

TESIS DOCTORAL

Dimensión en álgebra constructiva

Luis Español González



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TESIS DOCTORAL

Dimensión en álgebra constructiva

Luis Español González

Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones
2008

Esta tesis doctoral, dirigida por el doctor D. José Luis Viviente Mateu, fue leída el 1 de abril de 1977

© Luis Español González

Edita: Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones

ISBN 978-84-691-5838-8

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA
FACULTAD DE CIENCIAS

DIMENSION EN
ALGEBRA CONSTRUCTIVA
por

Luis Español

Memoria presentada
para optar al grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas,
bajo la dirección del
Catedrático Dr.J.L.Viviente,
en Abril de 1.978.

DEPARTAMENTO DE GEOMETRIA Y TOPOLOGIA.

I N D I C E

<u>Introducción.</u>	iv
--------------------------------	----

Capítulo I.- Conjuntos ordenados

§1. Categorías internas y objetos simpliciales. . .	1
- Grafos internos.	1
- Grafos internos multiplicativos	11
- Categorías internas.	19
§2. Conjuntos ordenados.	29
- Ordenes internos.	36
- Intervalos.	40
§3. Dimensión	45
- Aplicaciones monótonas	47

Capítulo II.- Retículos

§1. Las categorías $\underline{D}$ y $\underline{B}$	51
- Epimorfismos universales	57
- El functor $F:\underline{D}\longrightarrow\underline{O}$	62
§2. Dualidad.	66
- El functor $S:\underline{O}\longrightarrow\underline{D}$	66
- Dualidad de Birkhoff	70
- Dualidad de Stone.	74
- Aplicaciones.	75
§3. Dimensión.	79
- El objeto cosimplicial	79
- Dimensión.	86
- Presentación finita.	86
- Caso general.	92

Capítulo III.-Anillos

♯ 1. Las categorías $\underline{A}$ y $\underline{R}$	97
- Epimorfismos universales	98
- Regularización.	103
♯ 2. Espectros de un anillo.	109
- Noción de cero.	109
- Espectro primo.	122
- Ejemplos.	126
- Existencia.	130
- Ejemplos.	135
- Espectro booleano	138
♯ 3. Dimensión.	146
- Anillos de dimensión 0.	146
- Anillos de dimensión 1.	148
<u>Bibliografía.</u>	151

INTRODUCCION

1.- En el verano de 1.975 A.Joyal me propuso desarrollar una teoría constructiva de la dimensión de anillos. Este trabajo recoge la mayor parte (la que puede ser sistemáticamente expuesta) de los resultados obtenidos hasta ahora en este campo. Las ideas generales importantes son de A. Joyal, - quien ha tenido la amabilidad de dejar para mí el trabajo de desarrollarlas. Sus orientaciones y ayudas, así como la colaboración de A. Kock, han sido absolutamente imprescindibles.

Además de mi director J.L. Viviente, otros matemáticos - que me han ayudado en diversos aspectos en esta tarea han sido I. Sols, J. Meseguer, A. Bastiani, G.M. Kelly y C.J. Mulvey.

En la hora de los agradecimientos no puedo olvidar a mi padre y a mi profesor de Bachillerato Superior y Preuniversitario D. José Estevan Ciriquián, que son las primeras personas que me han hablado de matemáticas con entusiasmo y rigor.

B. Russell dijo que un libro tiene que ser inteligible o correcto, siendo imposible combinar ambas cosas. Me gustaría haber escrito un trabajo inteligible para quien se interese en su lectura pueda descubrir sus incorrecciones.

2.- En esta memoria todos los anillos son conmutativos y unitarios y los homomorfismos entre ellos conservan la - unidad; así mismo todos los retículos son distributivos con 0 y 1 y los morfismos entre ellos conservan el cero y el - uno.

El objetivo del trabajo es iniciar una teoría constructiva de la dimensión de anillos (Capítulo III), para lo cual es necesario disponer de una teoría análoga para retículos (Capítulo II) y ésta a su vez se apoya en la dimensión de conjuntos ordenados (Capítulo I). La reducción del problema de anillos a retículos se hace mediante la noción de espectro y el paso de retículos a conjuntos ordenados se basa en la dualidad de Birkhoff-Stone.

Entendemos por álgebra constructiva la parte del - álgebra que se puede desarrollar sin utilizar la regla de - tercio excluso, el axioma de elección y el teorema del ideal primo.

La ausencia de este teorema nos impide asegurar la existencia de suficientes ideales primos en un anillo, con - lo que pierde valor constructivo gran parte del álgebra con - mutativa clásica. En particular, hay que reformular la noción de espectro primo de un anillo de manera constructiva. A. Joyal hizo esto en el verano de 1.975, su conferencia [16] es - de hecho el punto de partida de esta memoria, que no es sino el desarrollo y ampliación de las ideas que sobre el tema - comunicó Joyal al autor en una conversación sostenida en - aquellas fechas. Siguiendo a Joyal, definimos el espectro pri - mo de un anillo A como un cierto retículo universal $D(A)$ - (Definición III.2.15) y el espectro booleano como el álgebra de Boole libre $B(A)$ sobre $D(A)$ (Definición III.2.29). En la

situación clásica, $D(A)$ es el retículo dual del formado por los abiertos casi-compactos del espacio topológico $\text{Spec}(A)$ con la topología de Zariski y $B(A)$ se corresponde análogamente con la topología constructible ([1] y [11]). La relación entre ambos espectros (Teorema III.3.32) se establece a través de los anillos regulares (Definiciones III.1.1 y 7) - los llamados absolutamente planos en [1] y [24] -. Se estudian estos anillos construyendo como límite filtrante el anillo regular R libre sobre un anillo A (Teorema III.1.8) y demostrando que el espectro primo de R es el espectro booleano de A (Teoremas III.2.18 y 38).

El espectro primo $D(A)$ de un anillo A se define de forma que aparece una biyección monótona entre los ideales primos de A y los filtros primos de $D(A)$, de manera que la dimensión (en el sentido de Krull) de A es la dimensión análoga de $D(A)$. El Capítulo III termina caracterizando (Teorema III.3.2) los anillos de dimensión 0 - entre ellos los regulares y las K -álgebras - y probando (Teoremas III.3.6 y 9) que $\mathbb{Z}$ y $K[X]$ tienen dimensión 1.

Estos teoremas requieren el conocimiento de los espectros de los anillos considerados para aplicar después a dichos retículos la teoría de la dimensión expuesta en el Capítulo II. El estudio de los retículos equivale clásicamente al de los conjuntos ordenados en virtud de la dualidad de Birkhoff-Stone. Pero en la situación constructiva, la ausencia del teorema del ideal primo nos impide disponer de la dualidad, salvo en su restricción a conjuntos finitos y retículos de presentación finita. Esto remite el problema, si quiera sea parcialmente, a conjuntos ordenados. En el Capítulo I se define la dimensión de un conjunto ordenado (Definición

I.3.1) a través de cadenas de elementos para después caracterizar el concepto de manera categórica a través del objeto simplicial asociado (Teorema I.3.2) y finalmente, en el caso finito, dar una nueva caracterización en función de subconjuntos especiales (Teoremas I.3.4 y 5). La caracterización categórica es útil para, dualizándola, poder definir de manera general la dimensión de un retículo (Definición II.3.6). Esta definición necesita que previamente se haya construido (Teorema II.3.1 con el apoyo de los resultados sobre objetos simpliciales dados en el Capítulo I) el objeto cosimplicial asociado al retículo, pues la dualidad sólo nos proporciona este objeto, a partir del simplicial asociado al conjunto ordenado, en el caso finito. Pero una definición categórica es poco manejable, así que se precisa caracterizar la dimensión de un retículo a través de sus elementos. Utilizando la dualidad de Birkhoff-Stone, elementos del álgebra de Boole libre B engendrada por un retículo D se corresponden con subconjuntos del conjunto ordenado X asociado a D , elementos de D lo hacen con secciones superiores de X (Definición I.2.11) siendo las secciones inferiores los complementos en B de los elementos de D . Estos subconjuntos especiales de X son los que intervienen en la caracterización de su dimensión antes mencionada. La dualidad permite pues expresar vía elementos la dimensión de un retículo de presentación finita (Teoremas II.3.7 y 8) sin más que copiar la versión vía subconjuntos de la dimensión de un conjunto ordenado finito. El paso siguiente, suprimir la restricción finita (Teoremas II.3.19 y 20) se logra descomponiendo el teorema restringido en una cadena de equivalencias (Corolario II.3.14) enunciadas en términos de conceptos invariantes por colímites filtrantes, y considerando que cada retículo es un colímite fil-

trante de retículos de presentación finita.

A lo largo del trabajo se manejan subconjuntos, secciones de un conjunto ordenado, ideales y filtros primos de un retículo e ideales de un anillo. La ausencia de la regla de tercio excluso debilita nuestra teoría de conjuntos en el sentido que no todo subconjunto tiene complementario salvo que el conjunto total sea finito. Sólo son complementados aquellos subconjuntos para los cuales existe un método finito que decida si un elemento está o no en el subconjunto, es decir, si se puede definir su aplicación característica dando un proceso finito para obtener la imagen de cada elemento. En el tratamiento que se hace en la memoria de conjuntos ordenados, retículos y anillos, se centra la atención en los subconjuntos complementados caracterizando sus aplicaciones características (Proposiciones II.1.9, II.2.1 y III.2.2) y usando en la exposición estas aplicaciones más que los propios subconjuntos. En particular, en el Capítulo II, §2, se expone en estos términos el caso finito de la dualidad de Birkhoff-Stone y en el Capítulo III, §2, se demuestran las propiedades básicas de los ideales primos de un anillo en función de sus aplicaciones características que llamamos, siguiendo a A. Joyal, nociones de cero. La demostración (Teorema III.3.9) de que $\dim K[X] = 1$ utiliza que $\{1\}$ tiene complemento en $D(K[X])$, condición que nos permite (Lema III.3.7) trabajar en el retículo con elementos $x \neq 1$. En conexión con este tema decimos que un conjunto A es discreto si existe un algoritmo finito para decidir la igualdad en A , es decir, si el subconjunto diagonal de $A \times A$ tiene complementario. Se demuestra en la memoria (Teorema II.1.2) que el álgebra de Boole B libre sobre un retículo D es discreta sí y sólo si lo es D .

3.- El álgebra constructiva puede desarrollarse en el marco axiomático de la teoría de topos elementales [32] de la que expondremos un bosquejo histórico que justifique su elección como contexto de este trabajo. La memoria, que se desarrolla en un lenguaje exclusivamente conjuntista con las restricciones ya mencionadas, no utiliza conceptos de la teoría de topos elementales, pero estas categorías están en el origen del trabajo y en su desarrollo futuro.

La noción de topo elemental fue elaborada durante el curso 1.969-70 por F.W. Lawvere y M. Tierney, que la dieron a conocer durante los años 1.970 y 1.971 en diversas conferencias, por ejemplo [18] y [29]. Los antecedentes del concepto eran de una parte la caracterización categórica elemental de la categoría de módulos [1], que indujo a Lawvere a hacerlo propio con la categoría de conjuntos [17]; de otra el teorema de Giraud que caracteriza categóricamente los topos de Grothendieck [14]. Un topo elemental es una categoría $\underline{E}$ que verifica los axiomas

- (1) $\underline{E}$ tiene límites finitos
- (2) $\underline{E}$ es cartesiana cerrada
- (3) $\underline{E}$ tiene clasificador de subobjetos.

En particular, es una categoría exacta [3] y regular [27], conceptos éstos que fueron intermedios en la elaboración de la noción de topo elemental. El axioma clave - para trabajar en él se juntaron Lawvere y Tierney - es el tercero, que significa la existencia de un objeto Ω y un morfismo $t: 1 \rightarrow \Omega$ tales que cada subobjeto B de un objeto A tiene un morfismo característico $\psi: A \rightarrow \Omega$, es decir hay un producto fibrado

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{\quad} & 1 \\
 \downarrow \eta & & \downarrow t \\
 A & \xrightarrow{\varphi} & \Omega
 \end{array}$$

En el caso clásico de los conjuntos es $\Omega = 2 = \{0, 1\}$ y $t(\emptyset) = 1$, siendo φ la aplicación característica de B . En un topo elemental, 2 es el coproducto $1 \sqcup 1$ del objeto final con sí mismo y no se tiene en general un isomorfismo $\Omega \cong 2$, sino simplemente un morfismo $2 \rightarrow \Omega$ canónico. Los subconjuntos complementados son aquellos $B \hookrightarrow A$ cuyo morfismo característico factoriza a través de 2 .

La relación entre los topos elementales y la axiomática de conjuntos fue establecida entre otros por Osius en [25] y [26], elaborando un lenguaje interno de tipo conjuntista interpretable en cada topo elemental de manera que todos los teoremas del cálculo proposicional intuicionista son universalmente válidos. Si un topo elemental verifica el axioma de infinito (existencia de números naturales) B. Lesaffre ha probado en [19] que sobre tal topo se puede desarrollar el álgebra elemental. Resulta pues que si a la categoría de conjuntos clásica le suprimimos el principio de tercio excluso y el axioma de elección resulta un topo elemental con axioma de infinito, que llamaremos topo de conjuntos, sobre el que se puede elaborar el álgebra constructiva objeto de esta memoria.

Los topos de conjuntos presentan frente a la categoría de conjuntos clásica la ventaja de tener más modelos. Un teorema algebraico demostrado constructivamente puede ser interpretado sobre un modelo concreto de topo de conjuntos

- por ejemplo un cierto topo de haces - dando lugar a un teorema en el modelo - un teorema de haces - como puede verse en [23]. En este sentido es previsible que una adecuada interpretación de la demostración constructiva dada en esta memoria de la fórmula $\dim K[X]=1$ proporcione una prueba de que $\dim R[X]=1$ si R es un anillo regular. Tal prueba es necesaria para llegar a la demostración constructiva de la fórmula [28] $\dim A+1 \leq \dim A[X] \leq 2\dim A+1$ para un anillo arbitrario A . Este es el objetivo de los trabajos que continuarán esta memoria.

Zaragoza, Abril 1.978

CAPITULO I

CONJUNTOS ORDENADOS

Este primer capítulo se dedica al estudio de la dimensión de un conjunto ordenado en términos del objeto simplicial asociado. Comenzamos en $\phi 1$ con la construcción del objeto simplicial asociado a una categoría interna, elaborada en tres etapas a través de los conceptos de grafo interno y - grafo interno multiplicativo. En $\phi 2$ se caracterizan los conjuntos ordenados como caso particular de categorías internas y se estudian subconjuntos importantes de un conjunto ordenado en relación con el objeto simplicial asociado. Finalmente, en $\phi 3$, se aborda el tema de la dimensión.

$\phi 1$. Categorías internas y objetos simpliciales.-

Durante todo este apartado trabajaremos en una categoría $\underline{E}$ con límites finitos. El concepto de categoría interna que desarrollaremos es el de [32] y [14]. En [12] se definen los grafos y las categorías pequeñas como internos en $\underline{E} = \text{Set}$, siendo éste el ejemplo básico que se internaliza en una categoría arbitraria con límites finitos.

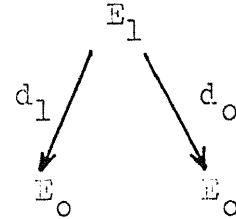
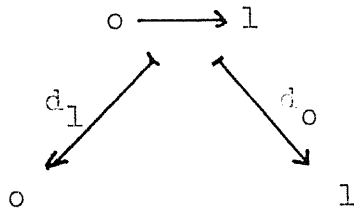
Grafos internos

Definición I.1.1.- Un grafo interno $\underline{E}$ en $\underline{E}$ es :

- (i) un objeto de objetos $\underline{E}_0$
- (ii) un objeto de morfismos $\underline{E}_1$
- (iii) un morfismo dominio $d_1: \underline{E}_1 \rightarrow \underline{E}_0$
- (iv) un morfismo codominio $d_0: \underline{E}_1 \rightarrow \underline{E}_0$

Se representa E mediante el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & d_0 & \\ E_1 & \xrightarrow{\quad} & E_0 \\ & d_1 & \end{array}$$



Definición I.1.2..- Un morfismo de grafos internos $f:E \rightarrow F$ es

- (i) un morfismo de objetos $f_0:E_0 \rightarrow F_0$
- (ii) un morfismo de morfismos $f_1:E_1 \rightarrow F_1$

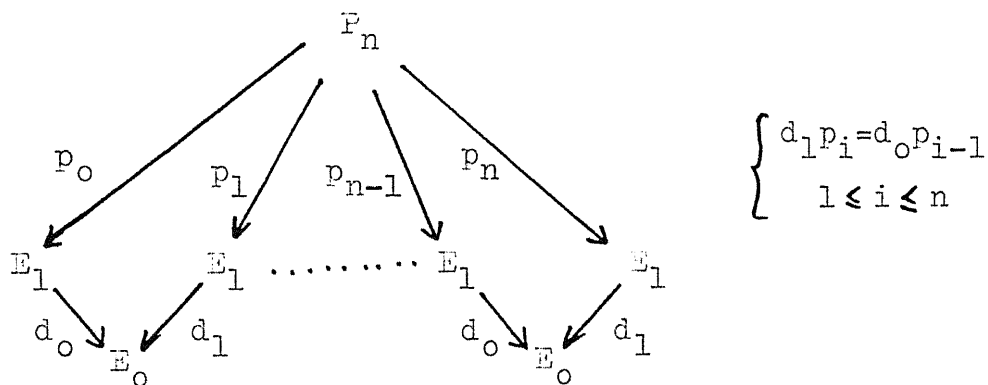
tales que sea conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & d_1 & & d_0 \\ & & \longleftarrow & & \longrightarrow \\ E_0 & & E_1 & & E_0 \\ \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 \\ F_0 & & F_1 & & F_0 \\ & & d_1 & & d_0 \\ & & \longleftarrow & & \longrightarrow \end{array}$$

Diremos que f es el morfismo (f_0, f_1) .

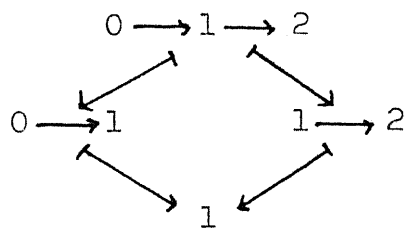
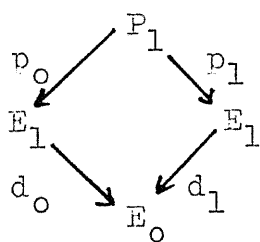
Con la identidad $\text{id}_E = (\text{id}_{E_0}, \text{id}_{E_1})$ y la composición $gf = (g_0 f_0, g_1 f_1)$ se obtiene la categoría $\text{Gra}(\underline{E})$ de los grafos internos de $\underline{E}$.

Definición I.1.3..- El producto n-fibrado de un grafo interno E es la solución universal de la construcción

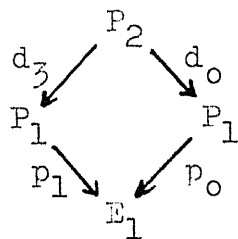


El producto n-fibrado de E existe (E tiene límites finitos) y es único salvo isomorfismos.

El producto 1-fibrado de E es el producto fibrado habitual.



Lema I.1.4. - Sea E un grafo interno en E . Existe un producto fibrado



Demostración : Por la propiedad universal de P_1 (ver diagrama arriba)

$$\exists d_0 \text{ tal que } \begin{cases} p_0 d_0 = p_1 \\ p_1 d_0 = p_2 \end{cases}$$

,

$$\exists d_3 \text{ tal que } \begin{cases} p_0 d_3 = p_0 \\ p_1 d_3 = p_1 \end{cases}$$

El cuadrado es, pues, conmutativo: $p_0 d_0 = p_1 = p_1 d_3$.

Sean morfismos $f_0, f_3: X \rightarrow P_1$ tales que $p_0 f_0 = p_1 f_3$. Los morfismos $(X \rightarrow E_1)$ $g_0 = p_0 f_3, g_1 = p_1 f_3 = p_0 f_0$ y $g_2 = p_1 f_0$ verifican

$$\left. \begin{array}{l} d_1 g_1 = d_1 p_1 f_3 = d_0 p_0 f_3 = d_0 g_0 \\ d_1 g_2 = d_1 p_1 f_0 = d_0 p_0 f_0 = d_0 g_1 \end{array} \right\} \quad \text{luego } \exists! g: X \rightarrow P_2 \text{ tal que } \begin{cases} p_i g = g_i \\ i=0,1,2 \end{cases}$$

Este morfismo g verifica

$$\left. \begin{array}{l} p_0 d_0 g = p_1 g = g_1 = p_0 f_0 \\ p_1 d_0 g = p_2 g = g_2 = p_1 f_0 \end{array} \right\} \quad \text{luego } d_0 g = f_0$$

Análogamente se prueba que $d_3 g = f_3$. Por último (unicidad de g)

si un morfismo $f: X \rightarrow P_2$ verifica $d_0 f = f_0$ y $d_3 f = f_3$, entonces

$$\left. \begin{array}{l} p_0 f = p_0 d_3 f = p_0 f_3 = g_0 = p_0 g \\ p_1 f = p_0 d_0 f = p_0 f_0 = g_1 = p_1 g \\ p_2 f = p_1 d_0 f = p_1 f_0 = g_2 = p_2 g \end{array} \right\} \quad \text{luego } f = g$$

#

Proposición I.1.5.— Sea E grafo interno en $\underline{E}$. Existe una sucesión

$$\dots \xrightarrow[p_{n+1}]{d_0} P_n \xrightarrow[p_{n-1}]{d_0} \dots \xrightarrow[p_2]{d_0} P_2 \xrightarrow[p_1]{d_0} P_1 \xrightarrow[p_1]{d_0} E_1 \xrightarrow[p_1]{d_0} E_0$$

tal que cada diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \cdot & \\ d_{n+1} \swarrow & & \searrow d_0 \\ \cdot & & \cdot \\ d_0 \swarrow & & \searrow d_n \\ & \cdot & \end{array} \quad (n \geq 1)$$

es un producto fibrado.

Demostración:

$$E_1 \xrightarrow[p_1]{d_0} E_0 \text{ es el grafo interno } E.$$

$(P_1 \xrightarrow[d_0]{d_1} E_1) = (P_1 \xrightarrow[p_0]{p_1} E_1)$ es el producto fibrado de E .

$P_2 \xrightarrow[d_3]{d_2} P_1$ son los morfismos del lema I.1.4. Luego los dos primeros cuadrados son, en efecto, productos fibrados.

Definición de $d_0, d_{k+1}: P_k \rightrightarrows P_{k-1}, k \geq 3$

$$\exists! d_0^m \left\{ \begin{array}{l} p_i d_0 = p_{i+1} \\ 0 \leq i \leq k-1 \end{array} \right. , \quad \exists! d_{k+1}^m \left\{ \begin{array}{l} p_i d_{k+1} = p_i \\ 0 \leq i \leq k-1 \end{array} \right.$$

(Para $k=2$, se recupera la definición de d_0 y d_3 dada en el lema I.1.4). Ya que, para cada $0 \leq i \leq k+2, k \geq 3$, se tiene

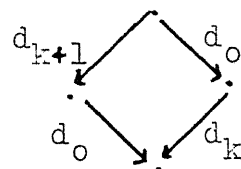
$$\left. \begin{array}{l} p_i d_0 d_{k+1} = p_{i+1} d_{k+1} = p_{i+1} \\ p_i d_k d_0 = p_i d_0 = p_{i+1} \end{array} \right\} \quad \text{es decir, } p_i d_0 d_{k+1} = p_i d_k d_0$$

resulta el diagrama conmutativo $d_0 d_{k+1} = d_k d_0$. Para ver que es producto fibrado se repite (modificando solamente los índices) la demostración del lema I.1.4. $\#$

Teorema I.1.6. - Para cada $n \geq 1, (P_n; p_0, \dots, p_n)$ es el producto fibrado de un grafo interno E si y sólo si existe una sucesión

$$P_n \xrightarrow[d_{n+1}]{d_0} P_{n-1} \cdots \cdots P_2 \xrightarrow[d_3]{d_0} P_1 \xrightarrow[d_2]{d_0} E_1 \xrightarrow[d_1]{d_0} E_0$$

tal que cada diagrama



es un producto fibrado y

$$p_0 = d_2 d_3 \dots d_{n+1}$$

$$p_i = d_0 \dots d_0 d_{i+2} \dots d_{n+1} = d_2 \dots d_{n-i+1} d_0 \dots d_0, 0 < i < n$$

$$p_n = d_0 d_0 \dots d_0$$

Demostración : "Sólo si", la sucesión es la de la proposición anterior, que verifica (ver definición de d_0 y d_k) :

$$p_0 = p_0 d_{n+1} = p_0 d_n d_{n+1} = \dots = p_0 d_3 \dots d_{n+1} = (P_1 \xrightarrow[p_2]{p_0} E_1)$$

$$= d_2 d_3 \dots d_{n+1},$$

$$p_n = p_{n-1} d_0 = p_{n-2} d_0 d_0 = \dots = p_1 d_0 \dots d_0 = (P_i \xrightarrow[p_0]{p_i} E_1)$$

$$= d_0 \dots d_0,$$

y si $0 < i < n$

$$p_i = p_i d_{n+1} = \dots = p_i d_{i+2} \dots d_{n+1} =$$

$$= p_{i-1} d_0 d_{i+2} \dots d_{n+1} = \dots$$

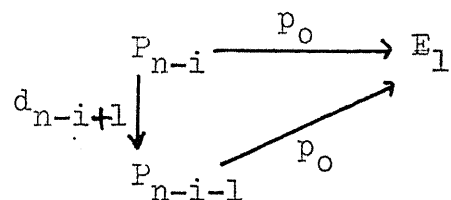
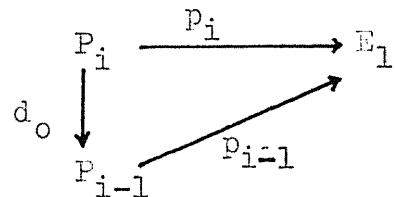
$$\dots = d_0 \dots d_0 d_{i+2} \dots d_{n+1},$$

o bien

$$p_i = p_{i-1} d_0 = \dots = p_0 d_0 \dots d_0 =$$

$$= p_0 d_{n-i+1} d_0 \dots d_0 = \dots$$

$$\dots = d_2 \dots d_{n-i+1} d_0 \dots d_0.$$

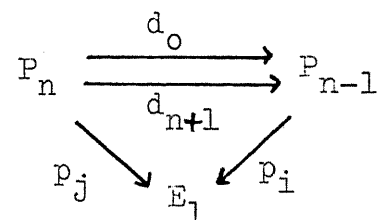


"Si". Procederemos por inducción. El caso $n=1$ es claro. Su pongamos que $(P_{n-1}; p_0, \dots, p_{n-1})$, con

$$p_0 = p_0 d_{n+1}$$

$$p_i = p_i d_{n+1} = p_{i-1} d_0, 0 < i < n$$

$$p_n = p_{n-1} d_0$$



es el producto $(n-1)$ -fibrado de E . Entonces $(P_n; p_0, \dots, p_n)$ es el producto n -fibrado de E . En efecto :

(i) $d_1 p_i = d_1 p_{i-1} d_0 =$ (por la hipótesis inductiva)

$$= d_0 p_{i-2} d_0 = d_0 p_{i-1}, \text{ si } 2 \leq i \leq n, \text{ y}$$

$d_1 p_1 = d_1 p_1 d_{n+1} =$ (por la hipótesis inductiva)

$$= d_0 p_0 d_{n+1} = d_0 p_0$$

(ii) Sean morfismos $f_i: X \rightarrow E_i, 0 \leq i \leq n$ tales que $\begin{cases} d_1 f_i = d_0 f_{i-1} \\ 1 \leq i \leq n \end{cases}$

la sucesión de productos fibrados

$$\begin{array}{ccccccc} P_n & \xrightarrow{d_{n+1}} & P_{n-1} & \dots & P_2 & \xrightarrow{d_3} & P_1 & \xrightarrow{d_2} & E_1 \\ d_0 \downarrow & & d_0 \downarrow & & d_0 \downarrow & & d_0 \downarrow & & d_0 \downarrow \\ P_{n-1} & \xrightarrow{d_n} & P_{n-2} & \dots & P_1 & \xrightarrow{d_2} & E_1 & \xrightarrow{d_1} & E_0 \end{array}$$

nos da por composición un producto fibrado

$$\begin{array}{ccc} P_n & \xrightarrow{p_0} & E_1 \\ d_0 \downarrow & & d_0 \downarrow \\ P_{n-1} & \xrightarrow{d_1 p_0} & E_0 \end{array}$$

Por otra parte, aplicando la hipótesis inductiva a los morfismos $f_1, \dots, f_n$ resulta que

$\exists! f^1: X \rightarrow P_{n-1} \text{ m } p_i f^1 = f_{i+1}, 0 \leq i \leq n-1$ y se tiene

$$d_0 f_0 = d_1 f_1 = d_1 p_0 f^1.$$

Por tanto, en el producto fibrado anterior

$$\exists ! f: X \longrightarrow P_n \cap p_0 f = f_0, d_0 f = f^1.$$

Este morfismo f verifica $p_i f = f_i$ para $0 \leq i \leq n$. En efecto : si $i=0$, ver la definición de f y si $0 < i \leq n$, $p_i f = p_{i-1} d_0 f = p_{i-1} f^1 = f_i$.

Para ver la unicidad de f , supongamos un morfismo $g: X \longrightarrow P_n$ tal que $p_i g = f_i$, $0 \leq i \leq n$. Será $g=f$ si (definición de f) $d_0 g = f^1$, y esto (definición de f^1) se verifica si es $p_i d_0 g = f_{i+1}$, $0 \leq i \leq n-1$. Pero, siendo $0 \leq i \leq n-1$, se tiene

$$p_i d_0 g = p_{i+1} g = f_{i+1}$$

luego $f=g$. $\#$

Desde ahora, la sucesión de productos fibrados asociada a un grafo interno E se escribirá en la forma

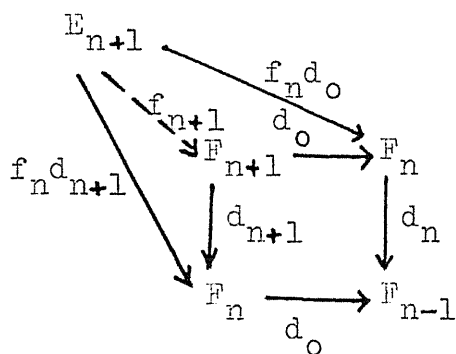
$$\cdots \cdots E_n \xrightarrow[p_{n+1}]{d_0} E_n \cdots \cdots E_2 \xrightarrow[p_2]{d_0} E_1 \xrightarrow[p_1]{d_0} E_0$$

Es decir, para $i \geq 2$, $E_i = P_{i-1}$.

Teorema I.1.7. - Dado un morfismo de grafos internos $f: E \longrightarrow F$ existen, para cada $n \geq 0$, morfismos $f_n: E_n \longrightarrow F_n$ tales que conmutan los diagramas

$$\begin{array}{ccccc} E_n & \xleftarrow{d_{n+1}} & E_{n+1} & \xrightarrow{d_0} & E_n \\ \downarrow f_n & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n \\ F_n & \xleftarrow{d_{n+1}} & F_{n+1} & \xrightarrow{d_0} & F_n \end{array} \quad (n \geq 0)$$

Demostración : Se definen los f_n por inducción. Es $f=(f_0, f_1)$ según la definición de f . Y una vez definido f_n se define f_{n+1} en el producto fibrado siguiente :



Según la definición de f_n :

$$d_n f_n d_0 = f_{n-1} d_n d_0 = f_{n-1} d_0 d_{n+1} = d_0 f_n d_{n+1}$$

así que

$$\exists f_{n+1} \text{ tal que } \begin{cases} d_0 f_{n+1} = f_n d_0 \\ d_{n+1} f_{n+1} = f_n d_{n+1} \end{cases} \quad \#$$

En los teoremas I.1.6 y I.1.7 se observa una cierta naturaleza functorial en la construcción que asocia a cada grafo interno E de $\underline{E}$ una sucesión de productos fibrados. Vamos a concretar este carácter functorial.

Sea Δ la categoría simplicial (usaremos las notaciones de [21]) y sea Δ_g la subcategoría de Δ que tiene como objetos los ordinales positivos (sin 0) y cuyos morfismos son los engendrados por

$$[1] \xrightleftharpoons[\delta_1]{\delta_0} [2] \xrightleftharpoons[\delta_2]{\delta_0} [3] \dots \dots \dots [n] \xrightleftharpoons[\delta_n]{\delta_0} [n+1] \dots \dots \dots$$

donde las aplicaciones $\delta_0, \delta_n: [n] \rightarrow [n+1]$ están definidas por $\delta_0(i)=i+1$ y $\delta_n(i)=i$ ($0 \leq i \leq n-1$) y verifican las relaciones $\delta_0 \delta_n = \delta_{n+1} \delta_0$ ($n \geq 1$)

Los teoremas I.1.6 y I.1.7 definen un functor

$$S: \text{Gra}(\underline{E}) \longrightarrow \underline{E} \Delta_g^{\text{op}}$$

que asocia a cada grafo interno E de $\underline{E}$ el functor

$SE: \Delta_g^{op} \longrightarrow \underline{E}$ definido por

$$SE[n] = E_{n-1}, \quad SE([n+1] \xrightleftharpoons[\delta_n]{\delta_o} [n]) = (E_n \xrightleftharpoons[d_n]{d_o} E_{n-1})$$

(las relaciones $\delta_o \delta_n = \delta_{n+1} \delta_o$ se corresponden con las $d_n d_o = d_o d_{n+1}$). Para cada morfismo de grafos internos $f: E \longrightarrow F$, Sf es la transformación natural $\{f_n: E_n \longrightarrow F_n; n \geq 0\}$ del teorema I.1.7.

Por otra parte se tiene un evidente functor

$$B: \underline{E} \xrightarrow{\Delta_g^{op}} \text{Gra}(\underline{E})$$

que asocia a cada functor $E: \Delta_g^{op} \longrightarrow \underline{E}$ el grafo interno de $\underline{E}$ imagen por E del grafo interno

$$[1] \xrightleftharpoons[\delta_1]{\delta_o} [2] \text{ de } \Delta_g^{op}.$$

Corolario I.1.8.- Los funtores B y S verifican

- (i) $BS = \text{Id}$
- (ii) B es adjunto a izquierda de S

Demostración (i) es inmediato.

(ii) Sean

$E: \Delta_g^{op} \longrightarrow \underline{E}$ y F grafo interno en $\underline{E}$. Se observa en la demos-

tracción del teorema I.1.7 que la definición de los $f_i (i \geq 2)$ depende de la existencia de productos fibrados únicamente en SF , así que se tiene la biyección

$$\frac{BE \longrightarrow F}{E \longrightarrow SF}$$

que define la adjunción $B \dashv S$ (notación de [13]).
#

Grafos internos multiplicativos

Definición I.1.9.— Una composición en un grafo interno E de E es un morfismo $d_1: E_2 \longrightarrow E_1$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & d_2 & & \\ & E_1 & \longleftarrow & E_2 & \xrightarrow{d_0} E_1 \\ d_1 \downarrow & & & d_1 \downarrow & \\ & E_0 & \xleftarrow{d_1} & E_1 & \xrightarrow{d_0} E_0 \\ & & & & \downarrow d_0 \end{array}$$

De esta definición y del teorema I.1.6 se siguen las relaciones

$$\begin{array}{l} d_0 d_1 = d_0 d_0 \\ d_0 d_2 = d_1 d_0 \\ d_1 d_2 = d_1 d_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ E_2 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_0 \\ \longrightarrow \end{array}$$

Vamos a ampliar esta construcción a todos los E_n .

Lema I.1.10.— Existen morfismos $d_1, d_2: E_3 \longrightarrow E_2$ tales que en el diagrama

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ E_3 \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_1 \\ \longrightarrow \end{array}$$

se verifican las relaciones

- | | |
|---------------------------|--------------------------|
| (i) $d_0 d_1 = d_0 d_0$ | (iv) $d_1 d_3 = d_2 d_1$ |
| (ii) $d_0 d_2 = d_1 d_0$ | (vi) $d_2 d_3 = d_2 d_2$ |
| (iii) $d_0 d_3 = d_2 d_0$ | |

Demostración : La relación (iii) es independiente de los morfismos $d_1, d_2: E_3 \rightarrow E_2$ y es ya conocida (teorema I.1.6.).

Definiremos $d_1, d_2: E_3 \rightarrow E_2$ a través del producto fibrado

$$\begin{array}{ccc}
 E_2 & \xrightarrow{d_0} & E_1 \\
 d_2 \downarrow & & \downarrow d_1 \\
 E_1 & \xrightarrow{d_0} & E_0
 \end{array}$$

Ya que $d_1 d_0 d_0 = d_0 d_2 d_0 = d_0 d_0 d_3 = d_0 d_1 d_3$, existe un único morfismo $d_1: E_3 \rightarrow E_2$ que verifica (i) y (v).

Ya que $d_1 d_1 d_0 = d_1 d_2 d_0 = d_1 d_0 d_3 = d_0 d_2 d_3$, existe un único morfismo $d_2: E_3 \rightarrow E_2$ que verifica (ii) y (vi). #

La asociatividad de la composición se traduce en la relación que falta

(iv) : $d_1 d_2 = d_1 d_1$

$$\begin{array}{ccccc}
 0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 & \xrightarrow{d_2} & 0 \rightarrow 1 \xrightarrow{2} 3 \\
 \downarrow d_1 & & \downarrow d_1 \\
 0 \xrightarrow{1} 2 \rightarrow 3 & \xrightarrow{d_1} & 0 \xrightarrow{1} 2 \rightarrow 3
 \end{array}$$

Definición I.1.11.- Un grafo interno E de $\underline{E}$ se dice multi--
plicativo si tiene una composición $d_1:E_2 \longrightarrow E_1$ que hace con
mutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_3 & \xrightarrow{d_2} & E_2 \\ d_1 \downarrow & & \downarrow d_1 \\ E_2 & \xrightarrow{d_1} & E_1 \end{array}$$

Ahora podemos agrupar en una sola fórmula las relaciones -
(i) a (vi).

Corolario I.1.12.- Si E es un grafo interno multiplicativo,
existe un diagrama

$$E_3 \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} E_2 \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} E_1 \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} E_0$$

que verifica las relaciones

$$d_i \cdot d_{j+1} = d_j \cdot d_i, \quad i \leq j. \quad \#$$

Definición I.1.13.- Sean E, F grafos internos multiplicativos
en $\underline{E}$. Un morfismo de grafos internos multiplicativos $f:E \longrightarrow F$
es un morfismo de grafos internos que conmuta con la compo-
sición, es decir, hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_2 & \xrightarrow{d_1} & E_1 \\ f_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ F_2 & \xrightarrow{d_1} & F_1 \end{array}$$

Proposición I.1.14. - Si $f: E \longrightarrow F$ es un morfismo de grafos - internos multiplicativos, conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & d_1 & & d_2 \\
 & & \longleftarrow & & \longrightarrow \\
 E_2 & & & E_3 & & E_2 \\
 \downarrow f_2 & & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_2 \\
 F_2 & & d_1 & & d_2 \\
 & & \longleftarrow & & \longrightarrow \\
 & & F_2 & & F_3 & & F_2
 \end{array}$$

Demostración : Por ser un producto fibrado, la familia $d_0, d_2: F_2 \longrightarrow F_1$ es monomorfa. Por tanto, de

$$d_0 f_2 d_2 = f_1 d_0 d_2 = f_1 d_1 d_0 = d_1 f_2 d_0 = d_1 d_0 f_3 = d_0 d_2 f_3 \text{ y de}$$

$$d_2 f_2 d_2 = f_1 d_2 d_2 = f_1 d_2 d_3 = d_2 f_2 d_3 = d_2 d_3 f_3 = d_2 d_2 f_3, \text{ se sigue}$$

que $f_2 d_2 = d_2 f_3$. Análogamente se prueba que $f_2 d_1 = d_1 f_3$. #

Es claro que los grafos internos multiplicativos en $\underline{E}$ y los morfismos de grafos internos multiplicativos forman una categoría, subcategoría de $\text{Gra}(\underline{E})$, que denotaremos $\text{Gram}(\underline{E})$. Para esta categoría, buscaremos una subcategoría de Δ y funtores B, S análogos a los ya encontrados para $\text{Gra}(\underline{E})$.

Sea Δ_m la subcategoría de la categoría simplicial Δ que tiene como objetos los ordinales positivos (sin 0) y cuyos morfismos son los engendrados por

$$[1] \rightrightarrows [2] \rightrightarrows [3] \dots \dots \dots [n] \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \vdots \\ \longrightarrow \end{array} [n+1] \dots \dots$$

siendo $\delta_0, \dots, \delta_n: [n] \longrightarrow [n+1]$ ($n \geq 1$) las aplicaciones

$$\delta_i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j < i \\ j+1 & \text{si } j \geq i \end{cases} \quad (0 \leq j \leq n-1) (0 \leq i \leq n)$$

que verifican las relaciones

$$\delta_i \delta_j = \delta_{j+1} \delta_i \quad (i \leq j)$$

Δ_m es la subcategoría (sin 0) de los monomorfismos de Δ y contiene a Δ_g como subcategoría.

Dado un functor $E: \Delta_m^{op} \longrightarrow \underline{E}$, ya que

$$[1] \rightleftarrows [2] \longleftarrow [3]$$

es un grafo interno multiplicativo en Δ_m^{op} , su imagen por E será un grafo interno multiplicativo en $\underline{E}$, y es claro que se tiene así un functor

$$B: \underline{E}^{\Delta_m^{op}} \longrightarrow \text{Gram}(\underline{E})$$

y un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \underline{E}^{\Delta_m^{op}} & \xrightarrow{B} & \text{Gram}(\underline{E}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{E}^{\Delta_g^{op}} & \xrightarrow{B} & \text{Gra}(\underline{E}) \end{array}$$

en el que el functor $\underline{E}^{\Delta_m^{op}} \longrightarrow \underline{E}^{\Delta_g^{op}}$ es el inducido por la inclusión $\Delta_g \longrightarrow \Delta_m$, y que asocia a cada $\Delta_m^{op} \longrightarrow \underline{E}$ su restricción a Δ_g^{op} .

Pasamos a definir el nuevo functor

$$S: \text{Gram}(\underline{E}) \longrightarrow \underline{E}^{\Delta_m^{\text{op}}}$$

Teorema I.1.15. - Para cada grafo interno multiplicativo $\underline{E}$ en $\underline{E}$, existe una sucesión

$$\cdots \cdots \cdots \underline{E}_n \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \vdots \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \underline{E}_{n-1} \cdots \cdots \cdots \underline{E}_2 \rightrightarrows \underline{E}_1 \rightrightarrows \underline{E}_0$$

que verifica las relaciones

$$d_i d_{j+1} = d_j d_i \quad (i \leq j)$$

Demostración : Esta sucesión será una ampliación de la SE - construida en el teorema I.1.6. (Notar que las relaciones $d_0 d_{n+1} = d_n d_0$ que allí se daban son de la forma ahora exigida). El corolario I.1.12 nos da la construcción hasta $n=3$: $\underline{E}_3 \rightrightarrows \underline{E}_2 \rightrightarrows \underline{E}_1 \rightrightarrows \underline{E}_0$.

Supongamos definida la sucesión hasta $\underline{E}_{n-1}$ y vamos a definir los morfismos $d_1, \dots, d_{n-1}: \underline{E}_n \longrightarrow \underline{E}_{n-1}$. Lo haremos trabajando sobre el producto fibrado (teorema I.1.6.).

$$\begin{array}{ccc} \underline{E}_{n-1} & \xrightarrow{d_0} & \underline{E}_{n-2} \\ d_{n-1} \downarrow & & \downarrow d_{n-2} \\ \underline{E}_{n-2} & \xrightarrow{d_0} & \underline{E}_{n-3} \end{array}$$

Para $0 < i < n$ se tiene, por la hipótesis inductiva,

$$\begin{aligned} d_0 d_i d_n &= d_{i-1} d_0 d_n \\ d_{n-2} d_{i-1} d_0 &= d_{i-1} d_{n-1} d_0 \\ \text{y como } d_0 d_n &= d_{n-1} d_0 \\ \text{es } d_0 d_i d_n &= d_{n-2} d_{i-1} d_0 \end{aligned}$$

luego

$$\exists d_i: E_n \longrightarrow E_{n-1}^m \begin{cases} d_0 d_i = d_{i-1} d_0 \\ d_{n-1} d_i = d_i d_n \end{cases}$$

Se verifican, pues, las relaciones

$$\begin{array}{ccccc} E_n & \xrightarrow{d_0} & E_{n-1} & \xrightarrow{d_0} & E_{n-2} \\ & \vdots & & \vdots & \\ E_n & \xrightarrow{d_n} & E_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & E_{n-2} \end{array}$$

$$d_0 d_{j+1} = d_j d_0, 0 < j \leq n-1$$

$$d_i d_n = d_{n-1} d_i, 0 \leq i \leq n-1$$

y falta probar que $d_i d_{j+1} = d_j d_i$ si $0 < i \leq j < n-1$. Esto sigue de ser $d_0, d_{n-2}: E_{n-2} \longrightarrow E_{n-3}$ familia monomorfa (pues es producto fibrado) y verificarse

$$\left\{ \begin{aligned} d_0 d_i d_{j+1} &= d_{i-1} d_0 d_{j+1} = d_{i-1} d_j d_0 = d_{j-1} d_{i-1} d_0 = d_{j-1} d_0 d_i = d_0 d_j d_i \\ d_{n-2} d_i d_{j+1} &= d_i d_{n-1} d_{j+1} = d_i d_{j+1} d_n = d_j d_i d_n = d_j d_{n-1} d_i = d_{n-2} d_j d_i \end{aligned} \right. \neq$$

El siguiente esquema representa los morfismos

$$d_i: E_4 \longrightarrow E_3$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \nearrow d_0 \\ \nearrow \\ \longrightarrow \\ \searrow \\ \searrow d_4 \end{array} \begin{array}{c} 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \\ 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \\ 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \\ 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \\ 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \end{array} \end{array}$$

Teorema I.1.16..- Dado un morfismo de grafos internos multiplicativos $f:E \longrightarrow F$ existe, para cada $n \geq 0$, un morfismo $f_n:E_n \longrightarrow F_n$ de manera que conmutan los diagramas

$$\begin{array}{ccc} E_n & \xrightarrow{d_i} & E_{n-1} \\ \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ F_n & \xrightarrow{d_i} & F_{n-1} \end{array} \quad (0 \leq i \leq n) (n \geq 1)$$

Demostración : Los f_n son los del teorema I.1.7., así que los diagramas propuestos conmutan para $i=0, n$. La proposición I.1.14 establece el teorema hasta $n=3$. Procediendo por inducción, supongamos probado el teorema hasta E_{n-1} , y sea $0 < i < n$; entonces

$$\begin{aligned} d_0 f_{n-1} d_i &= f_{n-2} d_0 d_i = f_{n-2} d_{i-1} d_0 = d_{i-1} f_{n-1} d_0 = d_{i-1} d_0 f_n = d_0 d_i f_n \\ d_{n-1} f_{n-1} d_i &= f_{n-2} d_{n-1} d_i = f_{n-2} d_i d_n = d_i f_{n-1} d_n = d_i d_n f_n = d_{n-1} d_i f_n \end{aligned}$$

y como la familia $d_0, d_{n-1}: F_{n-1} \longrightarrow F_{n-2}$ es monomorfa (producto fibrado) es $f_{n-1} d_i = d_i f_n$. ~~#~~

Corolario I.1.17..- Existe un functor S tal que :

- (i) $BS = \text{Id}$
- (ii) B es adjunto a izquierda de S .

Demostración : B ya es conocido. S se define en los teoremas I.1.15 y 16 : para cada grafo interno multiplicativo E en $\underline{E}$,

$SE: \Delta_m^{\text{op}} \longrightarrow \underline{E}$ es un functor que al morfismo $[n] \longleftarrow [n+1]$ de

Δ_m^{op} hace corresponder el morfismo $E_n \longrightarrow E_{n-1}$ de $\underline{E}$. Las relaciones $\delta_i \delta_j = \delta_{j+1} \delta_i$ en Δ_m se corresponden con las rela--

ciones $d_i d_{j+1} = d_j d_i$ en $\underline{E}$.

(i) es inmediato.

(ii) se sigue de la demostración del teorema I.1.16 : los morfismos $BE \rightarrow F$ se corresponden biunívocamente con los morfismos $E \rightarrow SF$ (ver corolario I.1.8). #

Ya que $\Delta_{\underline{E}}$ es subcategoría de Δ_m y $\text{Gram}(\underline{E})$ lo es de $\text{Gra}(\underline{E})$, podemos formar el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Gram}(\underline{E}) & \xrightleftharpoons[B]{S} & \underline{E}^{\Delta_m^{\text{op}}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Gra}(\underline{E}) & \xrightleftharpoons[B]{S} & \underline{E}^{\Delta_{\underline{E}}^{\text{op}}} \end{array}$$

Categorías internas

Definición I.1.18. - Una unidad en un grafo interno E en $\underline{E}$ es un morfismo $s_0: E_0 \rightarrow E_1$, tal que $d_0 s_0 = 1 = d_1 s_0$.

$$E_0 \xrightarrow{s_0} E_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xleftarrow{d_1} \end{array} E_0$$

En una categoría pequeña ($\underline{E} = \text{Set}$), s_0 asocia a cada objeto su identidad.

Lema I.1.19. - Si E es un grafo interno con unidad, existen morfismos

$$E_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s_0} \\ \xleftarrow{s_1} \end{array} E_2$$

que verifican las relaciones (que los definen unívocamente)

$$\begin{array}{ccc}
 E_1 & \xrightarrow{s_0} & E_2 \\
 d_1 \downarrow & s_1 & \downarrow d_2 \\
 E_0 & \xrightarrow{s_0} & E_1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 d_0 s_0 = 1 \\
 d_0 s_1 = s_0 d_0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 d_2 s_0 = s_0 d_1 \\
 d_2 s_1 = 1
 \end{array}$$

Demostración : En el producto fibrado

$$\begin{array}{ccc}
 E_2 & \xrightarrow{d_0} & E_1 \\
 d_2 \downarrow & & \downarrow d_1 \\
 E_1 & \xrightarrow{d_0} & E_0
 \end{array}$$

considerando $E_1 \xrightarrow{1} E_1$,

$$d_0 s_0 = 1 \Rightarrow d_0 s_0 d_1 = d_1 \Rightarrow \exists ! s_0 : E_1 \longrightarrow E_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} d_0 s_0 = 1 \\ d_2 s_0 = s_0 d_1 \end{array} \right.$$

y considerando $E_1 \xrightarrow{s_0 d_0} E_1$,

$$d_1 s_0 = 1 \Rightarrow d_1 s_0 d_0 = d_0 \Rightarrow \exists ! s_1 : E_1 \longrightarrow E_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} d_0 s_1 = s_0 d_0 \\ d_2 s_1 = 1 \end{array} \right. \quad \#$$

Definición I.1.20.- Una categoría interna E en E es un grafo interno multiplicativo con unidad que verifica las relaciones

$$\begin{array}{ccc}
 E_1 & \xrightarrow{s_0} & E_2 \xrightarrow{d_1} E_1 \\
 & s_1 &
 \end{array}
 \quad
 d_1 s_0 = 1 = d_1 s_1$$

Corolario I.1.21.- Si E es una categoría interna, los morfismos

$$E_0 \longrightarrow E_1 \rightrightarrows E_2 \rightrightarrows E_1 \rightrightarrows E_0$$

verifican las relaciones

$$(i) \quad d_i d_{j+1} = d_j d_i, i \leq j$$

$$(ii) \quad s_1 s_0 = s_0 s_0$$

$$(iii) \quad d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i, i \leq j \\ 1, i=j, j+1 \\ s_j d_{i-1}, i > j+1 \end{cases}$$

Demostración : (i) y (iii) son ya conocidas. (ii) se sigue de las igualdades $d_0 s_1 s_0 = s_0 d_0 s_0 = s_0 = d_0 s_0 s_0$

y
$$d_2 s_1 s_0 = s_0 = s_0 d_0 s_0 = d_2 s_0 s_0$$

por ser la familia $d_0, d_2: E_2 \longrightarrow E_1$ monomorfa.

Definición I.1.22. - Un functor interno $f: E \longrightarrow F$ entre dos categorías internas es un morfismo de grafos internos multiplicativos que conmuta con la unidad, es decir, tal que es conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_0 & \xrightarrow{s_0} & E_1 \\ f_0 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ F_0 & \xrightarrow{s_0} & F_1 \end{array}$$

Proposición I.1.23. - Si $f: E \longrightarrow F$ es un functor interno, conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} E_2 & \xleftarrow{s_1} & E_1 & \xrightarrow{s_0} & E_2 \\ f_2 \downarrow & & f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ F_2 & \xleftarrow{s_1} & F_1 & \xrightarrow{s_0} & F_2 \end{array}$$

Demostración : La familia $d_0, d_2: F_2 \longrightarrow F_1$ es monomorfa, y se tiene

$$\begin{cases} d_0 f_2 s_0 = f_1 d_0 s_0 = f_1 1 = 1 f_1 = d_0 s_0 f_1 \\ d_2 f_2 s_0 = f_1 d_2 s_0 = f_1 s_0 d_0 = s_0 f_0 d_0 = s_0 d_0 f_1 = d_2 s_0 f_1 \end{cases}$$

luego $f_2 s_0 = s_0 f_1$. Análogamente, $s_1 f_1 = f_2 s_1$. #

Las categorías internas en $\underline{E}$ y los funtores internos entre ellas forman una categoría, subcategoría de $\text{Gram}(\underline{E})$, que denotaremos $\text{Cat}(\underline{E})$.

Sea Δ_+ la subcategoría plena de la categoría simplicial Δ cuyos objetos son los ordinales positivos (sin 0). Los morfismos de Δ_+ están entendidos por las aplicaciones

$$[1] \implies [2] \implies [3] \dots \quad \delta_0, \dots, \delta_n: [n] \longrightarrow [n+1]$$

que verifican las relaciones $\delta_i \delta_j = \delta_{j+1} \delta_i, i \leq j$,

y las aplicaciones

$$[1] \longleftarrow [2] \longleftarrow [3] \dots \quad \sigma_0, \dots, \sigma_{n-1}: [n+1] \longrightarrow [n]$$

definidas por

$$\sigma_i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j \leq i \\ j-1 & \text{si } j > i \end{cases} \quad (0 \leq j \leq n)(0 \leq i \leq n-1)$$

que verifican las relaciones

$$\sigma_j \sigma_i = \sigma_i \sigma_{j+1}, i \leq j$$

siendo además

$$\sigma_j \delta_i = \begin{cases} \delta_i \sigma_{j-1} & , \quad i < j \\ 1 & , \quad i = j, j+1 \\ \delta_{i-1} \sigma_j & , \quad i > j+1 \end{cases}$$

Δ_m es la subcategoría de los monomorfismos de Δ_+ .

Dado un functor $E: \Delta_+^{op} \longrightarrow \underline{E}$, la imagen por E de la cate

goría interna

$$[2] \xleftarrow{\sigma_0} [1] \xleftarrow[\delta_1]{\delta_0} [2] \xleftarrow{\delta_1} [3]$$

en Δ_+^{op} es una categoría interna en $\underline{E}$, y se tiene así un -- functor $B: \underline{E}^{op} \rightarrow \text{Cat}(\underline{E})$. Definiremos a continuación un functor S inverso a derecha de B que refina el de los grafos in ternos multiplicativos.

Teorema I.1.24. - Para cada categoría interna E en $\underline{E}$, existen morfismos

$$d_0, \dots, d_n: E_n \longrightarrow E_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

$$s_0, \dots, s_{n-1}: E_n \longrightarrow E_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

que verifican las relaciones

$$\begin{aligned} (i) \quad d_i d_{j+1} &= d_j d_i, i \leq j \\ (ii) \quad s_{j+1} s_i &= s_i s_j, i \leq j \\ (iii) \quad d_i s_j &= \begin{cases} s_{j-1} d_i & , i < j \\ 1 & , i = j, j+1 \\ s_j d_{i-1} & , i > j+1 \end{cases} \end{aligned}$$

Demostración : La sucesión de los d_i es del teorema I.1.15, que verifica (i). El corolario I.1.21 establece el teorema - hasta $n=2$. Terminaremos con una inducción. Supongamos definida la sucesión de los s_i hasta E_{n-1} ($n-1 \geq 2$) verificando - (ii) y (iii). Hay que definir $s_0, \dots, s_{n-1}: E_{n-1} \longrightarrow E_n$ y probar para estos nuevos morfismos las relaciones (ii) y (iii).

Consideremos el diagrama de producto fibrado

$$\begin{array}{ccccc} E_{n-1} & & & & \\ \downarrow d_{n-1} & \searrow s_0 & & \xrightarrow{d_0} & \\ E_n & & E_{n-1} & & E_{n-1} \\ \downarrow d_n & & \downarrow d_{n-1} & & \downarrow d_{n-1} \\ E_{n-2} & \xrightarrow{s_0} & E_{n-1} & \xrightarrow{d_0} & E_{n-2} \end{array}$$

Ya que se verifica, según la hipótesis inductiva,

$$d_0 s_0 d_{n-1} = 1 \quad d_{n-1} = d_{n-1} 1$$

las igualdades, de (iii), $\begin{cases} d_0 s_0 = 1 \\ d_n s_0 = s_0 d_{n-1} \end{cases}$ definen $s_0: E_{n-1} \longrightarrow E_n$

Análogamente, ya que $d_{n-1} s_{n-2} d_0 = 1 \quad d_0 = d_0 1$,

las igualdades, de (iii), $\begin{cases} d_0 s_{n-1} = s_{n-2} d_0 \\ d_n s_{n-1} = 1 \end{cases}$ definen $s_{n-1}: E_{n-1} \longrightarrow E_n$

Si $0 < j < n-1$, ya que

$$\begin{array}{ccccc} E_{n-1} & \xrightarrow{d_0} & E_{n-2} & & \\ & \searrow s_j & \downarrow s_{j-1} & & \\ & & E_n & \xrightarrow{d_0} & E_{n-1} \\ & & \downarrow d_n & & \downarrow d_{n-1} \\ E_{n-2} & \xrightarrow{s_j} & E_{n-1} & \xrightarrow{d_0} & E_{n-2} \end{array}$$

$$d_{n-1} s_{j-1} d_0 = (\text{hip. ind.}) \quad s_{j-1} d_{n-2} d_0 = s_{j-1} d_0 d_{n-1} = (\text{hip. ind.})$$

$$d_0 s_j d_{n-1}$$

las igualdades, de (iii), $\begin{cases} d_0 s_j = s_{j-1} d_0 \\ d_n s_j = s_j d_{n-1} \end{cases}$ definen $s_j: E_{n-1} \longrightarrow E_n$

La definición de los s_j prueba (iii) para $i=0, n$.

Si $0 < i < n$, probaremos (iii) mediante la familia monomorfa -

$$d_0, d_{n-1}: E_{n-1} \longrightarrow E_{n-2}.$$

$$\text{Si } 0 < i \leq j \leq n-1, \\ d_0 d_i s_j = d_{i-1} d_0 s_j = d_{i-1} s_{j-1} d_0 = (\text{hip.ind.}) s_{j-2} d_{i-1} d_0 = s_{j-2} d_0 d_i = \\ (\text{hip.ind.}) d_0 s_{j-1} d_i.$$

$$d_{n-1} d_i s_j = d_i d_n s_j = \begin{cases} (j=n-1) d_{i-1} = d_i = d_{n-1} s_{j-1} d_i (\text{hip.ind.}). \\ (j < n-1) d_i s_j d_{n-1} = (\text{hip.ind.}) s_{j-1} d_i d_{n-1} = \\ = s_{j-1} d_{n-2} d_i = (\text{hip.ind.}) d_{n-1} s_{j-1} d_i. \end{cases}$$

$$\text{Si } 0 < i=j \leq n-1, \\ d_0 d_i s_j = d_{i-1} d_0 s_j = d_{i-1} s_{j-1} d_0 = (\text{hip.ind.}) d_0 = d_0 1. \\ d_{n-1} d_i s_j = d_i d_n s_j = \begin{cases} (j=n-1) d_{i-1} = d_i = d_j = d_{n-1} = d_{n-1} 1. \\ (j < n-1) d_i s_j d_{n-1} = (\text{hip.ind.}) d_{n-1} = d_{n-1} 1. \end{cases}$$

$$\text{Si } 0 < i < n, i=j+1, \\ d_0 d_i s_j = d_{i-1} d_0 s_j = \begin{cases} (j=0) d_{i-1} 1 = d_{i-1} = d_j = d_0 = d_0 1. \\ (j > 0) d_{i-1} s_{j-1} d_0 = (\text{hip.ind.}) d_0 = d_0 1. \end{cases} \\ d_{n-1} d_i s_j = d_i d_n s_j = (j < n-1) d_i s_j d_{n-1} = (\text{hip.ind.}) d_{n-1} = d_{n-1} 1.$$

$$\text{Si } 0 < i, j+1 < i < n, \\ d_0 d_i s_j = d_{i-1} d_0 s_j = \begin{cases} (j=0) d_{i-1} 1 = d_{i-1} = (\text{hip.ind.}) d_0 s_j d_{i-1} \\ (j > 0) d_{i-1} s_{j-1} d_0 = (\text{hip.ind.}) s_{j-1} d_{i-2} d_0 = \\ = s_{j-1} d_0 d_{i-1} = (\text{hip.ind.}) d_0 s_j d_{i-1}. \end{cases} \\ d_{n-1} d_i s_j = d_i d_n s_j = (j < n-2) d_i s_j d_{n-1} = (\text{hip.ind.}) s_j d_{i-1} d_{n-1} = \\ = s_j d_{n-2} d_{i-1} = (\text{hip.ind.}) d_{n-1} s_j d_{i-1}.$$

Terminaremos demostrando (ii) mediante la familia monomorfa $d_0, d_n: E_n \longrightarrow E_{n-1}$ y utilizando (iii). Con $0 \leq i \leq j \leq n-2$,

$$d_o s_i s_j = \begin{cases} (i=0) & l s_j = s_j l = s_j d_o s_i = d_o s_j l s_i \\ (i > 0) & s_{i-1} d_o s_j = s_{i-1} s_{j-1} d_o = (\text{hip.ind.}) s_j s_{i-1} d_o = \\ & = s_j d_o s_i = d_o s_j l s_i \end{cases}$$

$$d_n s_i s_j = s_i d_{n-1} s_j = \begin{cases} (j=n-2) & s_i l = l s_i = d_n s_j l s_i \\ (j < n-2) & s_i s_j d_{n-2} = (\text{hip.ind.}) s_j l s_i d_{n-2} = \\ & = s_j l d_{n-1} s_i = d_n s_j l s_i. \# \end{cases}$$

El siguiente esquema representa los morfismos $s_j: E_2 \rightarrow E_3$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} o \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \end{array} \begin{array}{l} \nearrow^{s_0} \\ \longrightarrow \\ \searrow_{s_2} \end{array} \begin{array}{c} o \longrightarrow o \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \\ o \longrightarrow 1 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \\ o \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 2 \end{array} \end{array}$$

Teorema I.1.25. - Dado un functor interno $f: E \rightarrow F$ existe, para cada $n > 0$, un morfismo $f_n: E_n \rightarrow F_n$ de manera que conmutan los diagramas

$$\begin{array}{ccccc} E_n & \xrightarrow{d_i} & E_{n-1} & \xrightarrow{s_j} & E_n \\ \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_n \\ F_n & \xrightarrow{d_i} & F_{n-1} & \xrightarrow{s_j} & F_n \end{array} \quad \begin{array}{l} (0 \leq i \leq n) \\ (0 \leq j \leq n-1) \end{array} \quad (n > 1)$$

Demostración : Los f_n son los del teorema I.1.16, que conmutan con los d_i . La proposición I.1.23 demuestra el teorema - hasta $n=2$. Procediendo por inducción, demostraremos que $f_n s_j = s_j f_{n-1}$: Basta considerar que la familia $d_o, d_n: F_n \rightarrow F_{n-1}$ es monomorfa y que se tienen las igualdades

$$\begin{aligned}
 (j=0) \quad d_0 f_n s_0 &= f_{n-1} d_0 s_0 = f_{n-1} = d_0 s_0 f_{n-1} \\
 (0 < j) \quad d_0 f_n s_j &= f_{n-1} d_0 s_j = f_{n-1} s_{j-1} d_0 = (\text{hip.ind.}) s_{j-1} f_n d_0 = \\
 &= s_{j-1} d_0 f_{n-1} = d_0 s_j f_{n-1} \\
 (j < n-1) \quad d_n f_n s_j &= f_{n-1} d_n s_j = f_{n-1} s_j d_{n-1} = (\text{hip.ind.}) s_j f_n d_{n-1} = \\
 &= s_j d_{n-1} f_{n-1} = d_n s_j f_{n-1} \\
 (j=n-1) \quad d_n f_n s_{n-1} &= f_{n-1} d_n s_{n-1} = f_{n-1} = d_n s_{n-1} f_{n-1}. \quad \#
 \end{aligned}$$

Corolario I.1.26. - Existen funtores

$$\text{Cat}(\underline{E}) \begin{matrix} \xrightarrow{S} \\ \xleftarrow{B} \end{matrix} \underline{E}^{\Delta_+^{\text{op}}} \text{ tales que}$$

- (i) $BS = \text{Id}$
- (ii) B es adjunto a izquierda de S .

Demostración : B ya es conocido. S amplía el S del corolario I.1.17 mediante $SE(\mathbf{r}_j) = s_j$. (i) es inmediato y (ii) se sigue de la demostración del teorema I.1.25 : la existencia de los f_i sólo requiere productos fibrados en $\mathbb{F}$. $\#$

Se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Cat}(\underline{E}) & \begin{matrix} \xrightarrow{S} \\ \xleftarrow{B} \end{matrix} & \underline{E}^{\Delta_+^{\text{op}}} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Gram}(\underline{E}) & \begin{matrix} \xrightarrow{S} \\ \xleftarrow{B} \end{matrix} & \underline{E}^{\Delta_m^{\text{op}}}
 \end{array}$$

Terminaremos con una adjunción, que se deduce de la anterior, bien conocida en el caso $\underline{E} = \text{Set}$.

Definimos los funtores siguientes:

$$I: \underline{E} \longrightarrow \underline{E}^{\Delta_+^{\text{op}}} \text{ y } B_0: \underline{E}^{\Delta_+^{\text{op}}} \longrightarrow \underline{E}.$$

Para cada objeto X de $\underline{E}$, IX es el functor constante en X , y -
para cada $f: X \rightarrow Y$, If es la transformación natural definida
(If) $_n = f$ para cada n . B_0 asocia a cada transformación natural
 $f: E \rightarrow F$ el morfismo $f_0: E_0 \rightarrow F_0$.

Proposición I.1.27. - I es adjunto a izquierda de B_0 , con -
 $B_0 I = Id$

Demostración : Estableceremos la biyección $\begin{matrix} IX \rightarrow E \\ X \rightarrow B_0 E \end{matrix}$. Es cla-

ro que $B_0 I = Id_E$ y la aplicación "descendente" se obtiene -
aplicando B_0 , es decir, $B_0 (IX \rightarrow E) = (X \rightarrow B_0 E)$. Veamos la aplica-
ción "ascendente". Dado $f: X \rightarrow B_0 E = E_0$, definimos mediante

$$\begin{cases} f_0 = f \\ f_n = s_0 f_{n-1}, n > 0 \end{cases}$$

la transformación natural $IX \rightarrow E$. En efecto, se tiene

$$\begin{cases} d_0 f_1 = d_0 s_0 f_0 = f_0 \\ d_1 f_1 = d_1 s_0 f_0 = f_0 \end{cases} \quad \text{y, completando la inducción,}$$

$$\begin{cases} d_0 f_n = d_0 s_0 f_{n-1} = f_{n-1} \\ d_n f_n = d_n s_0 f_{n-1} = \dots = d_n s_0 \dots \dots \dots s_0 f_0 = \dots = s_0 \dots \dots \dots s_0 d_1 s_0 f_0 = \\ = s_0 \dots \dots \dots s_0 f_0 = \dots = f_{n-1}. \end{cases} \quad \#$$

Corolario I.1.28. - Existen funtores $Cat(\underline{E}) \xrightleftharpoons[T]{V} \underline{E}$ tales que

- (i) $VT = Id$
- (ii) T es adjunto a izquierda de V .

Demostración : Sean $V = B_0 S$ y $T = BI$. Entonces :

- (i) es inmediato,
- (ii) sigue del corolario I.1.26 y la proposición I.1.27 con

poniendo adjunciones.

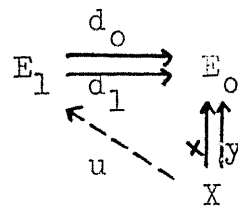
TX es la categoría interna trivial (discreta en la terminología de [4]) sobre el objeto X , que está caracterizada por ser isomorfismo la identidad $s_0: E_0 \longrightarrow E_1$. En efecto, entonces d_0 y $d_1(E_1 \longrightarrow E_0)$ son iguales al isomorfismo inverso de s_0 , por lo que d_0 y $d_2(E_2 \longrightarrow E_1)$ son isomorfismos iguales entre sí e iguales a la composición d_1 . Todos los d_i y los s_j son pues isomorfismos.

§2. Conjuntos ordenados.

Antes de ocuparnos de los conjuntos ordenados en la forma habitual, vamos a estudiarlos como caso particular de categorías internas. Continuamos pues trabajando en una categoría $\underline{E}$ con límites finitos. Si X e Y son dos objetos de $\underline{E}$, el conjunto (externo a $\underline{E}$) de los morfismos de X en Y lo denotaremos Y^X , notación que coincide con la del conjunto internalizado si $\underline{E}$ es un topo elemental.

Sea E un grafo interno en $\underline{E}$ y X un objeto de $\underline{E}$. En E_0^X definimos la relación $x \leq y$ mediante

$$\exists u: X \longrightarrow E_1 \text{ tal que } \begin{cases} d_1 u = x \\ d_0 u = y \end{cases}$$



Evidentemente, en E_0^X se tiene $d_1 \leq d_0$.

Proposición I.2.1.— Sea E un grafo interno en $\underline{E}$. Se verifica:

(i) Si $f: E \longrightarrow F$ es un morfismo en $\text{Gra}(\underline{E})$, para cada objeto X de $\underline{E}$ la aplicación

$$f_o^X: E_o^X \longrightarrow F_o^X \quad m \quad x \longmapsto f_o x$$

es monótona: $x \leq y \Rightarrow f_o x \leq f_o y$.

(ii) Si $h: X \longrightarrow Y$ es un morfismo en $\underline{E}$, la aplicación

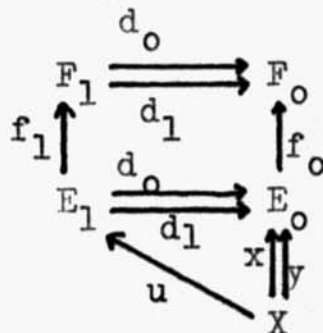
$$h_{E_o}: E_o^Y \longrightarrow E_o^X \quad m \quad y \longmapsto y h$$

es monótona: $y \leq y' \Rightarrow y h \leq y' h$.

Demostración : (i) Sea $x \leq y$, con $d_o u = y, d_1 u = x$. El morfismo $u_1 = f_1 u$ verifica

$$\begin{cases} d_o f_1 u_1 = f_o d_o u_1 = f_o y \\ d_1 f_1 u_1 = f_o d_1 u_1 = f_o x \end{cases}$$

luego $f_o x \leq f_o y$

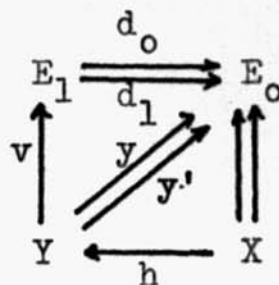


(ii) Sea $y \leq y'$, con $d_o v = y', d_1 v = y$.

El morfismo $u = v h$ verifica

$$d_o u = d_o v h = y' h, d_1 u = d_1 v h = y h$$

así que $y h \leq y' h$.



#

Recordando la definición I.1.3 (con $E_n = P_{n-1}$) consideremos los morfismos $p_o, \dots, p_{n-1}: E_n \longrightarrow E_1$ para $n > 1$. Componiendo con $d_o, d_1: E_1 \longrightarrow E_o$ obtenemos los morfismos

$$q_o, \dots, q_n: E_n \longrightarrow E_o, \quad n > 0$$

definidos por

$$\left\{ \begin{array}{l} q_0 = d_1 p_0 = d_1 d_2 \dots d_n \\ q_i = \begin{cases} d_1 p_i = d_1 d_2 \dots d_{n-i} d_0 \dots d_0 \\ d_0 p_{i-1} = d_0 \dots d_0 d_{i+1} \dots d_n \end{cases} \quad (0 \leq i \leq n) \\ q_n = d_0 p_{n-1} = d_0 \dots d_0 \end{array} \right.$$

si $n > 1$ y por $q_0 = d_1, q_1 = d_0$ si $n = 1$.

Proposición I.2.2. - Si E es un grafo interno en $\underline{E}$ tal que $d = d_1, d_0 : E_1 \longrightarrow E_0 \times E_0$ es monomorfismo, entonces los morfismos $q_0, \dots, q_n : E_n \longrightarrow E_0$ son, para cada $n > 0$, universales respecto a la propiedad $q_0 \leq \dots \leq q_n$. Recíprocamente, si existen estos morfismos universales, las fórmulas

$$dp_i = \{q_i, q_{i+1}\} \quad , \quad 0 \leq i \leq n-1 \quad (n > 1)$$

definen morfismos $p_0, \dots, p_{n-1} : E_n \longrightarrow E_1$ tales que $(E_n : p_0, \dots, p_{n-1})$ es el producto $(n-1)$ -fibrado de E .

Demostración : Es claro que $q_0 \leq q_1 : E_1 \longrightarrow E_0$ son universales por ser d monomorfismo. Si $n > 1$, para cada $i = 0, \dots, n-1$, es $q_0 p_i = d_1 p_i = q_i$ y $q_1 p_i = d_0 p_i = q_{i+1}$, así que $q_i \leq q_{i+1}$; luego $q_0 \leq \dots \leq q_n$. Dada otra familia $u_0 \leq \dots \leq u_n : X \longrightarrow E_0$ existe, para cada $i = 0, \dots, n-1$, un morfismo $v_i : X \longrightarrow E_1$ tal que $q_0 v_i = u_i$ y $q_1 v_i = u_{i+1}$. Entonces

$$d_0 v_i = q_1 v_i = u_{i+1} = q_0 v_{i+1} = d_1 v_{i+1} \quad , \quad 0 \leq i \leq n-2$$

así que, por la propiedad universal de $(E_n; p_0, \dots, p_{n-1})$ como producto $(n-1)$ -fibrado, existe un único morfismo $u: X \longrightarrow E_n$ tal que $p_i u = v_i, 0 \leq i \leq n-1$. Este morfismo verifica

$$\begin{array}{ccc} E_n & \xrightarrow{q_0 \leq \dots \leq q_n} & E_0 \\ u \uparrow & \nearrow u_0 \leq \dots \leq u_n & \\ X & & \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} q_i u = q_0 p_i u = q_0 v_i = u_i, 0 \leq i \leq n-1 \\ q_n u = q_1 p_{n-1} u = q_1 v_{n-1} = u_n \end{array} \right.$$

Si otro morfismo $\bar{u}: X \longrightarrow E_n$ verifica $q_i \bar{u} = u_i, 0 \leq i \leq n$, entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} q_0 p_i \bar{u} = q_i \bar{u} = u_i = q_0 v_i \\ q_1 p_i \bar{u} = q_{i+1} \bar{u} = u_{i+1} = q_i v_i \end{array} \right. \quad (0 \leq i \leq n-1)$$

luego, por la universalidad en el caso $n=1$, es $p_i \bar{u} = v_i, 0 \leq i \leq n-1$, y por tanto $\bar{u} = u$ según la definición de u .

Recíprocamente, los p_i definidos como indica el enunciado (definición válida por ser $q_i \leq q_{i+1}, 0 \leq i \leq n-1$) verifican

$$d_0 p_i = q_{i+1} = d_1 p_{i+1}, 0 \leq i \leq n-2$$

Y estos morfismos $u_0, \dots, u_{n-1}: X \longrightarrow E_1$ verifican las relaciones $d_0 u_i = d_1 u_{i+1}, 0 \leq i \leq n-2$, podemos definir morfismos $v_0, \dots, v_n: X \longrightarrow E_0$ mediante

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0 = d_1 u_0 \\ v_{i+1} = d_0 u_i = d_1 u_{i+1} \\ v_n = d_0 u_{n-1} \end{array} \right. , \quad 0 \leq i \leq n-2$$

Ya que $d_1 \leq d_0$, utilizando la proposición I.2.1 se tiene :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0 = d_1 u_0 \leq d_0 u_0 = v_1 \\ v_{i+1} = d_1 u_{i+1} \leq d_0 u_{i+1} = v_{i+2} \end{array} \right. , \quad 0 \leq i \leq n-2$$

es decir, $v_0 \leq \dots \leq v_n$. Por tanto, según la hipótesis, existe un único morfismo $u: X \rightarrow E_n$ tal que $q_i u = v_i, 0 \leq i \leq n$. Para cada $0 \leq i \leq n-1$ se verifica $d p_i u = \{q_i, q_{i+1}\} u = \{q_i u, q_{i+1} u\} = \{v_i, v_{i+1}\} = \{d_1 u_i, d_0 u_i\} = d u$, y como d es monomorfismo, $p_i u = u_i$. Supongamos finalmente otro morfismo $\bar{u}: X \rightarrow E_n$ tal que $p_i \bar{u} = u_i, 0 \leq i \leq n-1$. Entonces

$$\begin{cases} q_i \bar{u} = d_1 p_i \bar{u} = d_1 u_i = d_1 p_i u = q_i u = v_i, 0 \leq i \leq n-1 \\ q_n \bar{u} = d_0 p_{n-1} \bar{u} = d_0 u_{n-1} = d_0 p_{n-1} u = q_n u = v_n \end{cases}$$

así que $\bar{u} = u$ por el carácter universal de los q_i . $\#$

Proposición I.2.3. - Sea E un grafo interno en $\underline{E}$. Para cada objeto X de $\underline{E}$, la relación $\leq$ en E_0^X es :

- (i) transitiva si E es multiplicativo
- (ii) preorden si E es categoría interna

Demostración : (i) Sean $x \leq y \leq z: X \rightarrow E_0$. Por definición de $\leq$, existen morfismos $u, v: X \rightarrow E_1$ tales que $d_1 u = x, d_0 u = y = d_1 v, d_0 v = z$. Considerando el producto fibrado $d_0 d_2 = d_1 d_0: E_2 \rightarrow E_0$, por ser $d_0 u = d_1 v$, existe un único morfismo $w: X \rightarrow E_2$ tal que $d_0 w = v, d_2 w = u$. Componiendo w con la multiplicación de E obtenemos un morfismo $t = d_1 w: X \rightarrow E_1$ que verifica $d_0 t = d_0 d_1 w = d_0 d_0 w = d_0 v = z, d_1 t = d_1 d_1 w = d_1 d_2 w = d_1 u = x$ así que $x \leq z$.

(ii) Veamos que, gracias a la unidad de E , la relación $\leq$ es también reflexiva. En efecto, dado $x: X \rightarrow E_0$, el morfismo $u = s_0 x: X \rightarrow E_1$ verifica $d_0 u = d_0 s_0 x = x$ y $d_1 u = d_1 s_0 x = x$, así que $x \leq x$. $\#$

Teorema I.2.4. - Sea E un grafo interno en $\underline{E}$ con d monomorfismo. Entonces E es una categoría interna si y sólo si la relación $\leq$ en E_0^X es de preorden para cada objeto X de $\underline{E}$ y existen morfismos $q_0, \dots, q_n: E_n \rightarrow E_0$, para cada $n \geq 1$, universales respecto a la propiedad $q_0 \leq \dots \leq q_n$.

Demostración : Si E es categoría interna la conclusión se sigue de las proposiciones I.2.2 y I.2.3.

Recíproco. La proposición I.2.2 asegura que los E_n son los vértices de la sucesión de productos fibrados asociada al grafo interno E (ver proposición I.1.5, con $E_n = P_{n-1}$). Se cumplen por tanto las relaciones que preceden a la proposición I.2.2. Falta ver que E es categoría interna.

La transitividad del preorden permite definir los d_j mediante diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc}
 E_n & \xrightarrow{q_0 \leq \dots \leq q_n} & E_0 \\
 \uparrow d_j & \nearrow q_0 \leq \dots \leq \hat{q}_j \leq \dots \leq q_{n+1} & \\
 E_{n+1} & &
 \end{array}
 \quad q_i d_j = \begin{cases} q_i, & i < j \quad (0 \leq i \leq n) \\ q_{i+1}, & i \geq j \quad (0 \leq j \leq n+1) \end{cases}$$

En particular se tiene la composición (ver definición I.1.9)

$$\begin{array}{ccc}
 E_1 & \xrightarrow{q_0 \leq q_1} & E_0 \\
 \uparrow d_1 & \nearrow q_0 \leq q_2 & \\
 E_2 & &
 \end{array}
 \quad \begin{cases} d_0 d_1 = q_1 d_1 = q_2 = d_0 d_0 \\ d_1 d_1 = q_0 d_1 = q_0 = d_1 d_2 \end{cases}$$

con la que E es un grafo interno multiplicativo ya que (ver definición I.1.11) $d_1 d_2 = d_1 d_1: E_3 \rightarrow E_1$ por ser d monomorfis-

mo y

$$\begin{cases} d_0 d_1 d_2 = q_2 d_2 = q_3 = q_2 d_1 = d_0 d_1 d_1 \\ d_1 d_1 d_2 = q_0 d_2 = q_0 = q_0 d_1 = d_1 d_1 d_1 \end{cases}$$

La reflexividad del preorden permite definir los s_j mediante diagramas conmutativos ($n > 1$)

$$\begin{array}{ccc} E_n & \xrightarrow{q_0 \leq \dots \leq q_n} & E_0 \\ s_j \uparrow & \nearrow q_0 \leq \dots \leq q_j \leq q_j \leq \dots \leq q_{n-1} & \\ E_{n-1} & & \end{array} \quad q_i s_j = \begin{cases} q_i, i \leq j \quad (0 \leq i \leq n) \\ q_{i-1}, i > j \quad (0 \leq j \leq n-1) \end{cases}$$

y tambien ($n=1$) la unidad (ver definici3n I.1.18)

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{q_0 \leq q_1} & E_0 \\ s_0 \uparrow & \nearrow id \leq id & \\ E_0 & & \end{array} \quad \begin{cases} d_0 s_0 = q_1 s_0 = id \\ d_1 s_0 = q_0 s_1 = id \end{cases}$$

con la que E es una categor3a interna ya que (ver definici3n I.1.20), por ser d monomorfismo,

$$\begin{cases} d_0 d_1 s_0 = q_2 s_0 = q_1 = d_0 \\ d_1 d_1 s_0 = q_0 s_0 = q_0 = d_1 \end{cases}, \quad \text{luego} \quad d_1 s_0 = id.$$

$$\begin{cases} d_0 d_1 s_1 = q_2 s_1 = q_1 = d_0 \\ d_1 d_1 s_1 = q_0 s_1 = q_0 = d_1 \end{cases}, \quad \text{luego} \quad d_1 s_1 = id. \quad \#$$

Se observa que una parte (transitividad) de la demostraci3n del teorema I.2.4 establece un resultado intermedio entre 3ste y la proposici3n I.2.2 que caracteriza los grafos internos multiplicativos.

Ordenes internos

Definición I.2.5..- Un orden interno E en $\underline{E}$ es una categoría interna tal que d es monomorfismo y para cada objeto X de $\underline{E}$ la relación $\leq$ en E_0^X es de orden.

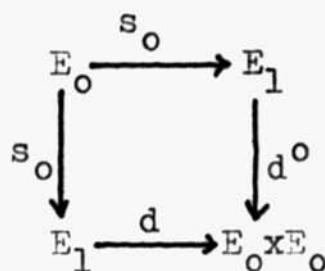
Teorema I.2.6..- Un grafo interno E en $\underline{E}$ es orden interno si y sólo si la relación $\leq$ es de orden en E_0^X para cada objeto X de $\underline{E}$ y existen morfismos $q_0, \dots, q_n: E_n \longrightarrow E_0$, para cada $n \geq 1$, universales respecto a la propiedad $q_0 \leq \dots \leq q_n$.

Demostración : Es consecuencia del teorema I.2.4 y la definición I.2.5. Basta notar que si $q_0 \leq q_1: E_1 \longrightarrow E_0$ son universales entonces d es monomorfismo. En efecto, si $dx=dy: X \longrightarrow E_0 \times E_0$ sea $\{u, v\}$ este morfismo. Ya que $q_0 \leq q_1$, aplicando la proposición I.2.1, resulta $u=d_1x=q_0x \leq q_1x=d_0x=v$; luego la universalidad de $q_0 \leq q_1$ implica la existencia de un morfismo $w: X \longrightarrow E_1$ único tal que $q_0w=u, q_1w=v$. Es pues $x=w=y$. $\#$

Las relaciones que definen la unidad de una categoría interna E en $\underline{E}$ (definición I.1.18) son de la forma $ds_0 = \Delta = d^0s_0$, siendo $\Delta = \{id, id\}$ el monomorfismo diagonal de E_0 y $d^0 = \{d_0, d_1\}$ el morfismo simétrico de $d.d^0$ es monomorfismo si y sólo si lo es d , lo que equivale a decir que la familia $d_0, d_1(q_0, q_1)$ es monomorfa.

Teorema I.2.7..- Una categoría interna E en $\underline{E}$ es un orden interno si y sólo si

- (i) d es monomorfismo
- (ii) El diagrama siguiente es producto fibrado.



Demostración : Sea E un orden interno. Hay que verificar (ii). Siendo el diagrama conmutativo y s_0 monomorfismo, basta probar que dados morfismos $x, y: X \rightarrow E$ tales que $dx = d^0 y$, existe un morfismo $z: X \rightarrow E_0$ tal que $x = s_0 z = y$. La igualdad $dx = d^0 y$ representa un morfismo $z' = \{z_0, z_1\}: X \rightarrow E_0 \times E_0$ que verifica $d_1 x = z_1, d_0 x = z_0, d_1 y = z_0, d_0 y = z_1$, es decir $z_1 \leq z_0$ y $z_0 \leq z_1$, luego $z_0 = z_1$; por tanto z' es de la forma Δz , con $z = z_0 = z_1$. Siendo d monomorfismo, $ds_0 z = \Delta z = dx$ implica $s_0 z = x$, y siendo d^0 monomorfismo, $d^0 s_0 z = \Delta z = d^0 y$ implica $s_0 z = y$.

Recíprocamente, suponiendo (ii) vamos a demostrar la propiedad antisimétrica en cada preorden E_0^X . Dados morfismos $x \leq y \leq x: X \rightarrow E_0$, existen morfismos $u, v: X \rightarrow E_1$ tales que $d^0 v = \{x, y\} = du$, luego existe un morfismo (único) $z: X \rightarrow E_0$ tal que $u = s_0 z = v$, así que $x = d_0 v = d_0 u = y$. $\neq$

En [7] se aplica este teorema al objeto Ω de un topo elemental $\underline{E}$.

Denotaremos por $\text{Ord}(\underline{E})$ a la subcategoría plena de $\text{Cat}(\underline{E})$ cuyos objetos son los órdenes internos.

Corolario 1.2.8. - Existen funtores $\text{Ord}(\underline{E}) \xrightleftharpoons[T]{V} \underline{E}$ tales que:

(i) $VT = \text{Id}$.

(ii) T es adjunto a izquierda de V .

Demostración : Basta restringir los funtores del corelario I.1.28. En efecto, cada categoría interna trivial es un orden interno con $s_0 = \text{id}$ y $d = \Delta = d^0$. #

Proposición I.2.9. - Sea $f: E \longrightarrow F$ un functor interno de $\text{Ord}(E)$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes :

- (i) f es monomorfismo
- (ii) f_0 es monomorfismo
- (iii) f_n es monomorfismo, $n \gg 0$.

Demostración : (i) $\Rightarrow$ (ii). Por el corolario I.2.8, pues $f_0 = vf$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Procederemos por inducción. f_0 es monomorfismo - y, si f_{n-1} es monomorfismo ($n \gg 1$), entonces dados $x, y: X \longrightarrow E_n$

$$f_n x = f_n y \Rightarrow \begin{cases} f_{n-1} d_0 x = d_0 f_n x = d_0 f_n y = f_{n-1} d_0 y \Rightarrow d_0 x = d_0 y \\ f_{n-1} d_n x = d_n f_n x = d_n f_n y = f_{n-1} d_n y \Rightarrow d_n x = d_n y \end{cases}$$

y como la familia $d_0, d_n: E_n \longrightarrow E_{n-1}$ es monomorfa, $x = y$. Luego f_n es monomorfismo.

$$(iii) \Rightarrow (i) \quad fg = fh \Leftrightarrow f_n g_n = f_n h_n, n \gg 0 \Rightarrow g_n = h_n, n \gg 0 \Leftrightarrow g = h. \quad \#$$

Corolario I.2.10. - Sea $f: E \longrightarrow F$ un monomorfismo en $\text{Ord}(E)$. - Cada diagrama ($0 \leq j \leq n \gg 0$)

$$\begin{array}{ccc} E_n & \xrightarrow{s_j} & E_{n+1} \\ f_n \downarrow & & \downarrow f_{n+1} \\ F_n & \xrightarrow{s_j} & F_{n+1} \end{array}$$

es un producto fibrado.

Demostración : Se trata de un diagrama conmutativo de monomorfismos. Por tanto, si $f_{n+1} x = s_j y$, el morfismo $z = d_j x$ verifica

$$s_j f_n z = s_j f_n d_j x = s_j d_j f_{n+1} x = s_j d_j s_j y = s_j y, \text{ luego } f_n z = y$$

$$f_{n+1} s_j z = s_j f_n z = s_j f_n d_j x = s_j d_j f_{n+1} x = s_j d_j s_j y = s_j y = f_{n+1} x, \text{ luego } -$$

$$s_j z = x. \quad \#$$

Desde ahora, la categoría $\underline{E}$ será un topo de conjuntos.

Un conjunto ordenado en $\underline{E}$ es un conjunto X con un subconjunto X_1 de $X \times X$ que cumple, si $x \leq y$ significa $(x, y) \in X_1$,

$$x \leq x$$

$$x \leq y \leq z \Rightarrow x \leq z$$

$$x \leq y \leq x \Rightarrow x = y$$

Llamando d a la inclusión $X_1 \longrightarrow X \times X$, X es un grafo interno en $\underline{E}$ ($X_0 = X$) con d monomorfismo. Para cada $n \geq 1$ es

$$X_n = \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \prod_{i=0}^n X \mid x_i \leq x_{i+1}, 0 \leq i \leq n-1 \right\} \text{ así que denotaremos los elementos de } X_n \text{ por } (x_0 \leq \dots \leq x_n).$$

La propiedad transitiva equivale a una composición $d_1: X_2 \longrightarrow X_1$ mediante $d_1(x \leq y \leq z) = (x \leq z)$ y la reflexiva una unidad $s_0: X \longrightarrow X_1$ mediante $s_0(x) = (x \leq x)$, con lo que X pasa a ser una categoría interna. Los morfismos del objeto simplicial asociado son:

$$d_i: X_n \longrightarrow X_{n-1}, \quad d_i(x_0 \leq \dots \leq x_n) = (x_0 \leq \dots \leq \hat{x}_i \leq \dots \leq x_n)$$

$$s_i: X_n \longrightarrow X_{n+1}, \quad s_i(x_0 \leq \dots \leq x_n) = (x_0 \leq \dots \leq x_i \leq x_i \leq \dots \leq x_n)$$

$$p_i: X_n \longrightarrow X_1, \quad p_i(x_0 \leq \dots \leq x_n) = (x_i \leq x_{i+1})$$

$$q_i: X_n \longrightarrow X, \quad q_i(x_0 \leq \dots \leq x_n) = x_i$$

Una aplicación $f: X \longrightarrow X'$ entre dos conjuntos ordenados es monótona si

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

Las identidades entre conjuntos ordenados son monótonas y la composición de aplicaciones monótonas también lo es, así que los conjuntos ordenados y las aplicaciones monótonas en tre ellos forman una categoría que denotaremos 0.

La propiedad antisimétrica es el producto fibrado del teorema I.2.7, así que un conjunto ordenado X es un orden in terno. Si $f: X \rightarrow X'$ es una aplicación monótona, la restricción de $f \circ f$ a X_1 factoriza a través de X'_1 por lo que f es un func tor interno. La categoría 0 es pues $\text{Ord}(\underline{E})$. La adjunción del corolario I.2.8 es la bien conocida relación entre el functor olvido $V: \underline{0} \rightarrow \underline{E}$ y el functor trivial $T: \underline{E} \rightarrow \underline{0}$ que asocia a cada conjunto el orden " $x \leq y$ si y sólo si $x=y$ ".

Intervalos

Definición I.2.11. - Un subconjunto U de un conjunto ordenado X se llama :

- (i) sección superior si $x \leq y \wedge x \in U \Rightarrow y \in U$
- (ii) sección inferior si $x \leq y \wedge y \in U \Rightarrow x \in U$
- (iii) intervalo si $x \leq y \leq z \wedge x \in U \wedge z \in U \Rightarrow y \in U$

Toda sección superior o inferior es intervalo. X y $\emptyset$ son secciones superiores e inferiores, luego también intervalos.

Proposición I.2.12. - Un subconjunto U de un conjunto ordena do X es intervalo si y sólo si es intersección de una sec ción superior y una sección inferior.

Demostración : Si U es intervalo, sean los subconjuntos

$$A = \{ x \in X \mid \exists y \in U, y \leq x \}, B = \{ x \in X \mid \exists y \in U, x \leq y \}$$

Es claro que A es sección superior y B sección inferior, así como que $U \subseteq A \cap B$. Para ver el contenido inverso, sea $y \in A \cap B$; como $y \in A$ existe $x \in U$ tal que $x \leq y$, y como $y \in B$ existe $z \in U$

tal que $y \leq z$. Aplicando la definición de intervalo a la cadena $x \leq y \leq z$ resulta que $y \in U$.

Recíprocamente, si es $U = A \cap B$ siendo A sección superior y B sección inferior, entonces para cada cadena $x \leq y \leq z$ de X con $x, z \in U$ se tiene

$$\left. \begin{array}{l} x \leq y \wedge x \in A \Rightarrow y \in A \\ y \leq z \wedge z \in B \Rightarrow y \in B \end{array} \right\} \text{ luego } y \in U. \quad \#$$

Es fácil comprobar que la intersección y la unión de secciones superiores o secciones inferiores es de nuevo una sección superior o inferior respectivamente. Los intervalos se comportan igual respecto a las intersecciones pero no respecto a las uniones. Los teoremas siguientes caracterizan las uniones finitas de intervalos.

Teorema I.2.13. - Un subconjunto U de un conjunto ordenado X es unión de k intervalos si y sólo si para cada cadena $x_0 \leq \dots \leq x_{2k}$ de X se verifica

$$x_0 \in U \wedge x_2 \in U \wedge \dots \wedge x_{2k} \in U \Rightarrow x_1 \in U \vee x_3 \in U \vee \dots \vee x_{2k-1} \in U$$

Demostración : Sea $U = T_1 \cup \dots \cup T_k$, siendo cada T_i intervalo.

Dada una cadena $x_0 \leq \dots \leq x_{2k}$ en X, al menos dos elementos de la forma x_{par} están en un mismo T_i (pues hay k intervalos y $k+1$ elementos en la cadena con subíndice par), luego el x_{impar} intermedio está en T_i , es decir, en U.

Recíprocamente, si U verifica la condición enunciada, sean los conjuntos ($i=1, \dots, k$)

$$T_i = \{ x \in U \mid x_0 \leq \dots \leq x_{2k} \wedge x_{\text{par}} \in U \wedge x_{2i} = x \Rightarrow x_{2i-1} \in U \}$$

Es claro que $U = T_1 \cup \dots \cup T_k$, y hay que demostrar que cada T_i es un intervalo. Sea una cadena $x \leq y \leq z$ en X con $x, z \in T_i$. Construimos la cadena

$$x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{2i-2} \leq y \leq z \leq z_{2i+1} \leq \dots \leq z_{2k}$$

en la que todos los x_j son iguales a x y todos los z_j a z . Cada elemento con subíndice par está en U (por estar en T_i) y el que ocupa la posición $2i$ es $z \in T_i$, luego $y \in U$ según la definición de T_i . Sea ahora una cadena $y_0 \leq \dots \leq y_{2k}$ con cada $y_{\text{par}} \in U$ e $y_{2i} = y$. Si demostramos que $y_{2i-1} \in U$ entonces $y \in T_i$. En efecto, se tiene la cadena

$$y_0 \leq \dots \leq y_{2i-1} \leq z \leq z_{2i+1} \leq \dots \leq z_{2k}$$

con todos los z_j iguales a z . Sus elementos pares están en U y el $2i$ es $z \in T_i$, luego $y_{2i-1} \in U$. Por tanto $y \in T_i$ y T_i es intervalo. #

Teorema I.2.14. - Un subconjunto U de un conjunto ordenado es unión de k intervalos y una sección superior si y sólo si para cada cadena $x_0 \leq \dots \leq x_{2k+1}$ de X se verifica

$$x_0 \in U \wedge x_2 \in U \wedge \dots \wedge x_{2k} \in U \Rightarrow x_1 \in U \vee x_3 \in U \vee \dots \vee x_{2k+1} \in U$$

Demostración : Sea $U = T_1 \cup \dots \cup T_k \cup A$, con cada T_i intervalo y A sección superior. Dada una cadena $x_0 \leq \dots \leq x_{2k+1}$ de X con cada $x_{\text{par}} \in U$, si algún x_{par} está en A , x_{2k+1} está en A , luego $x_{2k+1} \in U$, y si cada x_{par} está en $T_1 \cup \dots \cup T_k$ entonces (teorema I.2.13) algún x_{impar} está en $T_1 \cup \dots \cup T_k$, luego en U .

Para demostrar el recíproco definimos los conjuntos

$$T_i = \{ x \in U \mid x_0 \leq \dots \leq x_{2k+1} \wedge x_{\text{par}} \in U \wedge x_{2i} = x \Rightarrow x_{2i-1} \in U \}$$

con $i=1, \dots, k, y$

$$A = \{ x \in U \mid x_0 \leq \dots \leq x_{2k+1} \wedge x_{\text{par}} \in U \wedge x_{2k} = x \Rightarrow x_{2k+1} \in U \}$$

Es claro que $U = T_1 \cup \dots \cup T_k \cup A$. Procediendo como en el teorema

I.2.13 se prueba que cada T_i es intervalo. Para verificar -
que A es sección superior consideremos una cadena $y \leq x$ con
 $y \in A$ y deduzcamos que $x \in A$. Primero habrá que probar que -
 $x \in U$: la cadena $y_0 \leq \dots \leq y_{2k} \leq x$ con cada y_i igual a y prueba,
según la definición de A , que en efecto x está en U . Sea aho-
ra una cadena $x_0 \leq \dots \leq x_{2k+1}$ con $x_{\text{par}} \in U$ y $x_{2k} = x$, de manera
que se tendrá $x \in A$ si demostramos que $x_{2k+1} \in U$. De la cadena
 $y_0 \leq \dots \leq y_{2k} \leq x_{2k+1}$, que tiene cada elemento y_i igual a y , se
sigue, según la definición de A , que en efecto x_{2k+1} está en U . #

Teorema I.2.15. - Un subconjunto U de un conjunto ordenado -
 X es unión de k intervalos y una sección inferior si y sólo
si para cada cadena $x_0 \leq \dots \leq x_{2k+1}$ de X se verifica

$$x_1 \in U \wedge x_3 \in U \wedge \dots \wedge x_{2k+1} \in U \Rightarrow x_0 \in U \vee x_2 \in U \vee \dots \vee x_{2k} \in U.$$

Demostración : Es tan similar a la del teorema I.2.14 que -
no la vamos a detallar. Los elementos de la descomposición -
 $U = B \cup T_1 \cup \dots \cup T_k$ son ahora

$$T_i = \{ x \in U \mid x_0 \leq \dots \leq x_{2k+1} \wedge x_{\text{impar}} \in U \wedge x_{2i+1} = x \Rightarrow x_{2i} \in U \}$$

y

$$B = \{ x \in U \mid x_0 \leq \dots \leq x_{2k+1} \wedge x_{\text{impar}} \in U \wedge x_1 = x \Rightarrow x_0 \in U \}. \#$$

Terminaremos el estudio de las uniones de intervalos ca

racterizándolas en función del objeto simplicial asociado - al conjunto ordenado X . Como en los próximos capítulos sólo nos va a interesar el caso en que X es finito, nos limitaremos a este caso con la ventaja de poder usar sin restricciones los conjuntos complementarios.

Corolario I.2.16. - Un subconjunto U de un conjunto ordenado finito X es unión de k intervalos si y sólo si las proyecciones simpliciales $q_0, \dots, q_{2k}: X_{2k} \rightarrow X$ verifican

$$q_0^{-1}(U) \cap q_1^{-1}(U) \cap \dots \cap q_{2k-1}^{-1}(U) \cap q_{2k}^{-1}(U) = \emptyset$$

Demostración : Es claro que la caracterización del teorema I.2.13 se expresa en la forma

$$q_0^{-1}(U) \cap q_2^{-1}(U) \cap \dots \cap q_{2k}^{-1}(U) \subseteq q_1^{-1}(U) \cup q_3^{-1}(U) \cup \dots \cup q_{2k-1}^{-1}(U)$$

que equivale a la expresión del enunciado tomando complementarios. $\#$

De manera análoga se demuestran los siguientes corolarios de los teoremas I.2.14 y I.2.15 respectivamente.

Corolario I.2.17. - Un subconjunto U de un conjunto ordenado finito X es unión de k intervalos y una sección superior si y sólo si las proyecciones simpliciales $q_0, \dots, q_{2k+1}: X_{2k+1} \rightarrow X$ verifican

$$q_0^{-1}(U) \cap q_1^{-1}(U) \cap \dots \cap q_{2k}^{-1}(U) \cap q_{2k+1}^{-1}(U) = \emptyset. \#$$

Corolario I.2.18. - Un subconjunto U de un conjunto ordenado finito X es unión de k intervalos y una sección inferior si y sólo si las proyecciones simpliciales $q_0, \dots, q_{2k+1}: X_{2k+1} \rightarrow X$

verifican

$$cq_0^{-1}(U) \cap q_1^{-1}(U) \cap \dots \cap cq_{2k}^{-1}(U) \cap q_{2k+1}^{-1}(U) = \emptyset. \quad \#$$

§3. Dimensión.-

El concepto de dimensión de un conjunto ordenado que de sarrollaremos es el de [4]. En [6] y [31] puede verse otro concepto diferente de dimensión para conjuntos ordenado.

En [4] la dimensión de un conjunto ordenado es la longitud de la mayor cadena no degenerada, esto es, de la mayor cadena que tiene todos sus elementos distintos. Por ser nega tivo, este concepto no es válido para una teoría constructiva. La definición que damos a continuación es una versión - constructiva debida a A. Kock.

Definición I.3.1.- Un conjunto ordenado X tiene dimensión - menor o igual que $n \in \mathbb{N}$, $\dim X \leq n$, si cada cadena $(x_0 \leq \dots \leq x_{n+1})$ de X_{n+1} es degenerada. Y es $\dim X = n$ si $\dim X \leq n$ y existe una cadena $(x_0 \leq \dots \leq x_n) \in X_n$ no degenerada.

El teorema siguiente caracteriza $\dim X$ en términos del objeto simplicial asociado. Se denota con $\coprod E$ el coproducto (unión disjunta) de n copias del conjunto E .

Teorema I.3.2.- Sea X un conjunto ordenado. Las afirmaciones siguientes son equivalentes :

- (i) $\dim X \leq n$
- (ii) $X_{n+1} = \bigcup_{i=0}^n \text{Im}(s_i)$
- (iii) $\langle s_0, \dots, s_n \rangle : \coprod_{n+1} X_n \longrightarrow X_{n+1}$ es suprayectiva.

Demostración : (i) $\Rightarrow$ (ii) Sea $(x_0 \leq \dots \leq x_{n+1}) \in X_{n+1}$. Por hipótesis existe i tal que $0 \leq i \leq n, x_i = x_{i+1}$, luego se tiene

$$(x_0 \leq \dots \leq x_{n+1}) = s_i(x_0 \leq \dots \leq \hat{x}_{i+1} \leq \dots \leq x_{n+1})$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Para cada $x \in X_{n+1}$ es $x = s_i(y)$ para algún $y \in X_n$ y algún i ente 0 y n , luego $x = s_i(y) = \langle s_0, \dots, s_n \rangle (y, i)$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) son demostraciones análogas. $\#$

Corolario I.3.3. - Sea X un conjunto ordenado. Las afirmaciones siguientes son equivalentes :

- (i) $\dim X = 0$.
- (ii) X tiene orden trivial.
- (iii) Cada subconjunto de X es sección superior.
- (iv) Cada subconjunto de X es sección inferior.

Demostración : $\dim X = 0 \Leftrightarrow s_0: X \longrightarrow X_1$ suprayectiva $\Leftrightarrow (x \leq y \Rightarrow x = y)$. $\#$

Para extender esta caracterización de $\dim X = 0$ mediante intervalos a dimensión arbitraria nos vamos a restringir a conjuntos ordenados finitos por las razones ya dadas en §2.

Teorema I.3.4. - Sea X un conjunto ordenado finito. Las afirmaciones siguientes son equivalentes :

- (i) $\dim X \leq 2n$
- (ii) Cada subconjunto $U \subseteq X$ es unión de n intervalos y una sección superior.
- (iii) Cada subconjunto $U \subseteq X$ es unión de n intervalos y una sección inferior.

Demostración : (i) $\Rightarrow$ (ii) Sea $U \subseteq X$. Si una cadena $x_0 \leq \dots \leq x_{2n+1}$ de X tiene todos los x_{2k} en U , por ser $\dim X \leq 2n$ existe $0 \leq i \leq 2n$ tal que $x_i = x_{i+1}$, así que algún x_{2k+1} está en U . Por

tanto, según el teorema I.2.14, se verifica la tesis.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sea $U \subseteq X$. Las proyecciones simpliciales $q_0, \dots, q_{2k+1}: X_{2k+1} \longrightarrow X$ verifican, según el corolario I.2.17 aplicado, en virtud de la hipótesis, a cU , la igualdad

$$q_0^{-1}(cU) \cap q_1^{-1}(cU) \cap \dots \cap q_{2n+1}^{-1}(cU) = \emptyset$$

es decir

$$c q_0^{-1}(U) \cap q_1^{-1}(U) \cap \dots \cap q_{2n+1}^{-1}(U) = \emptyset$$

lo que significa, según el corolario I.2.18 la tesis.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sea una cadena $x_0 \leq \dots \leq x_{2n+1}$ de X y consideremos el conjunto $U = \{x \in X \mid \exists k, 0 \leq k \leq n, x = x_{2k+1}\}$, así que todos los x_{2k+1} están en U . Si, en virtud de la hipótesis, aplicamos a U el teorema I.2.15 resulta que algún x_{2i} está en U o $0 \leq i \leq n$, luego $x_{2i} = x_{2i-1}$ ó x_{2i+1} y por tanto $\dim X \leq 2n$. #

Teorema I.3.5. - Sea X un conjunto ordenado finito. Las afirmaciones siguientes son equivalentes :

- (i) $\dim X \leq 2n+1$
- (ii) Cada subconjunto $U \subseteq X$ es unión de $n+1$ intervalos.

Demostración : Se procede como en el teorema I.3.4 pero utilizando ahora el teorema I.2.13. #

Aplicaciones monótonas

Sea $f: X' \longrightarrow X$ una aplicación monótona entre conjuntos ordenados. En el conjunto X' definimos una nueva relación $\leq_f$ mediante

$$x' \leq_f y' \Leftrightarrow x' \leq y' \wedge f(x') = f(y').$$

Es fácil observar que $\leq_f$ es una relación de orden en X' , obteniéndose así un nuevo conjunto ordenado que denotaremos X'_f . El orden de X'_f se obtiene a partir del original de X' su primiendo las relaciones entre elementos de distinta fibra. La aplicación identidad $X'_f \longrightarrow X'$ es monótona. En particular, tomando $f = \text{id}: X \longrightarrow X$ resulta que X_{id} es el orden trivial de X , es decir, el conjunto subyacente considerado como orden.

Proposición I.3.6. - Dada una aplicación monótona $f: X' \longrightarrow X$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X'_f & \xrightarrow{f} & X_{\text{id}} \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ X' & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

es un producto fibrado en $\underline{0}$.

Demostración : Las cuatro aplicaciones son monótonas ($f: X'_f \longrightarrow X_{\text{id}}$ puesto que $x' \leq_f y' \Rightarrow f(x') = f(y')$) y el diagrama es evidentemente conmutativo. Sean ahora dos aplicaciones monótonas $g: Z \longrightarrow X_{\text{id}}, h: Z \longrightarrow X'$ tales que $fh = g$. Por ser el orden de X_{id} trivial, $z \leq z'$ implica $g(z) = g(z')$, así que $h(z) \leq h(z')$ implica $fh(z) = fh(z')$ y por tanto $h(z) \leq_f h(z')$. Luego h factoriza a través de X'_f . $\#$

Definición I.3.7. - Llamaremos dimensión de una aplicación monótona $f: X' \longrightarrow X$ a la dimensión del conjunto ordenado X'_f .

$$\dim f = \dim X'_f$$

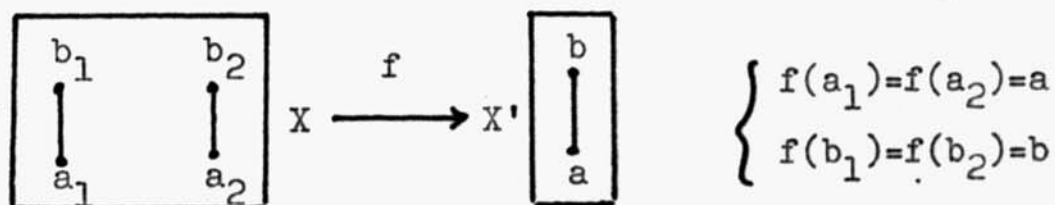
La dimensión de f es pues el supremo de las dimensiones de las fibras. Si X es finito, $\dim f = \max \{ \dim f^{-1}(x); x \in X \}$. Es claro que $\dim f \leq \dim X'$.

Corolario I.3.8. - Si f es una aplicación monótona inyectiva,

entonces $\dim f = 0$.

Demostración : De la proposición I.3.6 se sigue que $f: X' \rightarrow X$ monomorfismo implica $f: X'_f \rightarrow X_{id}$ monomorfismo, y por ser el orden X_{id} trivial, esto implica que X'_f también es trivial, luego $\dim f = \dim X'_f = 0$ según el corolario I.3.3. #

El recíproco del corolario I.3.8 no es cierto. En el ejemplo siguiente f no es monomorfismo pero $\dim f = 0$, siendo por tanto X'_f el olvido de X' con el orden trivial.



Teorema I.3.9. - Si $f: X' \rightarrow X$ es una aplicación monótona y las dimensiones de X y X' son finitas, entonces

$$\dim X' \leq \dim X \cdot \dim f + \dim X + \dim f.$$

Demostración : Sea $\dim X = n, \dim X' = n', \dim f = d$. En X' existe entonces una cadena no degenerada $x'_0 \leq \dots \leq x'_{n'}$, que se descompondrá en X'_f en cadenas de la forma

$$\begin{array}{ll} x'_0 \leq_f \dots \leq_f x'_{i_1} & f(x'_j) = x_0, \quad 0 \leq j \leq i_1 \\ x'_{i_1} \leq_f \dots \leq_f x'_{i_2} & f(x'_j) = x_1, \quad i_1 \leq j \leq i_2 \\ \vdots & \vdots \\ x'_{i_k} \leq_f \dots \leq_f x'_{n'} & f(x'_j) = x_k, \quad i_k \leq j \leq n' \end{array}$$

cada una de las cuales es del tipo $y'_0 \leq \dots \leq y'_h$, con $h \leq d$. La cadena imagen $x_0 \leq \dots \leq x_k$ tendrá a lo sumo $n+1$ elementos. Por tanto, comparando las longitudes de las cadenas anteriores -

se tiene que $n'+1 \leq (n+1)(d+1)$, es decir, $n' \leq nd + n + d$.

Como caso particular, si $\dim f = 0$ (por ejemplo si f es inyectiva) entonces $\dim X' \leq \dim X$, y si $\dim f = 1$ entonces $\dim X' \leq 2\dim X + 1$.

CAPITULO II

RETICULOS

Trabajaremos en un topo de conjuntos E. Un retículo será lo que habitualmente se conoce como retículo distributivo - con 0 y 1, ya que no los utilizaremos de otro tipo más general. Los resultados elementales sobre retículos que usaremos sin demostración pueden encontrarse en [2], [4] o [9]. Los resultados generales de teorías algebraicas (finitamente presentadas) que aplicaremos a los retículos y a las álgebras de Boole pueden verse en [10] o [22].

§1. Las categorías D y B.

Un retículo es un conjunto D con operaciones

$$\begin{array}{llll} \wedge : D \times D \longrightarrow D & \text{m} & (x, y) \longmapsto x \wedge y \\ \vee : D \times D \longrightarrow D & \text{m} & (x, y) \longmapsto x \vee y \\ 0 : 1 \longrightarrow D & \text{m} & 0 \longmapsto 0 \\ 1 : 1 \longrightarrow D & \text{m} & 0 \longmapsto 1 \end{array}$$

que verifican los axiomas

(idempotencia)	$x \wedge x = x$	,	$x \vee x = x$
(conmutatividad)	$x \wedge y = y \wedge x$	,	$x \vee y = y \vee x$
(asociatividad)	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$		$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
(absorción)	$x \wedge (x \vee y) = x$	,	$x \vee (x \wedge y) = x$
(distributividad)	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$		$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
(cero)	$x \wedge 0 = 0$	,	$x \vee 0 = x$
(uno)	$x \wedge 1 = x$	,	$x \vee 1 = 1$

Un morfismo de retículos $f:D \longrightarrow D'$ es una aplicación - que conmuta con las operaciones reticulares:

$$\begin{aligned} f(x \wedge y) &= f(x) \wedge f(y) & f(0) &= 0 \\ f(x \vee y) &= f(x) \vee f(y) & f(1) &= 1 \end{aligned}$$

Sea $\underline{D}$ la categoría de los retículos y sus morfismos. Es una categoría (algebraica sobre $\underline{E}$) con un functor olvido - (algebraico) $\underline{D} \longrightarrow \underline{E}$ y su correspondiente adjunto a izquierda, el functor libre $\underline{E} \longrightarrow \underline{D}$.

Un álgebra de Boole es un conjunto B con las cuatro operaciones reticulares y otra operación

$$\neg : B \longrightarrow B \quad m \quad x \longmapsto \neg x$$

que verifican los axiomas de retículo y el nuevo axioma - (complementación) $x \wedge \neg x = 0$, $x \vee \neg x = 1$

Un morfismo de álgebras de Boole $f:B \longrightarrow B'$ es una aplicación que conmuta con las operaciones reticulares y con la nueva operación

$$f(\neg x) = \neg f(x)$$

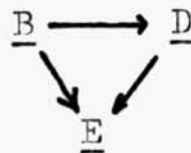
Sea $\underline{B}$ la categoría de las álgebras de Boole y sus morfismos. Es una categoría (algebraica sobre $\underline{E}$) con un functor olvido $\underline{B} \longrightarrow \underline{E}$ y su adjunto a izquierda el functor libre - $\underline{E} \longrightarrow \underline{B}$.

Por ser $\underline{D}$ y $\underline{B}$ algebraicas, tienen límites y colímites y los respectivos funtores olvido crean y conservan colímites. Además, cada objeto de $\underline{D}$ o $\underline{B}$ es un colímite (límite inductivo) filtrante de subálgebras de presentación finita, es decir, cocientes de álgebras libres sobre un conjunto finito por el ideal engendrado por un número finito de relaciones.

El functor olvido $\underline{B} \longrightarrow \underline{D}$ tiene las propiedades siguien-

tes:

- (i) Es inyectivo, pues la complementación en un retículo es, si existe, única.
- (ii) Es pleno y fiel, pues un morfismo de retículos conserva, si existe, la complementación.
- (iii) Es algebraico, pues (ver el "teorema del bocadillo" de) si existe un diagrama conmutativo de funtores (los olvido)



con $\underline{D} \longrightarrow \underline{E}$ algebraico y en $\underline{B}$ hay coigualadores, entonces $\underline{B} \longrightarrow \underline{D}$ es algebraico si lo es $\underline{B} \longrightarrow \underline{E}$.

Por ser el olvido $\underline{B} \longrightarrow \underline{D}$ pleno, fiel e inyectivo, $\underline{B}$ puede considerarse como subcategoría de $\underline{D}$ y así haremos en lo sucesivo. Un morfismo de álgebras de Boole es simplemente un morfismo de retículos. En particular, $2 = \{0, 1\}$ es el retículo inicial en $\underline{D}$ y como es álgebra de Boole es también objeto inicial en $\underline{B}$. En ambas categorías, 2 es el álgebra libre engendrada por $\emptyset$.

Además, por ser el olvido algebraico, $\underline{B}$ es una subcategoría reflexiva de $\underline{D}$ con reflector el functor libre $B: \underline{D} \longrightarrow \underline{B}$. Como la subcategoría es también plena y fiel, la counidad de la reflexión es isomorfismo (ver [21]); es decir, para cada álgebra de Boole B es $B \cong B(B)$.

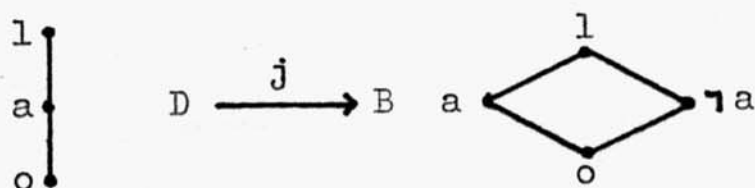
Para cada retículo D , el álgebra de Boole libre $B(D)$ tiene por elementos clases de equivalencia de expresiones de la forma

$$\bigvee_{i=1}^m x_i \wedge \neg y_i, \quad x_i, y_i \in D, \quad 1 \leq i \leq m$$

respecto a la congruencia engendrada por todas las igualdades válidas en D y las de la forma $x \wedge 1 x=0, x \vee 1 x=1$. La unidad de la adjunción determina una inclusión canónica

$$j:D \longrightarrow B(D) \quad m \quad x \longmapsto j(x)=x \wedge 1 0$$

que es monomorfismo (es decir, morfismo inyectivo) por lo - que se considerará D como subretículo de $B(D)$. Además j es - epimorfismo, pero en general no es un morfismo suprayectivo (salvo que D sea álgebra de Boole). En el ejemplo siguiente, D es el retículo libre engendrado por $\{a\}$, B el álgebra li- bre engendrada por $\{a\}$, es $B=B(D)$ y la inclusión j no es su prayectiva.



Proposición II.1.1. - El functor libre $B:\underline{D} \longrightarrow \underline{B}$ verifica :

- (i) Conserva colímites (en particular epimorfismos)
- (ii) Conserva y refleja monomorfismos
- (iii) Cada unidad $j:D \longrightarrow B(D)$ es monomorfismo y epimorfismo.

Demostración : (i) Es consecuencia de la adjunción con el - olvido. (ii) Sea $f:D \longrightarrow D'$ un morfismo en $\underline{D}$ y $f^*:B \longrightarrow B'$ su - imagen por B . Hay que probar que

$$f \text{ monomorfismo} \iff f^* \text{ monomorfismo}$$

($\Rightarrow$) Sea $u = \bigvee_{i=1}^m x_i \wedge 1 y_i$ un elemento arbitrario de B . Es

$$f^*(u) = \bigvee_{i=1}^m f^*(x_i \wedge 1 y_i) = \bigvee_{i=1}^m f(x_i) \wedge 1 f(y_i)$$

así que

$$\begin{aligned}
 f^*(u)=0 &\Leftrightarrow f(x_i) \wedge f(y_i)=0, 1 \leq i \leq m \\
 &\Leftrightarrow f(x_i) \wedge f(y_i)=f(x_i), 1 \leq i \leq m \\
 (f \text{ monomorfismo}) &\Leftrightarrow x_i \wedge y_i = x_i, 1 \leq i \leq m \\
 &\Leftrightarrow x_i \wedge y_i = 0, 1 \leq i \leq m
 \end{aligned}$$

es decir, $u=0$. Luego f^* es monomorfismo.

($\Leftarrow$) Si $f(x)=f(y)$, entonces, por ser f^* monomorfismo, $f^*(x \wedge y)=f(x) \wedge f(y)=f(x) \wedge f(x)=0 \Rightarrow x \wedge y=0$. Análogamente se prueba que $x \vee y=1$, así que $x=y$. (iii) Es claro que j es monomorfismo. Para ver que es epimorfismo, sean morfismos $g, h: B(D) \rightarrow D'$ en $\underline{D}$ tales $gj=hj$. Si $j': D' \rightarrow B(D')$ es la unidad correspondiente al retículo D' , sean los morfismos $\bar{g}=j'g, \bar{h}=j'h$. Se tiene $\bar{g}j=\bar{h}j$ y como $\bar{g}, \bar{h}$ están en $\underline{B}$, es $\bar{g}=\bar{h}$. Finalmente, por ser j' monomorfismo, es $g=h$. #

En el álgebra de Boole libre $B(D)$ engendrada por un retículo D se plantea el problema de la palabra: determinar en un número finito de pasos si dos expresiones

$$\bigvee_{i=1}^m x_i \wedge y_i, \quad x_i, y_i \in D, 1 \leq i \leq m$$

$$\bigvee_{j=1}^n x'_j \wedge y'_j, \quad x'_j, y'_j \in D, 1 \leq j \leq n$$

representan el mismo elemento de $B(D)$. Vamos a reducir este problema al análogo en D . En cada retículo D se tiene una relación de orden $x \leq y$ definida por $x \wedge y = x$ (o equivalentemente $x \vee y = y$) así que, por la antisimetría, existe un método finito para decidir la igualdad en D si y sólo si tal método existe para decidir el orden.

Teorema II.1.2. - Sea D un retículo y

$$u = \bigvee_{i=1}^m x_i \wedge y_i, \quad u' = \bigvee_{j=1}^n x'_j \wedge y'_j$$

dos elementos de $B(D)$. Entonces es $u \leq u'$ si y sólo si

$$x_i \wedge \bigwedge_{j \notin H} y'_j \leq \bigvee_{j \in H} x'_j \vee y_i, 1 \leq i \leq m, H \subseteq \{1, \dots, n\}$$

Demostración : Por la propiedad distributiva, es

$$u' = \bigwedge_H \left[\left(\bigvee_{j \in H} x'_j \right) \vee \left(\bigwedge_{j \notin H} y'_j \right) \right] = \bigwedge_H \left[\left(\bigvee_{j \in H} x'_j \right) \vee \bigwedge_{j \notin H} y'_j \right]$$

donde H recorre los subconjuntos de $\{1, \dots, n\}$. Por tanto, $u \leq u'$ equivale a

$$x_i \wedge y_i \leq \left(\bigvee_{j \in H} x'_j \right) \wedge \bigwedge_{j \notin H} y'_j, 1 \leq i \leq m, H \subseteq \{1, \dots, n\}$$

Finalmente, la tesis se sigue de la siguiente equivalencia, válida en cada álgebra de Boole :

$$a \wedge b \leq c \wedge d \Leftrightarrow a \wedge d \leq b \vee c$$

Para demostrar esta equivalencia usaremos otra elemental - bien conocida : $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$. Entonces: $a \wedge b \leq c \wedge d \Leftrightarrow a \wedge b \wedge (c \wedge d) = a \wedge b \wedge c \wedge d = 0 \Leftrightarrow a \wedge d \wedge (b \vee c) = 0 \Leftrightarrow a \wedge d \leq b \vee c$. #

Este teorema nos dice que la desigualdad en $B(D)$ equivale a $m2^n$ desigualdades en D, así que la igualdad en $B(D)$ equivale a $m2^n$ igualdades en D. Dicho de otro modo, $B(D)$ es un conjunto discreto (i.e.: la diagonal de $B(D) \times B(D)$ es un subconjunto complementado) si y sólo si D es un conjunto discreto.

Epimorfismos universales.

Dados un retículo D y un elemento $u \in D$, vamos a definir epimorfismos $f: D \rightarrow D'$ universales respecto a las propiedades " $f(u)=1$ ", " $f(u)=0$ " y " $f(u)$ tiene complementario".

Teorema II.1.3. - Sea D un retículo y $u \in D$. Existe un morfismo suprayectivo $p: D \rightarrow D_{\leq u}$ tal que $p(u)=1$ y que cada morfismo $f: D \rightarrow D'$ tal que $f(u)=1$ factoriza a través de p .



Demostración : Sea $D_{\leq u} = \{x \in D \mid x \leq u\}$ y sea

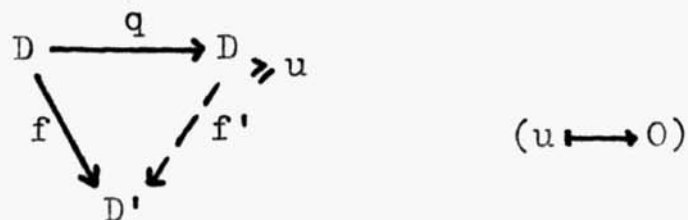
$$p: D \rightarrow D_{\leq u} \quad m \quad x \mapsto p(x) = x \wedge u$$

$D_{\leq u}$ es un retículo con las operaciones de D , salvo que el uno es ahora u . Ya que $p(u) = u \wedge u = u = 1$, es claro que p es un morfismo, y para cada $x \leq u$ es $p(x) = x$, así que p es suprayectiva.

Si $f: D \rightarrow D'$ es un morfismo tal que $f(u)=1$, la restricción f' de f a $D_{\leq u}$ es un morfismo, y para cada $x \in D$ es $f'p(x) = f'(x \wedge u) = f(x \wedge u) = f(x) \wedge f(u) = f(x) \wedge 1 = f(x)$, así que $f'p = f$. #

Nótese que la inclusión $D_{\leq u} \rightarrow D$ es un morfismo si y sólo si $u=1$, y que entonces y sólo entonces p es isomorfismo. También que la factorización f' de f a través de p es única por ser p epimorfismo.

Teorema II.1.4. - Sea D un retículo y $u \in D$. Existe un morfismo suprayectivo $q: D \longrightarrow D_{\geq u}$ tal que $q(u)=0$ y que cada morfismo $f: D \longrightarrow D'$ tal que $f(u)=0$ factoriza a través de q .

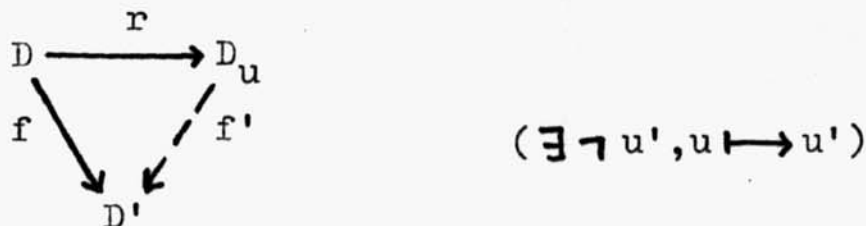


Demostración : Este teorema es dual del anterior, así que basta ahora notar que es $D_{\geq u} = \{x \in D \mid x \geq u\}$ y

$$q: D \longrightarrow D_{\geq u} \quad m \quad x \longmapsto q(x) = x \vee u. \quad \#$$

Las notas al teorema II.1.3 se repiten dualizándolas para el II.1.4.

Teorema II.1.5. - Sea D un retículo y $u \in D$. Existe un morfismo $r: D \longrightarrow D_u$ tal que $r(u)$ tiene complementario y que cada morfismo $f: D \longrightarrow D'$ tal que $f(u)$ tiene complementario factoriza a través de r de manera única.



Demostración : Sea $D = D_{\leftarrow u} \times D_{\geq u}$ y $r = \{p, q\}$, es decir,

$$r(x) = (x \wedge u, x \vee u)$$

Es claro que r es morfismo y que $r(u) = (1, 0)$ siendo $\neg r(u) = (0, 1)$.

Si $f:D \longrightarrow D'$ es un morfismo tal que existe $\neg f(u)$, definimos una aplicación $f':D_u \longrightarrow D'$ mediante

$$f'(x,y)=f(x) \vee [f(y) \wedge \neg f(u)]$$

Se verifica :

- (i) $f'(0,0)=0$ y $f'(1,1)=1$.
- (ii) $f'[(x,y) \vee (x',y')] = f'(x \vee x', y \vee y') = f(x \vee x') \vee [f(y \vee y') \wedge \neg f(u)] = f(x) \vee f(x') \vee [f(y) \wedge \neg f(u)] \vee [f(y') \wedge \neg f(u)] = f'(x,y) \vee f'(x',y')$.
- (iii) Ya que $(x,y) \in D_u$, es $x \leq u \leq y$, luego $f(x) \vee f(y) = f(x \vee y) = f(y)$ y en consecuencia

$$f'(x,y)=f(y) \wedge [f(x) \vee \neg f(u)]$$

Operando con esta expresión de f' como se ha hecho en (ii) con la inicial, se obtiene $f'[(x,y) \wedge (x',y')] = f'(x,y) \wedge f'(x',y')$.

$$\begin{aligned} \text{(iv)} \quad f'r(x) &= f'(x \wedge u, x \vee u) = f(x \wedge u) \vee [f(x \vee u) \wedge \neg f(u)] = \\ &= [f(x) \wedge f(u)] \vee [f(x) \wedge \neg f(u)] \vee [f(u) \wedge \neg f(u)] = \\ &= f(x) \wedge [f(u) \wedge \neg f(u)] = f(x). \end{aligned}$$

Luego f' es un morfismo tal que $f'r=f$. Para ver la unicidad de f' basta notar que cada $(x,y) \in D_u$ es una combinación booleana de elementos de la imagen de r . En efecto,

$$(x,y) = (x,0) \vee [(1,y) \wedge (0,1)] = r(x) \vee [r(y) \wedge \neg r(u)].$$

Por tanto, si f'' es un morfismo tal que $f''r=f$, se tiene

$$f''(x,y) = f(x) \vee [f(y) \wedge \neg f(u)] = f'(x,y)$$

así que $f''=f'$. $\#$

Corolario II.1.6. - Sea D un retículo, $u \in D$ y $r:D \longrightarrow D_u$ el morfismo del teorema II.1.5. Se verifica :

- (i) r es monomorfismo y epimorfismo
- (ii) r es isomorfismo si y sólo si u tiene complementario.

(iii) $B(D) \cong B(D_u)$.

Demostración : (i) $r(x)=r(y)$ quiere decir que $x \wedge u = y \wedge u$ y $x \vee u = y \vee u$, así que entonces $x = x \wedge (x \vee u) = x \wedge (y \vee u) = (x \wedge y) \vee (x \wedge u) = (y \wedge x) \vee (y \wedge u) = y \wedge (x \vee u) = y \wedge (y \vee u) = y$; luego r es monomorfismo. Que r es epimorfismo equivale a la unicidad de la factorización en el teorema II.1.5.

(ii) Si r es isomorfismo, sea $u' = r^{-1}(0,1)$. Se verifica $r(u \wedge u') = (1,0) \wedge (0,1) = (0,0)$ y $r(u \vee u') = (1,0) \vee (0,1) = (1,1)$, así que $u \wedge u' = 0$ y $u \vee u' = 1$, es decir, $u' = \neg u$. Recíprocamente, si existe $\neg u$, cada $(x,y) \in D_u$ es de la forma (ver teorema II.1.5)

$$(x,y) = r(x) \vee [r(y) \wedge \neg r(u)] = r[x \vee (y \wedge \neg u)]$$

así que r es suprayectiva y por tanto, según (i), isomorfismo.

(iii) Sea $r^*: B(D) \longrightarrow B(D_u)$ la imagen de r por el functor libre B . Por otra parte, si $j: D \longrightarrow B(D)$ y $j_u: D_u \longrightarrow B(D_u)$ son las inclusiones canónicas, existen morfismos únicos j', j'' que hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} D & \xrightarrow{r} & D_u & \xrightarrow{j_u} & B(D_u) \\ & \searrow j & \downarrow j' & \swarrow j'' & \\ & & B(D) & & \end{array}$$

Veamos que j'' es el inverso de r . En efecto, por ser r y j_u epimorfismos, se verifica:

$$\begin{aligned} j'' r^* j &= j'' j_u r = j & \Rightarrow & j'' r^* = \text{id} \\ r^* j'' j_u r &= r^* j = j_u r & \Rightarrow & r^* j'' = \text{id} \end{aligned}$$

#

El centro de un retículo D , $C(D)$, es el conjunto de sus elementos complementados. Es claro que $C(D)$ es un álgebra de Boole y que D es un álgebra de Boole si y sólo $D = C(D)$.

Corolario II.1.7. - Sea D un retículo. Para cada $x \in C(D)$, existe una única (salvo isomorfismo) descomposición en producto $D \cong D' \times D''$ tal que x se corresponde con $(1, 0)$.

Demostración : Dado $x \in C(D)$, basta tomar $D' = D_{\leq x}$ y $D'' = D_{\geq x}$, según el corolario II.1.6. Y si $D \cong D' \times D''$, sea x el elemento D correspondiente en la biyección a $(1, 0)$. Es claro que a $(0, 1)$ corresponde $\neg x$, así que $x \in C(D)$. Además $D' \cong D_{\leq x}$ y $D'' \cong D_{\geq x}$.

En la proposición siguiente utilizaremos el morfismo $r: D \rightarrow D_x$ para cada elemento $x \in D$, así que lo denotaremos r_x .

Proposición II.1.8. - El álgebra de Boole libre $B(D)$ engendrada por un retículo D es el coproducto fibrado de la familia de morfismos $\{r_x: D \rightarrow D_x; x \in D\}$.

Demostración : Cada morfismo $j'_x: D_x \rightarrow B(D)$ (ver corolario II.1.6) verifica $j'_x r_x = j$, así que todas las composiciones $j'_x r_x$ son iguales. Dados morfismos $\{f_x: D_x \rightarrow D'; x \in D\}$ tales que todas las composiciones son iguales, sea f tal morfismo. Para cada $x \in D$, $f(x)$ tiene complementario, a saber

$$\neg f(x) = \neg f_x r_x(x) f_x(\neg r_x(x)) = f_x(0, 1)$$

Por tanto el morfismo $f' = B(f)$ factoriza a través de D' . Si f' es esta factorización y $j': D' \rightarrow B(D')$ la inclusión canónica, ya que j' es monomorfismo y r_x epimorfismo se tiene, para cada $x \in D$,

$$j'f'j'_x r_x = f'j = j'f = j'f_x r_x \Rightarrow f'j'_x = f_x$$

La unicidad de f' es obvia, pues los j'_x son epimorfismos por serlo j . #

El functor $F: \underline{D} \longrightarrow \underline{O}$

En el álgebra clásica, F es el functor contravariante que asocia a cada retículo D el conjunto ordenado $F(D)$ de sus filtros primos (o ideales primos). Definiremos aquí F limitándonos a los filtros primos (o ideales primos) complementados, trabajando con sus aplicaciones características.

Un subconjunto A de un retículo D es un filtro si

$$1 \in A, \quad A \wedge A \subseteq A, \quad A \vee D \subseteq A$$

y es un filtro primo si además verifica

$$\{0\} \cap A = \emptyset, \quad (x \vee y \in A \Rightarrow x \in A \vee y \in A)$$

Un subconjunto B de un retículo D es un ideal si

$$0 \in B, \quad B \vee B \subseteq B, \quad B \wedge D \subseteq B$$

y es un ideal primo si verifica además

$$\{1\} \cap B = \emptyset, \quad (x \wedge y \in B \Rightarrow x \in B \vee y \in B)$$

Proposición II.1.9.— Sean A, B subconjuntos complementarios de un retículo D . Las afirmaciones siguientes son equivalentes :

- (i) A es un filtro primo.
- (ii) Existe un morfismo $f: D \longrightarrow 2$ tal que $A = f^{-1}(1)$ y $B = f^{-1}(0)$.
- (iii) B es un ideal primo.

Demostración : Por hipótesis, existe una aplicación $f: D \longrightarrow 2$ tal que $A = f^{-1}(1)$ y $B = f^{-1}(0)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Veamos que f es morfismo. Es claro que $f(1) = 1$ -

pues $1 \in A$. Como $\{0\} \cap A = \emptyset$ se tiene $\{0\} \subseteq cA = B$, así que $f(0) = 0$. Sean ahora elementos $x, y \in D$. Se tiene :

$$f(x \wedge y) = 1 \Leftrightarrow x \wedge y \in A \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = (x \wedge y) \vee x \in A \Leftrightarrow f(x) = 1 \\ y = (x \wedge y) \vee y \in A \Leftrightarrow f(y) = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow f(x) \wedge f(y) = 1$$

luego $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$. También :

$$f(x \vee y) = 1 \Leftrightarrow x \vee y \in A \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \Leftrightarrow f(x) = 1 \\ y \in A \Leftrightarrow f(y) = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow f(x) \vee f(y) = 1$$

luego $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Como $f(0) = 0, 0 \in B$. Como $f(1) = 1, \{1\} \cap B \subseteq A \cap B = \emptyset$, es decir, $\{1\} \cap B = \emptyset$. Dados $x, y \in D$, se tiene :

$$x, y \in B \Rightarrow f(x) = 0 = f(y) \Rightarrow f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) = 0 \Rightarrow x \vee y \in B$$

$$x \in B \wedge y \in D \Rightarrow f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) = 0 \wedge f(y) = 0 \Rightarrow x \wedge y \in B$$

$$x \wedge y \in B \Rightarrow f(x) \wedge f(y) = f(x \wedge y) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \vee f(y) = 0 \Leftrightarrow x \in B \vee y \in B.$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) son demostraciones análogas. #

Proposición II.1.10. - El functor (contravariante)

$\underline{D}(-, 2) : \underline{D} \longrightarrow \underline{E}$ factoriza a través del functor olvido $\underline{O} \longrightarrow \underline{E}$.

Demostración : Por ser 2 un conjunto ordenado, cada conjunto

$\underline{D}(D, 2)$ es ordenado por $f \leq g$ si y sólo si $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in D$. Si $h : D \longrightarrow D'$ es un morfismo, la aplicación

$$h^* = \underline{D}(h, 2) : \underline{D}(D', 2) \longrightarrow \underline{D}(D, 2) \text{ m } f' \longmapsto h^*(f') = f' \circ h \text{ es monótona,}$$

pues si es $f' \leq g'$, entonces se tiene, para cada $x \in D, f'[h(x)] \leq g'[h(x)]$, así que $f' \circ h \leq g' \circ h$, es decir $h^*(f') \leq h^*(g')$. #

El functor (contravariante) que factoriza $\underline{D}(-, 2)$ a través del olvido $\underline{O} \longrightarrow \underline{E}$ lo denotaremos

$$F : \underline{D} \longrightarrow \underline{O}$$

Para cada retículo D , existen (proposición II.2.3) biyecciones entre los conjuntos ordenados de filtros primos com-

plementados, morfismos de D en 2 e ideales primos complementados. El comportamiento de estas biyecciones respecto al orden es

$$A \subseteq A' \Leftrightarrow f \leq f' \Leftrightarrow B' \subseteq B$$

Proposición II.1.11. - Sea x un elemento de un retículo D . Se verifica:

- (i) $F(D_{\leq x}) \cong \{ f \in F(D) \mid f(x)=1 \}$
- (ii) $F(D_{\geq x}) \cong \{ f \in F(D) \mid f(x)=0 \}$
- (iii) $F(D_x) \cong F(D_{\leq x}) \sqcup F(D_{\geq x})$.

Demostración : (i) Se aplica el teorema II.1.3 con $D'=2$. (ii) es análogo usando el teorema II.1.4.

(iii) Se aplica el teorema II.1.5, con $D_x = D_{\leq x} \times D_{\geq x}$, al caso $D'=2$. Entonces $f(x)$ tiene complementario si y sólo si $f(x)=1$ o $f(x)=0$. #

Corolario II.1.12. - F transforma productos finitos en coproductos finitos.

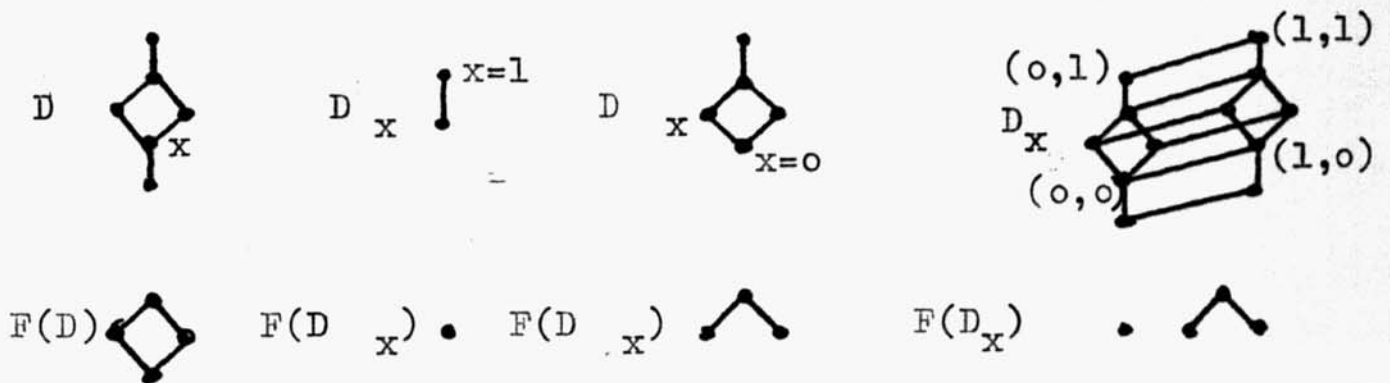
Demostración : Hay que probar que $F(D' \times D'') \cong F(D') \sqcup F(D'')$. Según el corolario II.1.7,

$$D' \cong (D' \times D'')_{\leq (1,0)} \quad , \quad D'' \cong (D' \times D'')_{\geq (1,0)}$$

así que basta ahora aplicar la parte (iii) de la proposición II.1.11. #

En [5] hay una demostración clásica de este resultado que utiliza el principio de **tercio excluso**. Con ligeras modificaciones, esta demostración puede hacerse válida desde el punto de vista constructivo si sólo se utilizan ideales primos complementados.

Damos a continuación ejemplos de retículos y sus correspondientes conjuntos ordenados



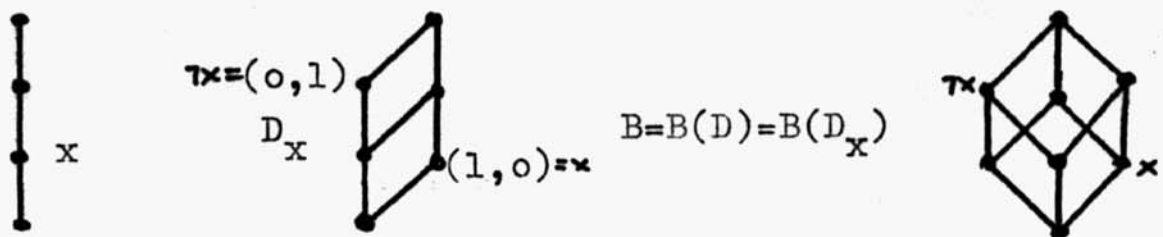
Proposición II.1.13.— Si B es un álgebra de Boole, $F(B)$ tiene orden trivial.

Demostración : Sean morfismos $f, g: B \rightarrow 2$ tales que $f \leq g$. Entonces, para cada $x \in B$ se tiene $f(x) \leq g(x)$ y $\neg f(x) = f(\neg x) \leq g(\neg x)$, es decir, $g(x) \leq f(x)$. Por tanto es $f = g$. #

Corolario II.1.14.— Si B es el álgebra de Boole libre engendrada por un retículo D , entonces $F(B) = F(D)_{id}$.

Demostración : La propiedad universal de la inclusión canónica $j: D \rightarrow B$, aplicada al álgebra de Boole 2 , establece una biyección entre los conjuntos $F(B)$ y $F(D)$. Por la proposición II.1.13, el orden de $F(B)$ es trivial, así que $F(B)$ es el olvido de $F(D)$. #

El ejemplo siguiente ilustra el corolario II.1.14 y también el II.1.6 (parte (iii)).



$$F(D) \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \quad F(D_x) \bullet \quad \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \quad F(B) \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet$$

§ 2. Dualidad.-

En álgebra clásica se demuestra que el functor $F: \underline{D} \longrightarrow \underline{O}$ es una equivalencia (contravariante, es decir, dualidad) de categorías. En el marco del álgebra sobre un topo de conjuntos, mantendremos esta dualidad limitándonos al caso finito. Igual que en el caso clásico, la dualidad $\underline{D} \longrightarrow \underline{O}$ se restringe a una dualidad $\underline{B} \longrightarrow \underline{E}$.

El functor $S: \underline{O} \longrightarrow \underline{D}$

Clásicamente, el functor S inverso de F es el functor contravariante que asocia a cada conjunto ordenado X el retículo $S(X)$ de sus secciones superiores (o inferiores). Aquí nos limitaremos al definir S a las secciones complementadas.

Proposición II.2.1.- Sean A, B subconjuntos complementarios de un conjunto ordenado X . Las afirmaciones siguientes son equivalentes :

- (i) A es sección superior.
- (ii) Existe una aplicación monótona $f: X \longrightarrow 2$ tal que $A = f^{-1}(1)$ y $B = f^{-1}(0)$.
- (iii) B es sección inferior.

Demostración : Por hipótesis, existe una aplicación $f: X \longrightarrow 2$ tal que $A = f^{-1}(1)$ y $B = f^{-1}(0)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Veamos que f es monótona. Si $x \leq y$, se tiene

$$f(x)=1 \Rightarrow x \in A \Rightarrow y \in A \Rightarrow f(y)=1$$

luego $f(x) \leq f(y)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sea $y \in B$ y $x \leq y$. Entonces $f(x) \leq f(y)=0$, así que $f(x)=0$ y por tanto $x \in B$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) son demostraciones análogas. $\#$

Proposición II.2.2 - El functor (contravariante)

$\underline{O}(-, 2): \underline{O} \longrightarrow \underline{E}$ factoriza a través del functor olvido $\underline{D} \longrightarrow \underline{E}$.

Demostración : Por ser 2 un retículo, cada conjunto de aplicaciones monótonas $\underline{O}(X, 2)$ es un retículo con las operaciones inducidas por las de 2 :

$$o(x) = o \quad (f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x)$$

$$1(x) = 1 \quad (f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x)$$

Si $h: X \longrightarrow X'$ es una aplicación monótona, sea

$$h^* = \underline{O}(h, 2): \underline{O}(X', 2) \longrightarrow \underline{O}(X, 2) \quad f' \longmapsto h^*(f') = f' \circ h. \text{ Veamos que}$$

h^* es un morfismo. Para cada $x \in X$ se tiene :

- (i) $o[h(x)]' = o$, luego $h^*(o) = oh = o$.
- (ii) $(f' \wedge g')[h(x)] = f'[h(x)] \wedge g'[h(x)] = (f' \circ h \wedge g' \circ h)(x)$,
luego $h^*(f' \wedge g') = (f' \wedge g') \circ h = f' \circ h \wedge g' \circ h = h^*(f') \wedge h^*(g')$.

Análogamente se prueba que $h^*(1) = 1$ y que $h^*(f' \vee g') = h^*(f') \vee h^*(g')$. $\#$

El functor (contravariante) que factoriza $\underline{O}(-, 2)$ a través del functor olvido $\underline{D} \longrightarrow \underline{E}$ lo denotaremos

$$S: \underline{O} \longrightarrow \underline{D}$$

Para cada conjunto ordenado X , existen (proposición II.2.1) biyecciones entre los retículos de secciones superiores complementadas, aplicaciones monótonas de X en 2 y secciones inferiores complementadas. El comportamiento de estas biyecciones respecto al orden de los retículos es

$$A \leq A' \Leftrightarrow f \leq f' \Leftrightarrow B' \leq B$$

siendo $f \leq f'$ si y sólo si es $f(x) \leq f'(x)$ para cada $x \in X$.

Componiendo los funtores (contravariantes) S y F se obtienen funtores (covariantes)

$$SF:\underline{D} \longrightarrow \underline{D} \quad , \quad FS:\underline{0} \longrightarrow \underline{0}$$

Proposición II.2.3.- Las igualdades

$$\theta_D(x)(f)=f(x)$$

con D retículo, $x \in D$ y f morfismo de D en 2 , definen una transformación natural

$$\theta: Id \longrightarrow SF$$

Demostración : Para cada retículo D se tiene

$$\theta_D: D \longrightarrow SF(D)$$

$$x \mapsto \theta_D(x): F(D) \longrightarrow 2$$

$$f \mapsto \theta_D(x)(f)=f(x)$$

así que hay que verificar que :

(i) Dado $x \in D$, $\theta_D(x)$ es una aplicación monótona.

(ii) θ_D es un morfismo de retículos.

Finalmente habrá que comprobar la naturalidad de

θ , es decir, que

(iii) Cada diagrama

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\theta_D} & SF(D) \\ h \downarrow & & \downarrow SF(h) \\ D' & \xrightarrow{\theta_{D'}} & SF(D') \end{array}$$

es conmutativo.

En efecto, se tiene :

(i) Si $f \leq g$, $\theta_D(x)(f) = f(x) \leq g(x) = \theta_D(x)(g)$

(ii) $\theta_D(o) = 0$, pues $\theta_D(o)(f) = f(o) = 0$ para cada morfismo $f: F(D) \rightarrow 2$. Análogamente se prueba que $\theta_D(1) = 1$.

$\theta_D(x \wedge y) = \theta_D(x) \wedge \theta_D(y)$, ya que para cada f se tiene

$$\theta_D(x \wedge y)(f) = f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) = \theta_D(x)(f) \wedge \theta_D(y)(f) =$$

$$= [\theta_D(x) \wedge \theta_D(y)](f). \text{ Del mismo modo se prueba que } \theta_D(x \vee y) = \theta_D(x) \vee \theta_D(y).$$

(iii) Para cada $x \in D$ se tiene (con $h^{**} = SF(h)$, según la notación usada en las proposiciones II.2.2 y II.1.10)

$h^{**}[\theta_D(x) = 0_D, h(x)]$, pues para cada morfismo $f': D' \rightarrow 2$ se verifica

$$h^{**}[\theta_D(x)](f') = [\theta_D(x)h^{**}](f') = \theta_D(x)(f'h) = (f'h)(x) = f'[h(x)] = \theta_D[h(x)](f'). \#$$

Proposición II.2.4. - Las igualdades

$$\omega_X(x)(f) = f(x)$$

con X conjunto ordenado, $x \in X$ y f aplicación monótona de X en 2 , definen una transformación natural

$$\omega: Id \rightarrow FS$$

Demostración : Los pasos de esta demostración son similares a los de la proposición II.2.5. Se tiene :

(i) $\omega_X(x): S(X) \rightarrow 2$ es un morfismo, pues $\omega_X(x)(o) = o(x) = 0$, $\omega_X(x)(1) = 1(x) = 1$, $\omega_X(x)(f \wedge g) = (f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x) = \omega_X(x)(f) \wedge \omega_X(x)(g)$, y análogamente $\omega_X(x)(f \vee g) = \omega_X(x)(f) \vee \omega_X(x)(g)$.

(ii) ω_X es una aplicación monótona, pues si $x \leq y$, entonces

para cada aplicación monótona $f \in S(X)$ se tiene $\omega_X(x)(f) = f(x) \leq f(y) = \omega_X(y)(f)$, así que $\omega_X(x) \leq \omega_X(y)$.

(iii) Cada diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\omega_X} & FS(X) \\ h \downarrow & & \downarrow h^{**} = FS(h) \\ X' & \xrightarrow{\omega_{X'}} & FS(X') \end{array}$$

es conmutativo, ya que para cada $x \in X$ y cada $f' \in S(X')$ se tiene, operando como en la proposición II.2.5,

$$h^{**} [\omega_X(x)] (f') = \omega_{X'} [h(x)] (f'). \neq$$

Dualidad de Birkhoff

La dualidad de Birkhoff clásica establece que θ y ω son equivalencias naturales. Ahora vamos a demostrar esta afirmación, que hará de F y S equivalencias de categorías inversas, limitándonos a la subcategoría plena $\underline{O}_f$ de $\underline{O}$ formada por los conjuntos ordenados finitos y a la subcategoría plena $\underline{D}_{pf}$ de $\underline{D}$ formada por los retículos de presentación finita. Es claro que los funtores F y S dan restricciones

$$F: \underline{D}_{pf} \longrightarrow \underline{O}_f, \quad S: \underline{O}_f \longrightarrow \underline{D}_{pf}$$

y que las transformaciones naturales θ y ω se limitan también a estos funtores restringidos.

Teorema II.2.5. - Los funtores (contravariantes) $F: \underline{D}_{pf} \longrightarrow \underline{O}_f$ y $S: \underline{O}_f \longrightarrow \underline{D}_{pf}$ son equivalencias inversas. (Es decir, las categorías $\underline{D}_{pf}$ y $\underline{O}_f$ son duales.).

Demostración : Hay que probar que :

- (i) Para cada retículo D de presentación finita, θ_D es isomorfismo.
- (ii) Para cada conjunto ordenado X finito, ω_X es isomorfismo.

En ambos casos se trata de ver que las aplicaciones θ_D y ω_X son biyectivas.

- (i) Cada elemento $x \in D$ es la intersección de los elementos $\wedge$ -irreducibles (de la forma $\bigvee f^{-1}(0)$ para un morfismo $f: D \rightarrow 2$) mayores que él, así que

$$x = \bigwedge \left\{ \bigvee f^{-1}(0) ; f \in F(D), f(x)=0 \right\}$$

Por tanto, si $\theta_D(x) = \theta_D(y)$, entonces

$$x = \bigwedge \left\{ \bigvee f^{-1}(0) ; \theta_D(x)(f)=0 \right\} = \bigwedge \left\{ \bigvee f^{-1}(0) ; \theta_D(y)(f)=0 \right\} = y$$

así que θ_D es inyectiva.

Dada una aplicación monótona $h: F(D) \rightarrow 2$, sea

$$x = \bigwedge \left\{ \bigvee f^{-1}(0) ; f \in F(D), h(f)=0 \right\}$$

$$\theta_D(x) = h \Leftrightarrow \theta_D(x)(g) = h(g) , \forall g \in F(D)$$

$$\Leftrightarrow g(x) = h(g) , \forall g \in F(D)$$

$$\Leftrightarrow [g(x)=0 \Leftrightarrow h(g)=0], \forall g \in F(D)$$

Si $g(x)=0$, entonces $\bigwedge \left\{ g \left[\bigvee f^{-1}(0) \right] ; h(f)=0 \right\} = 0$, así que existe $f \in F(D)$ tal que $h(f)=0$ y $g \left[\bigvee f^{-1}(0) \right] = 0$, es decir, $h(f)=0$ y $g(z)=0$ si $f(z)=0$. Por tanto $g \leq f$ y así $h(g) \leq h(f)=0$, es decir, $h(g)=0$. Recíprocamente, si $h(g)=0$, g es uno de los morfismos que aparecen en la expresión de x , así que $g(x)=0$. Luego es $\theta_D(x)=h$ y por tanto θ_D es suprayectiva.

(ii) Por ser X finito, cada $x \in X$ define una aplicación monótona

$$f_x: X \longrightarrow 2 \text{ m } f_x^{-1}(0) = X_{\leq x}$$

Si es $\omega_X(x) = \omega_X(y)$, entonces es $f(x) = f(y)$ para cada $f \in S(X)$. Tomando $f = f_x$ resulta $f_x(y) = f_x(x) = 0$, así que $y \leq x$. Análogamente se demuestra que $x \leq y$, por lo que se tiene $x = y$. Luego ω_X es inyectiva.

Sea ahora un morfismo $h: S(X) \longrightarrow 2$. Tomemos $g = \bigvee h^{-1}(0)$, de manera que $g^{-1}(0)$ será una sección inferior (complementada) de X que tendrá un número finito $x_1, \dots, x_r$ de elementos maximales. Por tanto es $g^{-1}(0) = f_{x_1}^{-1}(0) \cup \dots \cup f_{x_r}^{-1}(0)$, es decir,

$$g = f_{x_1} \wedge \dots \wedge f_{x_r}; \text{ luego } h(f_{x_1}) \wedge \dots \wedge h(f_{x_r}) = h(g) = 0, \text{ por lo que al}$$

gún $0 \leq j \leq r$ verifica $h(f_{x_j}) = 0$, es decir $f_{x_j} \leq g$ según la defi-

nición de g . Pero por otra parte, $g = f_{x_1} \wedge \dots \wedge f_{x_r} \leq f_{x_j}$, así que

$g = f_{x_j}$, es decir, g tiene un sólo maximal $x = x_1 = \dots = x_r$ y es $g = f_x$.

Veamos que $h = \omega_X(x)$, con lo que ω_X será suprayectiva.

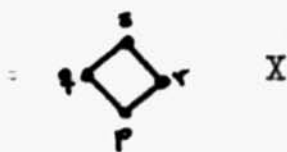
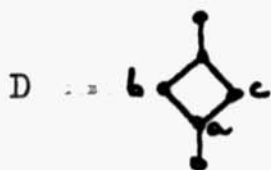
En efecto, se tiene :

$$h(f) = 0 \Rightarrow f \leq g \Rightarrow f(x) \leq g(x) = f_x(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow f \leq f_x = g \Rightarrow h(f) \leq h(g) = 0 \Rightarrow h(g) = 0$$

así que es $h(f) = f(x)$ para cada $f \in S(X)$, es decir, $h = \omega_X(x)$. #

El ejemplo siguiente ilustra la dualidad de Birkhoff.



Es $X=F(D)$, con

$$\begin{aligned} p:D \longrightarrow 2 \text{ m } p^{-1}(o) &= \{o, a, b, c, d\} & , \quad \bigvee p^{-1}(o) &= d & , \quad \bigwedge p^{-1}(1) &= 1 \\ q:D \longrightarrow 2 \text{ m } q^{-1}(o) &= \{o, a, b\} & , \quad \bigvee q^{-1}(o) &= b & , \quad \bigwedge q^{-1}(1) &= c \\ r:D \longrightarrow 2 \text{ m } r^{-1}(o) &= \{o, a, c\} & , \quad \bigvee r^{-1}(o) &= c & , \quad \bigwedge r^{-1}(1) &= b \\ s:D \longrightarrow 2 \text{ m } s^{-1}(o) &= \{o\} & , \quad \bigvee s^{-1}(o) &= o & , \quad \bigwedge s^{-1}(1) &= a \end{aligned}$$

Los elementos $\wedge$ -irreducibles de D, $\{o, b, c, d\}$, forman un suborden de D isomorfo al dual de X, lo mismo que los $\vee$ -irreducibles $\{a, b, c, 1\}$. Ahora pueden volver a verse los ejemplos que siguen al corolario II.1.12.

Sea, por ejemplo, la aplicación monótona

$$h:X \longrightarrow 2 \text{ m } h^{-1}(o) = \{p, r\}$$

$$\text{Entonces } x = \bigwedge \left\{ \bigvee f^{-1}(o) \mid h(f) = o \right\} = \bigvee p^{-1}(o) \wedge \bigvee r^{-1}(o) = d \wedge c = c$$

$$\theta_D(x):X \longrightarrow 2 \quad \begin{cases} p \longmapsto p(c)=o \\ q \longmapsto r(c)=1 \\ f \longmapsto f(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} r \longmapsto r(c)=1 \\ s \longmapsto s(c)=o \end{array} \right. \end{cases}$$

En efecto, $\theta_D(x)=h$.

Para considerar $D=S(X)$, basta interpretar así los elementos de D :

$$\begin{aligned} o:X \longrightarrow 2 \text{ m } o^{-1}(o) &= X \\ a:X \longrightarrow 2 \text{ m } a^{-1}(o) &= \{p, q, r\} \\ b:X \longrightarrow 2 \text{ m } b^{-1}(o) &= \{p, q\} \\ c:X \longrightarrow 2 \text{ m } c^{-1}(o) &= \{p, r\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d: X &\longrightarrow 2 \text{ m } d^{-1}(o) = \{p\} \\ 1: X &\longrightarrow 2 \text{ m } 1^{-1}(o) = \emptyset \end{aligned}$$

Si consideramos ahora el morfismo

$$h: D \longrightarrow 2 \text{ m } h^{-1}(o) = \{o, a, b\}$$

entonces $g = \bigvee h^{-1}(o) = b = f_q$, siendo

$$\omega_X(q): D \longrightarrow 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} o \longmapsto o(q) = o \\ a \longmapsto a(q) = o \\ b \longmapsto b(q) = o \\ x \longmapsto x(q) \left\{ \begin{array}{l} c \longmapsto c(q) = 1 \\ d \longmapsto d(q) = 1 \\ 1 \longmapsto 1(q) = 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

así que, en efecto, es $\omega_X(q) = h$.

Dualidad de Stone

Sea $\underline{B}_{pf}$ la subcategoría (plena) de $\underline{D}_{pf}$ cuyos objetos son álgebras de Boole y sea $\underline{E}_f$ la categoría de los conjuntos finitos, es decir, la subcategoría (plena) de $\underline{O}_f$ cuyos objetos tienen orden trivial.

Teorema II.2.6. - Las categorías $\underline{B}_{pf}$ y $\underline{O}_f$ son duales.

Demostración : Es suficiente con demostrar que los funtores F y S inducen por restricción funtores $\underline{B}_{pf} \longrightarrow \underline{O}_f$ y $\underline{O}_f \longrightarrow \underline{B}_{pf}$ respectivamente. Es decir, que

- (i) D álgebra de Boole $\Rightarrow F(D)$ orden trivial
- (ii) X orden trivial $\Rightarrow S(X)$ álgebra de Boole.

En efecto, (i) es un caso particular de la proposición II.1.13, y (ii) si X tiene orden trivial, cada aplicación $X \longrightarrow 2$ es monótona, así que $S(X)$ es el álgebra de Boole de las partes

complementadas de X . (Ver corolario I.3.3). $\neq$

La dualidad de Stone puede verificarse en el ejemplo que sigue al corolario II.1.14.

Aplicaciones

Expondremos brevemente el significado de la dualidad en lenguaje de conjuntos, subconjuntos y elementos, para aplicar la después a algunas situaciones concretas. Interpretaremos las aplicaciones características como secciones superiores o filtros primos, ya que de esta forma se conserva el orden. (Ver los comentarios que siguen a las proposiciones II.1.10 y II.2.2).

La dualidad de Birkhoff asocia a cada conjunto ordenado X finito el conjunto $S(X)$ de sus secciones superiores. Si $g: X \longrightarrow X'$ es una aplicación monótona en $\underline{O}_f$ entonces $S(g) = g^*: A' \longmapsto g^{-1}(A')$. Para cada elemento $x \in X$ y cada sección superior $A' \subseteq X'$, se tiene

$$x \in g^*(A') \Leftrightarrow g(x) \in A'$$

Si D es un retículo en $\underline{D}_{pf}$, $F(D)$ es el conjunto de los filtros primos de D y si $g: D \longrightarrow D'$ es un morfismo en $\underline{D}_{pf}$, entonces $F(g) = g^*: A' \longmapsto g^{-1}(A')$. Para cada elemento $x \in D$ y cada filtro primo A' de D' , se tiene la misma equivalencia anterior. La dualidad de Stone funciona de manera análoga, considerando subconjuntos arbitrarios de conjuntos finitos X y filtros primos de un álgebra de Boole.

Como primer ejemplo de aplicación de la dualidad, vamos a caracterizar los epimorfismos suprayectivos en $\underline{D}_{pf}$. Si $f: D \longrightarrow D'$ es un tal epimorfismo y $u = F(f): X' \longrightarrow X$ su imagen

por la dualidad, u es monomorfismo, es decir morfismo inyectivo. Como f no es en general suprayectiva, los epimorfismos suprayectivos en $\underline{D}_{pf}$ se corresponderán con algún tipo especial de monomorfismos en $\underline{O}_f$.

Proposición II.2.7. - Sea $f: D \longrightarrow D'$ un morfismo en $\underline{D}_{pf}$ y sea $u: X' \longrightarrow X$ la imagen de f por el functor dualidad F . Las afirmaciones siguientes son equivalentes :

- (i) f es suprayectiva
- (ii) $u(x') \leq u(y') \Rightarrow x' \leq y'$
- (iii) X' es isomorfo al suborden $u(X')$ de X .

Demostración : (i) $\Rightarrow$ (ii) Sean $x', y' \in X'$ tales que $u(x') \leq u(y')$ y sean los filtros primos duales $A', B' \in D'$ y $A \leq B \in D$. Será $x' \leq y'$ si y sólo si $A' \leq B'$. Pero, por ser f suprayectiva :

$$A' = ff^{-1}(A') = f(A) \leq f(B) = ff^{-1}(B') = B'$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Es claro que (ii) equivale, por ser u monótona, a

$$u(x') \leq u(y') \Leftrightarrow x' \leq y'$$

y por otra parte, (ii) implica la inyectividad de u sin más que considerar la antisimetría del orden.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Sea $x' \in D'$ y $A' \in X'$ la sección superior dual. $A = u(A')$ es, por hipótesis, sección superior de $u(X')$. Sea $\bar{A} = \{ \bar{a} \in X \mid \exists a \in A, a \leq \bar{a} \}$ la sección superior de X engendrada por A y $\bar{x} \in D$ su elemento dual. La sección superior de X' dual de $f(\bar{x}) \in D'$ es

$$u^{-1}(\bar{A}) = u^{-1}[\bar{A} \cap u(X')] = u^{-1}(A) = A'$$

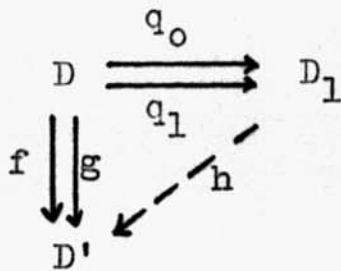
luego $f(\bar{x}) = x$ y f es suprayectiva. #

Los ejemplos que siguen al corolario II.1.12 ilustran -

esta proposición.

Ahora vamos a caracterizar un retículo como subconjunto del álgebra de Boole libre que engendra. Lo haremos con un retículo de presentación finita usando la dualidad y, en el próximo apartado, extenderemos el resultado a un retículo arbitrario mediante un argumento de límites inductivos filtrantes. Este método de demostración será muy utilizado en el resto del capítulo.

Sea D un retículo en $\underline{D}_{pf}$ y $X=F(D)$. El objeto simplicial $\dots X_1 \rightrightarrows X$ (ver capítulo I), que puede considerarse como objeto simplicial en $\underline{Q}$ (es decir, functor $\underline{A}_+^{op} \rightarrow \underline{Q}$) de manera que X es orden interno en $\underline{Q}$, se transforma por dualidad en un objeto cosimplicial $D \rightrightarrows D_1 \dots$. El teorema dual (en el sentido de la teoría de categorías, ver [21]) del I.2.4 nos dice que el retículo D_1 tiene la propiedad universal siguiente :



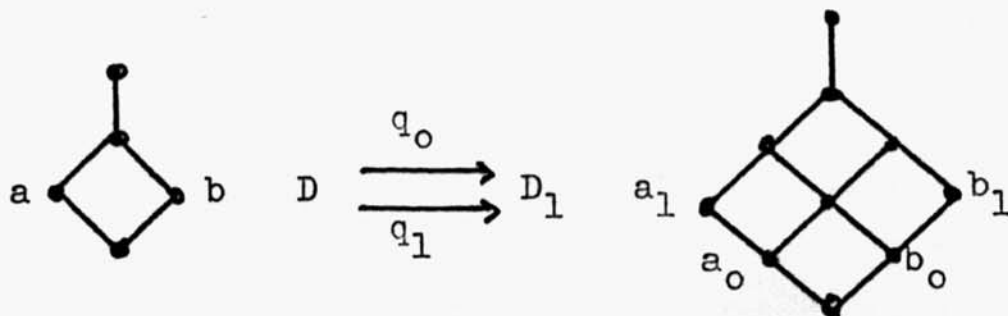
$$(i) \quad q_0 \leq q_1$$

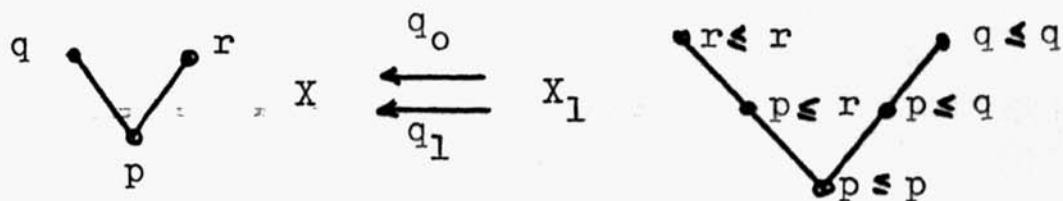
(ii) Para cada par de morfismos

$f, g: D \rightarrow D'$ en $\underline{D}_{pf}$ tal que $f \leq g$, -
existe un único morfismo $h: D_1 \rightarrow D'$

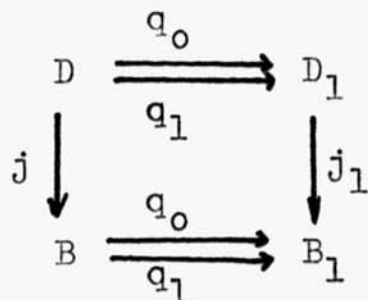
tal que

$$hq_0 = f \quad , \quad hq_1 = g$$





Pasando a las álgebras de Boole libremente engendradas, se tiene el diagrama (doble) conmutativo



Debe notarse que en $\underline{D}_{pf}$ es $q_0 \leq q_1$, pero que el orden desaparece al pasar a $\underline{B}_{pf}$. En efecto, si $x \in B$ es $q_0(x) \leq q_1(x)$, pero $q_0(\neg x) = \neg q_0(x) \geq \neg q_1(x) = q_1(\neg x)$. No obstante, el orden se mantiene para los elementos $x \in D$. Veamos que esta propiedad caracteriza a D dentro de B .

Proposición II.2.8. - Sea B el álgebra de Boole libre engendrada por un retículo D de presentación finita. Se verifica:

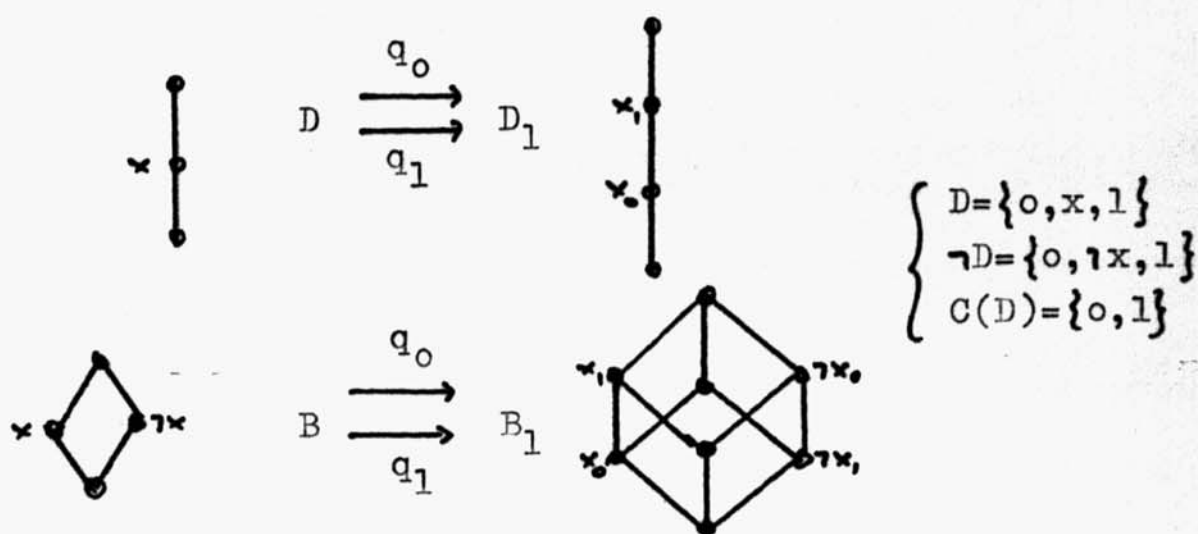
- (i) $D = \{x \in B \mid q_0(x) \leq q_1(x)\}$
- (ii) $\neg D = \{x \in B \mid q_1(x) \leq q_0(x)\}$
- (iii) $C(D) = \{x \in B \mid q_0(x) = q_1(x)\}$

Demostración : El corolario I.2.17, para $k=0$, dice que un conjunto $U \subseteq X$ es una sección superior si y sólo si $q_0^{-1}(U) \leq q_1^{-1}(U)$.

Lo que (i) afirma es el enunciado dual. Análogamente, (ii) - equivale por la dualidad al caso $k=0$ del corolario I.2.18.

(iii) sigue de (i) y (ii) teniendo en cuenta que $C(D) = D \cap \neg D$.

#



§3. Dimensión.-

Desde el punto de vista clásico, la dimensión de un retículo D es la longitud de la mayor cadena no degenerada de ideales (o filtros) primos de D , es decir, la dimensión del conjunto ordenado $X = F(D)$. Si D es de presentación finita, las dualidades de Birkhoff y Stone permiten trasladar a D la teoría de la dimensión de X dada en el capítulo I. En particular, ya que definimos $\dim X \leq n$ como $\langle s_0, \dots, s_n \rangle : \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow X_{n+1}$ suprayectiva, ahora diremos que $\dim D \leq n$ si

$\{s_0, \dots, s_n\} : B_{n+1} \rightarrow \prod_{i=1}^n B_i$ es monomorfismo. Esta es la definición que adoptaremos en el caso general, pero antes hay que efectuar una construcción del objeto cosimplicial asociado a un retículo arbitrario directamente en la categoría $\underline{D}$, ya que en general no disponemos de la dualidad.

El objeto cosimplicial

Teorema II.3.1.- Sea D un retículo. Para cada $n \geq 1$, existen morfismos $q_i : D \rightarrow D_n$, $0 \leq i \leq n$ universales respecto a la propiedad $q_0 \leq \dots \leq q_n$.

$$\begin{array}{ccc}
 & q_0 \leq \dots \leq q_n & \\
 D & \xrightarrow{\quad} & D_n \\
 \downarrow f_0 \leq \dots \leq f_n & \swarrow f & \\
 D' & &
 \end{array}
 \quad \left\{ \begin{array}{l} fq_i = f_i \\ 0 \leq i \leq n \end{array} \right.$$

Demostración : Sea $H = \bigsqcup_{i=0}^n D$ la unión disjunta de $n+1$ copias del conjunto D , y sean las inclusiones canónicas

$$h_i: D \longrightarrow H \ni x \longmapsto h_i(x) = x_i, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Sea $D(H)$ el retículo libre engendrado por H y $h: H \longrightarrow D(H)$ la inclusión canónica. Finalmente, sea D_n el retículo cociente de $D(H)$ por las relaciones

$$\begin{aligned}
 0_i &= 0, & 1_i &= 1 \\
 x_i \wedge y_i &= (x \wedge y)_i, & x_i \vee y_i &= (x \vee y)_i \\
 x_i \wedge x_j &= x_{\min\{i,j\}}
 \end{aligned}$$

Si $k: D(H) \longrightarrow D_n$ es el epimorfismo canónico, se tienen las aplicaciones

$$q_i = k h h_i: D \longrightarrow D_n, \quad 0 \leq i \leq n$$

que, según las relaciones definidoras de D_n , son morfismos que verifican $q_0 \leq \dots \leq q_n$.

Dados morfismos $f_0 \leq \dots \leq f_n: D \longrightarrow D'$, existe una única aplicación $f': H \longrightarrow D'$ tal que $f' h_i = f_i$, $0 \leq i \leq n$, y un único morfismo $\bar{f}: D(H) \longrightarrow D'$ tal que $\bar{f} h = f'$. Ya que $\bar{f} h h_i = f' h_i = f_i$, $0 \leq i \leq n$, es decir, para cada $x \in D$ se tiene $\bar{f}(x_i) = f_i(x_i)$, $0 \leq i \leq n$, es claro que $\bar{f}$ conserva las relaciones definidoras de D_n , así que existe un único morfismo $f: D_n \longrightarrow D'$ tal que $f k = \bar{f}$. Se ve-

rifica $f q_i = f k h h_i = \bar{f} h h_i = f_i, 0 \leq i \leq n$, y si otro morfismo $g: D_n \rightarrow D'$ también satisface las igualdades $g q_i = f_i, 0 \leq i \leq n$, entonces $g k h h_i = g q_i = f_i, 0 \leq i \leq n$; luego por la unicidad de f' es $g k h = f'$; luego por la unicidad de $\bar{f}$ es $g k = \bar{f}$; luego por la unicidad de $\bar{f}$ es $g = f$. #

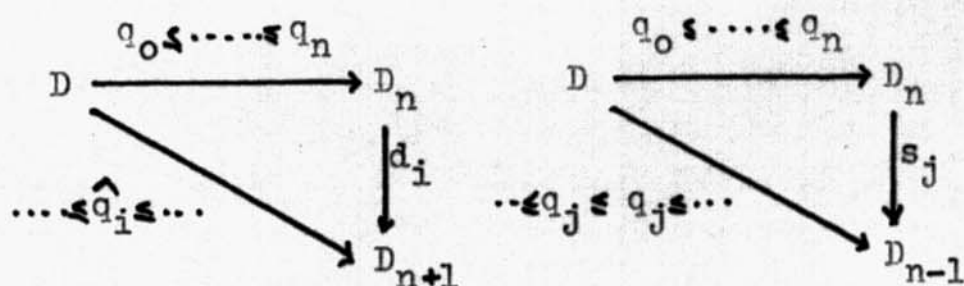
Corolario II.3.2. - Sea D un retículo. Para cada $n \geq 0$ se tiene una biyección

$$F(D_n) \cong F(D)_n$$

Demostración : Basta interpretar la propiedad universal de D_n con $D' = 2$. #

Los filtros (ideales) primos complementados de D_n se corresponden pues biyectivamente con las cadenas de longitud n de filtros (ideales) primos complementados de D .

El teorema II.3.1 permite definir morfismos d_i, s_j mediante los diagramas



Utilizando el teorema dual (en el sentido de la teoría de categorías, ver (20) del I.2.4 y teniendo en cuenta que cada conjunto ordenado es orden interno en $\underline{Q}$, resulta que D es co-categoría interna en $\underline{D}$ (D tiene coproductos finitos) con su correspondiente objeto cosimplicial $\Delta_+ \rightarrow \underline{D}$. Además, puesto que la relación $\leq$ en cada D'^D es de orden, D es un coorden-

interno en $\underline{D}$.

Componiendo con el functor libre $B:\underline{D} \longrightarrow \underline{B}$ se obtiene el objeto cosimplicial en $\underline{B}$ asociado a D , que es el objeto cosimplicial de $B=B(D)$, es decir, un coorden interno trivial. Los símbolos d_i, s_j se usarán indistintamente para los morfismos en $\underline{D}$ y sus imágenes en $\underline{B}$ por B .

Para cada $n \geq 1$, la construcción del teorema II.3.1 establece también un functor

$$(\cdot)_n: \underline{D} \longrightarrow \underline{D}$$

que a cada retículo D hace corresponder el retículo D_n y a cada morfismo $f:D \longrightarrow D'$ al morfismo correspondiente $f_n:D_n \longrightarrow D'_n$ del cofunctor interno f , es decir, el morfismo de $\underline{D}$ definido por el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{q_0 \leq \dots \leq q_n} & D_n \\ f \downarrow & & \downarrow f_n \\ D' & \xrightarrow{q_0 \leq \dots \leq q_n} & D'_n \end{array} \quad (q_0 f \leq \dots \leq q_n f)$$

Es claro que esta correspondencia es functorial. Un functor análogo se tiene para los conjuntos ordenados: $(\cdot)_n: \underline{O} \longrightarrow \underline{O}$, de manera que el corolario II.3.2 se amplía, considerando los morfismos, al diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{array}{ccc} \underline{D} & \xrightarrow{(\cdot)_n} & \underline{D} \\ F \downarrow & & \downarrow F \\ \underline{O} & \xrightarrow{(\cdot)_n} & \underline{O} \end{array}$$

Otra consecuencia inmediata de la definición del functor $(.)_n: \underline{D} \longrightarrow \underline{D}$ es que, por tratarse de una construcción universal de tipo colímite (o inicial en otra terminología) conmuta con los colímites filtrantes. Veamos no obstante los detalles.

Proposición II.3.3. - El functor $(.)_n: \underline{D} \longrightarrow \underline{D}$ ($n \geq 1$) conmuta con los colímites filtrantes.

Demostración : Es suficiente hacer la demostración para $n=1$. (Además, dualizando el teorema I.1.6 se ve que D_n es coproducto n -fibrado de $D \rightrightarrows D_1$, y los colímites conmutan entre sí). Sea $D = \varinjlim_{\alpha \in I} D_\alpha$, con inclusiones $j_\alpha: D_\alpha \longrightarrow D$. Para cada $\alpha \in I$ sea $q_{\alpha 0} \leq q_{\alpha 1}: D_\alpha \longrightarrow D_{\alpha 1}$, y sea $\bar{D}_1 = \varinjlim_{\alpha} D_{\alpha 1}$ con inclusiones $j_{\alpha 1}: D_{\alpha 1} \longrightarrow \bar{D}_1$. Veamos que $\bar{D}_1 \cong D_1$. Los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} D_\alpha & \xrightarrow{q_{\alpha 0}} & D_{\alpha 1} \\ j_\alpha \downarrow & \bar{q}_0 & \downarrow j_{\alpha 1} \\ D & \longrightarrow & \bar{D}_1 \end{array} \quad (\alpha \in I)$$

definen de modo único un morfismo $\bar{q}_0$. En efecto, si $\alpha \leq \beta$, entonces el diagrama siguiente tiene un cuadrado y un triángulo conmutativos

$$\begin{array}{ccccc} D_\alpha & \xrightarrow{q_{\alpha 0}} & D_{\alpha 1} & & \\ j_\alpha \downarrow & & \downarrow j_{\alpha 1} & \searrow j_{\alpha 1} & \\ D & \xrightarrow{q_{\beta 0}} & D_{\beta 1} & \xrightarrow{j_{\beta 1}} & \bar{D}_1 \\ & & \downarrow j_{\beta 1} & \nearrow j_{\beta 1} & \end{array}$$

así que $j_{\beta 1} q_{\beta 0} j_{\beta \alpha} = j_{\alpha 1} q_{\alpha 0}$. Análogamente se define un morfismo $\bar{q}_1: D \rightarrow \bar{D}_1$ único tal que, para cada $\alpha \in I$, $\bar{q}_1 j_{\alpha} = j_{\alpha 1} q_{\alpha 1}$. Si $x \in D$, es $x = j_{\alpha}(x_{\alpha})$ para algún $\alpha \in I$ por ser I filtrante, así que $\bar{q}_0(x) = \bar{q}_0 j_{\alpha}(x_{\alpha}) = j_{\alpha 1} q_{\alpha 0}(x_{\alpha}) \leq j_{\alpha 1} q_{\alpha 1}(x_{\alpha}) = \bar{q}_1 j_{\alpha}(x_{\alpha}) = \bar{q}_1(x)$; luego $\bar{q}_0 \leq \bar{q}_1$. Dados morfismos $f \leq g: D \rightarrow D'$, veamos que existe un único morfismo $h: \bar{D}_1 \rightarrow D'$ tal que $h\bar{q}_0 = f$ y $h\bar{q}_1 = g$; de esta forma será $\bar{D}_1 \cong D_1$. Para cada $\alpha \in I$, $f \leq g$ implica $f j_{\alpha} \leq g j_{\alpha}$, así que existe un morfismo $h_{\alpha}: D_{\alpha 1} \rightarrow D'$ único tal que $h_{\alpha} q_{\alpha 0} = f j_{\alpha}$ y $h_{\alpha} q_{\alpha 1} = g j_{\alpha}$. Si $\alpha \leq \beta$, se tiene $h_{\beta} j_{\beta \alpha 1} q_{\beta 0} = h_{\beta} q_{\beta 0} j_{\beta \alpha} = f j_{\alpha} = h_{\alpha} q_{\alpha 0}$ y análogamente $h_{\beta} j_{\beta \alpha 1} q_{\beta 1} = h_{\alpha} q_{\alpha 1}$ usando g , así que $h_{\beta} j_{\beta \alpha 1} = h_{\alpha}$ y por tanto los h_{α} definen un morfismo $h: \bar{D}_1 \rightarrow D'$ único tal que $h j_{\alpha 1} = h_{\alpha}$ para cada $\alpha \in I$. Se verifica, para cada $\alpha \in I$, $h\bar{q}_0 j_{\alpha} = h j_{\alpha 1} q_{\alpha 0} = h_{\alpha} q_{\alpha 0} = f j_{\alpha}$ así que $h\bar{q}_0 = f$ y análogamente se prueba que $h\bar{q}_1 = g$. Finalmente, para ver la unicidad de h , supongamos que otro morfismo k verifica $k\bar{q}_0 = f$ y $k\bar{q}_1 = g$; entonces para cada $\alpha \in I$ se tiene $k j_{\alpha 1} q_{\alpha 0} = k\bar{q}_0 j_{\alpha} = f j_{\alpha} = h\bar{q}_0 j_{\alpha} = h j_{\alpha 1} q_{\alpha 0}$ y también $k j_{\alpha 1} q_{\alpha 1} = h j_{\alpha 1} q_{\alpha 1}$, luego $k j_{\alpha 1} = h j_{\alpha 1}$. Siendo esta igualdad válida para cada $\alpha \in I$, resulta $k = h$. #

Corolario II.3.4. - El functor $B(.)_n: \underline{D} \rightarrow \underline{B}$ ($n \geq 1$) conmuta con los colímites filtrantes.

Demostración : Aplicar las proposiciones II.1.1 y II.3.3. #

Proposición II.3.5.- Sea D un retículo y $B=B(D)$. Se verifica:

- (i) $D = \{x \in B \mid x_0 \leq x_1\}$
- (ii) $\neg D = \{x \in B \mid x_1 \leq x_0\}$
- (iii) $C(D) = \{x \in B \mid x_0 = x_1\}$
- (iv) $D \cong B \Leftrightarrow D \cong D_1$.

Demostración : (i) Si D es de presentación finita, el resultado se demostró en la proposición II.2.8. Si D es arbitrario, es claro que los elementos $x \in D$ verifican $x_0 \leq x_1$ por la definición de D_1 . Para ver el contenido inverso, sea $x \in B$ tal que $x_0 \leq x_1$. D es colímite filtrante de sus subretículos de presentación finita, $D = \varinjlim \text{filt } D_\alpha$, así que $B = \varinjlim \text{filt } B_\alpha$ si $B_\alpha = B(D_\alpha)$. Existe por tanto un $\alpha \in I$ tal que $x = j_\alpha(x_\alpha)$, $x_\alpha \in B_\alpha$. Aplicando ahora el corolario II.3.4, resulta que $x_0 = j_\alpha(x_{\alpha 0})$ y $x_1 = j_\alpha(x_{\alpha 1})$, con $x_{\alpha 0}, x_{\alpha 1} \in B_{\alpha 1}$ y $x_{\alpha 0} \leq x_{\alpha 1}$. Como D_α es de presentación finita, esto implica $x_\alpha \in D_\alpha$, luego $x \in D$.

(ii) sigue de (i), ya que $(\neg x)_i = \neg(x_i)$, $i=0,1$.

(iii) sigue de (i) y (ii) pues $C(D) = D \cap \neg D$.

(iv) $D \cong B \Leftrightarrow D \cong C(D) \Leftrightarrow q_0 = q_1 : B \rightarrow B_1$ según (iii). Siempre se verifica $s_0 q_0 = s_0 q_1 = \text{id}$ (ver def. I.1.18 dualizando) y además

$$\left. \begin{array}{l} q_0 s_0 q_0 = q_0 \text{id} = q_0 \\ q_0 s_0 q_1 = q_0 \text{id} = q_0 = q_1 \end{array} \right\} \Rightarrow q_0 s_0 = \text{id}$$

así que $q_0 = q_1$ es el isomorfismo $B \cong B_1$, lo que equivale a $q_0 = q_1 : D \cong D_1$. #

Dimensión

Dado un retículo D_1 sean B y B_n las álgebras de Boole - libres engendradas por D y D_n respectivamente ($n \geq 1$). Para cada $n \geq 0$ (con $D_0 = D$) se tiene el morfismo

$$\{s_0, \dots, s_n\} : B_{n+1} \longrightarrow \prod_{n+1} B_n$$

cuyo núcleo denotaremos K_{n+1} , de manera que $\{s_0, \dots, s_n\}$ es monomorfismo si y sólo si $K_{n+1} = 0$.

Definición II.3.6. - La dimensión de un retículo D es menor o igual que $n \in \mathbb{N}$ si $K_{n+1} = 0$, y es igual a n si es menor o igual que n y $\neg(K_n = 0)$.

Nuestro objetivo ahora es caracterizar la dimensión de un retículo D en términos de los elementos de D y B . Comenzaremos a trabajar por el caso en que D es de presentación finita.

Presentación finita

Si D es un retículo de presentación finita y $X = F(D)$, es claro que, por la dualidad, $\dim D \leq n$ equivale a $\dim X \leq n$.

Teorema II.3.7. - Sea D un retículo de presentación finita. Las afirmaciones siguientes son equivalentes :

- (i) $\dim D \leq 2n$
- (ii) $\forall x \in B, \exists x_0, x_i, y_i \in D, 1 \leq i \leq n, x = x_0 \vee \bigvee_{i=1}^n (x_i \wedge \neg y_i).$
- (iii) $\forall x \in B, \exists x_0, x_i, y_i \in D, 1 \leq i \leq n, x = \neg x_0 \vee \bigvee_{i=1}^n (x_i \wedge \neg y_i).$

Demostración : Este teorema es el dual del I.3.4, ya que los subconjuntos de X son los elementos de B , las secciones supe

riores de X son los elementos de D , las inferiores los de $\neg D$ y los intervalos los de $D \wedge \neg D$. #

Teorema II.3.8. - Sea D un retículo de presentación finita. Las afirmaciones siguientes son equivalentes :

- (i) $\dim X \leq 2n+1$
- (ii) $\forall x \in B, \exists x_i, y_i \in D, 1 \leq i \leq n+1, x = \bigvee_{i=1}^{n+1} (x_i \wedge \neg y_i)$.

Demostración : Es el dual del I.3.5. #

Para profundizar en el significado de estos teoremas, vamos a dualizar también los corolarios I.2.16, 17 y 18. Sean los conjuntos :

$$\begin{aligned} A_{2n+1} &= \{ x \in B \mid x = x_0 \bigvee_{i=1}^n (x_i \wedge \neg y_i) , \quad x_0, x_i, y_i \in D \} \\ \bar{A}_{2n+1} &= \{ x \in B \mid x = \neg x_0 \bigvee_{i=1}^n (x_i \wedge \neg y_i) , \quad x_0, x_i, y_i \in D \} \\ A_{2n+2} &= \{ x \in B \mid x = \bigvee_{i=1}^{n+1} (x_i \wedge \neg y_i) , \quad x_i, y_i \in D \} \end{aligned}$$

y sean las aplicaciones (que no son morfismos)

$$\begin{aligned} \alpha_{2n+1} &= q_0 \wedge \neg q_1 \wedge \dots \wedge \neg q_{2n+1} : B \rightarrow B_{2n+1} , \quad \bar{\alpha}_{2n+1} = \neg \alpha_{2n+1} \\ \alpha_{2n+2} &= q_0 \wedge \neg q_1 \wedge \dots \wedge q_{2n+2} : B \rightarrow B_{2n+2} . \end{aligned}$$

Proposición II.3.9. - Si D es un retículo de presentación finita, se verifica :

- (i) $A_{2n+1} = \alpha_{2n+1}^{-1}(0)$
- (ii) $\bar{A}_{2n+1} = \bar{\alpha}_{2n+1}^{-1}(0)$
- (iii) $A_{2n+2} = \alpha_{2n+2}^{-1}(0)$

Demostración : (i) es el dual del corolario I.2.17, (ii) lo es del I.2.18 y (iii) del I.2.16. #

Si, en general, denotamos

$$\alpha_n = q_0 \wedge \neg q_1 \wedge \dots : B \longrightarrow B_n, \quad \bar{\alpha}_n = \neg \alpha_n$$

es claro que $\text{Im}(\alpha_n) = \text{Im}(\bar{\alpha}_n)$. Llamaremos C_n a este subconjunto de B_n . Vamos a relacionar C_n con K_n mediante la consideración de las cadenas no degeneradas de X_n .

Lema II.3.10. - Sea X un conjunto ordenado finito y sea $(x_0 \leq \dots \leq x_n) \in X_n$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

- (i) $(x_0 \leq \dots \leq x_n)$ es no degenerada.
- (ii) $\exists U \subseteq X, x_{\text{par}} \in U \wedge x_{\text{impar}} \notin U$.
- (iii) $\exists V \subseteq X, x_{\text{par}} \notin V \wedge x_{\text{impar}} \in V$
- (iv) $\exists U \subseteq X, (x_0 \leq \dots \leq x_n) \in q_0^{-1}(U) \cap cq_1^{-1}(U) \cap \dots$
- (v) $\exists V \subseteq X, (x_0 \leq \dots \leq x_n) \in cq_0^{-1}(U) \cap q_1^{-1}(U) \cap \dots$

Demostración : (i) $\Rightarrow$ (ii) tomando $U = \{x_{\text{par}}\}$. (ii) $\Leftrightarrow$ (i) es obvio. (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) tomando $V = cU$. (iv) es la versión de (ii) utilizando las aplicaciones $q_0, \dots, q_n : X_n \longrightarrow X$. Análogamente - (v) $\Leftrightarrow$ (iii). #

Lema II.3.11. - Sea D un retículo de presentación finita. Si $z \in B_n$ y $Z \subseteq X_n$ son duales, las afirmaciones siguientes son equivalentes :

- (i) $z \in C_n$
- (ii) $\exists U \subseteq X, q_0^{-1}(U) \cap cq_1^{-1}(U) \cap \dots = Z$
- (iii) $\exists V \subseteq X, cq_0^{-1}(V) \cap q_1^{-1}(V) \cap \dots = Z$

Demostración : $z \in C_n \Leftrightarrow \exists u \in B, \alpha_n(u)=z \Leftrightarrow \exists v \in B, \alpha_n(v)=z.$

(ii) y (iii) son los enunciados duales. #

Lema II.3.12..- Sea D un retículo de presentación finita. Si $z \in B_n$ y $Z \subseteq X_n$ son duales, las afirmaciones siguientes son equivalentes :

(i) $z \in K_n$

(ii) Z es un conjunto (finito) de cadenas no degeneradas.

Demostración : (i) $\Leftrightarrow \{s_0, \dots, s_{n-1}\}(z)=0 \Leftrightarrow \langle s_0, \dots, s_{n-1} \rangle^{-1}(Z) = \emptyset \Leftrightarrow s_j^{-1}(Z) = \emptyset, 0 \leq j \leq n-1.$ Esto equivale a (ii) ya que

$(x_0 \leq \dots \leq x_n)$ no degenerada quiere decir que

$s_j^{-1}(x_0 \leq \dots \leq x_n) = \emptyset, 0 \leq j \leq n-1.$ #

Proposición II.3.13..- Sea D un retículo de presentación finita. Para cada $n \geq 1, K_n$ es el ideal de B_n engendrado por C_n .

Demostración : Por ser un núcleo, K_n es un ideal. Si $z \in C_n$, - por el lema II.3.11, parte (ii), y el lema II.3.10, parte (iv), se sigue que cada cadena de Z es no degenerada, luego $z \in K_n$

por el lema II.3.12. Por tanto $C_n \subseteq K_n$. Veamos finalmente que

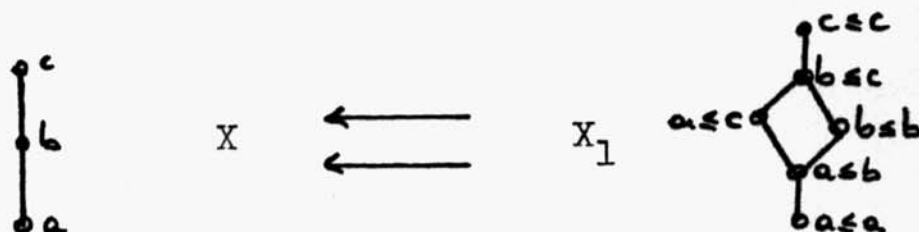
C_n engendra K_n . Si $z \in K_n$, Z es un conjunto finito de cadenas no degeneradas (lema II.3.12), es decir, una unión finita de

átomos $\{ (x_0 \leq \dots \leq x_n) \} \subseteq X$ cuyos duales son elementos de C_n

(lema II.3.11 con $U = \{x_{\text{par}}\}$) así que $z = z_1 \vee \dots \vee z_k$, con

$z_i \in C_n, 0 \leq i \leq k.$ #

El ejemplo siguiente,



tomando $Z = \{(a \leq b), (b \leq c)\} \subseteq X_1$ se tiene $z \in K_n$ pero $z \notin C_n$, así que en general el contenido $C_n \subseteq K_n$ es estricto.

Denotaremos, en general, $A_n = \alpha_n^{-1}(0)$ y $\bar{A}_n = \bar{\alpha}_n^{-1}(0)$.

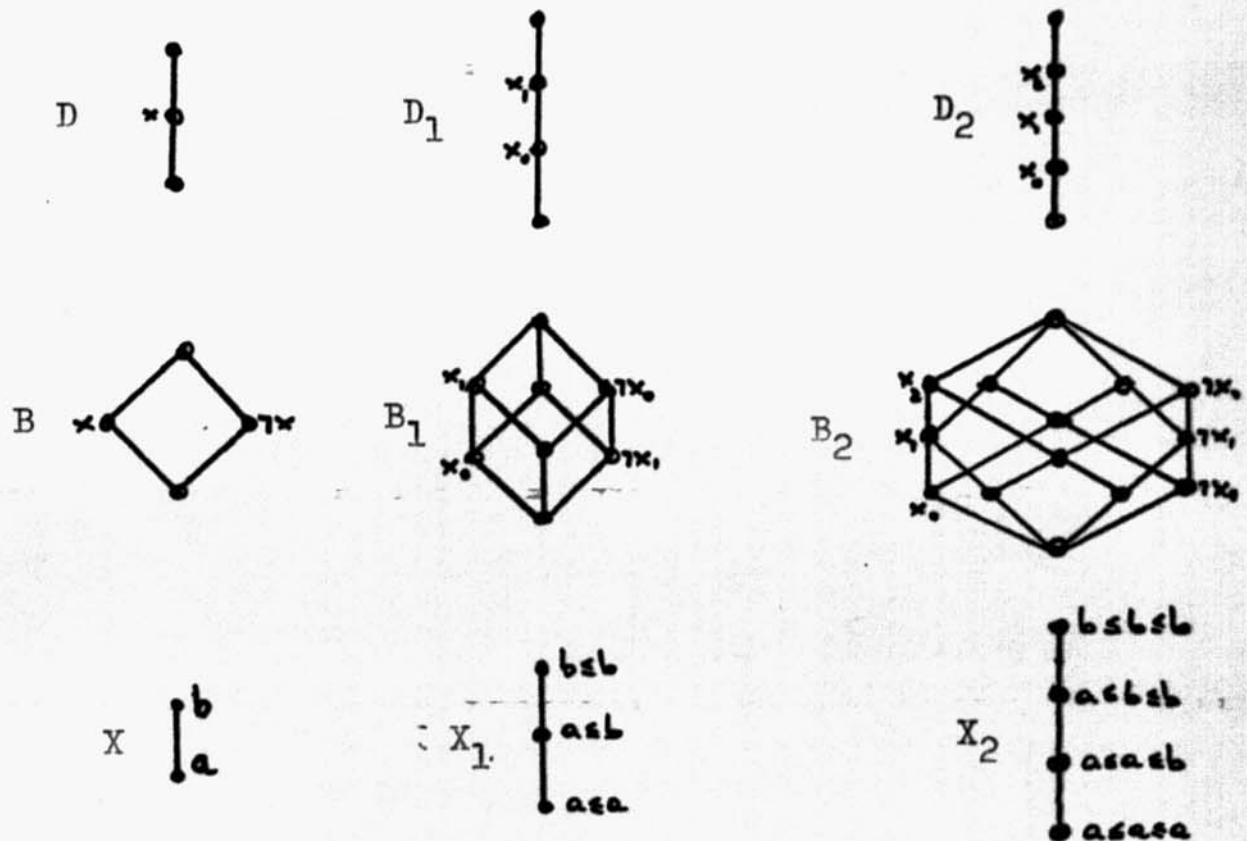
Corolario II.3.14. - Si D es un retículo de presentación finita, las afirmaciones siguientes son equivalentes :

- (i) $K_n = 0$ (i.e. $\dim D \leq n-1$).
- (ii) $C_n = 0$
- (iii) $A_n = B$
- (iv) $\bar{A}_n = B$

Demostración : (i) $\Leftrightarrow$ (ii) por la proposición II.3.13,
(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) por ser $C_n = \text{Im } \alpha_n$ y $A_n = \alpha_n^{-1}(0)$, y análogamente
(ii) $\Leftrightarrow$ (iv). #

Este corolario es un análisis de los teoremas II.3.7 y 8 que nos permitirá extenderlos a un retículo arbitrario mediante procesos de paso a colímites filtrantes de retículos de presentación finita.

Antes de pasar al caso general, notemos que el caso $n=0$ del teorema II.3.7 dice que $\dim D=0$ si y sólo si $D=B=\uparrow D$, es decir, D es un álgebra de Boole. Como ejemplo del teorema II.3.8 para $n=0$, consideremos el siguiente :



Es $\dim X = 1$. En efecto, $\dim X \leq 1$ porque todas las cadenas de X_2 son degeneradas, y se tiene la igualdad porque en X_1 hay una cadena no degenerada.

Por tanto será $\dim D = 1$. En efecto, se tiene
 $s_0: B_2 \longrightarrow B_1 \cap s_0(x_0) = s_0(x_1) = x_0$, $s_0(x_2) = x_1$
 $s_1: B_2 \longrightarrow B_1 \cap s_1(x_0) = x_0$, $s_1(x_2) = s_1(x_1) = x_1$
 así que $K_2 = \ker \{s_0, s_1\} = \ker s_0 \cap \ker s_1 = \{0, x_1 \wedge x_0\} \cap \{0, x_2 \wedge x_1\} = \{0\}$ y por tanto $\dim D \leq 1$. Por otra parte
 $s_0: B_1 \longrightarrow B \cap s_0(x_0) = s_0(x_1) = x$
 verifica $K_1 = \ker s_0 = \{0, x_1 \wedge x_0\} \neq 0$, luego $\dim D = 1$. En este caso se tiene $C_1 = K_1$, lo que puede comprobarse viendo que el conjunto de las cadenas no degeneradas de X_1 es atómico.

Caso general

Asociando a cada retículo D el ideal K_n de B_n obtenemos un functor

$$K_n: \underline{D} \longrightarrow \underline{E}$$

ya que para cada morfismo $f: D \longrightarrow D'$ tenemos un diagrama con mutativo

$$\begin{array}{ccccc} K_n(D) & \hookrightarrow & B_n & \xrightarrow{\{s_0, \dots, s_{n-1}\}} & \prod_n B_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow f_n & & \downarrow \\ K_n(D') & \hookrightarrow & B'_n & \xrightarrow{\{s_0, \dots, s_{n-1}\}} & \prod_n B'_{n-1} \end{array}$$

de manera que f_n induce por restricción $K_n(f)$, aplicación que seguiremos denotando f_n sin riesgo de confusión.

Proposición II.3.15. - Para cada n , K_n conmuta con los colímites filtrantes.

Demostración : Sea $D = \varinjlim \text{filt } D_\alpha$. Según el corolario II.3.4, se tiene $B_n = \varinjlim \text{filt } D_{\alpha n}$. Como los límites finitos conmutan con los colímites filtrantes, se tiene

$$\begin{aligned} \prod_n B_{n-1} &= \varinjlim \text{filt } \prod_n B_{\alpha n-1} \quad , \quad \{s_0, \dots, s_{n-1}\} = \\ &= \varinjlim \text{filt } \{s_{\alpha 0}, \dots, s_{\alpha n-1}\} \text{ y finalmente} \\ K_n = \ker \{s_0, \dots, s_{n-1}\} &= \varinjlim \text{filt } \ker \{s_{\alpha 0}, \dots, s_{\alpha n-1}\} = \\ &= \varinjlim \text{filt } K_{\alpha n} \quad \# \end{aligned}$$

Asociando a cada retículo D el subconjunto C_n de B_n obtenemos un functor

$$C_n: \underline{D} \longrightarrow \underline{E}$$

ya que para cada morfismo $f: D \longrightarrow D'$ se tienen diagramas conmutativos

$$(0 \leq j \leq n) \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{q_j} & B_n \\ f \downarrow & & \downarrow f_n \\ B' & \xrightarrow{q_j} & B'_n \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{\alpha_n} & B_n & \longleftrightarrow & C_n(D) \\ f \downarrow & & \downarrow f_n & & \downarrow \\ B' & \xrightarrow{\alpha_n} & B'_n & \longleftrightarrow & C_n(D') \end{array}$$

de manera que f_n induce por restricción $C_n(f)$, aplicación que seguiremos denotando f_n sin riesgo de confusión.

Proposición II.3.16.— Para cada n , C_n conmuta con los colímites filtrantes.

Demostración : Sea $D = \varinjlim_i \text{filt } D_i$, de manera que

$B_n = \varinjlim_i \text{filt } B_{in} (n \geq 0)$. Si denotamos $h_{in}: B_{in} \longrightarrow B_n$ los mono-

morfismos canónicos, se tiene (ver proposición II.3.3 y corolario II.3.4) $h_{in} q_{ij} = q_j h_i$, $0 \leq j \leq n$, así que $h_{in} \alpha_{in} = \alpha_n h_i$.

Siendo esto cierto para cada i , se sigue que $\alpha_n = \varinjlim_i \text{fil } \alpha_{in}$, luego $\varinjlim_i \text{filt } C_{in} \subseteq C_n$. Para ver el contenido inverso, sea

$x_n \in C_n$, así que es $x_n = \alpha_n(x)$ con $x \in B$. Por ser B y B_n colímites filtrantes, existen elementos $x_{i_1} \in B_{i_1}$, $x_{i_2 n} \in B_{i_2 n}$ tales que $x = h_{i_1}(x_{i_1})$, $x_n = h_{i_2 n}(x_{i_2 n})$ y tomando $i_1, i_2 \leq i$ resulta $x = h_i(x_i)$, $x_n = h_{in}(x_{in})$ siendo $x_i = h_{ii_1}(x_{i_1}) \in B_i$, $x_{in} =$

$=h_{ii_2n}(x_{i_2n}) \in B_{in}$. Se tiene $h_{in} \alpha_{in}(x_i) = \alpha_n h_i(x_i) = \alpha_n(x) =$
 $=x_n = h_{in}(x_{in})$ así que, por ser h_{in} monomorfismo, es
 $x_{in} = \alpha_{in}(x_i) \in C_{in}$, luego $x_n = h_{in}(x_{in}) \in \varinjlim_i \text{filt } C_{in}$. $\#$

Si llamamos $\overline{C}_n(D)$ al ideal de B_n engendrado por $C_n(D)$,
 tenemos un functor

$$\overline{C}_n: \underline{D} \longrightarrow \underline{E}$$

que vamos a comparar con K_n , extendiendo así la proposición
 II.3.13 a retículos arbitrarios.

Proposición II.3.17. - Para cada n , $\overline{C}_n = K_n$.

Demostración : Comenzaremos viendo que hay una inclusión na
 tural $C_n \hookrightarrow K_n$. En efecto, se tiene

$$B \xrightarrow{\alpha_n} B_n \xrightarrow{s_j} B_{n-1}$$

$s_j \alpha_n = s_j(q_0 \wedge \neg q_1 \wedge q_2 \wedge \dots) = s_j q_0 \wedge \neg s_j q_1 \wedge s_j q_2 \wedge \dots$
 y como es

$$s_j q_i = \begin{cases} q_i & , \quad i \leq j \quad (0 \leq i \leq n) \\ q_{i-1}, & i > j \quad (0 \leq j \leq n-1) \end{cases}$$

resulta que en la expresión de $s_j \alpha_n$ aparece siempre
 $q_j \wedge \neg q_j$ o bien $\neg q_j \wedge q_j$, en cualquier caso $s_j \alpha_n = 0$. Ya que -
 esto pasa para cada j , es $\{s_0, \dots, s_{n-1}\} (C_n) = 0$, es decir,
 $C_n \subseteq K_n$.

Ya que cada $K_n(D)$ es un ideal de B_n , la inclusión natural anterior se extiende a otra $\bar{C}_n \subseteq K_n$.

Para ver el contenido inverso, sea D un retículo y sea $D = \varinjlim_i \text{filt } D_i$ de manera que cada D_i es de presentación finita. Por las proposiciones II.3.13, 15 y 16, y teniendo en cuenta que la operación de engendrar ideales conmuta con los colímites filtrantes, resulta

$$K_n = \varinjlim_i \text{filt } K_{in} = \varinjlim_i \text{filt } \overline{C}_{in} = \overline{\varinjlim_i \text{filt } C_{in}} = \bar{C}_n. \quad \#$$

El próximo paso será extender la proposición II.3.9 a un retículo arbitrario. Los subconjuntos de $B_n, \bar{A}_n, \alpha_n^{-1}(0)$ y $\bar{\alpha}_n^{-1}(0)$ pueden interpretarse como funtores $\underline{D} \rightarrow \underline{E}$, ya que cada morfismo $D \rightarrow D'$ induce por restricción aplicaciones entre los conjuntos de este tipo en B y B' .

Proposición II.3.18 .- Se verifican las igualdades ($n \geq 0$)

- (i) $A_{2n+1} = \alpha_{2n+1}^{-1}(0)$
- (ii) $\bar{A}_{2n+1} = \bar{\alpha}_{2n+1}^{-1}(0)$
- (iii) $A_{2n+2} = \alpha_{2n+2}^{-1}(0)$

Demostración : Por serlos A_n subconjuntos de B definidos por igualdades polinómicas, es $A_n = \varinjlim_i \text{filt } A_n$. Por ser los $\alpha_n^{-1}(0)$ límites finitos, también conmutan con los colímites filtrantes. Ya que cada retículo D se expresa como $D = \varinjlim_i \text{filt } D_i$ con cada retículo D_i de presentación finita,

usando la proposición II.3.9 se tiene

$$A_{2n+1} = \lim_i \text{filt } A_{i2n+1} = \lim_i \text{filt } \alpha_{i2n+1}^{-1}(0) = \alpha_{2n+1}^{-1}(0)$$

Análogamente se prueban (ii) y (iii). $\neq$

Ya estamos en condiciones de probar, por el camino indicado en el corolario II.3.14, los teoremas II.3.7 y 8 para un retículo arbitrario.

Teorema II.3.19. - Sea D un retículo. Las afirmaciones siguientes son equivalentes :

- (i) $\dim D \leq 2n$
- (ii) $\forall x \in B, \exists x_0, x_i, y_i \in D, 1 \leq i \leq n, x = x_0 \vee \bigvee_{i=1}^n (x_i \wedge \neg y_i)$
- (iii) $\forall x \in B, \exists x_0, x_i, y_i \in D, 1 \leq i \leq n, x = \neg x_0 \vee \bigvee_{i=1}^n (x_i \wedge \neg y_i)$

Demostración : (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Por definición, (i) $\Leftrightarrow K_{2n+1} = 0$. Por la proposición II.3.17, $K_{2n+1} = 0 \Leftrightarrow C_{2n+1} = 0$, y como $C_{2n+1} = \text{Im } \alpha_{2n+1}$, $C_{2n+1} = 0 \Leftrightarrow \alpha_{2n+1}^{-1}(0) = B$. Por la proposición II.3.18, $\alpha_{2n+1}^{-1}(0) = B \Leftrightarrow A_{2n+1} = B$, y esto es (ii). Análogamente se demuestra que (i) $\Leftrightarrow$ (iii), escribiendo en este caso $C_{2n+1} = \text{Im } \bar{\alpha}_{2n+1}$. $\neq$

Teorema II.3.20. - Sea D un retículo. Las afirmaciones siguientes son equivalentes :

- (i) $\dim D \leq 2n+1$
- (ii) $\forall x \in B, \exists x_i, y_i \in D, 1 \leq i \leq n+1, x = \bigvee_{i=1}^{n+1} (x_i \wedge \neg y_i)$

Demostración : Análoga a la del teorema II.3.19. $\neq$

El caso $n=0$ en los teoremas II.3.7 y 19 es (ver teorema I.3.4)

$\dim D = 0 \Leftrightarrow D$ álgebra de Boole.

CAPITULO III

ANILLOS

En este capítulo, §3, definiremos la versión constructiva de la dimensión (de Krull) de un anillo, probando después - que el anillo $K[X]$ de polinomios sobre un cuerpo K tiene di mensión 1.

La dimensión de un anillo es la de su espectro primo - que, en la versión constructiva de [16], es un retículo. En §2 se desarrolla ampliamente el concepto de espectro primo y - el de espectro booleano, versión constructiva del espectro constructible clásico. Se prueba que el espectro booleano de un anillo es el espectro primo de su anillo regular libre, - así como otros teoremas con versión clásica conocida.

Los anillos regulares son el objetivo de §1. El concepto de anillo regular que utilizaremos corresponde al de anillo absolutamente plano de [24] y otros trabajos de álgebra conmutativa. En [24] se construyen los anillos absolutamente planos mediante anillos de polinomios; aquí usaremos colímites para destacar el paralelismo entre anillos y retículos.

§1. Las categorías $\underline{A}$ y $\underline{R}$.

Todos los anillos que utilizaremos serán conmutativos y unitarios, con los homomorfismos de anillos conservando la - unidad. $\underline{A}$ será la categoría de anillos.

En concepto de ideal será el usual en álgebra conmutatii

va. El radical de un ideal I de un anillo A será el ideal $N(I) = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}$. En particular, si $I = (a)$ es el ideal engendrado por $a \in A$, escribiremos $N(a)$ para el radical de I . El nilradical de A es $N = N(0)$, es decir el conjunto de los elementos idempotentes de A . Cada ideal I de A da lugar a un anillo cociente A/I y a un homomorfismo suprayectivo $A \longrightarrow A/I$.

También entenderemos de la manera habitual la noción de subconjunto multiplicativo S de A y de anillo de fracciones $S^{-1}(A)$, con el epimorfismo (no suprayectivo en general) $A \longrightarrow S^{-1}(A)$. Si $a \in A$, $S = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto multiplicativo de A y escribimos $A_a = S^{-1}(A)$. Este ejemplo de localización es el único que usaremos en lo que sigue.

Las unidades de un anillo A son los elementos inversibles de A . Un cuerpo es un anillo K tal que $\neg(1=0)$ y para cada $x \in K$, es x unidad ó $x=0$.

Todas las nociones básicas de álgebra conmutativa que usaremos están en .

Epimorfismos universales

Sea A un anillo y $a \in A$. El homomorfismo suprayectivo canónico $p: A \longrightarrow A/(a)$ es universal respecto a la propiedad $p(a)=0$. Análogamente, el epimorfismo canónico $q: A \longrightarrow A_a$ lo es respecto a $q(a)$ unidad. Estos hechos tienen una clara semejanza con los teoremas II.1.3 y 4 que se precisará más adelante. A continuación vamos a encontrar el enunciado de anillos semejante al teorema II.1.5.

Definición III.1.1. - Un elemento a de un anillo A se dice regular si existe $b \in A$ tal que $ab=a$, y se dice que $a' \in A$

es J-inverso de a si $aa'a=a$ y $a'aa'=a'$.

Proposición III.1.2.— Sea A un anillo y $a \in A$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes :

- (i) a es regular
- (ii) a tiene J-inverso
- (iii) Existen dos elementos $e, a' \in A$ tales que $e^2=e, e=aa', ea=a, ea'=a'$.

Demostración : (i) $\Rightarrow$ (ii) Si $aba=a$, sea $a'=bab$. Se tiene $aa'a=ababa=aba=a$ y $a'aa'=bababab=babab=bab=a'$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si a' es el J-inverso de a , sea $e=aa'$. Entonces $e^2=aa'aa'=aa'=e$, $ea=aa'a=a$, $ea'=aa'a'=a'aa'=a'$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $aa'a=ea=a$. #

Proposición III.1.3.— Sea A un anillo y $a \in A$. Se verifica :

- (i) Si a es regular su J-inverso a' es único.
- (ii) Si a es idempotente, entonces a es regular y $a'=a$.
- (iii) a es unidad si y sólo si a es regular y $e=1$.

Demostración : (i) Sean a' y a'' dos J-inversos de a . Si $e=aa'$, es $e=aa'=aa''aa'=aa''$, así que e verifica la parte (iii) de la proposición III.1.2 para a' y a'' . En consecuencia, $a'=ea'=aa''a'=ea''=a''$.

(ii) Si $a^2=a$, es $a^3=a$. (iii) es obvio. #

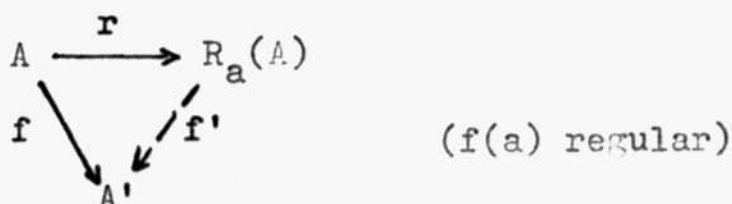
En la proposición anterior, el recíproco de (ii) es falso. Así por ejemplo, si $A = \mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$ y $a=2$, se verifica que a es regular con $a'=a$ (pues $2^3=2$) pero no es idempotente ($2^2=1$).

Las propiedades siguientes de los conceptos de elemento regular y J-inverso se deducen inmediatamente de las definiciones.

Proposición III.1.4. - (i) Si a, b son elementos regulares de un anillo A , entonces ab es regular y $(ab)' = a'b'$,
(ii) Si $f: A \rightarrow A'$ es un homomorfismo de anillos y $a \in A$ es regular, entonces $f(a)$ es regular y $f(a)' = f(a')$. $\neq$

El teorema siguiente es el enunciado de anillos semejante al teorema II.1.5.

Teorema III.1.5. - Sea A un anillo y $a \in A$. Existe un homomorfismo $r: A \rightarrow R_a(A)$ tal que $r(a)$ es regular y que cada homomorfismo $f: A \rightarrow A'$ tal que $f(a)$ es regular factoriza a través de r de manera única.



Demostración : Sea el anillo $R_a(A) = A/(a) \times A_a$ y el homomorfismo

$$r = \{ p, q \} : A \rightarrow R_a(A)$$

$$x \mapsto r(x) = (x + (a), x)$$

El elemento $r(a) = (0, a)$ es regular con J-inverso $r(a)' = (0, \frac{1}{a})$,
pues

$$(0, a)(0, \frac{1}{a})(0, a) = (0, 1)(0, a) = (0, a)$$

$$(0, \frac{1}{a})(0, a)(0, \frac{1}{a}) = (0, 1)(0, \frac{1}{a}) = (0, \frac{1}{a})$$

Dado un homomorfismo $f: A \rightarrow A'$ con $b = f(a)$ regular, definimos $f': R_a(A) \rightarrow A'$ mediante

$$f'(x+(a), \frac{y}{a^m}) = f(x)(1-bb') + f(y)bb'b'^m$$

Si $m=0$, $bb'b'^m = bb'$ y si $m \geq 1$, $bb'b'^m = b'^m$. En particular,

$$f'(x+(a), x) = f(x)(1-bb') + f(x)bb' = f(x)$$

así que $f'r = f$. Hay que probar ahora que :

(i) f' es una aplicación. Es decir,

$$(x+(a), \frac{y}{a^m}) = (u+(a), \frac{v}{a^n}) \Rightarrow f'(x+(a), \frac{y}{a^m}) = f'(u+(a), \frac{v}{a^n})$$

En efecto, por una parte se tiene $x+(a) = u+(a)$, es decir

$u = x + ta$ con $t \in A$; por tanto, ya que $b(1-bb') = b - b = 0$, es

$f(u)(1-bb') = f(x)(1-bb') + f(t)b(1-bb') = f(x)(1-bb')$. Por otra -

parte, $\frac{y}{a^m} = \frac{v}{a^n}$ equivale a la existencia de $h \in \mathbb{N}$ tal que

$a^h(a^n y - a^m v) = 0$. Aplicando f resulta $b^{h+n}f(y) = b^{h+m}f(v)$, así que,

por ser bb' idempotente, se tiene $f(v)bb'b'^n = f(v)(bb')^{h+m+1}b'^n =$

$= b^{h+m}f(v)bb'b'^{h+m+n} = b^{h+n}f(y)bb'b'^{h+m+n} = f(y)(bb')^{h+n+1}b'^m =$

$= f(y)bb'b'^m$.

(ii) f' es homomorfismo. Es claro que $f'(1+(a), 1) = f'r(1) =$

$= f(1) = 1$. Además, por ser bb' idempotente,

$$f' \left[(x+(a), \frac{y}{a^m}) + (u+(a), \frac{v}{a^n}) \right] = f'(x+u+(a), \frac{a^n y + a^m v}{a^{m+n}}) =$$

$$= f(x+u)(1-bb') + f(a^n y + a^m v)bb'b'^{m+n} =$$

$$= [f(x) + f(u)](1-bb') + [b^n f(y) + b^m f(v)]bb'b'^{m+n} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[f(x)(1-bb') + f(y)(bb')^{n+1}b^m \right] + \left[f(u)(1-bb') + f(v)(bb')^{m+1}b^n \right] = \\
 &= \left[f(x)(1-bb') + f(y)bb'b^m \right] + \left[f(u)(1-bb') + f(v)bb'b^n \right] = \\
 &= f'(x+(a), \frac{y}{a^m}) + f'(u+(a), \frac{v}{a^n}).
 \end{aligned}$$

Por último, siendo bb' y $1-bb'$ idempotentes y $b(1-bb')=0$,

$$\begin{aligned}
 f' \left[(x+(a), \frac{y}{a^m})(u+(a), \frac{v}{a^n}) \right] &= f'(xu+(a), \frac{yv}{a^{mn}}) = \\
 &= f(xu)(1-bb') + f(yv)bb'b^{mn} = f(xu)(1-bb')^2 + f(yv)(bb')^2b^{mn} = \\
 &= f(x)(1-bb')f(u)(1-bb') + f(y)bb'b^mf(v)bb'b^n = \\
 &= \left[f(x)(1-bb') + f(y)bb'b^m \right] \left[f(u)(1-bb') + f(v)bb'b^n \right] = \\
 &= f'(x+(a), \frac{y}{a^m})f'(u+(a), \frac{v}{a^n}).
 \end{aligned}$$

(iii) f' es el único homomorfismo tal que $f'r=f$. Si un homomorfismo $g:R_a(A) \longrightarrow A'$ verifica $gr=f$, entonces (proposición III.1.4) $g(o, a)=gr(a)=f(a)=b$ implica $g(o, \frac{1}{a})=b'$; por tanto

$$\begin{aligned}
 g(o, 1) &= g \left[(o, a)(o, \frac{1}{a}) \right] = g(o, a)g(o, \frac{1}{a}) = bb' \text{ y } g(1, o) = \\
 &= g \left[(1, 1) - (o, 1) \right] = g(1, 1) - g(o, 1) = gr(1) - bb' = 1 - bb'. \text{ Aplicando -} \\
 &\text{estos resultados se tiene}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g(x+(a), \frac{y}{a^m}) &= g \left[(x+(a), o) + (o, \frac{y}{a^m}) \right] = \\
 &= g(x+(a), o) + g(o, \frac{y}{a^m}) = g \left[r(x)(1, o) \right] + g \left[r(y)(o, 1)(o, \frac{1}{a})^m \right] = \\
 &= f(x)(1-bb') + f(y)bb'b^m = f'(x+(a), \frac{y}{a^m})
 \end{aligned}$$

luego $g=f'$.

$\#$

Corolario III.1.6..- Sea A un anillo, $a \in A$ y $r: A \rightarrow R_a(A)$ el homomorfismo del teorema III.1.5. Se verifica :

- (i) r es epimorfismo
- (ii) a es regular si y sólo si r es isomorfismo.

Demostración : (i) equivale a la unicidad en el teorema III.1.5.

(ii) Si a es regular, $\text{id}: A \rightarrow A$ factoriza a través de r , siendo además

$$\begin{aligned} r \text{id}'(x+(a), \frac{y}{a^m}) &= r \left[x(1-aa') + yaa'a'^m \right] = \\ &= r(x)r(1-aa') + r(y)r(aa')r(a')^m = (x+(a), x)(1, 0) + \\ &+ (y+(a), y)(0, 1)(0, \frac{1}{a})^m = (x+(a), \frac{y}{a^m}) \end{aligned}$$

así que r e id' son isomorfismos inversos. Recíprocamente, - si r es isomorfismo con inverso $\bar{r}$, es $a = \bar{r}(a, 0)$ con $(a, 0)$ regular, así que a es regular según la proposición III.1.4. ~~##~~

Regularización

En el teorema III.1.5 hemos encontrado el "mínimo" anillo extensión de A en el que un elemento $a \in A$ "se hace" regular; en otras palabras, hemos regularizado $a \in A$. El paso siguiente va a ser regularizar todos los elementos de A .

Definición III.1.7..- Un anillo A se dice regular si todos sus elementos son regulares.

Notar que, según la proposición III.1.3, 0 y 1 son elementos regulares en todo anillo.

Sea $\underline{R}$ la subcategoría plena de $\underline{A}$ formada por los anillos regulares.

Vamos pues a construir el anillo regular libre sobre un anillo A , es decir, un adjunto a izquierda del functor inclusión $\underline{R} \longrightarrow \underline{A}$. La proposición II.1.8 es la construcción semejante para retículos.

Teorema III.1.8. - El functor olvido $\underline{R} \longrightarrow \underline{A}$ tiene un adjunto a izquierda $R: \underline{A} \longrightarrow \underline{R}$.

Demostración : Para cada anillo A , sea $R(A)$ el coproducto fibrado de la familia de homomorfismos (teorema III.1.5)

$$\{ r_a: A \longrightarrow R_a(A); a \in A \}$$

(En la terminología de [1], es el producto tensorial de la familia anterior de A -álgebras). Si las inclusiones canónicas las denotamos $f_a: R_a(A) \longrightarrow R(A)$, entonces todas las composiciones $f_a r_a (a \in A)$ son iguales así que definen un morfismo

$$r: A \longrightarrow R(A)$$

Si $R(A)$ es regular (lo que probaremos más adelante) la existencia de la adjunción enunciada equivale (ver [2]) a la siguiente propiedad universal de r :

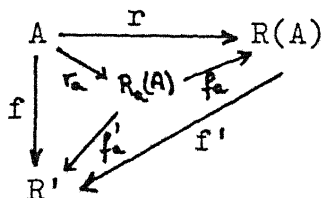
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{r} & R(A) \\ f \downarrow & \swarrow f' & \\ R' & & \end{array} \quad (R' \text{ regular})$$

Veamos que para cada homomorfismo $f: A \longrightarrow R'$, con R' regular, existe un único homomorfismo f' tal que $f'r=f$. En efecto, para cada $a \in A$, por ser $f(a)$ regular,

$$\exists! f'_a \text{ m } f'_a r_a = f$$

Y siendo todas las composiciones $f'_a r_a (a \in A)$ iguales,

$$\exists ! f' \text{ m } \forall a \in A, f' f_a = f'_a$$



Se tiene: $f' r = f' f_a r_a = f'_a r_a = f$ (con $a \in A$ arbitrario). Finalmente, si $g: R(A) \rightarrow R'$ es un homomorfismo tal que $gr=f$, entonces se verifica, para cada $a \in A$, $gf_a r_a = gr = f = f' f_a r_a$, así que por la unicidad de f'_a es $gf_a = f'_a$ para cada $a \in A$, luego $g=f'$ por la unicidad de f' .

Terminaremos la demostración probando que $R(A)$ es regular, es decir, que cada elemento $\xi \in R(A)$ es regular.

Si es $\xi = r(a)$ con $a \in A$, entonces $\xi = f_a r_a(a)$ y $r_a(a)$ es regular en $R_a(A)$, así que ξ es regular según la proposición III.1.4.

Sea ahora $\xi = f_a(\alpha)$, con $\alpha \in R_a(A)$. Entonces (ver teorema III.1.5) se tiene :

$$\alpha = (x+(a), \frac{y}{a^m}) = r_a(x)(1,0) + r_a(y)(0, \frac{1}{a})^m$$

luego

$$\xi = f_a(\alpha) = r(x)f_a(1,0) + r(y)f_a(0, \frac{1}{a})^m$$

Como ya hemos visto que $r(x)$ y $r(y)$ son regulares, si $r(x)'$ y $r(y)'$ son sus J-inversos respectivos, definimos el elemento de $R(A)$

$$\xi' = r(x)' f_a(1, 0) + r(y)' f_a(0, a)^m$$

Ya que $(1, 0)' = (1, 0)$, $(0, \frac{1}{a})' = (0, a)$ y $(0, a)(1, 0) = 0 = (0, \frac{1}{a})(1, 0)$, es inmediato comprobar, usando la proposición III.1.4, que $\xi \xi' \xi = \xi$ y que $\xi' \xi \xi' = \xi'$; luego ξ es regular con J-inverso ξ' .

Antes de considerar un elemento arbitrario $\xi \in R(A)$, vamos a detallar una construcción de $R(A)$ como colímite filtrante de anillos (ver [1]). Es

$$R(A) = \varinjlim_{S \in I} R_S(A)$$

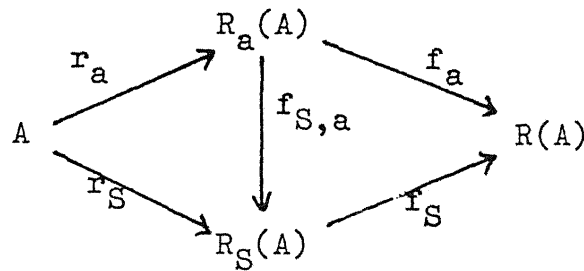
siendo I el conjunto de las partes finitas de A ordenado por inclusión (luego I es filtrante) y

$$R_S(A) = R_{a_1}(A) \otimes \cdots \otimes R_{a_m}(A)$$

si es $S = \{a_1, \dots, a_m\} \in I$, con los productos tensoriales sobre A . Las igualdades

$$r_S(a) = r_{a_1}(a) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 = \cdots = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes r_{a_m}(a)$$

definen un homomorfismo $r_S: A \longrightarrow R_S(A)$ que es universal respecto a la propiedad " $r_S(a)$ regular para cada $a \in S$ ". Siendo $a \in S \in I$, se tiene el diagrama conmutativo de homomorfismos canónicos



En virtud de esta construcción como colímite filtrante de $R(A)$, cada elemento $\xi \in R(A)$ es de la forma $\xi = f_S(\alpha)$, con $S = \{a_1, \dots, a_m\} \subseteq A$ y $\alpha \in R_S(A)$. Este elemento α será una suma finita de elementos de la forma

$\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_m$, con $\alpha_i \in R_{a_i}(A)$, $1 \leq i \leq m$. Pero

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_m &= (\alpha_1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1) \dots (1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \alpha_m) = \\
 &= f_{Sa_1}(\alpha_1) \dots f_{Sa_m}(\alpha_m)
 \end{aligned}$$

así que $\xi = f_S(\alpha)$ es una suma finita de elementos de la forma

$$f_S(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_m) = f_{a_1}(\alpha_1) \dots f_{a_m}(\alpha_m)$$

Pero hemos visto más arriba que cada elemento $f_a(\alpha)$ es una expresión $r(x)u + r(y)v$ con u, v regulares y $uv=0$, luego

$$\begin{aligned}
 f_{a_1}(\alpha_1) \dots f_{a_m}(\alpha_m) &= \prod_{i=1}^m [r(x_i)u_i + r(y_i)v_i] = \\
 &= \sum r(x_{i_1} \dots x_{i_r} y_{i_{r+1}} \dots y_{i_m}) u_{i_1} \dots u_{i_r} v_{i_{r+1}} \dots v_{i_m}
 \end{aligned}$$

Cada elemento $u_{i_1} \dots u_{i_r} v_{i_{r+1}} \dots v_{i_m}$ es regular por ser un pro

ducto de elementos regulares (proposición III.1.4) y el producto de dos de estas expresiones distintas es 0, pues algún u_{ij} en una de ellas cambiará por v_{ij} en la otra, siendo $u_{ij}v_{ij}=0$. Por tanto, cada $\xi \in R(A)$ es de la forma

$$\xi = \sum_{i=1}^m r(x_i)u_i, \quad \begin{cases} u_i \text{ regular}, 1 \leq i \leq m. \\ u_i u_j = 0, 1 \leq i, j \leq m, i \neq j. \end{cases}$$

Definimos ahora el elemento de $R(A)$

$$\xi' = \sum_{i=1}^m r(x_i)'u_i'$$

Si $i \neq j$, es $u_i u_j' = u_i u_j' u_j u_j' = (u_i u_j) u_j' u_j' = 0$, de manera que

$$\xi \xi' = \sum_{i,j} r(x_i) r(x_j)' u_i u_j' = \sum_i r(x_i) r(x_i)' u_i u_i'$$

y por tanto, con idénticos cálculos,

$$\xi \xi' \xi = \sum_i r(x_i) r(x_i)' r(x_i) u_i u_i' u_i = \sum_i r(x_i) u_i = \xi$$

Análogamente se verifica que $\xi' \xi \xi' = \xi'$. En definitiva, ξ es regular con J-inverso ξ' .

En la adjunción del teorema anterior, el functor libre R se define sobre los morfismos mediante el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{r} & R(A) \\ f \downarrow & & \downarrow R(f) \\ A' & \xrightarrow{r} & R(A') \end{array}$$

siendo r la unidad de la adjunción.

Corolario III.1.9..- Sea A un anillo. Se verifica :

- (i) $r:A \longrightarrow R(A)$ es epimorfismo
- (ii) A es regular si y sólo si r es isomorfismo

Demostración : (i) Si $fr=gr$, entonces $ff_a r_a = gf_a r_a$ y como r_a es epimorfismo (corolario III.1.6) si tiene $ff_a = gf_a$. Pero esta igualdad es válida para cada $a \in A$, así que por la unicidad en el coproducto es $f=g$.

(ii) Si A es regular, cada r_a es isomorfismo (corolario III.1.6) luego r es isomorfismo. El recíproco es obvio. #

§2. Espectros de un anillo.

En álgebra conmutativa clásica, el espectro primo de un anillo es el conjunto de sus ideales primos dotado de una cierta topología (ver [1]). Para elaborar nuestro concepto constructivo, además de prescindir de consideraciones topológicas, sustituiremos los ideales primos de un anillo A por unas aplicaciones $A \longrightarrow D$ de A en un retículo D que llamaremos, siguiendo a [16], nociones de cero. Si $D=2$, una noción de cero es la aplicación característica de un ideal primo complementado de A .

Noción de cero

Recordemos que un ideal I de un anillo A se dice primo si

$$\{1\} \cap I = \emptyset \quad \text{y} \quad (xy \in I \Rightarrow x \in I \text{ ó } y \in I)$$

Definición III.2.1..- Una noción de cero de un anillo A es una aplicación $z:A \longrightarrow D$ que verifica

$$\begin{aligned} z(0) &= 1, & z(1) &= 0 \\ z(xy) &= z(x) \vee z(y) \\ z(x+y) &\geq z(x) \wedge z(y) \end{aligned}$$

Proposición III.2.2.— Sean un anillo A y una aplicación $z: A \rightarrow 2$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes :

- (i) z es una noción de cero
- (ii) $I = z^{-1}(1)$ es un ideal primo.

Demostración : (i) $\Rightarrow$ (ii). Es claro que $z(0)=1$ implica $0 \in I$ y que $z(1)=0$ implica $\{1\} \cap I = \emptyset$. Además

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in I \\ \wedge \\ y \in I \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z(x)=1 \\ \wedge \\ z(y)=1 \end{array} \right\} \Rightarrow z(x+y) \geq z(x) \wedge z(y) = 1 \Leftrightarrow z(x+y)=1 \Leftrightarrow x+y \in I$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in I \\ \wedge \\ y \in A \end{array} \right\} \Rightarrow z(xy) = z(x) \vee z(y) = 1 \vee z(y) = 1 \Leftrightarrow xy \in I$$

$$xy \in I \Leftrightarrow z(x) \vee z(y) = z(xy) = 1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z(x)=1 \\ \vee \\ z(y)=1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in I \\ \vee \\ y \in I \end{array} \right\}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Por una parte, $0 \in I$ implica $z(0)=1$ y $\{1\} \cap I = \emptyset$ implica $z(1)=0$. Por otra parte,

$$z(xy)=1 \Leftrightarrow xy \in I \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in I \\ \vee \\ y \in I \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z(x)=1 \\ \vee \\ z(y)=1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow z(x) \vee z(y)=1$$

luego $z(xy)=z(x) \vee z(y)$. Finalmente,

$$z(x) \wedge z(y)=1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z(x)=1 \\ \wedge \\ z(y)=1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in I \\ \wedge \\ y \in I \end{array} \right\} \Rightarrow x+y \in I \Leftrightarrow z(x+y)=1$$

es decir, $z(x+y) \geq z(x) \wedge z(y)$. #

Los subconjuntos de un anillo complementarios de un ideal primo, es decir los de la forma $z^{-1}(0)$ con $z:A \rightarrow 2$ noción de cero, son un tipo especial de subconjuntos multiplicativos que no utilizaremos en este trabajo. En [30] se estudia el espectro de un anillo en un topo a través de subconjuntos multiplicativos y localizaciones.

Damos ahora algunas propiedades de los ideales primos de un anillo en términos de nociones de cero.

Proposición III.2.3. - Para cada noción de cero $z:A \rightarrow D$, se verifica :

- (i) x unidad $\Rightarrow z(x)=0$
- (ii) $z(-x)=z(x)$
- (iii) Si $n \geq 1$, $z(x^n)=z(x)$
- (iv) $x \in N(y) \Rightarrow z(x) \geq z(y)$
- (v) x nilpotente $\Rightarrow z(x)=1$

Demostración : (i) $z(x) \leq z(x) \vee z(x^{-1})=z(xx^{-1})=z(1)=0$. (ii) Por ser -1 unidad, usando (i) se tiene $z(-x)=z(-1) \vee z(x)=0 \vee z(x)=z(x)$. (iii) Procediendo por inducción, si $z(x^{n-1})=z(x)$, se tiene :

$$z(x^n)=z(xx^{n-1})=z(x) \vee z(x^{n-1})=z(x) \vee z(x)=z(x)$$

(iv) $x \in N(y)$ equivale a la existencia de $n \geq 1$ y $a \in A$ tales que $x^n=ay$, así que usando (iii) se tiene

$$z(x)=z(x^n)=z(ay)=z(a) \vee z(y) \geq z(y)$$

(v) Sigue de (iv) con $y=0$. #

Corolario III.2.4. - Para cada noción de cero $z:A \rightarrow D$ y cada elemento $a \in A$, las afirmaciones siguientes son equivalentes

tes :

- (i) $z(a)=1$
- (ii) $\forall x \in (a) , z(x)=1$
- (iii) $\forall x \in N(a) , z(x)=1$

Demostración : Como $a \in (a) \subseteq N(a)$, se tiene $(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$. Para ver que $(i) \Rightarrow (iii)$, notemos que según el apartado (iv) de la proposición III.2.3, $x \in N(a)$ implica $z(x) \geq z(a)=1$, así que $z(x)=1$. #

Proposición III.2.5.— Sea a un elemento regular de un anillo A con J -inverso a' y $e=aa'$ el idempotente asociado. Para cada noción de cero $z:A \rightarrow D$ se verifica :

- (i) $z(e)=z(a')=z(a)$
- (ii) $z(1-e)=\neg z(a)$

Demostración : (i) Usando el apartado (iv) de la proposición III.2.3, la tesis se sigue de la igualdad $(e)=(a')=(a)$. (ii) Es $z(e) \wedge z(1-e) \leq z(e+1-e)=z(1)=0$, así que $z(e) \wedge z(1-e)=0$. Por otra parte, $z(e) \vee z(1-e)=z(e(1-e))=z(0)=1$. Luego $z(1-e)=\neg z(e)=\neg z(a)$ según (i). #

Proposición III.2.6.— Sean un homomorfismo $f:A' \rightarrow A$ de anillos y una aplicación $z:A \rightarrow D$. Se verifica :

- (i) z noción de cero $\Rightarrow zf$ noción de cero
- (ii) f suprayectiva y zf noción de cero $\Rightarrow z$ noción de cero.

Demostración : Es inmediata, pues f conserva todas las operaciones de anillo que aparecen en la definición de noción de cero (III.2.1). #

Cuando varía el retículo, el comportamiento de las nociones de cero de un anillo es el siguiente :

Proposición III.2.7.— Sean un morfismo de retículos $g:D \rightarrow D'$ y una aplicación $z:A \rightarrow D$. Se verifica :

- (i) z noción de cero $\Rightarrow gz$ noción de cero
- (ii) g inyectiva y gz noción de cero $\Rightarrow z$ noción de cero.

Demostración : (i) es obvio, pues g conserva las operaciones reticulares y la relación de orden que aparecen en la definición de noción de cero (III.2.1). (ii) sigue de las mismas consideraciones, teniendo en cuenta , para probar que $z(x+y) \geq z(x) \wedge z(y)$, que g es inyectiva si y sólo si $g(u) \leq g(v)$ implica $u \leq v$. $\#$

Terminaremos el estudio de las nociones de cero de un anillo A relacionándolas con los epimorfismos universales $p:A \rightarrow A/(a)$, $q:A \rightarrow A_a$ y $r:A \rightarrow R_a(A)$ asociados a cada elemento $a \in A$. En esta relación intervendrán los epimorfismos universales de retículos vistos en el capítulo II.

Teorema III.2.8.— Sea A un anillo y $a \in A$. Para cada noción de cero $z:A \rightarrow D$, existe una única noción de cero $z':A/(a) \rightarrow D_{\leq z(a)}$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p} & A/(a) \\ z \downarrow & & \downarrow z' \\ D & \xrightarrow{p} & D_{\leq z(a)} \end{array}$$

Además, para cada noción de cero $z'':A/(a) \rightarrow D''$ y cada morfismo $f:D \rightarrow D''$ tales que $z''p=fz$, existe un único morfismo $f':D_{\leq z(a)} \rightarrow D''$ tal que $f'p=f$ y $f'z'=z''$.

Demostración : Definimos z' mediante

$$z'(x+(a)) = z(x) \wedge z(a)$$

Es claro que $z'(x+(a)) \leq z(a)$, así que $z'(x+(a)) \in D_{\leq z(a)}$.

Veamos que

$$x+(a) = y+(a) \Rightarrow z'(x+(a)) = z'(y+(a))$$

En efecto: $x-y \in (a)$ implica, según la proposición III.2.3, $z(x-y) \succ z(a)$ y $z(y-x) \succ z(a)$; por tanto $z(x) \wedge z(a) \leq z(x) \wedge z(y-x) \leq z(x+y-x) = z(y)$, luego $z(x) \wedge z(a) \leq z(y) \wedge z(a)$. Análogamente se prueba la desigualdad opuesta y en consecuencia la igualdad $z(x) \wedge z(a) = z(y) \wedge z(a)$.

Teniendo en cuenta el teorema II.1.3, la aplicación z' - que acabamos de definir verifica la conmutatividad $z'p = pz'$ - exigida, y es única por ser $p: A \rightarrow A(a)$ suprayectiva.

Sólo queda probar que z' es noción de cero. En efecto :

$$z'(0) = z(0) \wedge z(a) = 1 \wedge z(a) = z(a) = 1 \quad (\text{en } D_{\leq z(a)})$$

$$z'(1) = z(1) \wedge z(a) = 0 \wedge z(a) = 0.$$

$$z'(xy+(a)) = z(xy) \wedge z(a) = [z(x) \vee z(y)] \wedge z(a) = [z(x) \wedge z(a)] \vee [z(y) \wedge z(a)] = z'(x+(a)) \vee z'(y+(a)).$$

$$z'(x+y+(a)) = z(x+y) \wedge z(a) \geq z(x) \wedge z(y) \wedge z(a) = [z(x) \wedge z(a)] \wedge [z(y) \wedge z(a)] = z'(x+(a)) \wedge z'(y+(a)).$$

Para probar la segunda parte del teorema (carácter universal del cuadrado conmutativo $z'p = pz'$), sean una noción de cero z'' y un morfismo y tales que $z''p = fz$. Como $f[z(a)] = z''[p(a)] = z''(0) = 1$, el teorema II.1.3 asegura la existencia de un morfismo f' único tal que $f'p = f$. Además f' verifica $f'z'p = f'pz' = fz = z''p$, así que $f'z' = z''$ por ser p un homomorfismo suprayectivo.

#

Corolario III.2.9..- Sea A un anillo y $a \in A$. Para cada noción de cero $z: A \rightarrow D$ tal que $z(a)=1$, existe una única noción de cero $z': A/(a) \rightarrow D$ tal que $z'p=z$.

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{p} & A/(a) \\
 \downarrow z & \swarrow z' & \\
 D & &
 \end{array}
 \quad (z(a)=1)$$

Demostración : Basta aplicar el teorema III.2.8 notando que, por ser $z(a)=1$, se tiene el isomorfismo $p: D \cong D \leq z(a)$. #

En el corolario anterior, la noción de cero z' es

$$z'(x+(a))=z(x)$$

Se establece así una biyección entre nociones de cero de A y de $A/(a)$ que corresponde a la existente en álgebra conmutativa clásica entre los ideales primos de $A/(a)$ y los ideales primos de A a los que pertenece a ($z(a)=1$ equivale a $a \in I=z^{-1}(1)$). Si consideramos las nociones de cero $A \rightarrow D$ ordenadas para el orden que induce D , esta biyección también es monótona.

Teorema III.2.10..- Sea A un anillo y $a \in A$. Para cada noción de cero $z: A \rightarrow D$, existe una ^{única} noción de cero $z': A_a \rightarrow D \geq z(a)$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{q} & A_a \\
 \downarrow z & & \downarrow z' \\
 D & \xrightarrow{q} & D \geq z(a)
 \end{array}$$

Además, para cada noción de cero $z'' : A \xrightarrow{a} D''$ y cada morfismo $f : D \xrightarrow{\quad} D''$ tales que $z''q = fz$, existe un único morfismo $f' : D \xrightarrow{\geq z(a)} D''$ tal que $f'q = f$ y $f'z' = z''$.

Demostración : Definimos z' mediante

$$z' \left(\frac{x}{a^m} \right) = z(x) \vee z(a) \quad (m \geq 0)$$

Es claro que $z'(x/a^m) \geq z(a)$, así que $z'(x/a^m) \in D_{\geq z(a)}$.

Veamos que

$$\frac{x}{a^m} = \frac{y}{a^n} \Rightarrow z' \left(\frac{x}{a^m} \right) = z' \left(\frac{y}{a^n} \right)$$

En efecto : si es $a^h(a^n x - a^m y) = 0$, usando la proposición III.2.3 se tiene $z(x) \vee z(a) = z(x) \vee z(a^{h+n}) = z(a^{h+n} x) = z(a^{h+m} y) = z(y) \vee z(a^{h+m}) = z(y) \vee z(a)$.

La aplicación z' que acabamos de definir verifica la - conmutatividad $z'q = qz$, pues para cada $x \in A$ es $z'q(x) = z'(x/1) = z(x) \vee z(a) = qz(x)$. La unicidad de z' es clara si se advierte que siendo z' noción de cero se tiene, usando las proposiciones III.2.3 y 5,

$$z' \left(\frac{x}{a^m} \right) = z' \left[\left(\frac{x}{1} \right) \left(\frac{1}{a} \right)^m \right] = z' \left(\frac{x}{1} \right) \vee z' \left(\frac{a}{1} \right) = z' [q(x)] \vee 0 = z' [q(x)]$$

de manera que z' está definida por su valor sobre la imagen de q y las propiedades de noción de cero.

Ahora hay que demostrar que z' es en efecto noción de - cero. Se tiene :

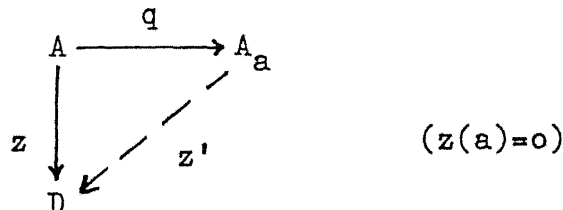
$$\begin{aligned}
 z'(0) &= z(0) \vee z(a) = 1 \vee z(a) = 1 \\
 z'(1) &= z(1) \vee z(a) = 0 \vee z(a) = z(a) = 0 \quad (\text{en } D \geq z(a)) \\
 z'\left(\frac{xy}{a^{m+n}}\right) &= z(xy) \vee z(a) = [z(x) \vee z(y)] \vee z(a) = [z(x) \vee z(a)] \vee \\
 &\quad \vee [z(y) \vee z(a)] = z'\left(\frac{x}{a^m}\right) \vee z'\left(\frac{y}{a^n}\right) \\
 z'\left(\frac{a^n x + a^m y}{a^{m+n}}\right) &= z(a^n x + a^m y) \vee z(a) \geq [z(a^n x) \wedge z(a^m y)] \vee z(a) = \\
 &= [z(a^n x) \vee z(a)] \wedge [z(a^m y) \vee z(a)] = z(a^{n+1} x) \wedge z(a^{m+1} y) = \\
 &= [z(x) \vee z(a^{n+1})] \wedge [z(y) \vee z(a^{m+1})] = [z(x) \vee z(a)] \wedge \\
 &\quad \wedge [z(y) \vee z(a)] = z'\left(\frac{x}{a^m}\right) \wedge z'\left(\frac{y}{a^n}\right)
 \end{aligned}$$

Para probar la segunda parte del teorema, sean una noción de cero z'' y un morfismo f tales que $z''q=fz$. Como $f[z(a)] = z''[q(a)] = z''(1) = 0$, el teorema II.1.4 asegura la existencia de un morfismo f' único que $f'q=f$. Además se verifica

$$z''\left(\frac{x}{a^m}\right) = z''\left(\frac{x}{1}\right) = z''q\left(\frac{x}{1}\right) = fz\left(\frac{x}{1}\right) = f'qz\left(\frac{x}{1}\right) = f'z'q\left(\frac{x}{1}\right) = f'z'\left(\frac{x}{1}\right) = f'z'\left(\frac{x}{a^m}\right)$$

para cada $x/a^m \in A_a$, así que $f'z' = z''$. #

Corolario III.2.11.— Sea A un anillo y $a \in A$. Para cada noción de cero $z: A \rightarrow D$ tal que $z(a)=0$, existe una única noción de cero $z': A_a \rightarrow D$ tal que $z'q=z$.



Demostración : Basta aplicar el teorema III.2.10 al caso en que, por ser $z(a)=0$, el morfismo $q:D \longrightarrow D_{\geq z(a)}$ es isomorfismo. #

En este corolario es

$$z'(\frac{x}{a^m}) = z(x)$$

y se obtiene una biyección entre nociones de cero de A y de A_a que corresponde a la ^{clásica} existente entre los ideales primos de A_a y los de A que no contienen el elemento a . Si se suponen las nociones de cero $A \longrightarrow D$ ordenadas por el orden que induce D , esta biyección es monótona.

Una parte de la demostración del teorema siguiente, relativo al epimorfismo universal r , merece ser destacada como proposición. Ampliamos así las propiedades básicas de las nociones de cero dadas en las proposiciones III.2,3,4 y 5.

Proposición III.2.12. - Para cada noción de cero $z:A \longrightarrow D$ se verifica

$$xy=0 \Rightarrow z(x+y)=z(x) \wedge z(y)$$

Demostración : Se tiene $z(x+y) \vee [z(x) \wedge z(y)] = [z(x+y) \vee z(x)] \wedge [z(x+y) \vee z(y)] = z[(x+y)x] \wedge z[(x+y)y] = z(x^2) \wedge z(y^2) = z(x) \wedge z(y)$, de manera que $z(x+y) \leq z(x) \wedge z(y)$. La desigualdad opuesta se verifica siempre por definición de noción de cero. #

Teorema III.2.13. - Sea A un anillo y $a \in A$. Para cada noción de cero $z:A \longrightarrow D$ existe una única noción de cero $z':R_a(A) \longrightarrow D_{z(a)}$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{r} & R_a(A) \\
 \downarrow z & & \downarrow z' \\
 D & \xrightarrow{r} & D_{z(a)}
 \end{array}$$

Además, para cada noción de cero $z'' : R_a(A) \longrightarrow D''$ y cada morfismo $f : D \longrightarrow D''$ tales que $z''r = fz$, existe un único morfismo $f' : D_{z(a)} \longrightarrow D''$ tal que $f'r = f$ y $f'z' = z''$.

Demostración : Definimos z' mediante

$$z'(x +_a(a), \frac{y}{a_m}) = (z(x) \wedge z(a), z(y) \vee z(a))$$

Si $z'_\leq$ y $z'_\gg$ son ^{las} nociones de cero z' de los teoremas III.2.8 y lo respectivamente, es claro que $z' = z'_\leq \times z'_\gg$ y por tanto z' es una noción de cero (se opera componente a componente) que verifica $z'r = rz$.

Para ver la unicidad de z' , supongamos que otra noción de cero $\bar{z}$ verifica $\bar{z}r = rz$. Por las proposiciones III.2.3 y 5 se tiene

$$\begin{aligned}
 \bar{z}(0, 1) &= \bar{z}\left[\left(0, \frac{a}{1}\right)\left(0, \frac{1}{a}\right)\right] = \bar{z}\left(0, \frac{a}{1}\right) \vee \bar{z}\left(0, \frac{1}{a}\right) = \bar{z}\left(0, \frac{a}{1}\right) = \bar{z}[r(a)] = \\
 &= r[z(a)] = (1, 0)
 \end{aligned}$$

$$\bar{z}(1, 0) = \bar{z}[(1, 1) - (0, 1)] = \neg \bar{z}(0, 1) = \neg (1, 0) = (0, 1)$$

Por tanto se tiene, ya que $(1, 1/a)$ es unidad, y usando la proposición III.2.12,

$$\begin{aligned}
 \bar{z}(x+(a), \frac{y}{a^m}) &= \bar{z}\left[(x+(a), \frac{y}{1})(1, \frac{1}{a})^m\right] = \bar{z}(x+(a), \frac{y}{1}) = \\
 &= \bar{z}\left[(x+(a), \frac{x}{1})(1, 0) + (y+(a), \frac{y}{1})(0, 1)\right] = \\
 &= \bar{z}\left[r(x)(1, 0) + r(y)(0, 1)\right] = \\
 &= [\bar{z}r(x) \vee \bar{z}(1, 0)] \wedge [\bar{z}r(y) \vee \bar{z}(0, 1)] = \\
 &= [rz(x) \vee (0, 1)] \wedge [rz(y) \vee (1, 0)] = \\
 &= (z(x) \wedge z(a), 1) \wedge (1, z(y) \vee z(a)) = \\
 &= (z(x) \wedge z(a), z(y) \vee z(a)) = z'(x+(a), \frac{y}{a^m})
 \end{aligned}$$

es decir, $\bar{z} = z'$.

Veamos ahora el carácter universal del cuadrado conmutativo $z'r=rz$. Sean una noción de cero z'' y un morfismo f tales que $z''r=fz$. Como $r(a)$ es regular, la proposición III.2.5 nos dice que $fz(a)=z''[r(a)]$ tiene complementario; por tanto, según el teorema II.1.5, existe un único morfismo f' tal que $f'r=f$. Nos falta ver que f' también verifica la igualdad $f'z'=z''$. Para ello, operamos con z'' como antes lo hemos hecho con $\bar{z}$ y resulta

$$\begin{aligned}
 z''(0, 1) &= z''(0, \frac{a}{1}) = z''[r(a)] = fz(a) \quad , \quad z''(1, 0) = \neg fz(a) \\
 z''(x+(a), \frac{y}{a^m}) &= [z''r(x) \vee z''(1, 0)] \wedge [z''r(y) \vee z''(0, 1)] = \\
 &= [fz(x) \vee \neg fz(a)] \wedge [fz(y) \vee fz(a)]
 \end{aligned}$$

Por tanto, usando para f' la expresión segunda de las dadas en la demostración del teorema II.1.5, se tiene

$$\begin{aligned}
 f'z'(x+(a), \frac{y}{a^m}) &= f'(z(x) \wedge z(a), z(y) \vee z(a)) = \\
 &= f[z(y) \vee z(a)] \wedge [f[z(x) \wedge z(a)] \vee \neg fz(a)] = \\
 &= [fz(y) \vee fz(a)] \wedge [fz(x) \vee \neg fz(a)] = \\
 &= z''(x+(a), \frac{y}{a^m})
 \end{aligned}$$

es decir, $f'z' = z''$. #

Nota. - En los teoremas III.2.8, 10 y 13 la unicidad de z' es realmente supérflua, pues en cada caso sigue de la segunda parte del teorema correspondiente (carácter universal del diagrama conmutativo). Limitándonos, por ejemplo, al teorema último, una vez probada la existencia de z' y la segunda parte si tomamos $z'' = \bar{z}$ y $f = r$ se tiene $f' = \text{id}$ y por tanto $\bar{z} = z'$, obteniéndose así la unicidad de z' .

Corolario III.2.14. - Sea A un anillo y $a \in A$. Para cada noción de cero $z: A \rightarrow D$ tal que $z(a)$ tiene complementario, existe una única noción de cero $z': A \rightarrow D$ tal que $z'r = z$.

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{r} & R_a(A) \\
 z \downarrow & \swarrow z' & \\
 D & &
 \end{array}
 \quad (\exists \neg z(a))$$

Demostración: Se aplica el teorema III.2.13 considerando que, por tener $z(a)$ complementario, el morfismo $r: D \rightarrow R_a(a)$ es isomorfismo. #

La noción z' del corolario anterior es, según el corolario II.1.6, de la forma

$$z'(x+(a), \frac{y}{a}) = [z(x) \wedge z(a)] \vee [z(y) \wedge \neg z(a)]$$

Y la biyección que hemos obtenido entre nociones de cero de A y de $R_a(A)$ corresponde a la ^{clásica} que se presenta entre los ideales primos de A y los de $R_a(A)$, que no es en general una biyección monótona. El orden se mantiene entre las nociones de cero de A tales que $z(a)=1$ (ideales primos de A que contienen a) y entre las que verifican $z(a)=0$ (ideales primos de A que no contienen a).

Espectro primo

A. Joyal definió en [6] la versión constructiva del espectro primo de un anillo como su noción de cero universal.

Definición III.2.15. - Se llama espectro primo de un anillo A a una noción de cero

$$z_A: A \longrightarrow D(A)$$

tal que para cada noción de cero $z: A \longrightarrow D$ existe un único morfismo $\tilde{z}: D(A) \longrightarrow D$ tal que $\tilde{z}z_A = z$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{z_A} & D(A) \\ \downarrow z & \swarrow \tilde{z} & \\ D & & \end{array}$$

Antes de probar la existencia del par $(D(A), z_A)$, examinaremos algunas consecuencias de la definición anterior que no dependen su conocimiento "interno". Del carácter universal del espectro primo se sigue su unicidad salvo isomorfismos. El teorema de existencia que daremos más adelante nos propon

cionará un espectro primo canónico para cada anillo A .

Proposición III.2.16. - Para cada homomorfismo $f: A \longrightarrow A'$, - existe un único morfismo $D(f): D(A) \longrightarrow D(A')$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{z_A} & D(A) \\ f \downarrow & & \downarrow D(f) \\ A' & \xrightarrow{z_{A'}} & D(A') \end{array}$$

Demostración : Según la proposición III.2.6, $z = z_A$, f es una - noción de cero. Usando la definición de espectro primo de A , basta tomar $D(f) = \tilde{z}$. ~~#~~

Habitualmente diremos que el espectro primo de A es el retículo $D(A)$, sobreentendiendo la noción de cero z_A . Para cada elemento $a \in A$, escribiremos

$$z_A(a) = [a]$$

para el correspondiente elemento de $D(A)$. Los morfismos definidos en la proposición III.2.16 verifican por tanto

$$D(f)[a] = [f(a)]$$

Es un corolario inmediato de la proposición III.2.16 - que se verifican las igualdades

$$D(gf) = D(g)D(f) \quad , \quad D(\text{id}) = \text{id}$$

de manera que se tiene un functor espectro primo

$$D: \underline{A} \longrightarrow \underline{D}$$

Si en la definición III.2.15 tomamos $D=2$, el resultado - es una biyección entre los ideales primos/complementados de

A y los filtros primos complementados de $D(A)$. Desde el punto de vista del álgebra conmutativa clásica se tiene por tanto un diagrama conmutativo (salvo isomorfismo)

$$\begin{array}{ccc} \underline{A} & \xrightarrow{D} & \underline{D} \\ \text{Spec} \searrow & & \swarrow \text{Spec} \\ & \underline{T} & \end{array}$$

donde $\underline{T}$ es la categoría de los espacios topológicos y Spec son los funtores espectro. habituales de anillos (ver [1]) y de retículos (ver [20]). En [15] puede verse el origen "clásico" de la definición constructiva de espectro primo de un anillo.

Proposición III.2.17. - Sea $f:A \longrightarrow A'$ un homomorfismo de anillos. Se verifica :

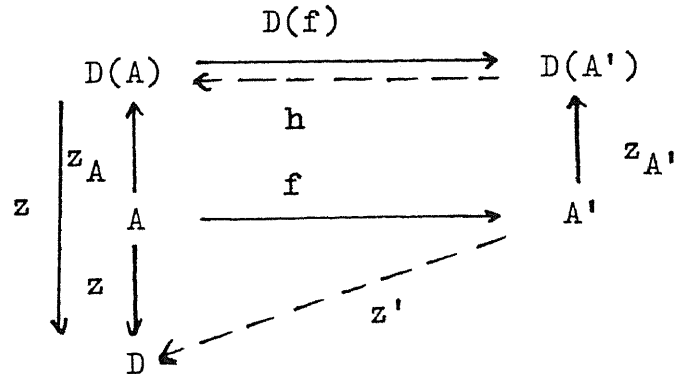
- (i) Para cada noción de cero $z':A' \longrightarrow D$, $\widetilde{z'}D(f) = \widetilde{z'}f$
- (ii) $D(f)$ es isomorfismo si y sólo si para cada noción de -cero $z:A \longrightarrow D$ existe una única noción de cero $z':A' \longrightarrow D$ tal que $z'f=z$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ z \downarrow & \swarrow z' & \\ D & & \end{array}$$

Demos-tración : (i) $\widetilde{z'}f$ es el único morfismo $D(A) \longrightarrow D$ tal que $\widetilde{z'}fz_A = z'f$, y se tiene $\widetilde{z'}D(f)z_A = \widetilde{z'}z_A, f = z'f$.

(ii) Si $D(f)$ es isomorfismo, sea h un inverso. Entonces $z' = \widetilde{z}hz_A$, es una noción de cero (proposición III.2.7) y verifica

$$z'f = \tilde{z}hz_A, f = \tilde{z}hD(f)z_A = \tilde{z}z_A = z$$



Para ver la unicidad de z' , supongamos otra noción de cero z'' tal que $z''f = z_A$; aplicando (i) se tiene

$$\tilde{z}''D(f) = z''f = z_A = \tilde{z}z_A = z$$

y como $D(f)$ es isomorfismo $\tilde{z}'' = \tilde{z}$, es decir $z'' = z$.

Recíprocamente, supongamos ahora cierta la existencia y unicidad de z' para cada z . Tomando $z = z_A$, tenemos por tanto una única noción de cero z'_A tal que $z'_A f = z_A$. Vamos a ver que $h = \tilde{z}'_A$ es el morfismo inverso de $D(f)$. Se verifica $hD(f) = \text{id}$ porque

$$hD(f)z_A = \tilde{z}'_A D(f)z_A = \tilde{z}'_A f z_A = \tilde{z}'_A z_A = \text{id} z_A = z_A$$

Por otra parte, como $D(f)z'_A f = D(f)z_A = z_A$, aplicando la hipótesis resulta $D(f)z'_A = z_A$, y por tanto

$$D(f)hz_A = D(f)\tilde{z}'_A z_A = D(f)z'_A = z_A$$

así que $D(f)h = \text{id}$.

#

Ejemplos

Vamos a dar un primer ejemplo de espectro primo aplicando directamente la definición III.2.15.

Teorema III.2.18.— Sea R un anillo regular y

$$B(R) = \{e \in R \mid e^2 = e\}$$

Entonces $D(R) \cong B(R)$.

Demostración : Es un ejercicio elemental verificar que el conjunto $B(R)$ de los elementos idempotentes de un anillo R (no es necesario que sea regular) es un álgebra de Boole con las operaciones

$$e \wedge f = ef, \quad e \vee f = e + f - ef, \quad \neg e = 1 - e$$

y siendo 0 y 1 los de R .

Si R es regular (y x' es el J-inverso de x) podemos definir la aplicación

$$z: R \longrightarrow B(R)$$

$$x \longmapsto z(x) = 1 - xx'$$

y vamos a ver que $(B(R), z)$ es el espectro primo de R .

En primer lugar, z es una noción de cero :

$$z(0) = 1 - 0 = 1, \quad z(1) = 1 - 1 = 0$$

$$z(xy) = 1 - xy(xy)' = 1 - xyx'y' = (1 - xx') + (1 - yy') - (1 - xx')(1 - yy') =$$

$$= z(x) + z(y) - z(x)z(y) = z(x) \vee z(y)$$

$$z(x+y) \geq z(x) \wedge z(y) \Leftrightarrow z(x+y) \wedge z(x) \wedge z(y) = z(x) \wedge z(y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z(x+y)z(x)z(y) = z(x)z(y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [1 - (x+y)(x+y)'](1 - xx')(1 - yy') = (1 - xx')(1 - yy') \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x+y)'(1 - xx')(1 - yy') = 0$$

y esta igualdad es cierta porque $x(1-xx')=x-x=0$ y análogamente $y(1-yy')=0$, luego $(x+y)(1-xx')(1-yy')=0$.

Para probar el carácter universal de z , supongamos una noción de cero arbitraria $z': R \rightarrow D$. Definimos

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{z} & B(R) \\ z' \downarrow & \swarrow \tilde{z}' & \\ D & & \end{array} \quad z'(e)=z'(1-e)=\neg z'(e)$$

La aplicación $\tilde{z}'$ verifica $\tilde{z}'z=z'$, pues para cada $x \in R$
 $\tilde{z}'z(x)=\tilde{z}'(1-xx')=z'(xx')=z'(x) \vee z'(x')=z'(x) \vee z'(x)=z'(x)$

Vamos ahora a demostrar que z' es morfismo :

$$\begin{aligned} \tilde{z}'(0) &= z'(1-0) = z'(1) = 0, & \tilde{z}'(1) &= z'(1-1) = z'(0) = 1 \\ \tilde{z}'(e \wedge f) &= \tilde{z}'(ef) = \neg z'(ef) = \neg [z'(e) \vee z'(f)] = \neg z'(e) \wedge \neg z'(f) = \\ &= \tilde{z}'(e) \wedge \tilde{z}'(f) \\ \tilde{z}'(e \vee f) &= \tilde{z}'(e+f-ef) = z'(1-e-f+ef) = z'[(1-e)(1-f)] = \\ &= z'(1-e) \vee z'(1-f) = \tilde{z}'(e) \vee \tilde{z}'(f). \end{aligned}$$

Finalmente, la unicidad de z' es consecuencia de ser z una aplicación suprayectiva. En efecto, para cada idempotente $e \in R$, es

$$z(1-e) = 1 - (1-e)(1-e) = 1 - (1-e) = e. \#$$

Corolario III.2.19. - Si K es un cuerpo, $D(K) \cong 2$.

Demostración : Un cuerpo es un anillo regular con $B(K)=2$. #

Otros cálculos de espectros primos que podemos realizar a partir de las propiedades universales son los relativos al anillo reducido y a los epimorfismos universales.

Teorema III.2.20.— Sea A un anillo y N su radical. Entonces

$$D(A/N) \cong D(A)$$

Demostración : Si $p:A \longrightarrow A/N$ es el epimorfismo canónico, vamos a ver que $D(p)$ es isomorfismo mediante la caracterización dada en la proposición III.2.17. Sea pues una noción de cero $z:A \longrightarrow D$.

Médiate

$$z'(x+N)=z(x)$$

definimos una aplicación, pues

$$x-y \in N \Rightarrow z(x)=z(y)$$

En efecto: según el corolario III.2.4, por ser $N=N(o)$, es $z(x-y)=1$ si $x-y \in N$ y entonces $z(x)=z(y+x-y) \gg z(y) \wedge z(x-y)=z(y)$; análogamente se prueba que $z(y) \gg z(x)$.

Es claro que z' se ha definido de manera que se cumpla $z'p=z$, luego z' es noción de cero según la proposición III.2.6. La unicidad de z' también es consecuencia de ser p suprayectiva. #

Teorema III.2.21.— Sea A un anillo y $a \in A$. Entonces :

- (i) $D(A/(a)) \cong D(A)_{\leq \{a\}}$
- (ii) $D(A_a) \cong D(A)_{\gg \{a\}}$
- (iii) $D(R_a(A)) \cong D(A)_{(a)}$

Demostración : (i) Aplicando el teorema III.2.8 a la noción

de cero z_A se tiene un cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p} & A/(a) \\ z_A \downarrow & & \downarrow z'_A \\ D(A) & \xrightarrow{p} & D(A) \leq [a] \end{array}$$

con la correspondiente propiedad universal. Por tanto,

$$z_{A/(a)} p = D(p) z_A \Rightarrow \exists! h: D(A) \leq [a] \longrightarrow D(A/(a)) \text{ tal que } \begin{cases} hp = D(p) \\ h z'_A = z_{A/(a)} \end{cases}$$

Por otra parte se tiene el morfismo z'_A , único que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A/(a) & \xrightarrow{z_{A/(a)}} & D(A/(a)) \\ z'_A \downarrow & \nwarrow \widetilde{z'_A} & \\ D(A) \leq [a] & & \end{array}$$

Veamos que h y $\widetilde{z'_A}$ son isomorfismos inversos. En primer lugar, es $h \widetilde{z'_A} = \text{id}$ porque

$$h \widetilde{z'_A} z_{A/(a)} = h z'_A = z_{A/(a)}$$

Por otra parte se verifica

$$\widetilde{z'_A} h z'_A = \widetilde{z'_A} z_{A/(a)} = z'_A$$

$$\widetilde{z'_A} h p z_A = \widetilde{z'_A} D(p) z_A = \widetilde{z'_A} p z_A = z'_A p = p z_A \Rightarrow \widetilde{z'_A} h p = p$$

luego $\widetilde{z'_A} h = \text{id}$.

(ii) y (iii) se demuestran mediante procesos análogos a partir de los teoremas III.2.10 y 13 respectivamente. #

Existencia

Pasamos ya a la demostración de la existencia del espectro primo de un anillo, es decir, a la construcción de un espectro primo canónico.

Lema III.2.22. - Sea A un anillo. Para cada $b_j \in A, y_j \in A, r_j \geq 1, 1 \leq j \leq n$, existen $d_j \in A, 1 \leq j \leq n$ tales que

$$(b_1 y_1 + \dots + b_n y_n)^{r_1 + \dots + r_n} = d_1 y_1^{r_1} + \dots + d_n y_n^{r_n}$$

Demostración : Para $n=2$, si $r=r_1+r_2$, se tiene

$$\begin{aligned} (b_1 y_1 + b_2 y_2)^r &= \left[\sum_{h=1}^{r_2} \binom{r}{r_2-h} b_1^{r_1+h} y_1^h b_2^{r_2-h} y_2^h \right] y_1^{r_1} + \\ &+ \left[\sum_{h=0}^{r_1} \binom{r}{r_2+h} b_1^{r_1-h} y_1^{r_1-h} b_2^{r_2+h} y_2^h \right] y_2^{r_2} \end{aligned}$$

que es de la forma $d_1 y_1^{r_1} + d_2 y_2^{r_2}$.

Si la igualdad existe para valores de n desde 2 hasta p , entonces también existe para $n=p+1$. En efecto, si

$$x = (b_1 y_1 + \dots + b_{p+1} y_{p+1})^{r_1 + \dots + r_{p+1}}$$

se tiene, por el caso $n=2$,

Para cada $k=1, \dots, p$ se tiene, con $r=r_1+\dots+r_n$ y aplicando el lema III.2.22,

$$\begin{aligned} z_k^{rs_k} &= (b_{k1}y_1 + \dots + b_{kn}y_n)^r = d_{k1}y_1^{r_1} + \dots + d_{kn}y_n^{r_n} = \\ &= \sum_{j=1}^n d_{kj} \left(\sum_{i=1}^m a_{ji}x_i \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n d_{kj}a_{ji} \right) x_i \end{aligned}$$

es decir, $(x_1, \dots, x_m) \leq (z_1, \dots, z_p)$.

En el preorden $(Q, \leq)$ se verifica :

(i) $(x_1, \dots, x_m) \leq (0)$ tomando $a_{ji}=0, r$ arbitrario

$(1) \leq (y_1, \dots, y_n)$ tomando $a_j=y_j, r_j=1$.

(ii) x unidad $\Leftrightarrow \exists a \in A$ $ax=1 \Leftrightarrow (x) \leq (1)=0 \Leftrightarrow (x)=0$.

(iii) $x \in N(y) \Leftrightarrow \exists a \in A, \exists r \neq 1$ $x^r=ay \Leftrightarrow (y) \leq (x)$

(iv) x nilpotente $\Leftrightarrow x \in N=N(0) \Leftrightarrow (0) \leq (x) \Leftrightarrow 1=(x)$.

(v) Es obvio, con $a_j=1$ y $r=1$. #

Teorema III.2.24. - Para cada anillo A , existe el espectro primo

$$z_A: A \longrightarrow D(A)$$

Demostración : Sea $(Q, \leq)$ el preorden del lema III.2.23 y sea $(D(A), \leq)$ el conjunto ordenado canónicamente asociado. - Los elementos de $D(A)$ son clases de equivalencia de elementos de Q según la relación $(\equiv)$ de equivalencia

$$(x_1, \dots, x_m) \equiv (y_1, \dots, y_n) \text{ si y sólo si } \begin{cases} (x_1, \dots, x_m) \leq (y_1, \dots, y_n) \\ (y_1, \dots, y_n) \leq (x_1, \dots, x_m) \end{cases}$$

La clase de $(x_1, \dots, x_m) \in Q$ será $[x_1, \dots, x_m] \in D(A)$, de manera que

$$[x_1, \dots, x_m] \leq [y_1, \dots, y_n] \text{ si y sólo si } (x_1, \dots, x_m) \leq (y_1, \dots, y_n)$$

Por lo visto en el lema III.2.23, $D(A)$ tiene un máximo $1 = [0]$ y un mínimo $[0] = 1$.

Definimos $\wedge$ mediante

$$[x_1, \dots, x_m] \wedge [y_1, \dots, y_n] = [x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n]$$

Es obvio que esta definición es independiente de los representantes elegidos en cada clase, que

$$[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n] \leq [x_1, \dots, x_m], [x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n] \leq [y_1, \dots, y_n]$$

y que si $[z_1, \dots, z_p] \leq [x_1, \dots, x_m]$ y $[z_1, \dots, z_p] \leq [y_1, \dots, y_n]$ entonces también $[z_1, \dots, z_p] \leq [x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n]$. Por tanto $\wedge$ define el ínfimo de dos elementos de $D(A)$.

Análogamente se prueba que

$$[x_1, \dots, x_m] \vee [y_1, \dots, y_n] = [x_1 y_1, \dots, x_1 y_n, \dots, x_m y_1, \dots, x_m y_n]$$

define el supremo de dos elementos de $D(A)$.

Por tanto, para ver que $D(A)$ es, con $\wedge, \vee, 0, 1$, un retículo basta probar la distributividad. Observemos para ello que las $n(m+p)$ -tuplas

$$\begin{aligned} [x_1, \dots, x_m] \vee ([y_1, \dots, y_n] \wedge [z_1, \dots, z_p]) &= [x_1, \dots, x_m] \vee [y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_p] = \\ &= [x_1 y_1, \dots, x_1 z_p, \dots, x_m y_1, \dots, x_m z_p] \\ ([x_1, \dots, x_m] \vee [y_1, \dots, y_n]) \wedge ([x_1, \dots, x_m] \vee [z_1, \dots, z_p]) &= \\ &= [x_1 y_1, \dots, x_m y_n, x_1 z_1, \dots, x_m z_p] \end{aligned}$$

difieren en una permutación, así que son iguales.

Sea ahora la aplicación

$$z_A: A \longrightarrow D(A)$$

$$x \longmapsto z_A(x) = [x]$$

Se verifica $z_A(0) = [0] = 1$, $z_A(1) = [1] = 0$, $z_A(xy) = [xy] = [x] \vee [y] = z_A(x) \vee z_A(y)$ y, según el lema III.2.23 parte (v), $z_A(x+y) = [x+y] \geq [x, y] = [x] \wedge [y] = z_A(x) \wedge z_A(y)$; luego z_A es una noción de cero.

Para ver el carácter universal de z_A , sea $z: A \longrightarrow D$ una noción de cero. Para cada $x \in A$ definimos

$$\tilde{z}[x] = z(x)$$

Si $[x] = [y]$ se tiene, según el lema III.2.23 y la proposición III.2.3,

$$[x] \leq [y] \Rightarrow y \in N(x) \Rightarrow z(x) \leq z(y)$$

$$[y] \leq [x] \Rightarrow x \in N(y) \Rightarrow z(y) \leq z(x)$$

así que $\tilde{z}[x] = \tilde{z}[y]$. Como $[x_1, \dots, x_m] = [x_1] \wedge \dots \wedge [x_m]$, mediante

$$\tilde{z}[x_1, \dots, x_m] = z(x_1) \wedge \dots \wedge z(x_m)$$

extendemos $\tilde{z}$ a una aplicación $D(A) \longrightarrow D$ que conmuta con la operación $\wedge$. Además es

$$\tilde{z}([x] \vee [y]) = \tilde{z}[xy] = z(xy) = z(x) \vee z(y) = \tilde{z}[x] \vee \tilde{z}[y]$$

luego por ser

$$[x_1, \dots, x_m] \vee [y_1, \dots, y_n] = \bigwedge_{i,j} ([x_i] \vee [y_j])$$

$\tilde{z}$ conmuta también con $\vee$. Finalmente, se verifica

$$\tilde{z}(0) = \tilde{z}[1] = z(1) = 0, \quad \tilde{z}(1) = \tilde{z}[0] = z(0) = 1$$

de manera que z es un morfismo. Es claro que $\tilde{z}z_A = z$, y si f es otro morfismo que verifica $fz_A = z$, entonces

$$\begin{aligned} f[x_1, \dots, x_m] &= f([x_1] \wedge \dots \wedge [x_m]) = f[x_1] \wedge \dots \wedge f[x_m] = \\ &= fz_A(x_1) \wedge \dots \wedge fz_A(x_m) = z(x_1) \wedge \dots \wedge z(x_m) = \\ &= \tilde{z}[x_1] \wedge \dots \wedge \tilde{z}[x_m] = \tilde{z}([x_1] \wedge \dots \wedge [x_m]) = \\ &= \tilde{z}[x_1, \dots, x_m] \end{aligned}$$

así que $f = \tilde{z}$. #

Corolario III.2.25. - Si $f: A \longrightarrow A'$ es un homomorfismo de anillos, se verifica

$$D(f)[x_1, \dots, x_m] = [f(x_1), \dots, f(x_m)]$$

Demostración : $D(f)[x] = D(f)z_A(x) = z_A, f(x) = [f(x)]$. La extensión al caso general es obvia. #

Ejemplos

El teorema III.2.18 podría demostrarse ahora manipulando directamente los elementos de $D(R)$.

Proposición III.2.26. - Sean e, f idempotentes de un anillo A . Se verifica :

(i) Para cada noción de cero $z: A \longrightarrow D$,

$$z(e) \wedge z(f) = z(e+f-ef)$$

(ii) En $D(A)$, $[e, f] = [e+f-ef]$

Demostración : Aplicando la proposición III.2.12 a $e(1-e)=0$ se tiene $z(e+f-ef)=z[e+f(1-e)]=z(e) \wedge z[f(1-e)]=z(e) \wedge [z(f) \vee z(1-e)]$. Pero como (proposición III.2.5) $z(1-e)=\neg z(e)$, se sigue la igualdad buscada.

(ii) Es la versión de (i) para la noción de cero universal z_A , pues $z_A(e) \wedge z_A(f)=[e] \wedge [f]=[e, f]$. #

En la proposición anterior, se puede verificar (ii) directamente notando que, según la definición de $\leq$:

$$\begin{aligned} e+f-ef &= e+(1-e)f \Rightarrow [e, f] \leq [e+f-ef] \\ \left. \begin{aligned} e &= e(e+f-ef) \\ f &= f(e+f-ef) \end{aligned} \right\} &\Rightarrow [e+f-ef] \leq [e, f] \end{aligned}$$

Proposición III.2.27. - El espectro primo de un anillo regular R es

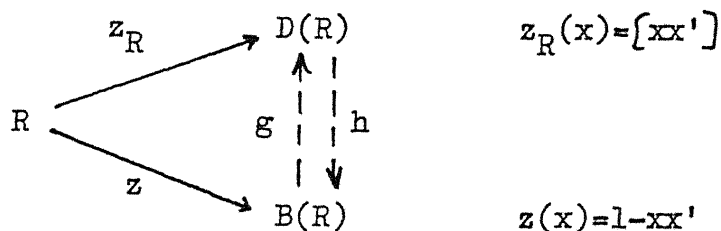
$$\begin{aligned} z_R: R &\longrightarrow D(R) = \{[e]; e^2=e\} \\ x &\longmapsto z_R(x) = xx' \end{aligned}$$

Demostración : Ya sabemos (proposición III.2.5) que $x = xx'$. Por tanto, un elemento arbitrario de $D(R)$ es de la forma

$$[x_1, \dots, x_m] = [x_1] \wedge \dots \wedge [x_m] = [e_1] \wedge \dots \wedge [e_m] = [e_1, \dots, e_m]$$

siendo $e_i = x_i x_i'$ el idempotente asociado a x_i , $1 \leq i \leq m$. Pero, según la proposición III.2.26, $[e_1, e_2] = [e]$ con e idempotente, así que una sencilla inducción nos permite concluir que $[x_1, \dots, x_m] = [e_1, \dots, e_m] = [e]$ con $e^2=e$. #

El teorema III.2.18 y la proposición III.2.27 nos proporcionan dos espectros primos distintos para un anillo regular.



Naturalmente, deberá existir un isomorfismo h tal que $hz_R = z$. En efecto, sea

$$h: D(R) \longrightarrow B(R)$$

$$[e] \longrightarrow h[e] = 1 - e$$

Se verifica : $h(0) = h[1] = 1 - 1 = 0$, $h(1) = h[0] = 1 - 0 = 1$

$$\begin{aligned}
 h([e] \wedge [f]) &= h[ef] = h[e+f-ef] = 1 - e - f + ef = (1 - e)(1 - f) = h[e]h[f] = \\
 &= h[e] \wedge h[f]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h([e] \vee [f]) &= h[ef] = 1 - ef = 1 - e + 1 - f - (1 - e)(1 - f) = h[e] + h[f] - h[e]h[f] = \\
 &= h[e] \vee h[f]
 \end{aligned}$$

de manera que h es un morfismo. Análogamente se prueba que

$$g: B(R) \longrightarrow D(R)$$

$$e \longmapsto g(e) = [1 - e]$$

es un morfismo, y es claro que $gh = id, hg = id$.

Terminaremos el estudio del espectro primo viendo algunos ejemplos numéricos.

Proposición III.2.28. - El espectro primo de $\mathbb{Z}$ es el conjunto de las partes finitas del conjunto P de los números primos, añadiendo el propio P y ordenado por inclusión.

Demostración : Para cada $x \in \mathbb{Z}$, es $[-x] = [x]$, así que basta con siderar números positivos. Las siguientes propiedades son in mediatas:

- (i) $[x] \wedge [y] = [d]$, con $d = \text{m.c.d.}(x, y)$
- (ii) $[x] \vee [y] = m$, con $m = \text{m.c.m.}(x, y)$
- (iii) Si $x = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ es la descomposición en factores primos de x ,

$$[x] = [p_1 \cdots p_k]$$

Por tanto, $D(\mathbb{Z})$ consta de $[0] = 1$ (conjunto P), $[1] = 0$ (subconjunto $\emptyset$ de P) y para cada $x \in \mathbb{Z}$ distinto de 0 y 1, $[x]$ se puede identificar con un subconjunto finito $\{p_1, \dots, p_k\}$ de P . De acuerdo con (i), $[x] \wedge [y]$ se identifica con la intersección de subconjuntos y, según (ii), $[x] \vee [y]$ lo hace con la unión. $\neq$

Aplicando el teorema III.2.21, $D(\mathbb{Z}/(4))$ será el subconjunto de $D(\mathbb{Z})$ de los elementos menores que $[4] = \{2\}$, es decir

$$D(\mathbb{Z}/(4)) = 2 \quad \begin{array}{l} 1 = [0] = [2] \\ 0 = [1] = [3] \end{array}$$

Resulta pues que un anillo puede tener espectro primo 2 sin ser cuerpo ni siquiera anillo regular ($2^2 = 0$, así que 2 no es regular). Aplicando de nuevo el mismo teorema resulta

$$D(\mathbb{Z}/(6)) = 2 \times 2 \quad \begin{array}{c} 1 \\ e \swarrow \quad \searrow f \\ 0 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 = [0] \\ f = [2] = [4] \\ e = [3] \\ 0 = [1] = [5] \end{array} \right.$$

Notar que $\mathbb{Z}/(6)$ es regular con idempotentes 0, 1, 3 y 4.

Espectro booleano

En álgebra conmutativa clásica, el espectro primo de un anillo A es el conjunto $\text{Spec}(A) = \{I \mid I \text{ ideal primo de } A\}$ con

la topología de Zariski. Una base de cerrados para esta topología está formada por los subconjuntos $z(x) = \{I \mid x \in I\}$, con $x \in A$, que verifican

$$\begin{aligned} z(0) &= \text{Spec}(A) & , & & z(1) &= \emptyset \\ z(xy) &= z(x) \cup z(y) \\ z(x+y) &\supseteq z(x) \cap z(y) \end{aligned}$$

El retículo de cerrados engendrado por los $z(x)$ es por tanto la interpretación clásica de $D(A)$.

El espectro constructible de un anillo A es (ver [11]) el conjunto $\text{Spec}(A)$ con la topología que tiene por cerrados las combinaciones booleanas finitas de subconjuntos $z(x)$. La topología constructible es por tanto más fina que la de Zariski ya que tiene más cerrados. La versión constructiva de este otro espectro será naturalmente el álgebra de Boole libre engendrada por $D(A)$, $B(A) = B(D(A))$, que tiene más elementos que el espectro primo. Siguiendo de nuevo a A. Joyal en [16], llamaremos a $B(A)$ espectro booleano de A . Daremos a continuación las versiones constructivas de algunos teoremas clásicos relativos a la topología constructible.

Definición III.2.29. - Llamaremos functor espectro booleano

$$B: \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$$

a la composición del functor espectro primo $\underline{A} \longrightarrow \underline{D}$ y el functor libre $\underline{D} \longrightarrow \underline{B}$.

Entenderemos habitualmente por espectro booleano de un anillo A el álgebra de Boole libre sobre $D(A)$

$$B(A) = B(D(A))$$

La noción más precisa de espectro booleano debería ser el par $(B(A), \bar{z}_A)$, siendo

$$\bar{z}_A: A \longrightarrow B(A)$$

la noción de cero composición de $z_A: A \longrightarrow D(A)$ con la inclusión canónica $j: D(A) \longrightarrow B(A)$.

Proposición III.2.30. - $B(A)$ es el espectro booleano de un anillo A si y sólo si existe una noción de cero $\bar{z}_A: A \longrightarrow B(A)$ tal que, para cada noción de cero $z: A \longrightarrow B$ ^{álgebra de Boole}, existe un único morfismo $z^*: B(A) \longrightarrow B$ tal que $z \bar{z}_A = z$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\bar{z}_A} & B(A) \\ z \downarrow & \searrow z^* & \\ B & & \end{array}$$

Demostración : Sea $B(A)$ el espectro booleano y $\bar{z}_A$. Dada la noción de cero $z: A \longrightarrow B$, existe un único morfismo $\tilde{z}: D(A) \longrightarrow B$ tal que $\tilde{z}z_A = z$ y, por ser B álgebra de Boole, existe un único morfismo $z^*: B(A) \longrightarrow B$ tal que $z^*j = \tilde{z}$. Por tanto $z^*\bar{z}_A = z^*jz_A = \tilde{z}z_A = z$. La unicidad es consecuencia de las propiedades universales de z_A y j :

$$f\bar{z}_A = z \Rightarrow fjz_A = z^*jz_A \Rightarrow fj = z^*j \Rightarrow f = z^*.$$

Recíprocamente, sea $\bar{z}_A$ la noción de cero del enunciado. - Por definición de z_A , existe un único morfismo $j: D(A) \longrightarrow B(A)$ tal que $jz_A = \bar{z}_A$. Dado un morfismo $g: D(A) \longrightarrow B$ con B álgebra de Boole, existe por hipótesis un único morfismo $g^*: B(A) \longrightarrow B$ tal que $g^*\bar{z}_A = gz_A$. Este morfismo verifica $g^*jz_A = g^*z_A = gz_A$, así

que $g^*j=g$. Y si $fj=g$, entonces $f\bar{z}_A=fjz_A=gz_A=g^*\bar{z}_A$, luego $f=g^*$.--

Por tanto $B(A)$ es el álgebra de Boole libre sobre $D(A)$. #

Tomando en la proposición anterior $B=2$, se obtiene una biyección entre el conjunto de los ideales primos complementados de A y los filtros primos complementados de $B(A)$. La biyección análoga a ésta que se presenta con el espectro primo $D(A)$ es monótona, pero la monotonía se pierde al pasar al espectro booleano ya que el orden de los filtros primos complementados de $B(A)$ es trivial (Ver corolario II.1.14).

Proposición III.2.31.— El espectro booleano de $\mathbb{Z}$ es el conjunto de las partes finitas y cofinitas del conjunto P de los números primos, ordenado por inclusión.

Demostración : Basta tomar el álgebra de Boole libre sobre el espectro primo $D(\mathbb{Z})$ dado en la proposición III.2.28. #

Los anillos para los que $D(A)$ sea álgebra de Boole tendrán espectros primos y booleano iguales. Así sucede, por lo visto en el teorema III.2.18, con los anillos regulares. El teorema siguiente caracteriza los anillos que tienen espectros iguales.

Teorema III.2.32.— Los espectros primo y booleano de un anillo A coinciden si y sólo si A/N es regular.

Demostración : Si A/N es regular, usando los teoremas III.2.18 y 20 se tiene

$$D(A)=D(A/N)=B(A/N) \Rightarrow B(A)=B(A/N)=D(A)$$

Recíprocamente, sea $D(A)$ álgebra de Boole. Probaremos que A/N es regular, es decir que

$$\forall a \in A, \exists b \in A \text{ tal que } aba-a \in N$$

Por hipótesis, para cada $a \in A$ se tiene $\neg[a] = [x_1, \dots, x_m] \in D(A)$, de manera que

$$[a, x_1, \dots, x_m] = [a] \wedge [x_1, \dots, x_m] = 0 = [1]$$

$$[ax_1, \dots, ax_m] = [a] \vee [x_1, \dots, x_m] = 1 = [0]$$

es decir existen $b, t_i \in A, r_i \geq 1, 1 \leq i \leq m$ tales que

$$1 = ba + \sum_{i=1}^m t_i x_i, \quad (ax_i)^{r_i} = 0$$

Aplicando el lema III.2.22 se tiene por tanto, con $r = r_1 + \dots + r_m$,

$$\begin{aligned} (aba - a)^r &= a^r (ba - 1)^r = a^r \left[- \sum_{i=1}^m t_i x_i \right]^r = (-1)^r a^r \sum_{i=1}^m s_i x_i^{r_i} \\ &= (-1)^r \sum_{i=1}^m a^{r-r_i} s_i (ax_i)^{r_i} = 0 \end{aligned}$$

luego $aba - a \in N$. #

Si $A = \mathbb{Z}/(4)$, ya vimos que $D(A) = 2$. En este ejemplo es $N = \{0, 2\}$ y $A/N = \mathbb{Z}/(2)$, que es regular por ser cuerpo.

Terminaremos demostrando que el espectro booleano de un anillo A es el espectro primo del anillo regular libre $R(A)$.

Proposición III.2.33. - Sea $f: A \rightarrow A'$ un homomorfismo de anillos.

- (i) Para cada noción de cero $z': A \rightarrow B$, con B álgebra de Boole, es $z' \circ B(f) = (z' \circ f)^*$
- (ii) $B(f)$ es isomorfismo si y sólo si para cada noción de cero $z: A \rightarrow B$, con B álgebra de Boole, existe una única noción de cero $z': A' \rightarrow B$ tal que $z' \circ f = z$.

Demostración : Se procede como en la proposición III.2.17 - utilizando sólo nociones de cero en álgebras de Boole. ~~##~~

Proposición III.2.34. - Para cada elemento a de un anillo A es

$$B(A) \cong B[R_a(A)]$$

Demostración : Del corolario III.2.14 y de la proposición - III.2.33 se sigue inmediatamente que $B(r)$ es isomorfismo. ~~##~~

Proposición III.2.35. - Sea $(A_i, f_{ij})_{j \leq i \in I}$ un sistema inductivo filtrante de anillos y (A, f_i) su colímite. Para cada familia $\{z_i: A_i \rightarrow D\}_{i \in I}$ de nociones de cero tales que si $i \leq j$ $z_j f_{ji} = z_i$, existe una única noción de cero $z: A \rightarrow D$ tal que $z f_i = z_i$ para cada $i \in I$.

Demostración : Por ser el colímite filtrante, cada $x \in A$ es de la forma $x = f_i(x_i)$ para algún $i \in I$. Sea entonces

$$z(x) = z_i(x_i)$$

Si $x = f_i(x_i) = f_j(x_j)$, existe $k \in I$ tal que $i, j \leq k$ y $f_{ki}(x_i) = f_{kj}(x_j)$, así que $z_i(x_i) = z_k f_{ki}(x_i) = z_k f_{kj}(x_j) = z_j(x_j)$. La aplicación $z: A \rightarrow D$ que acabamos de definir es evidentemente la única que verifica $z f_i = z_i$ para cada $i \in I$. Falta ver que z es noción de cero. Es inmediato que $z(0) = 1$ y $z(1) = 0$. Dados dos elementos $x, y \in A$, siempre se pueden escribir en la forma

$x = f_i(x_i)$, $y = f_i(y_i)$ para el mismo $i \in I$, así que

$$z(xy) = z_i(x_i y_i) = z_i(x_i) \vee z_i(y_i) = z(x) \vee z(y)$$

$$z(x+y)=z_i(x_i+y_i)\cong z_i(x_i)\wedge z_i(y_i)=z(x)\wedge z(y). \#$$

Proposición III.2.36. - El functor espectro primo conserva colímites filtrantes.

Demostración : Sea $A=\varinjlim_{i\in I} A_i$. Con las notaciones de la proposición

III.2.35, sea $(D, g_i)_{i\in I}$ el colímite del sistema inductivo de retículos $(D(A_i), D(f_{ij}))_{j\leq i\in I}$, de manera que existe un único morfismo $g:D\rightarrow D(A)$ tal que $gg_i=D(f_i)$ para cada $i\in I$. Por otra parte, las nociones de cero $z_i=g_i z_{A_i}:A_i\rightarrow D$, $i\in I$, verifican

$$z_i f_{ij}=g_i z_{A_i} f_{ij}=g_i D(f_{ij}) z_{A_j}=g_j z_{A_j}=z_j \quad (j\leq i)$$

así que existe una única noción de cero $z:A\rightarrow D$ tal que $zf_i=z_i$ para cada $i\in I$. Veamos que los morfismos g y $\tilde{z}$ son isomorfismos inversos. Para cada $i\in I$ se tiene $\tilde{z}g_i=\tilde{z}D(f_i)=\tilde{z}f_i=\tilde{z}_i=g_i$, así que $\tilde{z}g=id$. Para cada $i\in I$ es $gzf_i=gz_i=gg_i z_{A_i}=D(f_i)z_{A_i}=z_A f_i$, luego $gz=z_A$ según la proposición III.2.35, y por tanto $g\tilde{z}z_A=gz=z_A$, es decir $g\tilde{z}=id$. #

Corolario III.2.37. - El functor espectro booleano conserva colímites filtrantes.

Demostración : Es consecuencia inmediata de las proposiciones III.2.36 y II.1.1. #

Teorema III.2.38. - Para cada anillo A

$$B(A)\cong B(R(A))$$

Demostración : Sea $S=\{a,b\} \subseteq A$ y $r:A \longrightarrow R_a(A)$ el epimorfismo universal. Ya que (ver la demostración del teorema III.1.8)

$$R_S(A) = R_a(A) \otimes R_b(A) = R_{r(b)}(R_a(A))$$

aplicando la proposición III.2.34 dos veces, una con el anillo A y otra con $R_a(A)$, se tiene

$$B(A) \cong B(R_a(A)) \cong B(R_{r(b)}(R_a(A))) = B(R_S(A))$$

Por inducción inmediata, es claro que se tiene $B(A) \cong B(R_S(A))$ para cada subconjunto finito $S \subseteq A$. Como $R(A)$ es el colímite (filtrante) de los $R_S(A)$, del corolario III.2.37 se sigue la tesis. $\#$

Corolario III.2.39. - Sea A un anillo. Para cada noción de cero $z:A \longrightarrow B$, con B álgebra de B-oole, existe una única noción de cero $z':R(A) \longrightarrow B$ tal que $z'r=z$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{r} & R(A) \\ \downarrow z & \searrow z' & \\ B & & \end{array}$$

Demostración : El teorema III.2.38 nos dice que $B(r)$ es isomorfismo, así que la tesis sigue de la proposición III.2.33. $\#$

Es claro que el corolario anterior se puede ampliar con siderando nociones de cero $z:A \longrightarrow D$ tales que $z(x)$ tiene complementario para cada $x \in A$. Por otra parte, tomando $B=2$, del corolario se sigue una biyección entre los ideales primos complementados de A y los de $R(A)$, teniendo estos últimos orden trivial.

§ 3. Dimensión .-

En álgebra conmutativa clásica la dimensión (de Krull) de un anillo es la longitud de la mayor cadena no degenerada de ideales primos. En nuestro contexto, la dimensión de un anillo A será pues la longitud de la mayor cadena no degenerada de ideales primos complementados de A , es decir, según la definición de espectro primo, la longitud de la mayor cadena no degenerada de filtros primos complementados de $D(A)$.

Definición III.3.1.- Llamaremos dimensión de un anillo A al número

$$\dim A = \dim D(A)$$

En lo que sigue vamos a calcular la dimensión de algunos tipos de anillos.

Anillos de dimensión 0

Serán aquellos anillos cuyo espectro primo sea un álgebra de Boole.

Teorema III.3.2.- Si A es un anillo,

$$\dim A = 0 \Leftrightarrow A/N \text{ regular}$$

Demostración : Según los teoremas II.3.19 ($n=0$) y III.2.32,

$$\dim A = 0 \Leftrightarrow \dim D(A) = 0 \Leftrightarrow D(A) = B(A) \Leftrightarrow A/N \text{ regular} \quad \#$$

Corolario III.3.3.- $\mathbb{Z}/(4)$ y los anillos regulares (en particular los cuerpos) tienen dimensión 0. $\#$

Teorema III.3.4.- Sea K un cuerpo y A una K -álgebra de dimensión finita. Entonces se verifica :

- (i) $\forall x \in A, \exists k > 1 \ni x^k$ es regular
- (ii) $\dim A = 0$

Demostración : (i) Por hipótesis, cada $x \in A$ verifica una ecuación

$$t_r x^r + t_{r-1} x^{r-1} + \dots + t_0 = 0$$

con $t_i \in K$, $1 \leq i \leq r$ y $t_r \neq 0$. Si $t_0 \neq 0$, se tiene

$$x \left[\frac{1}{t_0} (t_r x^{r-1} + \dots + t_1) \right] + 1 = 0$$

así que x es unidad y por tanto regular. Si $t_0 = 0$, la ecuación será de la forma

$$t_r x^r + \dots + t_k x^k = 0$$

con $0 < k \leq r$ y $t_k \neq 0$, de manera que

$$x^k = - \frac{1}{t_k} (t_r x^r + \dots + t_{k+1} x^{k+1}) = x^{k+1} \left[- \frac{1}{t_k} (t_r x^{r-k-1} + \dots + t_{k+1}) \right]$$

(si $k=r$ es $x^k=0$, luego regular). Se tiene pues una igualdad de la forma $x^k = x^{k+1} z$ y en consecuencia

$$x^k = x^k x z = x^{k+1} z x z = x^{k+2} z^2 = \dots = x^{2k} z^k$$

es decir, x^k es regular.

(ii) Usando el teorema III.3.2, hay que probar que A/N es regular. Para cada $x \in A$ se tiene $x^k = x^{2k} z^k$, es decir, $x^k (1 - x^k z^k) = 0$. Pero $x^k z^k$ es idempotente, así que también lo es $(1 - x^k z^k)$ y por tanto $x^k (1 - x^k z^k)^k = 0$, es decir $x(1 - xy) \in N$ con $y = x^{k-1} z^k$; luego $x \in N$ es regular. $\#$

En el teorema anterior, de (i) se sigue directamente que $D(A)$ es álgebra de Boole, pues para cada $x \in A$ se tiene $\{x\} = \{x^k\}$ con x^k regular, así que $\{x\}$ tiene complementario. En -

consecuencia cada elemento $[x_1, \dots, x_m] = [x_1] \wedge \dots \wedge [x_m]$ de $D(A)$ tiene complementario.

Corolario III.3.5.- Sea K un cuerpo y $f \in K[X]$ un polinomio no nulo. Entonces

$$\dim(K[X]/(f)) = 0$$

Demostración : Es elemental que $K[X]/(f)$ es una K -álgebra - de dimensión finita (el grado de f). #

Anillos de dimensión 1.-

Según el teorema II.3.20 (caso $n=0$), un anillo A verifica $\dim A \leq 1$ si y sólo si cada elemento $z \in B(A)$ es de la forma $z = x \wedge y$ con $x, y \in D(A)$.

Proposición III.3.6.- $\dim Z = 1$

Demostración : Recordando las proposiciones III.2.28 y 31 - se observa que $B(Z) = D(Z) \cup \neg D(Z)$, así que se tiene $\dim Z \leq 1$. Y es claro que $D(Z)$ no es álgebra de Boole, de manera que - se verifica la igualdad. #

Lema III.3.7.- Sea D un retículo tal que $\{1\}$ tiene complemento y $D_{\leq x}$ es un álgebra de Boole para cada $x \neq 1$. Entonces $\dim D \leq 1$.

Demostración : Sea $x \wedge y \in B$ con $x, y \in D$. Ya que $x \wedge y = x \wedge (x \vee y)$, podemos suponer $y \leq x$. Si $x \neq 1$, existe por hipótesis $z \in D$ tal que $z \leq x$ y z es el complementario de y en $D_{\leq x}$, es decir

$$y \wedge z = 0, \quad y \vee z = x$$

de manera que $x \wedge y = (y \vee z) \wedge y = z \wedge y = z$. En definitiva,

$$x \wedge y \in \begin{cases} D & \text{si } x \neq 1 \\ \neg D & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Un elemento arbitrario $u \in B$ es pues de la forma (reordenando adecuadamente los términos)

$$\begin{aligned} u &= \bigvee_{i=1}^n x_i \wedge \neg y_i = z_1 \vee \dots \vee z_r \vee \neg y_{r+1} \vee \dots \vee \neg y_n = \\ &= (z_1 \vee \dots \vee z_r) \vee \neg (y_{r+1} \wedge \dots \wedge y_n) = \\ &= z \vee \neg y = \neg (y \wedge \neg z) \end{aligned}$$

siendo los x_i, y_i, z_j, z e y elementos de D . Pero es claro que, siendo B álgebra de Boole, las proposiciones

$$\begin{aligned} \forall u \in B, \exists x, y \in D \text{ m } u &= \neg (y \wedge \neg z) \\ \forall u \in B, \exists x, y \in D \text{ m } u &= y \wedge \neg z \end{aligned}$$

son equivalentes, así que $\dim D \leq 1$. ~~¶~~

El objetivo de este lema es servir de base para demostrar que el anillo $K[X]$ de polinomios sobre un cuerpo K tiene dimensión 1. Con este fin, veamos también algunas propiedades del espectro primo de este anillo.

Proposición III.3.8.— Sea K un cuerpo. El espectro primo de $K[X]$ verifica :

- (i) $\pi_{K[X]}$ es suprayectiva
- (ii) Si $f \in K[X]$, $[f] = 0$ si y sólo si $f \in K - \{0\}$
- (iii) Si $f \in K[X]$, $[f] = 1$ si y sólo si $f = 0$

Demostración : (i) Cada elemento de $D(K[X])$ es de la forma

$$[f_1, \dots, f_m] = [d] , \quad d = m.c.d.(f_1, \dots, f_m)$$

ya que como d divide a $f_i, 1 \leq i \leq m$, es $[d] \leq [f_1, \dots, f_m]$ y como se tiene una igualdad de la forma $d = h_1 f_1 + \dots + h_m f_m$, es

$$[f_1, \dots, f_m] \leq [d].$$

$$(ii) [f]=0 \Leftrightarrow f \text{ unidad} \Leftrightarrow f \in K - 0.$$

$$(iii) [f]=1 \Leftrightarrow f \text{ nilpotente} \Leftrightarrow f=0. \#$$

Teorema III.3.9. - Si K es un cuerpo

$$\dim K[X]=1$$

Demostración : El radical de $K[X]$ es $N=\{0\}$, así que $K[X]/N=K[X]$. Este anillo no es regular ya que, por ejemplo, el elemento X no es regular. En efecto, para cada polinomio $f \in K[X]$, $\text{grad}(X^2 f) \geq 2$, mientras que $\text{grad}(X)=1$, así que no puede ser $X^2 f = X$. Por tanto (teorema III.3.2) $\dim K[X] > 0$.

Terminaremos la demostración probando que $\dim K[X] \leq 1$. Para ello haremos uso del lema III.3.7, es decir, veremos que $D(K[X])$ verifica las hipótesis de este lema. Que el subconjunto $\{1\}$ tiene complemento es consecuencia de la proposición III.3.8, pues cada elemento de $D(K[X])$ es de la forma $[f]$ con $f \in K[X]$, y $[f]=1$ equivale a $f=0$, siendo esta igualdad de K finitamente verificable ya que significa $a_i=0$ para cada coeficiente a_i de f . En cuanto a la segunda parte de la hipótesis, un elemento de $D(K[X])$ distinto de 1 es de la forma $[f]$ con $f \in K[X]$ no nulo, así que aplicando el corolario III.3.5 se tiene

$$\dim D(K[X])_{[f]} = \dim D(K[X]/(f)) = 0$$

es decir, $D(K[X])_{[f]}$ es un álgebra de Boole. $\#$

: = : : = : : = :

BIBLIOGRAFIA

- [1] ATIYAH, M.F.: Introducción al álgebra conmutativa. Reverté. 1966.
- [2] BALBES, R. - DWINGER, Ph.: Distributive lattices. Univ. of Missouri Press. 1974.
- [3] BARR, M.: Exact categories. Springer Lecture Notes in Math. 236 (1971) 1-120.
- [4] BIRKHOFF, G.: Lattice theory. A.M.S. Colloquium Publications. Vol.XXV. 1948.
- [5] CHEN, C. - TAN, S.: On prime ideals of finite distributive lattices. Nanta Math. Vol.5 No.3 (1972) 96-100.
- [6] DUSHNIK, B. - MILLER, W.: Partially ordered sets. Amer. J. Math. 63 (1941) 600-610.
- [7] ESPAÑOL, L.: El orden interno Ω en un topo elemental. Actas IV Jornadas Matemáticas Hispano-Lusitanas, 1977. R.S.M.E. (No publicadas)
- [8] FREYD, P.: Abelian categories. Harper and Row. 1964.
- [9] GRATZER, G.: Lattice theory. Freeman and Co. 1971.
- [10] GRATZER, G.: Universal algebra. Van Nostrand. 1968.
- [11] GROTHENDIECK, A. - DIEUDONNE, J.: Eléments de géométrie algébrique, I. Springer-Verlag. 1971.
- [12] HIGGINS, P.: Categories and groupoids. Van Nostrand. 1971.
- [13] HILTON, P. - STAMMBACH, U.: A course in homological algebra. Springer-Verlag. 1971.

- [14] JOHNSTONE, P.: Topos theory. Academic Press. En presa.
- [15] JOYAL, A.: Spectral spaces and distributive lattices. Notices A.M.S. 18 (1971) 393.
- [16] JOYAL, A.: Les théorèmes de Chevalley-Tarski et remarques sur l'algèbre constructive. Cahiers Topo. et Géo. Diff. XVI-3 (1975) 256-258.
- [17] LAWVERE, F.: An elementary theory of the category of sets. Proc. Nat. Acad. Sci. 52 (1964) 1506-1511.
- [18] LAWVERE, F.: Quantifiers and sheaves. Actes du Congrès International des Mathématiciens. Nice 1970. 329-334.
- [19] LESAFFRE, B.: Structures algébriques dans les topos élémentaires. C.R. Acad. Sci. Paris. 277 (1973) 663-666.
- [20] LOPEZ, A.: Retículos distributivos y cohomología de espacios noetherianos y compactos con valores en un haz. Univ. Autónoma de Barcelona. 1977.
- [21] MAC LANE, S.: Categories for the working mathematician. Springer-Verlag. 1971.
- [22] MANES, E.: Algebraic theories. Springer-Verlag. 1976.
- [23] MULVEY, C.: Intuitionistic algebra and representations of rings. Memoirs Amer. Math. Soc. 148 (1974) 3-57.
- [24] OLIVIER, J.: Anneaux absolument plats universels et épimorphismes à buts réduits. Séminaire P. Samuel. 1967/68. N°6.

- [25] OSIUS, G.: Logical and set-theoretical tools in elementary topoi. Springer Lecture Notes in Math. 445 (1975) 297-346.
- [26] OSIUS, G.: Categorical set theory: a characterization of the category of sets. J. Pure and Applied Algebra 41 (1974) 79-119.
- [27] REYES, G.: From sheaves to logic. M.A.A. Studies in Math. Vol.9 (1974) 143-204.
- [28] SEIDENBERG, A.: A note on the dimension theory of -- rings. Pacific J. Math. 4 (1954) 603-614.
- [29] TIERNEY, M.: Axiomatic sheaf theory: some constructions and applications. Proc. C.I.M.E. Conference on categories and commutative algebra. Varenna, 1971. Ed. Cremonese 1973, 249-326.
- [30] TIERNEY, M.: On the spectrum of a ringed topos. In Algebra, Topology and Category Theory: a collection of papers in honor of S. Eilenberg. Ed. A. Heller and M. Tierney. pp.189-210. Academic Press. 1976.
- [31] TROTTER, W. Jr.: Irreducible posets with large height exist. J. Combinatorial Theory (A) 17 (1974) 337-344.
- [32] WRAITH, G.: Lectures on elementary topoi. Springer - Lecture Notes in Math. 445 (1975) 114-206.