmente, apostadores), aquellos que huyen del riesgo (clientes potenciales para las compañías de seguros, que necesitan de un incentivo para tomar riesgos) y aquellos que presentan una conducta intermedia.

La función de utilidad de un individuo se puede usar para caracterizar este tipo de conducta, como se muestra a continuación.

Como primer paso, se establecerá una proposición importante en cuanto a la indiferencia entre loterías.

Proposición

Si $L_1 \approx L_2$, entonces para todo $\alpha \in [0, 1]$ se tiene que $\alpha. L_1 + (1 - \alpha) L_2 \approx L_1$

Justificación

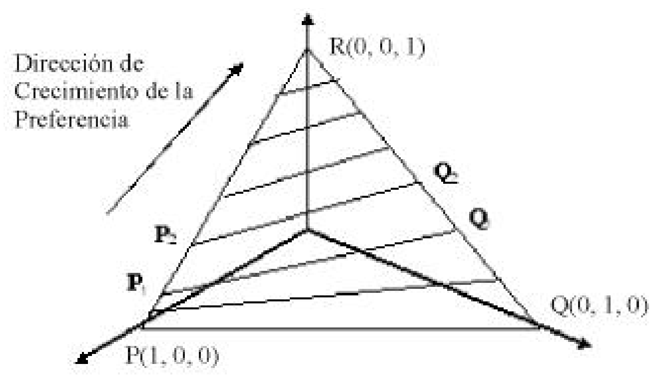
$L_1 \approx L_2$ si y solo si, $U(L_1) = E(u(L_1)) = U(L_2) = E(u(L_2))$, donde u es la función de utilidad del T.D. Ahora, para todo α, $\alpha\, U(L_1) + (1 - \alpha)\, U(L_1) = U(L_1) + (1 - \alpha)\, U(L_2) = U(L_1)$, donde por la linealidad de U se tiene que $U(\alpha. L_1 + (1 - \alpha) L_2) = U(L_1)$, es decir, $\alpha. L_1 + (1 - \alpha) L_2 \approx L_1$.

Interpretación geométrica

Geométricamente, la proposición se puede interpretar de la siguiente manera: Si el T.D. es indiferente entre dos loterías, L_1 y L_2 de L*, entonces es indiferente entre L_1 y cualquier combinación convexa de L_1 y L_2.

En la figura 3, suponemos, sin perder generalidad, que la recompensa asociada al punto R es mayor que las otras dos.

Figura 3. Líneas de indiferencia en el simplex L.*. La recompensa asociada a R es la mayor



En virtud del axioma de la probabilidad desigual, y del axioma de no saciedad, el T.D prefiere la lotería degenerada correspondiente a R a las loterías degeneradas correspondientes a P y a Q. Además, él prefiere cualquier lotería no degenerada en el segmento PR a la lotería correspondiente a P. Adicionalmente, el T.D preferirá P_2 a P_1.

En el segmento QR se presenta una situación parecida y el T.D. prefiere Q_2 a Q_1.

Esto establece una dirección de "crecimiento de la preferencia", a saber, la dirección hacia el punto R.

Un ejercicio

A manera de ejercicio para el lector atento: Sea S un punto intermedio en el segmento PQ, compruebe que el T.D. prefiere la lotería de R a la de S. Además, compruebe que, dadas dos loterías en el segmento SR, el T.D preferirá la que esté más cerca del punto R.

Ésta es una forma de probar lo afirmado acerca de la dirección de "crecimiento de la preferencia" y de comprobar que el lector realmente comprende este tema.

En virtud de la proposición, el T.D es indiferente ante las loterías en el segmento P_1Q_1, así también como lo será ante las loterías en cualquiera de los otros segmentos como P_2Q_2. Además, prefiere cualquier lotería en P_2Q_2 a cualquiera otra en P_1Q_1.

Los dos tipos de funciones de utilidad

Es importante resaltar la diferencia entre la función de utilidad del T.D. con respecto a recompensas y la extensión de ésta a las loterías en general.

La primera es una función definida en el conjunto de las recompensas y extensible a los números reales. Generalmente, se le designa bajo el nombre de **función utilidad de la riqueza**. Ésta no es, en general, lineal, pero, en virtud del axioma de no saciedad, es una función creciente.

La segunda es una función definida en el simplex de las loterías y es lineal. A veces se le llama simplemente **utilidad esperada**.

Equivalente en condiciones de certeza de una lotería

En la figura 3, las loterías en P_1Q_1 son equivalentes porque tienen igual utilidad (esperada) $U(L) = p_1u(r_1) + \ldots + p_N u(r_N)$, donde u es la utilidad sobre las recompensas.

Ahora, en virtud del teorema de la utilidad esperada, si K es un número real tal que $u(K) = p_1u(r_1) + \ldots + p_N u(r_N)$ y L_1 es la lotería degenerada, definida mediante $L_1 = (K;1)$, entonces el T.D. es indiferente entre cualquiera de las loterías de P_1Q_1 y L_1. A este K se le llama el **equivalente en condiciones de certeza** de cada una de esas loterías.

Definición 8 (Equivalente en condiciones de certeza)

El equivalente en condiciones de certeza de una lotería L, EC(L) es el número K tal que el T.D. es indiferente entre las dos loterías L y $L_1 = (K; 1)$.

Definición 9 (Prima de riesgo)

Si E(L) es el valor esperado de los resultados de la lotería L, la prima de riesgo de L, PR(L) se define como PR(L) = E(L) – EC(L). (4)

La prima de riesgo se puede usar para caracterizar la actitud hacia el riesgo, de la siguiente manera.

Definición 10 (Actitudes del T.D. hacia el riesgo)

El T.D.

1. **Siente aversión hacia el riesgo** si para toda lotería no degenerada L, PR(L) >0.
2. **Es amante del riesgo** si para toda lotería no degenerada L, PR(L) < 0.

Para quien siente aversión hacia el riesgo, el equivalente de certeza de una decisión riesgosa (Lotería L) es menor que la recompensa esperada.

■

3. **Es neutral ante el riesgo** si para toda lotería no degenerada L, PR(L) = 0

Significado de las actitudes

Para quien siente aversión hacia el riesgo, el equivalente de certeza de una decisión riesgosa (Lotería L) es menor que la recompensa esperada. Así, si esa decisión es la única viable, él estaría dispuesto a pagar la prima de riesgo, PR.

Actitud hacia el riesgo y concavidad de la función de utilidad de la riqueza

En este punto, es importante recordar las nociones de concavidad y convexidad de funciones:

Una función real, f, es **convexa** (cóncava hacia arriba) en un intervalo I si para todo par de puntos x_1 y x_2 de I, y todo α, con $0 < \alpha < 1$, se tiene que $f(\alpha.x_1 + (1 - \alpha) x_2) \leq \alpha. f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2). \alpha$. (5)

Geométricamente, esto significa que el segmento de recta con extremos (x_1, f(x_1)) y (x_2, f(x_2)) está por encima de la gráfica de f en I.

Una función real, f, es **cóncava** (cóncava hacia abajo) en un intervalo I si para todo par de puntos x_1 y x_2 de I, y todo α, con $0 < \alpha < 1$, se tiene que $f(\alpha.x_1 + (1 - \alpha) x_2) \geq \alpha. f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2)$. α. (6)

Geométricamente, esto significa que el segmento de recta con extremos (x_1, f(x_1)) y (x_2, f(x_2)) está por debajo de la gráfica de f en I.

Si las desigualdades en la definición se cambian, respectivamente por '<' y '>', entonces se tienen las definiciones de función **estrictamente convexa** y **estrictamente cóncava**.

Las funciones cóncavas y convexas en un intervalo I son siempre continuas en I (aunque no necesariamente derivables). Cuando estas funciones tienen derivadas de segundo orden, continuas, entonces se pueden caracterizar utilizando algunos resultados del cálculo elemental.

La relación entre la concavidad de la función de utilidad de la riqueza del T.D. y su actitud hacia el riesgo es una consecuencia directa de la siguiente desigualdad:

La desigualdad de Jensen

Si f es una función convexa en I, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son valores arbitrarios de I y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, son valores no negativos tales que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$, entonces

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k . x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k . f(x_k) \quad (7)$$

Como consecuencia de éste, se puede establecer el equivalente para una función cóncava:

Si g es una función cóncava en I, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son valores arbitrarios de I y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, son valores no negativos tales que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$, entonces

$$g\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k . x_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k . g(x_k) \quad (8)$$

Ahora h es una función afín, del tipo h(x) = a.x +b, entonces es de ambos tipos, cóncava y convexa al mismo tiempo. En este caso se tiene que

$$h\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k . x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k . h(x_k) \quad (9)$$

Las relaciones entre desigualdad de Jensen, con la definiciones de prima de riesgo y actitudes hacia el riesgo se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 2 (Caracterización de la actitud hacia el riesgo mediante u)

Sea u la función de utilidad de la riqueza del T.D., entonces, el T.D:

1. **Siente aversión hacia el riesgo** si u = u(x) es estrictamente cóncava.
2. **El amante del riesgo** si u = u(x) es estrictamente convexa.
3. **Es neutral hacia el riesgo** si la gráfica de u = u(x) es una línea recta.

Ayudas para la prueba del teorema

Sea L= ($r_1, r_2, \ldots, r_N$; $p_1, p_2, \ldots, p_N$) una lotería cualquiera de L*, $\bar{r} = E(L) = \sum_{k=1}^{N} p_k r_k$,

EC(L)= K si y solo si, $u(K) = \sum_{k=1}^{N} p_k . u(r_k)$.

u es estrictamente creciente en virtud del axioma de no saciedad.

Si u es estrictamente cóncava entonces, por la desigualdad de Jansen, se tiene que $u(\bar{r}) = u(E(L)) > \sum_{k=1}^{N} p_k . u(r_k)$, luego, el valor K tal que $u(K) = \sum_{k=1}^{N} p_k . u(r_k)$ satisface K < $\bar{r} = E(L)$, pero K = EC(L) y por lo tanto PR(L) >0.

Si u es estrictamente convexa entonces, por la desigualdad de Jansen, $u(\bar{r}) = u(E(L)) < \sum_{k=1}^{N} p_k . u(r_k)$, luego, el valor K tal que $u(K) = \sum_{k=1}^{N} p_k . u(r_k)$ satisface K > $\bar{r} = E(L)$, pero K = EC(L) y por lo tanto PR(L) < 0.

Si u = a.x + b, a >0, entonces

$$u(\bar{r}) = u(E(L)) = \sum_{k=1}^{N} p_k . u(r_k) \text{ y } K = \bar{r},$$

y por lo tanto PR(L) =0.

Obsérvense las figuras 4 y 5.

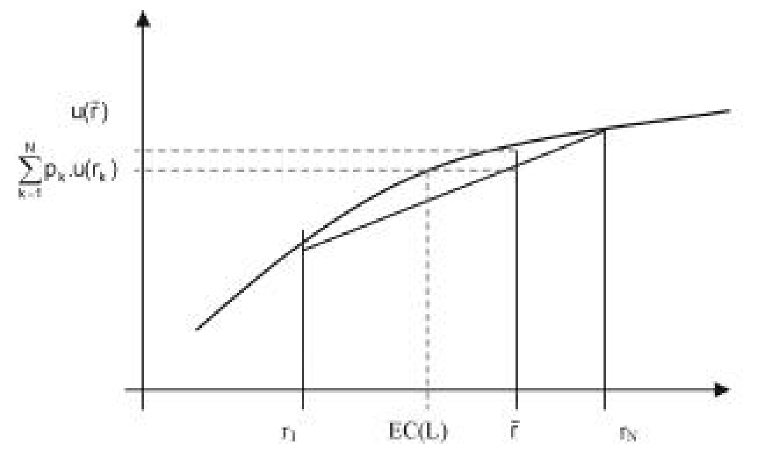
Neutralidad ante el riesgo y el valor esperado de las recompensas

Uno de los resultados más importantes de esta teoría es que los individuos neutrales ante el riesgo toman sus decisiones basados en el valor esperado de las recompensas, es decir "ignorando la utilidad".

Las funciones cóncavas y convexas en un intervalo I son siempre continuas en I (aunque no necesariamente derivables).

■

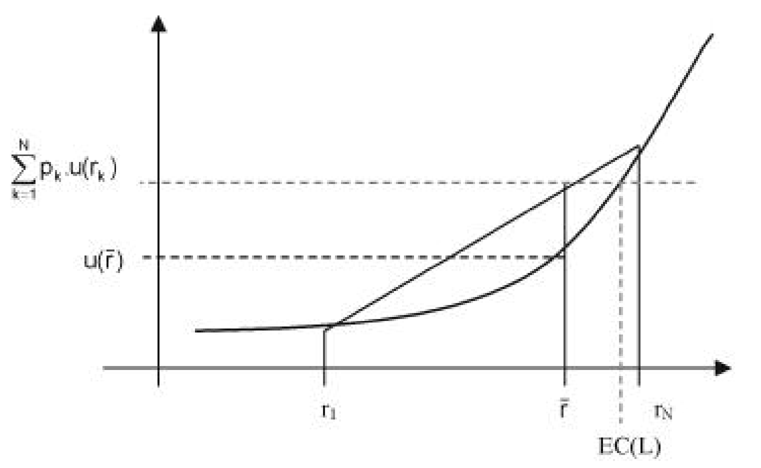
Figura 4. Función de Utilidad de Riqueza para T.D. con Aversión al Riesgo



Para ver esto claramente, supongamos que el T.D. es neutral ante el riesgo y que su función de utilidad está dada por u(x) = a.x + b, donde a > 0 (la función es creciente). En virtud del lema 2, cualquier transformación afín de u, v(x) = A.u(x) + B, con A >0, utilidad preserva la preferencia. En particular, si $A = \frac{1}{a}$ y $B = -\frac{b}{a}$, v(x) = x. Así que, si L= (r_1, . . ., r_N; p_1, . . .,p_N), E(u(L)) = $r_1p_1 + r_2p_2 + \ldots + r_Np_N$, .

Esto significa que la preferencia del T.D. entre loterías se basa en sus valores esperados.

Figura 5. Función de Utilidad de Riqueza de un T.D. Amante del Riesgo



Aspectos importantes de las funciones de utilidad (de la riqueza)

Como todas estas funciones son crecientes, entonces si son derivables, la utilidad marginal es siempre positiva.

Los que son neutrales con respecto al riesgo tienen la misma utilidad marginal para todos los niveles de riqueza. Así, si su riqueza w, aumenta en Δw, el cambio absoluto en la utilidad es igual al que experimentaría si su riqueza disminuye en Δw. Lo único que varía es el signo en el cambio de la utilidad (ver figura 7).

Para los que sienten aversión al riesgo esta situación es diferente, a saber, el cambio absoluto en la utilidad producido por un incremento en la riqueza Δw, es menor que el cambio absoluto producido por una disminución en la riqueza de la misma magnitud Δw, el efecto es más grande en una pérdida que en un aumento. Aunque la utilidad marginal es positiva, decrece con la riqueza. Es decir, aunque la utilidad crece con la riqueza, a medida que esta última aumenta, el crecimiento es cada vez más y más lento (ver figura 6).

Supongamos que actualmente la riqueza del T.D. es w y que existe una lotería L (sin ningún costo) tal que con igual probabilidad el T.D. puede obtener w + Δw ó w - Δw. De acuerdo con la concavidad estricta, $\frac{1}{2}u(w-\Delta w)+\frac{1}{2}u(w+\Delta w) < u(w)$, entonces el equivalente de certeza de L, EC(L) = K es menor que w. Así, si L fuera la única lotería disponible, el T.D. estaría dispuesto a pagar hasta w – K por una prima de un seguro que le evitara enfrentar la lotería y le asegurara la riqueza K (ver Figura 6.1).

Figura 6. Efecto del Aumento o la Disminución de la Riqueza en la Utilidad. Aversión al Riesgo

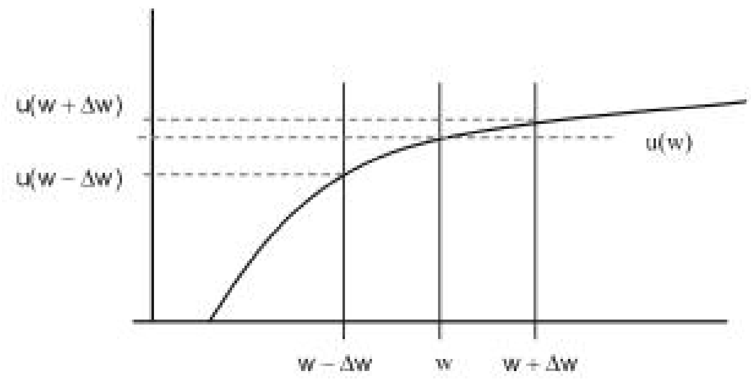
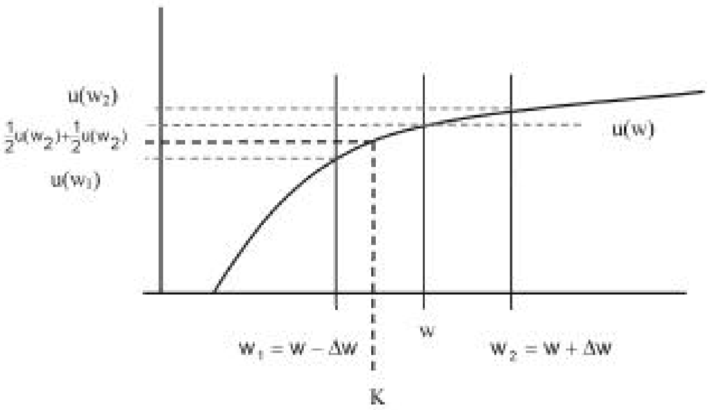


Figura 6.1. Equivalente de Certeza de la Lotería L. Aversión al Riesgo



Aversión al riesgo y primas de riesgo (Una visión más general)

Para generalizar un poco más sobre el aspecto anterior, consideramos la variable aleatoria R, relacionada con los posibles resultados de una lotería. Una lotería (o juego) es **actuarialmente justa** si el valor esperado es cero, E(R) = 0[10].

Si U es estrictamente cóncava, y L es justa, entonces E(L) = E(u(w + R)) < u(E(w + R)) = U(W) y por lo tanto el T.D. tratará de evitar participar en la lotería.

Esto tiene dos implicaciones importantes, bastante relacionadas, pero diferentes:

Primera:

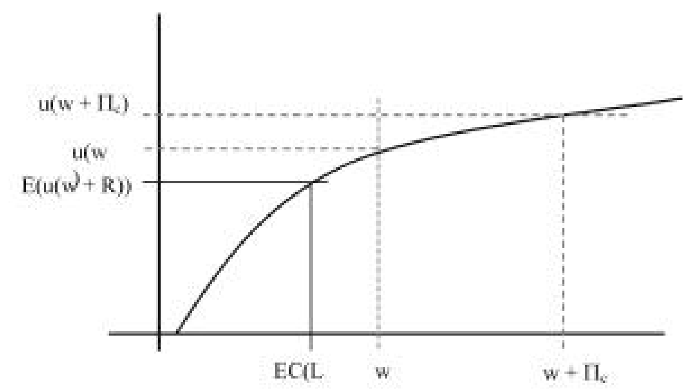
Para convencer a un T,D. que siente aversión hacia el riesgo de participar en la lotería justa, es necesario ofrecerle una prima de riesgo, Π_c que compense los efectos negativos de participar. Es decir, Π_c, debe satisfacer E(u(w + Π_c + R)) = u(w). (Ver figura 6.2)

Segunda:

Para evitar tener que participar en la lotería, el T.D. con aversión hacia el riesgo estaría dispuesto a pagar una prima de seguro de riesgo, Π_s, que lo proteja de los peores posibles resultados de la lotería. Es decir, Π_s, debe satisfacer E(u(w + R)) = u(w - Π_s) .

La segunda implicación está más relacionada con los seguros. De hecho, Π_s , es el valor justo de la prima de seguro que le evita participar en la lotería y corresponde exactamente al concepto de **prima de riesgo** de la definición 9.

Figura 6.2. Prima Compensatoria del Riesgo



La primera implicación es más importante en finanzas. Π_c corresponde al ***retorno adicional*** o ***retorno extra*** que se espera de los activos que implican riesgo.

Una medida de la aversión al riesgo

En muchos casos cuando se sabe que dos individuos sienten aversión al riesgo es interesante poder comparar su grado de aversión, es decir, tener alguna medida que indique "quién siente más aversión al riesgo".

Intuitivamente es obvio (y el lector puede comprobarlo con un gráfico adecuado y los conceptos vistos hasta ahora) que esta medida está relacionada con la concavidad de la función de utilidad de la riqueza u y, por ende, con u"(w) para una función dos veces derivable. Sin embargo, u"(w) en sí misma no es una buena medida, dado que no es invariante ante transformaciones afines del tipo y = a.x+b, con a >0. Una medida adecuada es el coeficiente definido a continuación.

Definición 11 (Coeficiente de aversión absoluta al riesgo)

Si u = u(w) es una función de utilidad de la riqueza, dos veces diferenciable, el coeficiente de Arrow-Pratt de aversión absoluta al riesgo en w, se define mediante

$$r_A(w,u) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

Para comparar la aversión al riesgo de dos individuos se puede utilizar la siguiente definición:

Definición 12 (Comparación de aversiones al riesgo)

Dados dos individuos A y B con aversión al riesgo y con respectivas funciones de utilidad de la riqueza u_A y u_B, se dice que A siente más aversión al riesgo que B si $r_B(w, u_2) > r_A(w, u_1)$.

Se puede demostrar que la definición anterior es equivalente a decir que, para toda lotería L, los respectivos equivalentes en condiciones de certeza de L satisfacen $EC(L, u_2) < EC(L, u_1)$.

Se deja como ejercicio para el lector suficientemente interesado el justificar esta equivalencia.

Funciones de utilidad de la riqueza en el mundo real

Es importante resaltar que la clasificación de los T.D. de acuerdo con su actitud hacia el riesgo es solo aproximada. En la práctica es posible encontrar funciones de utilidad que son una mezcla de convexidad y concavidad. Cuando las posibles pérdidas de una lotería son bajas en relación con el nivel usual de riqueza de un individuo, éste se comporta como amante del riesgo. Sin embargo, cuando las potenciales pérdidas exceden tal nivel, éste muestra aversión al riesgo.

De hecho, la casi totalidad de los que se comportan como apostadores rápidamente se arruinan.

Geométricamente, esto significa que existe un punto que define un cambio en la concavidad de la función de utilidad.

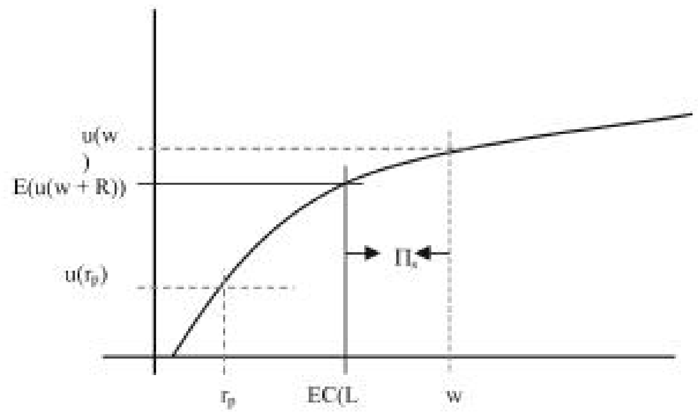
Teniendo esto en cuenta, muchos autores aplican el adjetivo ***global*** (o el adverbio ***globalmente***) cuando se refieren a los individuos que tienen una sola forma de concavidad en la función de utilidad de la riqueza. Por ejemplo, el T.D. es **globalmente contrario al riesgo** si su función de utilidad es estrictamente cóncava.

También es posible que, a medida que la situación económica de un individuo cambia con el tiempo, su función de utilidad cambie. Es decir, a medida que su riqueza aumenta, él puede considerar 'insignificantes' pérdidas que antes no podía absorber.

Por ejemplo, si por alguna circunstancia, el T.D. pasa de ganar un salario mínimo a cinco salarios mínimos, una pérdida del 20% de un salario mínimo cambia de efecto. En el primer caso es desastrosa, en el segundo caso puede significar solo abstenerse un poco de bienes suntuarios.

A pesar de esto, cuando se trata de finanzas del mundo real, el supuesto usual es que el inversionista siente aversión hacia el riesgo y que su función de utilidad, durante cierto horizonte determinado es fija y estos supuestos funcionan bastante bien.

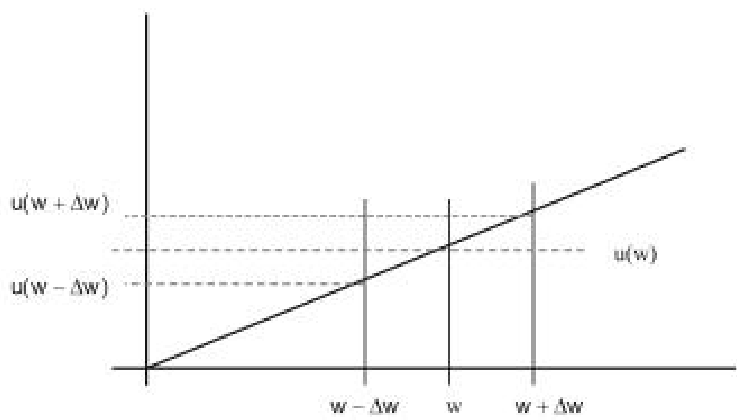
Figura 6.3. Prima de Seguro Contra el Riesgo. r_p es el peor resultado posible de la lotería



De hecho, la casi totalidad de los que se comportan como apostadores, rápidamente se arruinan.

Aunque a veces vemos en algún best seller que fulano o zutano se hizo millonario gracias a su pasión hacia el riesgo o a su habilidad para apostarle a valores esperados de inversiones de alto riesgo, ésta es la excepción y no la regla. Si fuera tan normal hacerse millonario de esa manera, por lo menos la mitad del mundo lo sería y ninguno de esos manuales para hacerse millonario sería un best seller. Son best sellers porque muestran hechos extraordinarios, es decir, fuera de lo común.

Figura 7. Efecto del Aumento o Disminución de la Riqueza en la Utilidad. Neutralidad Ante el Riesgo



PARTE II

APLICACIÓN A LA TEORÍA DE LAS FINANZAS

El Problema Consumo-Inversión en condiciones de incertidumbre

El problema general de consumo e inversión en condiciones de incertidumbre se puede plantear de la manera siguiente:

Un individuo necesita hacer decisiones del tipo consumo- inversión en cada uno de τ puntos del tiempo durante su vida.

En el primer punto, él tiene disponible una riqueza w_1, que debe repartir entre consumo durante el primer período, c_1 y e inversión $h_1 = w_1 - c_1$, durante ese mismo período. Al comienzo del segundo período el nivel de riqueza es $W_2 = h_1(1 + R_2) = (w_1 - c_1)(1 + R_2)$ (10), donde las letras minúsculas representan cantidades fijas o valores conocidos, mientras las letras mayúsculas representan variables aleatorias. R_2 es el retorno por un período, al comienzo del período 2 por cada unidad monetaria invertida a comienzos del período 1.

Como, en general, R_2 es una variable aleatoria, W_2 también lo es.

A comienzos del período 2, W_2 se divide entre consumo e inversión y el proceso se repite hasta el período τ en el que la totalidad de la riqueza disponible w_τ se consume y cualquier herencia a legar se considera consumo en este último período.

Se tiene así una sucesión de τ consumos, $C_t = (c_1, c_2, \ldots, c_\tau)$.

Se supone que el individuo deriva satisfacción únicamente mediante consumo, es decir, la mera acumulación de riqueza no produce satisfacción.

El principal objetivo consiste en delinear una estrategia de consumo-inversión que maximice el nivel de satisfacción que se espera en el tiempo de vida del individuo.

Para atacar este problema se hace uso de la llamada **Hipótesis de la Utilidad Esperada**.

En términos generales, ésta establece que cuando el T.D. se enfrenta a situaciones de incertidumbre en las que existen varias alternativas de acción, cada una con su propia distribución de probabilidades para los posibles resultados, él se comporta como si a cada resultado posible le asociara una utilidad (de acuerdo con una cierta función de utilidad de la riqueza, interna) y entonces escogiera la acción que produce la máxima utilidad esperada.

El desarrollo formal de las bases de este modelo ya se hizo en la parte I. A este modelo nos referiremos en adelante como el **modelo**, **independiente del tiempo**, **de la utilidad esperada de la riqueza**.

Re-interpretación de los axiomas

Para aplicar los resultados obtenidos anteriormente, y en analogía con la primera parte, el primer paso es re-interpretar los axiomas de la elección bajo incertidumbre en términos de las sucesiones C_t.

Los posibles resultados o 'recompensas' son ahora, esas sucesiones de consumos y las loterías están definidas en términos de las sucesiones y de las probabilidades asociadas.

El axioma de no saciedad se reinterpreta de la siguiente manera:

Considerando el consumo en otros períodos como constante, en un período cualquiera dado, el T.D. prefiere más consumo a menos consumo.

Esta re-interpretación de todo el sistema, en términos de las sucesiones C_τ implica que las preferencias del T.D. se pueden representar mediante una función de utilidad $u(C_\tau) = u(c_1, c_2, \ldots, c_\tau)$.

El axioma de no saciedad implica que la utilidad marginal del consumo en cualquier período es positiva. Además, en analogía con en el modelo, independiente del tiempo, de la utilidad esperada de la riqueza, la estricta concavidad, la estricta convexidad y la concavidad-convexidad de la función de utilidad $u(C_\tau)$, implican, respectivamente, aversión hacia el riesgo, tendencia hacia el riesgo y neutralidad hacia el riesgo.

Para ver esto, consideremos el caso de dos sucesiones de consumos $C_\tau^1 = (c_1^1, c_2^1, \cdots, c_\tau^1)$ y $C_\tau^2 = (c_1^2, c_2^2, \cdots, c_\tau^2)$ y la lotería no degenerada $L = (C_\tau^1, C_\tau^2; \alpha, 1 - \alpha)$.

1. Si u es estrictamente cóncava, se tiene que $u(\alpha c_1^1 + (1-\alpha)c_1^2 + \cdots + \alpha c_\tau^1 + (1-\alpha)c_\tau^2) > \alpha u(c_1^1, \cdots, c_\tau^1) + (1-\alpha)u(c_1^2, \cdots, c_\tau^2)$, es decir, $u(\alpha C_\tau^1 + (1-\alpha)C_\tau^2) > \alpha u(C_\tau^1) + (1-\alpha)u(C_\tau^2)$. Por tanto, la utilidad del valor esperado de las 'recompensas' es mayor que el valor esperado de las utilidades de las 'recompensas'. Dado que u es creciente, el equivalente de certeza de L es menor que el valor esperado de las recompensas. Es decir, el T.D. siente aversión al riesgo.

2. Si u es estrictamente convexa se tiene que $u(\alpha c_1^1+(1-\alpha)c_1^2+\cdots+\alpha c_\tau^1+(1-\alpha)c_\tau^2)<\alpha u(c_1^1,\cdots,c_\tau^1)+(1-\alpha)u(c_1^2,\cdots,c_\tau^2)$, es decir, $u(\alpha C_\tau^1+(1-\alpha)C_\tau^2) < \alpha u(C_\tau^1)+(1-\alpha)u(C_\tau^2)$. Por tanto, la utilidad del valor esperado de las 'recompensas' es menor que el valor esperado de las utilidades de las 'recompensas'. Dado que u es creciente, el equivalente de certeza de L es mayor que el valor esperado de las recompensas. Es decir, el T.D. es amante del riesgo.

3. Si u(x) = a.x +b, $u(\alpha C_\tau^1+(1-\alpha)C_\tau^2)=\alpha u(C_\tau^1)+(1-\alpha)u(C_\tau^2)$ y por lo tanto el equivalente de certeza de la lotería L es igual al valor esperado de las recompensas. Esto significa que el T.D. es neutral ante el riesgo.

La justificación para una lotería con más de dos resultados tiene la misma forma.

Conservación de la concavidad en cada uno de los períodos

Es muy importante hacer énfasis en el siguiente hecho: La aversión al riesgo (o la complacencia con el riesgo) en la función u = u(C_τ) implica la aversión al riesgo (o la complacencia con el riesgo) con respecto a cualquiera de las componentes c_k, k = 1, 2, . . ., τ. Es decir, manteniendo las demás componentes constantes, u es una función cóncava (o convexa) de c_k, para cada uno de los períodos.

Suposiciones para un mercado perfecto

Consideremos las siguientes suposiciones para un mercado perfecto:

1. El T.D. (consumidor) puede comprar tanto como quiera de un activo para inversión sin afectar el precio de éste.
2. Todos los activos para inversión son infinitamente divisibles, es decir, es posible adquirir cualquier fracción de éstos.
3. Los consumidores tienen libre acceso a toda la información que les permite estimar las distribuciones de probabilidad.
4. No hay costos de transacción ni impuestos.

Insuficiencia del principio de la utilidad esperada en el caso general

En principio, el modelo de la utilidad esperada es una teoría completa de elección en condiciones de incertidumbre: El individuo examina cada posible alternativa de consumo-inversión y selecciona aquella que maximiza la utilidad esperada.

En la práctica de las finanzas esto no funciona por dos razones principales:

1. Las alternativas de consumo-inversión son de hecho infinitas así que es imposible examinar todas las distribuciones de probabilidad.

2. El modelo de la utilidad esperada, de por sí no tiene suposiciones verificables acerca de la conducta del consumidor.

Para hacer que este modelo sea práctico se necesita darle más estructura al problema.

Una forma de lograr esto es simplificar el problema de tal manera que para el T.D. es posible representar sus oportunidades de inversión en términos de promedios y una medida de dispersión, por ejemplo, la varianza o la desviación estándar, de los retornos de los portafolios de inversión.

En estos casos nos interesa la situación en la que, dado un presupuesto a invertir, el individuo puede clasificar un portafolio con respecto a otros portafolios utilizando únicamente dos parámetros de la distribución del retorno del portafolio e ignorando otros aspectos de la distribución.

En estos casos se dice que el modelo es un **modelo de portafolio con dos parámetros**.

En particular, este modelo es de una gran exactitud cuando los retornos de los portafolios tienen una distribución normal. Los resultados del modelo, con modificaciones, se pueden aplicar aun en situaciones en las que esta suposición de normalidad no es aceptable.

El modelo de un período y dos parámetros[11]

Una simplificación del modelo de dos parámetros se da en el caso de un solo período.

Son supuestos de este modelo los siguientes:

1. El T.D. (consumidor) se comporta como si quisiera maximizar la utilidad esperada a partir de la función $u(c_1, c_2)$, que es creciente y estrictamente cóncava.

2. Las derivadas parciales de u existen para todos los pares (c_1, c_2).

3. Los retornos de un periodo de los portafolios de inversión disponibles tienen distribuciones normales.

Se supone que el individuo deriva satisfacción únicamente mediante consumo, es decir, la mera acumulación de riqueza no produce satisfacción.

■

Algunas consecuencias de los supuestos

En virtud del crecimiento, se tiene que $\frac{\partial u(c_1,c_2)}{c_1} > 0$ y $\frac{\partial u(c_1,c_2)}{c_2} > 0$ (11),

es decir, los consumos marginales son siempre positivos.

En virtud de la concavidad estricta, se tiene que para dos pares de puntos distintos (c_1^1, c_2^1) (c_1^2, c_2^2) y se tiene que $u(\alpha.c_1^1 + (1-\alpha)c_1^2, \alpha c_2^1 + (1-\alpha)c_2^2) >$ $\alpha u(c_1^1, c_2^1) + (1-\alpha)u(c_1^2, c_2^2)$, para todo α tal que $0 < \alpha < 1$.

Sea R_p es el retorno de un período del portafolio p, donde $R_p \sim N(\mu,\sigma)$ entonces, si se invierten $(w_1 - c_1)$ en p a comienzos del período, el consumo al final del mismo será $C_2 = (w_1 - c_1)(1 + R_p)$ donde $C_2 \sim N((1+\mu.)(w_1 - c_1), \sigma.(w_1 - c_1))^{12}$ (12).

Relaciones entre la utilidad, el retorno esperado y la desviación estándar del retorno

Veamos primero mediante argumentos intuitivos, como, dado el consumo inicial c_1 la inversión total $(w_1\text{-}c_1)$, y la normalidad de los retornos de un período, la utilidad del consumidor que siente aversión ante el riesgo es una función creciente de μ y una función decreciente de σ:

Primero

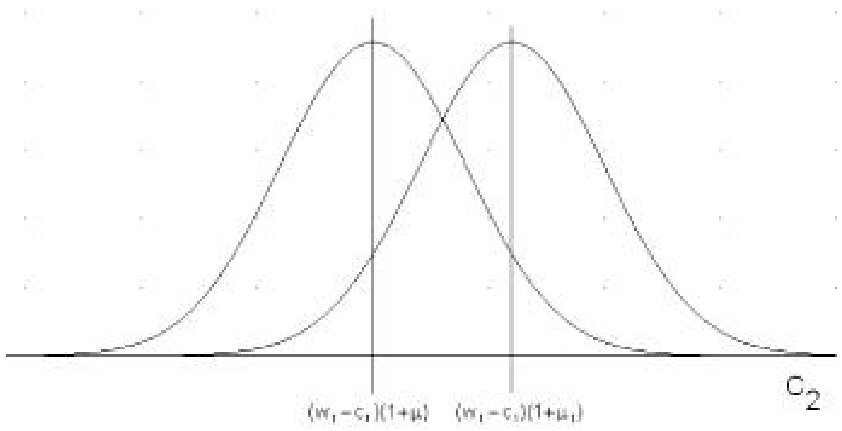
Si $(w_1 - c_1)$ y σ son constantes y μ se incrementa, digamos, hasta μ_1, la normalidad de R_p, implica que la distribución de C_2 desplazó su centro desde $(1 + \mu)(w_1 - c_1)$ hasta $(1 + \mu_1)(w_1 - c_1)$, a la derecha. Esto significa que la posibilidad de obtener retornos más altos aumenta.

La marginalidad positiva de la utilidad asegura que, otras cosas iguales (en particular c_1 y σ), el consumidor (T.D.) preferirá mayor valor esperado a menos valor esperado, es decir, la utilidad aumenta con el valor esperado del retorno (ver Fig. 8).

Segundo

Otras cosas iguales, particularmente c_1 y μ, un incremento en la desviación estándar, digamos de σ hasta σ_1, representa un aplanamiento en la función de densidad. La probabilidad de retornos altos al final de período aumentan, pero de igual ma-

Figura 8. Desplazamiento de la Densidad del Consumo al Final del Periodo



nera, por la simetría de la distribución, la probabilidad de muy bajos retornos también aumenta y en la misma proporciona. Por el análisis asociado con la figura 6.1, sabemos que el consumidor tratará de evitar esta situación, es decir, la utilidad disminuye con la desviación estándar.

Portafolios $\mu(R)$, $\sigma(R)$ eficientes

Consideremos la variable aleatoria R_p, que representa el retorno, en un período, del portafolio p. Sean $\mu(R_p)$ y $\sigma(R_p)$, respectivamente, el valor esperado y desviación estándar del retorno de p.

Se dice que p es **μ(R), σ(R) eficiente**, si ningún portafolio que tenga el mismo retorno esperado $\mu(R_p)$ o un retorno esperado mayor, tiene una desviación estándar menor que $\sigma(R_p)$.

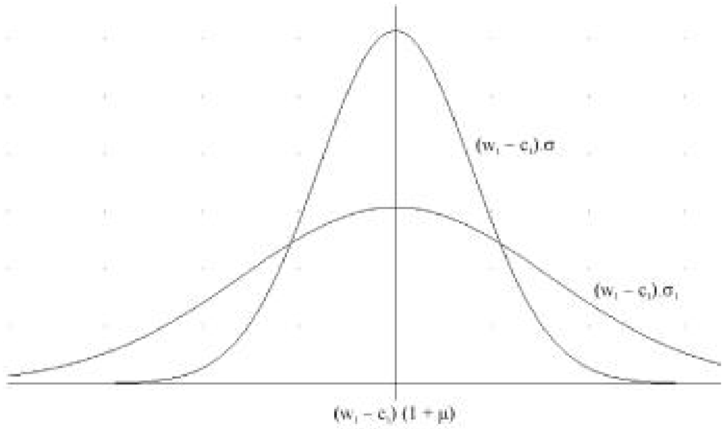
La figura 10 presenta una región sombreada de posibles portafolios en el plano σ(R)μ(R). Únicamente aquellos en la línea reteñida FE son eficientes. FE se llama **la frontera eficiente** y es una curva cóncava.

Como, dado cualquier consumo inicial c_1, (y cualquier inversión inicial $w_1 - c_1$), la utilidad es una función creciente de μ(R) y una función decreciente de σ(R), entonces el portafolio que maximiza la utilidad debe estar en la frontera eficiente. Este resultado se conoce como el *teorema de conjunto eficiente* y se formaliza a continuación:

Teorema del conjunto eficiente

El portafolio óptimo de un consumidor con aversión al riesgo es μ(R), σ(R) eficiente.

Figura 9. Aplanamiento de la Densidad del Consumo al Final del Periodo



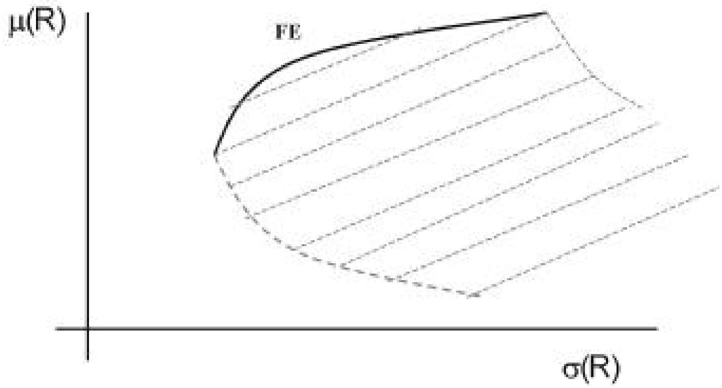
Las curvas de indiferencia del consumidor

El comportamiento de la utilidad esperada con es $\mu(R)$ y $\sigma(R)$ se puede observar también desde el punto de vista de las curvas de indiferencia.

Dado cualquier nivel de consumo inicial c_1 (y de inversión $w_1 - c_1$), las curvas de indiferencia, dibujadas en el plano $\sigma(R)\mu(R)$ deben ser crecientes dado que al aumentar la desviación estándar (riesgo), la utilidad se mantendrá constante solo si al consumidor se le recompensa con un aumento el retorno esperado.

Debido a la variación de u con el retorno esperado y la desviación estándar del re-

Figura 10. Región de Posibles Portafolios y Frontera Eficiente



torno, el gradiente de la función apunta diagonalmente hacia la izquierda y hacia arriba. (Ver Fig. 11).

Teniendo en cuenta estos aspectos, es intuitivamente obvio, bajo los supuestos aceptados que el portafolio óptimo, es decir, aquel que hace máxima la utilidad esperada del consumo, estará en el punto de tangencia de la frontera eficiente con una de las curvas de indiferencia (Ver figura 12).

Deducción formal de estos resultados, extensión de la teoría

Con el fin de obtener estos resultados de manera formal es necesario extender la teoría de la utilidad al caso continuo, es decir, se trata la riqueza como una variable continua.

He aquí algunos puntos importantes:

En este caso, las loterías solo se pueden describir mediante su función de distribución, en el caso más general, o por su función de densidad, cuando la tienen.

Las funciones de distribución preservan la linealidad de las loterías, por ejemplo, dada la lotería compuesta ($L_1, \ldots, L_m; \alpha_1, \ldots, \alpha_m$), donde la función de distribución de $L_k = F_k$, para $k = 1, 2, \ldots, m$. La función de distribución de la lotería simple equivalente está dada por

$$F(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k . F_k(x) .$$

En este caso L^*, el conjunto de todas las loterías, es el conjunto de todas las funciones de distribución sobre un intervalo $[a, +\infty)$.

Figura 11. Curvas de nivel de Consumidor y Dirección de Crecimiento de la Utilidad Esperada

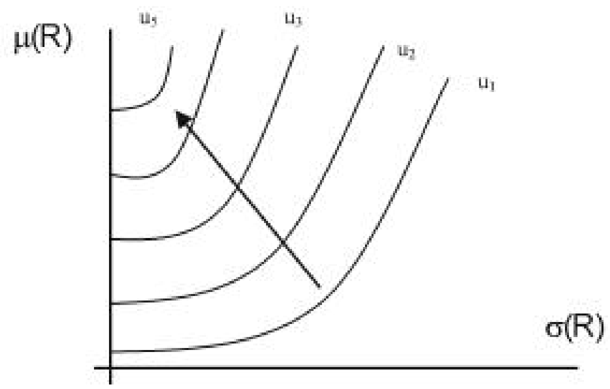
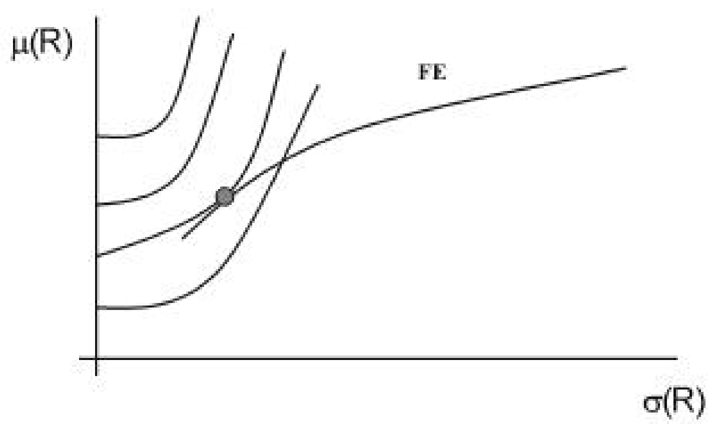


Figura 12. Portafolio Óptimo



Además, la utilidad para loterías (utilidad esperada) se calcula con una expresión de la forma U(F) = $\int u(x)dF(x)$ donde u es la utilidad definida sobre riqueza en condiciones ciertas.

El T.D. siente aversión al riesgo si y solo si $\int u(x)dF < u\left(\int x.dF(x)\right)$ para toda F.

El equivalente en condiciones de certeza de una lotería F se define como la cantidad EC(F,u) tal que u(EC(F,u)) = $\int u(x)dF(x)$. Esta definición es completamente análoga a la definición 8.

Dentro de esta teoría extendida las siguientes definiciones son equivalentes:

1. El T.D. siente aversión al riesgo
2. u = u(x) es cóncava.
3. $EC(F,u) < \int x dF(x)$, para toda F

Formalización de los resultados para el modelo de un período

Aunque en el caso más general $\int u(x)dF(x)$ es una integral de Lebesgue-Stieltjes, en la mayoría de los casos prácticos, se reduce a una sencilla integral de Riemann.

A manera de ejemplo, los anteriores resultados del modelo de un período se pueden obtener de manera formal, utilizando solo herramientas matemáticas de nivel intermedio.

Uno de los supuestos del modelo dice que $R_p \sim N(\mu_p, \sigma_p)$ para cualquier portafolio de inversión p. Si hacemos $r = \frac{R_p - \mu_p}{\sigma_p}$ (13), entonces la distribución de r es normal estándar. Ahora, como el consumo al final del período es $C_2 = (w_1 - c_1)(1 + R_p)$ entonces se puede expresar en términos de r como $C_2 = (w_1 - c_1)(1 + \mu_p + \sigma_p . r)$ (14).

La utilidad esperada con la elección un nivel de consumo c_1, a comienzos del período y el portafolio de inversión p está dada por $E[u(c_1, C_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(c_1, (w_1 - c_1)(1 + \mu_p + \sigma_p . r)) . f(r) . dr$ (15), donde f(r) es la función de densidad de r. La suposición de normalidad para todos los portafolios y la definición de r, hace que f(r) sea la misma para todos ellos. Las diferencias entre las utilidades esperadas de dos portafolios cualesquiera dependen de c_1, μ_p y σ_p. Es decir, podemos re-escribir u como, $u(c_1, c_2) = u(c_1, \mu_p, \sigma_p)$.

Las utilidades marginales

$$\frac{\partial E[u(c_1, c_2)]}{\partial \mu_p} = (w_1 - c_1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u(c_1, c_2)}{\partial c_2} f(r) . dr$$

(16). Ahora, como las utilidades marginales de los consumos c_1 y c_2 son positivas, se tiene que la expresión (16) es positiva, luego $\frac{\partial E[u(c_1, c_2)]}{\partial \mu_p} > 0$, es decir, la utilidad esperada aumenta con el valor esperado del portafolio.

$$\frac{\partial E[u(c_1, c_2)]}{\partial \sigma_p} = (w_1 - c_1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u(c_1, (w_1 - c_1)(1 + \mu_p + \sigma_p . r))}{\partial c_2} . r . f(r) . dr \quad (17)$$

Para probar que la expresión (17) es negativa, procedemos con la siguiente sucesión argumentativa:

- $u(c_1, c_2)$ es cóncava, así que $\frac{\partial U(c_1, c_2)}{\partial c_2}$ es una función positiva de c_2, pero decreciente.
- c_2 es una función afín de r, con pendiente e intercepto positivos, por lo tanto $\frac{\partial U(c_1, c_2)}{\partial c_2}$ es una función positiva decreciente de r.
- f(r) es simétrica con respecto al origen y positiva para todo r.

– $\dfrac{\partial U(c_1,c_2)}{\partial c_2}$ r.f(r) es negativa para r < 0 y positiva para r >0.

– $\left|\dfrac{\partial u(c_1,(w_1-c_1)(1+\mu_p+\sigma_p.(-r)))}{\partial c_2}(-r).f(-r)\right| > \dfrac{\partial u(c_1,(w_1-c_1)(1+\mu_p+\sigma_p.r))}{\partial c_2}r.f(r)$

para todo valor positivo r

– $\int_{-s}^{+s}\dfrac{\partial u(c_1,(w_1-c_1)(1+\mu_p+\sigma_p.r))}{\partial c_2}.r.f(r).dr<0$, para todo s >0

– (17) es una expresión negativa, es decir $\dfrac{\partial E[u(c_1,c_2)]}{\partial \sigma_p}<0$

Esto comprueba las aseveraciones intuitivas de que la utilidad esperada aumenta con el retorno esperado y disminuye con la desviación estándar del retorno.

Las curvas de indiferencia

Dado un nivel cualquiera de utilidad k, en cada uno de los puntos (σ_p, μ_p) de la respectiva curva de indiferencia se tiene que $u(\sigma_p, \mu_p) = k$, asumiendo diferenciabilidad, obtenemos $\dfrac{\partial u}{\partial \mu_p}\dfrac{.d\mu_p}{d\sigma_p}+\dfrac{\partial u}{\partial \sigma_p}=0$ y de acá, $\dfrac{.d\mu_p}{d\sigma_p}=-\dfrac{\frac{\partial u}{\partial \sigma_p}}{\frac{\partial u}{\partial \mu_p}}>0$, dado que $\dfrac{\partial u}{\partial \sigma_p}<0$ y $\dfrac{\partial u}{\partial \mu_p}>0$. Esto significa que las curvas en el plano σ(R) μ(R) son efectivamente crecientes.

También es posible demostrar que estas curvas son convexas. Para lograr esto, basta probar que dados dos puntos (σ_1, μ_1) y (σ_2, μ_2) en una curva de indiferencia dada, correspondiente a la utilidad u_k, cualquier combinación convexa de ellos corresponde a una utilidad mayor que u_k.

Sean (σ_1, μ_1) y (σ_2, μ_2) dos puntos en la curva de indiferencia correspondiente al nivel de utilidad u_k. y sea $(\sigma_3, \mu_3) = (\alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2, \alpha\sigma_1 + (1 - \alpha).\sigma_2)$ para $0 < \alpha < 1$.

Sean $c_2^1 = (w_1 - c_1)(1 + \mu_1 + \sigma_1.r)$ (18), $c_2^2 = (w_1 - c_1)(1 + \mu_2 + \sigma_2.r)$ (19)

y $c_2^3 = \alpha c_2^1 + (1-\alpha)c_2^2$ (20).

Al sustituir (18) y (19) en (20), obtenemos $c_2^3 = (w_1 - c_1)(1 + \mu_3 + \sigma_3.r)$ (21)

Dado c_1, la estricta concavidad de u implica $u(c_1, c_2^3) > \alpha u(c_1, c_2^1) + (1-\alpha)u(c_1, c_2^2)$. (22)

es decir,

$$u(c_1,(w_1 - c_1)(1+\mu_3+\sigma_3.r)) > \alpha u(c_1,(w_1 - c_1)(1+\mu_1+\sigma_1.r)) + (1-\alpha)u(c_1,(w_1 - c_1)(1+\mu_2+\sigma_2.r))$$

(23). Haciendo $F_k = (w_1 - c_1)(1 + \mu_k + \sigma_k .r)$ para $k = 1, 2, 3$. (24) y tomando valores esperados, obtenemos[13]:

$E[u(c_1, F_3)] > \alpha E[u(c_1, F_1)] + (1-\alpha).E[u(c_1, F2)]$, esto implica $E[u(c_1, F_3)] > u_k$ (25)

Por lo tanto las curvas de indiferencia son cóncavas y tienen la forma que se muestra en las figuras 11 y 12, dado un nivel de consumo inicial c_1.

La importancia de este modelo simple

La importancia de este simple modelo es la implicación de que el consumidor (T.D.) simplifica su tarea de clasificar los portafolios y su conjunto queda reducido al de los portafolios eficientes.

Por supuesto, cuando no hay normalidad en la distribución de los retornos los supuestos del modelo fallan, pero no así sus conclusiones. Por ejemplo, los resultados se pueden extender a casos en los que la distribución de los retornos es **estable simétrica**[14].

Ésta es una clase de distribuciones que se usa en aplicaciones financieras y que incluye a la distribución normal y a la distribución de Cauchy como casos particulares.

Básicamente las mismas ideas de este modelo de un período se aplican en modelos de múltiples períodos y los resultados son semejantes.

Otros modelos

El modelo de la utilidad esperada, que también tiene sus debilidades[15], no es el único.

Existen diversas aproximaciones que son más convenientes, en determinados campos, o que complementan tal modelo.

Por ejemplo, cuando se quiere hacer referencia a los mercados de capitales en ambiente de incertidumbre, se hace en el **marco de preferencia de estados**. Dentro de éste se puede desarrollar la teoría de valoración mediante medidas martingalas, de una manera bastante natural.

Un estudio más profundo de las matemáticas para finanzas debe incluir no solo el estudio de ese marco, la familia de las distribuciones estables y el estudio de probabilidades subjetivas, sino también los conceptos de dominancia estocástica de primero y segundo órdenes y el de utilidad dependiente del estado, entre otros.

■ REFERENCIAS

CÁRCAMO C. Ulises. Elementos de probabilidad para el estudio del riesgo. Fondo Editorial Universidad EAFIT. MedellÍn. 2002. (Publicación en CD)

FAMA, Eugene F. and MILLER, Merton H. The Theory of Finance. Holt, Rinehart and Winston. New York:1972.

GITMAN, Lawrence J. Principles of Managerial Finance. Seventh Edition. Harper Collins College Publishers. New York: 1994.

INGERSOLL, Jonathan E., Jr. Theory of Financial Decision Making. Rowmann & Littlefield Publishers. Savage, Maryland. 1987.

LAD, Frank. Operational Subjetive Statistical Methods. Wiley. New york. 1996.

MAS-COLELL, Andreu et Al. Microeconomic Theory**.** Oxford University Press. New Cork: 1995.

RAIFFA, H. Decision Analysis. Addison-Wesley. Reading, Massachusetts. 1968

VAN HORNE, James C. Financial Market Rates and Flows. Fourth Edition. Prentice Hall, Englewood Cliffs. New Jersey: 1994.

VARIAN, Hal R. Microeconomic Analysis. Third Edition. W.W. Norton & Company. New York: 1992.

WINSTON, Wayne L. Operations Research. Applications and Algorithms. Third edition. Duxbury Press. Belmont, California. 1994.

NOTAS

1 Licenciado en Matemáticas de la Universidad de Medellín. Master en Matemáticas Aplicadas de la Universidad EAFIT. Candidato a Ph.D i Applied and Computational Mathematics (Mathematical Finance), University of Canterbury, New Zealand. Profesor de la Universidad EAFIT.

2 En realidad, toda estimación de probabilidades tiene algo de subjetivo. Día a día aparecen mas artículos de probabilidades aplicadas a diversos campos donde se favorece el enfoque bayesiano y además, existe la Teoría de la Probabilidad Subjetiva, que estudia situaciones donde no es posible hablar de probabilidades objetivas. El lector interesado puede consultar el texto de Lad (1996) que se cita en las referencias.

3 Se suponen N-1, para tener N posibles casos.

4 Un simplex es una generalización de los conceptos de triángulo y tetraedro: Si $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_N$, son vectores linealmente independientes de R^n, el conjunto de todas las combinaciones convexas de esos vectores es un N-simplex.

5 Esta es una lotería compuesta de dos estados, es posible definir loterías compuestas de un número m de estados, pero para el nivel informativo de este artículo, es suficiente con dos estados.

6 También existe la relación de indiferencia entre las loterías de L*, que es una **relación de equivalencia**, es decir, es reflexiva, simétrica y transitiva.

7 Existen muchos conjuntos de axiomas equivalentes para este propósito. Este conjunto en particular se escogió porque es de los mas fáciles de interpretar.

8 El lector interesado puede encontrar en Winston (1994) o Cárcamo (2002) interpretaciones intuitivas de algunos de los otros axiomas. Los conjuntos de axiomas presentados allí difieren solo ligeramente de los de este articulo.

9 Si X y B son vectores de $\mathbf{R}^n$, y A es una matriz cuadrada de orden n, la transformación definida por Y = A.X + B es una transformación afín de X.

10 Este concepto se define naturalmente en el marco de la independencia condicional que es un concepto intermedio entre los conceptos de **independencia** y **correlación cero**. dadas dos variables aleatorias X e Y. se dice que X es condicionalmente independiente con respecto a Y, si E[X/Y] = X. Si además, E[X] = 0, se dice que X es **ruido** o un **juego justo**.

11 Algunos autores lo presentan como el **modelo media-varianza**.

12 La normalidad de la variable aleatoria C_2 y la magnitud de su media y su desviación estándar es una consecuencia inmediata de la normalidad de Rp.

13 El signo de la desigualdad en (23) se preserva dado que $f(r) \geq 0$.

14 En estas σ ya no se interpreta como desviación estándar.

15 Se conocen paradojas derivadas de la Teoría de la Utilidad, entre ellas las paradoja de Allais y Machina.