

LE ROI DE SARAGOSSE AL-MU'TAMAN IBN HÜD
(M. 1085) ET LE THÉORÈME DE PYTHAGORE:
SES SOURCES ET SES PROLONGEMENTS

YOUCEF GUERGOUR

Laboratoire des EDP non linéaires et Histoire des Mathématiques
ENS de Kouba-Alger

RESUMEN

El teorema de Pitágoras, también conocido bajo el nombre de «teorema de la hipotenusa» y de «corona de la novia» ha suscitado numerosas discusiones y estudios tanto en el período helenístico como en el período árabe.

Encontramos en particular, en fuentes griegas, indias, árabes e incluso en fuentes modernas, numerosas demostraciones distintas de la de Euclides.

*En este artículo, nos interesan los escritos científicos de al-Mu'taman y las demostraciones de este teorema propuestas por algunos matemáticos de tradición árabe, en particular la expuesta por al-Mu'taman en su *Kitāb al-Istikmāl*, e intentamos poner de manifiesto la especificidad de esta última así como los lazos eventuales que tiene con las de los escritos orientales llegados hasta nosotros.*

ABSTRACT

Pythagoras's theorem, also known as «hypotenuse theorem» and «the crown of the fiancée» has aroused many debates and studies in the Hellenistic area as well as in the Arab area. We can find, in particular in Greek, Indian, Arab and even modern sources many proofs different from Euclid's.

*In this paper, we are interested in the scientific manuscripts of al-Mu'taman and in the proofs of this theorem given by some mathematicians from the Arab tradition in particular that proposed by al-Mu'taman in *Kitāb al-Istikmāl* (Book of the perfection).*

Our attempt is to relieve the specificity of the latter proof and the possible links it has with orient manuscript which has reached us.

Palabras clave: Teorema de Pitágoras, al-Mu'taman, Matemáticas, Ciencia Árabe, Antigüedad.

Introduction

Le théorème de Pythagore ou théorème de l'hypoténuse [VITRAC, vol. I, 1990, p. 282],¹ est la conclusion du premier chapitre des *Eléments* d'Euclide. Aṭ-Ṭūsī le

nomme «*la couronne du fiancé*» [Ms. Istanbul, Aya Sofya, Ahmet III 3452, p. 27] dans son *Tahrīr aux Eléments* [VITRAC, vol. I, 1990, p. 284].² Ce théorème a suscité de nombreuses discussions tant au cours de la période hellénistique que durant la période arabe. Al-Mu'taman en a donné dans son *Isikmal* une preuve que nous développons ci-dessous. Il nous semble toutefois utile de donner, outre un bref aperçu de la vie d'al-Mu'taman et de ses activités scientifiques, un historique des différentes démonstrations de ce théorème à travers les textes grecques et arabes.

I. al-Mu'taman roi et mathématicien

I.1. *Sa vie et sa formation*

Abū ʿĀmir Yūsuf Ibn Aḥmad Ibn Hūd, connu également sous le nom d'al-Mu'taman³ [al-MAQQARĪ, 1968, p. 31] Ibn Hūd, a été le troisième roi de la dynastie des Banū Hūd. Cette dynastie a régné entre 1039 et 1146 sur la province de Saragosse. Cette province était la marche supérieure d'al-Andalus et constituait, de ce fait, un état stratégique entre le Dār al-Islām et les Etats chrétiens du Nord de la Péninsule ibérique [ʿINĀN, 1960, pp. 65-66, 272-285; Ibn KHALDŪN, 1983, vol. 7, pp. 350-352].

Al-Mu'taman a succédé à son père Ahmad al-Muqtadir qui régna de 1041 à 1081 au trône de Saragosse. Bien qu'il ne nous soit rien parvenu sur la production d'al-Muqtadir, les bibliographes et les historiens n'hésitent pas à le qualifier de savant et de philosophe. Ses qualités dans le domaine des sciences devaient être suffisamment reconnues pour que, quelques siècles plus tard, al-Maqqari le prenne comme exemple pour illustrer le niveau atteint par les sciences en Andalus. Dans son *Nafḥ aṭ-Ṭīb*, [L'exhalaison du parfum], il rapporte les propos d'un intellectuel andalou qui s'adresse à l'un de ses collègues maghrébins, en ces termes: «*Avez-vous en astronomie, en philosophie et en géométrie un roi comme al-Muqtadir Ibn Hūd le maître de Saragosse qui fut un prodige dans ces domaines?*» [al-MAQQARĪ, 1968, vol. I, p. 441].

Pour revenir à al-Mu'taman, il faut préciser que, malgré l'importance stratégique de la position géographique du royaume de Saragosse et malgré les événements politiques qui se sont déroulés entre 1039 et 1081, les chroniqueurs contemporains ou postérieurs à cette période n'évoquent que rarement la vie et les actions de ce roi. Les sources que nous avons pu consulter se contentent de mentionner, brièvement, ses activités scientifiques. Sur le plan politique, ils parlent surtout des mercenaires qui ont été engagés par son père et par lui pour défendre leur royaume à la fois contre leurs voisins chrétiens de Castille et d'Aragon, et contre des prétendants au trône issus de leur propre famille [DJEBBAR, 1990, p. 4].

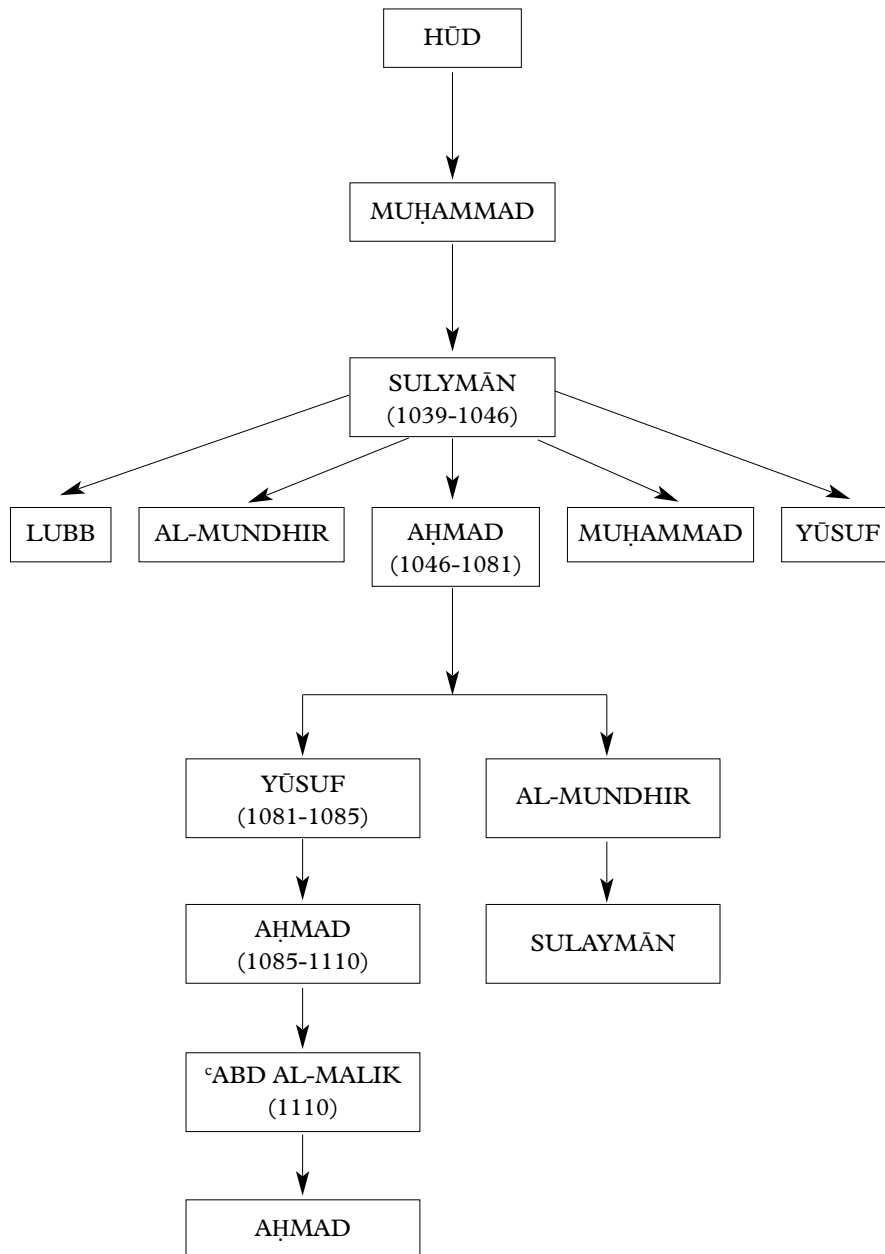
Nous ignorons tout de son enfance de son adolescence et de sa formation scientifique de base. Nous n'avons également aucune indications sur les noms de ses professeurs et sur les noms de ses étudiants s'il en a eu. Mais, compte tenu de sa situation familiale et de son statut de dauphin, il a peut-être eu des professeurs éminents et a pu disposer très tôt d'une riche bibliothèque scientifique.

Les orientations et les activités scientifiques d'al-Mu'taman apparaissent comme un prolongement de celle de son père Aḥmad al-Muqtadir. Le premier témoignage à nous informe, sur le profil et les qualités d'al-Mu'taman, provient de Ṣā'id al-Andalusī qui fût son contemporain. Ce dernier affirme qu'al-Mu'taman fût, en 1068, un jeune homme brillant qui s'était déjà fait remarquer par ses connaissances et peut-être même par ses premières publications en Mathématiques, en Physique et en Philosophie (Métaphysique et Logique) [DJEJBAR, 1990, p.7]. A ce propos il dit: «*A l'heure actuelle, il existe de jeunes savants qui se distinguent par l'étude de la philosophie, dont l'intelligence est solide, les ambitions élevées, et qui ont déjà acquis une part importante des diverses parties <de cette science> (...). Parmi ceux qui se trouvent à Saragosse, signalons le ḥājib Abū 'Āmir, le fils de l'émir al-Muqtadir*» [ṢA'ID, 1912, p. 181].⁴

Les informations en notre possession ne nous permettent pas de préciser la date de sa nomination par son père al-Muqtadir comme ḥājib (Chambellan) du royaume de Saragosse. Il a conservée cette fonction jusqu' à son accession au trône en octobre 1081. Durant cette période, al-Mu'taman avait peut-être commencé la rédaction de son important ouvrage de mathématique, le *Kitāb al-Istikmāl*. Mais, il semble qu'après son accession au trône de Saragosse, al-Mu'taman n'a pas eu le temps de poursuivre son activité scientifique, ce qui explique peut-être la raison pour laquelle al-Mu'taman n'a pas pu achever son traité [GUERGOUR, 2006, p. 66-68].

Al-Mu'taman est mort en 1085, après quatre années de règne seulement. Les rares informations dont nous disposons ne concernent que son pouvoir, sa vie privée et ses activités militaires. Il a vécu dans le luxueux palais d'*al-Ḥaḥfariya* (qui existe toujours, à Saragosse) entouré de conseillers, de poètes et de savants et il menait une vie raffinée. Al-Mu'taman avait recruté ses conseillers aussi bien parmi les Arabes, que parmi les mercenaires chrétiens. Parmi ces derniers, nous pouvons citer le fameux Rodrigo Diaz (m. 1099), plus connu sous le nom d'as-Sayyid [le Maître], titre honorifique que lui avait peut-être donné al-Mu'taman et qui s'est transformé plus tard en «El cid el Campeador». Grâce à ce dernier, al-Mu'taman a pu agrandir son royaume au dépend d'Abū Bakr Ibn 'Abd al-'Azīz gouverneur de Valence (1075-1085), et même au dépend de son propre frère al-Mundhir qui gouvernait les villes de Lérida, Tortosa, Dénia et leurs environs [DJEJBAR, 2001, p. 143].

Généalogie de la famille des Banū Hūd [TURK, 1978, p. 12]:



I.2. *Les écrits scientifiques d'al-Mu'taman*

Les seules informations bibliographiques que nous possédons sur la production scientifique d'al-Mu'taman proviennent du *Kitāb al-ʿIbar* d'Ibn Khaldūn (m. 1406). Nous y lisons qu'il «s'est occupé des sciences mathématiques et qu'il y a produit des ouvrages comme l'*Istikmāl* et al-*Manāẓir*» [Ibn KHALDŪN, 1983, vol.4, pp. 351-352]. Cette information a été reprise telle quelle un peu plus tard par al-Maqqarī dans son *Nafh aṭ-Ṭīb* [al-MAQQARĪ, 1968, vol. I, p. 441]. Ce témoignage laisse à penser que notre mathématicien a également écrit un traité d'optique; ce qui irait dans le sens des informations rapportées par Ṣāʿid al-Andalusī sur sa spécialisation dans les «*Sciences naturelles*». Mais nous n'avons pas d'autre témoignage confirmant cette interprétation du passage d'Ibn Khaldūn, si ce n'est que ce sujet n'était pas étranger aux préoccupations d'al-Mu'taman. En effet, nous savons que ce dernier avait connaissance du contenu de l'important ouvrage d'Ibn al-Haytham (m. 1041) [HOGENDIJK, 1988, p. 54], *Kitāb al-manāẓir* [Livre de l'optique] [DJEJBAR, 1998, p. 63]. Mais, nous savons surtout qu'al-Mu'taman avait envisager de rédiger un chapitre entier sur l'optique dans la seconde partie du *Kitāb al-istikmāl*. Si l'on en croit l'information donnée par Ibn Sartāq (XIIIe s.), ce chapitre devait être intitulé «*La science de l'optique, des lumières et des rayons [lumineux] selon les objets sur lesquels ils tombent*» [DJEJBAR, 1997, p. 186]. Il est tout à fait possible d'ailleurs que ce chapitre ait déjà été rédigé bien avant l'achèvement du premier volume de *l'Istikmāl* et que son auteur ait autorisé sa circulation. Si cette initiative a bien eu lieu, ce qui n'est pas exceptionnel dans la tradition mathématique arabe, tant en Orient qu'en Occident, cela pourrait expliquer pourquoi Ibn Khaldūn a distingué, dans son évocation des écrits d'al-Mu'taman, *l'Optique* du *Kitāb al-istikmāl*.

Venons-en maintenant aux activités purement mathématiques d'al-Mu'taman. Nous savons depuis le début du XX^e siècle qu'il avait écrit un important traité intitulé *Kitāb al-istikmāl* [Livre du perfectionnement] [SARTON, 1927, vol. I, p. 759]. Mais, ce n'est qu'au début des années quatre vingt qu'ont été découverts, dans différentes bibliothèques, quatre fragments de cet ouvrage [HOGENDIJK, 1988, p. 54-55]. La découverte récente de deux copies d'une rédaction complète du premier volume de ce traité, réalisée par Ibn Sartāq, un mathématicien d'Asie Centrale, a permis de combler les lacunes des manuscrits déjà connus et a fourni de précieuses informations sur l'ensemble du projet d'al-Mu'taman [DJEJBAR, p. 185-192].

Ce projet, original pour son époque et relativement ambitieux, devait englober tous les outils indispensables à la formation d'étudiants de haut niveau et à formation de futurs chercheurs en mathématiques, en astronomie

et en physique. L'ouvrage complet devait comporter deux volumes (appelés premier et second genre). Seul le premier semble avoir été achevé. Suivant en cela les traditions grecque et arabe antérieures, l'auteur a traité d'abord les disciplines théoriques, réservant le second genre aux sciences mathématiques appliquées.

La plus grande partie du premier volume de *l'Istikmāl* nous est parvenue. Elle traite des grands thèmes des mathématiques grecques: la théorie des nombres, les grandeurs irrationnelles, les figures planes constructibles, les figures sphériques et les coniques. Il est donc raisonnable que l'on y retrouve, essentiellement, des propositions déjà traitées dans les *Eléments* d'Euclide, dans les *Coniques* d'Apollonius, dans la *Sphère et le Cylindre* et *La mesure du cercle* d'Archimède, dans les *sphériques* de Théodose, dans les *Sphériques* de Menélaüs et même dans *l'Almageste* de Ptolémée [HOGENDIJK, 1988, p. 56].

Ces informations ne font que confirmer, en l'explicitant, la circulation, d'Est en Ouest, des traductions d'ouvrages scientifiques grecs faites dans le Bayt al-ḥikma de Bagdad et ailleurs. Le contenu de *l'Istikmāl* révèle aussi une autre circulation, interne celle-ci à la tradition mathématique arabe, et concernant des ouvrages écrits par des mathématiciens d'Orient [DJEBBAR, 2002, pp. 213-236]. Nous pouvons citer *le livre de la mesure des figures planes et sphériques* des frères Banū Mūsā (autour de 850), *la quadrature de la parabole* d'Ibrāhīm Ibn Sinān (m. 946) dont certaines propositions sont utilisées par al-Mu'taman le *Traité sur les nombres amiables* de Thābit Ibn Qurra (m. 901), reproduit intégralement dans la quatrième section de la première espèce de *l'Istikmāl*, ou le traité de *l'analyse et la synthèse* et *l'optique* d'Ibn al-Haytham [HOGENDIJK, 1988, p. 56], dont certains aspects se trouvent dans le traité d'al-Mu'taman.

II. Les textes grecques

La preuve d'Euclide (III^e s. av. J.C.)

Cette démonstration repose sur la construction et la comparaison de trois carrés sur les trois côtés du triangle rectangle. Il utilise dans sa preuve les comparaisons des triangles, leurs propriétés et les parallélogrammes ayant la même base et dans les mêmes parallèles. En comparant ces surfaces, Euclide a abouti au résultat recherché.

En effet, soit ABC un triangle rectangle en \hat{A} (Figure 1).

$$\text{Alors } AB^2 + AC^2 = BC^2$$

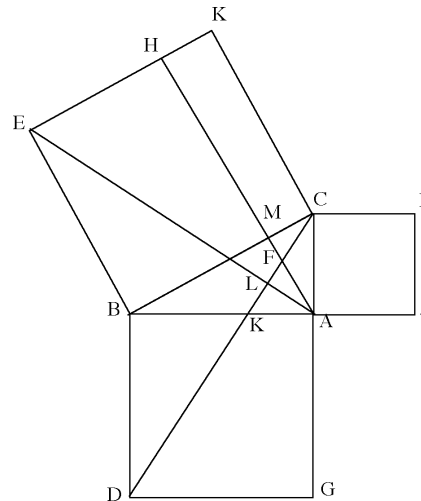


Figure 1

Les triangles ABE et DBC sont égaux. D'autre part, les triangles EBE et ABE ont des aires égales, car ils ont la même base et la même hauteur. De même les triangles DBA et DBC ont des aires égales. Par conséquent les triangles FBE et DBA ont la même surface, et par suite la surface du carré $ABDG$ est égale à celle du rectangle $EBFH$. De même, la surface du carré $ACJI$ est égale à celle du rectangle $CFHK$, ce qui donne la relation recherchée $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Cette démonstration est présente dans toutes les traductions et commentaires connus des *Eléments*. Malgré la rigueur et l'efficacité de cette démonstration, nous trouvons dans des sources grecques, indiennes, arabes et même modernes d'autres types de démonstrations différentes de celle de d'Euclide, sans qu'aucun mathématicien intéressé par cette démonstration ne contredise ou conteste la preuve qu'Euclide a donné.

Avant de donner quelques informations sur les différentes preuves de cette proposition, nous signalons qu'Euclide a complété ce théorème par les deux propositions 12 et 13 du livre II des *Eléments*, relatives aux triangles acutangles [VITRAC, vol. II, p. 359]⁵ et obtusangles [VITRAC, vol. II, p. 358].⁶ Ces deux propositions seront appelées plus tard «le théorème de Pythagore généralisé» après introduction de la trigonométrie à leurs formules de ces deux propositions par al-Kāshī (m. 1429). Euclide a généralisé ce théorème dans la proposition 31 du livre VI des *Eléments* [VITRAC, vol. II, pp. 236-238].⁷ Cette généralisation s'obtient

avec les constructions sur les côtés droits du triangle rectangle, des figures rectilignes semblables et semblablement décrites. La démonstration de ce théorème repose sur les triangles semblables et les propriétés des proportions des lignes droites. Ibn al-Haytham (m. 1040) mentionne cette proposition, dans son traité *ash-Shukūk* [Ibn al-HAYTHAM, 1985, p. 155-156], comme un cas général, après avoir donné une autre démonstration du théorème de l'hypoténuse (Voir ci-dessous).

Dans sa *Collection Mathématique*, Pappus (IV^e s.) donne une démonstration de ce théorème plus générale que celle d'Euclide [PAPPUS d'Alexandrie, 1982, p. 131]. Cette démonstration repose sur la construction des parallélogrammes sur les trois côtés du triangle rectangle et la comparaison de leurs surfaces pour aboutir au résultat du théorème [PAPPUS d'Alexandrie, 1982, pp. 131-132].⁸ Cette démonstration diffère des autres types basés essentiellement, comme nous l'avons déjà souligné, sur la construction et la comparaison des carrés sur les côtés du triangle.

Proclus (VI^e s.) dans son commentaire du premier livre des *Eléments* donne un peu plus d'informations au sujet de l'appellation «*Théorème de Pythagore*». Il raconte même l'anecdote de l'attribution, «*qui consistait à sacrifier un boeuf après sa découverte*». Mais Proclus ajoute: «*j'admire encore plus l'auteur des Eléments non seulement pour la démonstration par laquelle il l'a fermement établie de manière tout à fait évidente, mais aussi pour la généralisation qu'il en a donné au livre VI*» [PROCLUS de Lycie, 1948, p. 362]. Puis il donne deux cas de triangles rectangles, le cas isocèle et le cas scalène. Dans le premier cas il affirme l'impossibilité de trouver des nombres coïncidant avec les côtés des triangles pour leurs sommes de carré donne le double d'un autre carré, mais elle est vraie par approximation. Dans le deuxième cas, Proclus ramène, qu'il est possible d'appliquer le théorème d'Euclide. Il donne même des exemples numériques pour les deux cas.

Proclus ajoute que d'autres méthodes, permettant de trouver de tels triangles nous sont parvenues. L'une de ses méthodes est attribuée à Platon et une autre à Pythagore. Remarquons que la méthode pythagoricienne repose sur les nombres pairs et impairs.

Proclus critique sévèrement les ajouts de Héron (I^e s.) et de Pappus à ce théorème. Il affirme: «*Admettons qu'en fait ces ajouts historiques sont de notre sujet. Mais comme la démonstration de l'auteur des Eléments est claire, je crois qu'il ne faut rien ajouter de superflu; mais se contenter de ce qui a été écrit, d'autant plus que ceux qui ont fait des additions, comme les disciples de Héron et de Pappus, ont été obligés de postuler par avance quelque chose qui est démontré dans le livre VI et cela pour rien de sérieux*» [PROCLUS de Lycie, 1948, p. 364-365].

La méthode Pappus ressemble Effectivement à celle de la proposition 31 du livre VI, tandis que celle de Héron ne nous ai pas parvenue. Mais, an-Nayrīzī (X^e s.) dans son commentaire des *Eléments* attribuée à Héron une démonstration du théorème de l'hypoténuse.

Nous trouvons aussi ces méthodes de construction et de comparaison des carrés dans la tradition indienne. Selon Heath, la méthode de complétion du carré pour montrer le théorème de Pythagore est due à Bhaskara I (600-680) mathématicien indien [Vitrac, B, p. 287]. Mais, selon Vitrac cette méthode est quasi-identique à celle que l'on trouve dans le *Yukti-bhasa* de l'école de d'Aryabhata (476-550) [SARASVATI AMMA, 1979, p. 135] en Inde [VITRAC, p. 287]. Cette méthode se trouve aussi chez plusieurs auteurs en pays d'Islam.

Les textes arabes

Le premier mathématicien arabe à donner une preuve de la proposition de l'hypoténuse dans le cas particulier du triangle rectangle isocèle, est al-Khwārizmī (m. 850) dans son livre d'algèbre [KHWĀRĪZMĪ (al-), 1968, pp. 57-58]. La démonstration d'al-Khwārizmī est différente de celle d'Euclide, qui repose sur la complétion du carré autour du triangle rectangle. Sa démonstration est géométrique. Elle est basée sur les comparaisons des triangles rectangles à l'intérieur du carré (Figure 2).

Selon Proclus, comme nous l'avons déjà évoqué, le cas du triangle rectangle isocèle a été abandonné par Euclide. Cela peut s'expliquer par le fait que les nombres irrationnels n'étaient pas à la portée des mathématiciens à son époque. Les nombres irrationnels étaient toutefois connus des mathématiciens contemporains d'al-Khwārizmī bien qu'ils soient absents dans son livre d'algèbre. La présence de ce théorème dans le traité d'al-Khwārizmī peut expliquée par son utilisation dans le milieu traditionnel et artisanal.

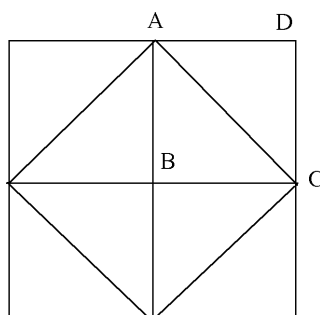


Figure 2

An-Nayrīzī attribue une démonstration différente de celle d'Euclide, au mathématicien Thābit Ibn Qurra (m. 901) [BESTHORN & HEIBERG, 1893-1910, pp. 184-188]. Cette preuve ne sort pas des méthodes de construction et comparaison des carrés avec les déplacements des triangles rectangles à l'intérieur d'un carré dont le côté est l'hypoténuse du triangle rectangle donné [SAYIH, 1960, pp. 35-37]. Cette démarche se trouve aussi dans son traité *Fi l-hujja al-mansūba ilā suqrāt fī l-murabba 'i wa quṭrihi* [Sur la preuve attribuée à Socrate concernant le carré et sa diagonale] [Ms. le Caire, Dār riyyāda, m/40, ff. 162a-162b]. La démonstration de Thābit Ibn Qurra peut être résumée de la façon suivante:

Soit le triangle rectangle ABG donné tel que l'angle $B\hat{A}G$ soit droit (Figure 3).

On construit le carré $ABDE$ de côté BG . Prolongeons BG jusqu'au point Z tel que $EZ = AG$.

On construit le carré $ETHZ$. Prolongeons ET jusqu'au point K tel que $DK = AG$.

Comme $AZ = EZ$, si on retranche EG commun alors $EA = GZ$.

Mais $AE = AB$, alors $AB = GZ$ de même que $BD = TK$.

Donc $AB = GZ = BD = TK$.

De même que $AG = ZH = DK = HK$ et que les quatre triangles ABG , GHZ , HTK et KDB sont des triangles rectangles.

Donc $BG = GH = KB = HK$ et les quatre triangles sont égaux.

Donc $AG^2 + AB^2 = BG^2$.

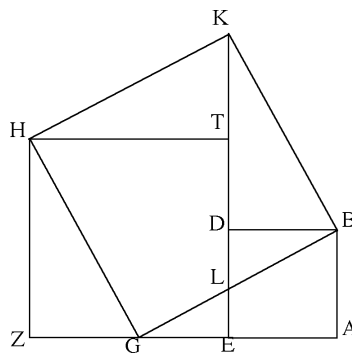


Figure 3

An-Nayrīzī attribue cette démarche, comme nous l'avons déjà évoqué, à Thābit Ibn Qurra [SAÏDAN, 1991, p. 195]. Il ne fait, tout fois aucun commentaire et ne donne aucune information sur les éventuelles sources d'où Thābit a probablement puisé cette démonstration; il ne signale pas que c'est une contribution due à Thābit et que ce dernier, ne fait pas référence à sa source. Cela nous amène à penser que ces méthodes sont probablement des outils, qui ont été utilisés par les artisans et les décorateurs dans leurs professions traditionnelles. Le traité d'Abū al-Wafā' (m. 997), *Kitāb fī ma yahtaju ilayhi aṣānī' min al-a'māl al-handasiyya* [Livre sur ce qui est nécessaire à l'artisan en constructions géométriques] [Abū al-WAFĀ', 1979, pp. 133-156] renforce cette hypothèse. Ce dernier donne plusieurs procédés de constructions des carrés qui vérifient le théorème de Pythagore sans démonstration. Nous donnons ci-dessous l'exemple de la construction d'un carré par deux carrés [Abū al-WAFĀ', 1979, pp. 133-156].

Soit le carré $ABCD$ de côté c (Figure 4). On construit les demi-cercles de diamètres les quatre côtés du carré. On place les points O, P, Q, R tels que le carré $OPQR$ ait pour côté $(b-a)$, avec a le côté du petit carré et b le côté de l'autre carré.

Donc les quatre triangles rectangles sur le pourtour ont une aire équivalente à celle d'un carré de côté b .

$$\text{On a } 4\left(\frac{ab}{2}\right) + (b-a)^2 = c^2$$

$$\text{Donc } c^2 = b^2 + a^2$$

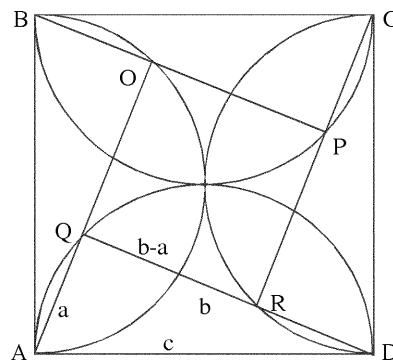


Figure 4

La preuve d'Ibn al-Haytham (m. 1040)

Ibn al-Haytham donne dans son *Ashukük* [Ibn al-HAYTHAM, 1985, p. 153-155] la démonstration suivante différente de celle d'Euclide:

Soit le triangle rectangle ABG , \hat{G} est l'angle droit.

$$\text{Alors } AB^2 = AG^2 + GB^2$$

Preuve

Ibn al-Haytham remarque deux cas:

Si $AG = GB$

Si $AG \neq GB$

1. Si $AG = GB$, alors $G\hat{A}B = G\hat{B}A = \frac{\pi}{4}$

Donc AG, BG sont deux diagonales dans le carré $ABDE$.

On joint GE, GD

Donc le carré $ABDE$ est divisé en quatre triangles égaux.

$$\text{Alors } AB^2 = 2AG^2 + 2BG^2$$

$$\text{Donc } AB^2 = AG^2 + BG^2$$

2. Si $AG \neq GB$

On suppose que $BG > AG$

On prolonge AG en alignement, qui coupe DE en H .

On mène de B une perpendiculaire sur BG , soit BL , de la même manière on trace une perpendiculaire de E sur BL , qui rencontre le prolongement de AH en K .

$$\text{On a } BL \parallel BG \left(\hat{L} = \hat{B} = \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{Donc } B\hat{E}L = E\hat{B}G$$

$$\text{Donc } \Delta(EBL) = \Delta(ABG)$$

$$\text{On a } G\hat{B}A = E\hat{B}L, \text{ alors } EL = AG.$$

Et que $KL \parallel GK$

$$\text{Donc } G\hat{K}L = \frac{\pi}{2}$$

On mène de D une perpendiculaire sur AG .

$$\text{Alors } T\hat{D}A = B\hat{A}G \text{ et que } AD = AB.$$

$$\text{Donc } \Delta(ADT) = \Delta(ABG) \text{ et } DT = AG$$

Donc on a $\Delta(EBL) = \Delta(ABG) = \Delta(ADT)$ et $\hat{TDN} = \hat{ZAN}$, avec $\hat{ATD} = \hat{AZM} = \frac{\pi}{2}$.

Donc $TD = AZ$ et que $\Delta(ATD) = \Delta(AZN) \Rightarrow GB = LK$ et $GM = EL$.

Il reste donc $\hat{K} = \hat{L}$ et que $\hat{EHK} = \hat{BNM}$.

Donc $\Delta(HEK) = \Delta(BNM)$

Par conséquent $\Delta(HKE) = \Delta(BNM)$

Donc $\Delta(DTK) + \text{trapèze } (AGMN) = AG^2$ et $\Delta(ADT) + \Delta(BNM) + \text{trapèze } (BGHE) = BG^2$ (Figure 5).

Donc l'aire des trois triangles et l'aire des deux trapèzes = l'aire $ADEB = BA^2$.

Donc $AG^2 + BG^2 = AB^2$

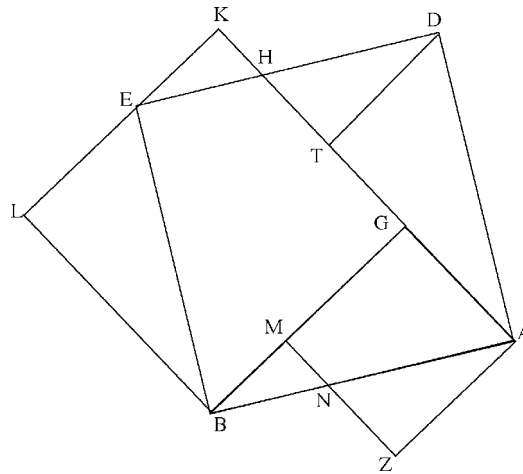


Figure 5

On remarque que cette preuve ressemble à celle attribuée à Thābit avec une légère différence concernant la position des carrés sur les côtés du triangle rectangle.

La preuve d'al-Mu'taman (m. 1085)

Quant à al-Mu'taman, il énonce le théorème suivant :

<Dans> le triangle rectangle, le carré de la corde de son <angle> droit est comme les deux carrés des côtés qui lui sont adjacents.⁹

Soit le triangle rectangle ABG , ayant l'angle \hat{A} droit.

Alors on a : $GB^2 = AB^2 + AG^2$

On construit sur AB , un carré AD et sur AG un carré AZ .

Donc l'angle \hat{A} est droit aux autres côtés (Figure 6).

Alors BHA est une ligne droite en alignement et de même GAE

On prolonge DE , ZH jusqu'à T à côtés de E , H . et même DB , ZG jusqu'à K à côtés de G , B .

On place L sur TD , et M sur TZ tel que : $DL = TM = BK$.

On joint BL , LM , MG

Donc $KD \parallel GE \parallel ZT$ et $DT \parallel BH \parallel ZK$

Et $KG = BA = ED$ et $HZ = GA = BK$

Donc $TZ = KD$ et $\hat{BK}G = \frac{\pi}{2}$

Alors $S(KT)$ est un carré.

Donc $KG = BD = LT = MZ$

$S(GL)$ est un carré = BG^2

Et que $S(AK) = 2\Delta(BGK)$

$S(AK) + S(AT) = 4\Delta(BGK)$

$4\Delta(BGK) = \Delta(BGK) + \Delta(BLD) + \Delta(LTM) + \Delta(MZG)$

On a $S(BM) = S(DA) + S(AZ)$

Donc $GB^2 = AB^2 + AG^2$

Inversement

Si $GB^2 = AB^2 + AG^2 \Rightarrow \Delta(ABG) =$ triangle rectangle.

On construit sur AB un angle droit tel que $AD = AG$

On joint DB

On a $DB^2 = DA^2 + BA^2 = GB^2 = AB^2 + AG^2$

Donc $DB = BG$

Alors $\Delta(ABG) = \Delta(ADB)$

Donc $\hat{B}AG$ est droit.

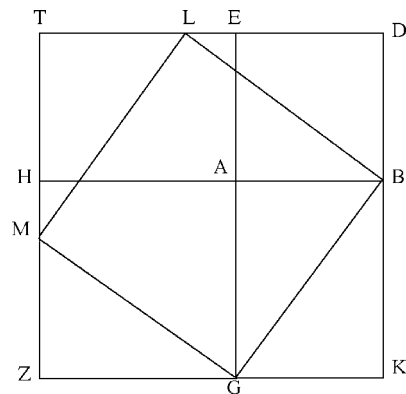


Figure 6

On remarque que cette proposition est équivalente aux deux propositions d'Euclide E(I ; 47, 48) [VITRAC, 1990, vol. I, p. 287].¹⁰ L'énoncé d'al-Mu'taman est identique aux deux énoncés des *Eléments*. Mais la démonstration est totalement différente de celle de la proposition donnée par Euclide dans ses *Eléments*. La méthode d'al-Mu'taman est basée sur la construction et la comparaison des carrés sur les côtés de l'angle droit du triangle rectangle et faisant pivoter des triangles dans un carré. Tandis qu'Euclide, comme on l'a déjà évoqué, construit les carrés sur les trois côtés du triangle rectangle et utilise dans sa preuve les propriétés des triangles et des parallélogrammes de mêmes bases et dans les mêmes parallèles.

La preuve d'aṭ-Ṭūsī (m. 1274)

Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī dans son *Taḥrīr* va plus loin. Il donne les huit cas de figure de construction et de comparaison des carrés par rapport aux trois côtés du triangle rectangle (figure 7) [ṬŪSĪ (aṭ-): Aya Sofya, Ahmet III 3452, pp. 46-49]. Aṭ-Ṭūsī a donc, probablement, rassemblé tous les cas de figure traités par les mathématiciens Thābit Ibn Qurra, Abū al-Wafā', Ibn al-Haytham et al-Mu'taman. Voici l'un des exemples de preuve, parmi les huit, que l'on peut trouver dans le *Taḥrīr* [ṬŪSĪ (aṭ-): Aya Sofya, Ahmet III 3452, p. 34]:

Soit ABG un triangle rectangle en \hat{A} .

On suppose que $AB > AG$.

On construit les carrés $GBDE$, $AGKT$, $ABHR$ sur les trois côtés du triangle rectangle (Figure 7).

On prolonge GK qui rencontre BH en L , de même que TK qui rencontre RH en M .

On mène de D la perpendiculaire DN sur AB , et une autre ES de E sur DN . On prolonge GA qui rencontre ES sur Y . Alors $S(AS)$ est un carré et le reste du carré $GBDE$ est composé de quatre triangles rectangles égaux.

On joint TR .

Les deux aires $S(AL)$ et $S(AM)$ sont composées de quatre triangles rectangles égaux et qui sont aussi égaux aux quatre précédents.

On a donc $GD^2 = AH^2 + AK^2$.

Donc $AB^2 + AG^2 = GB^2$.

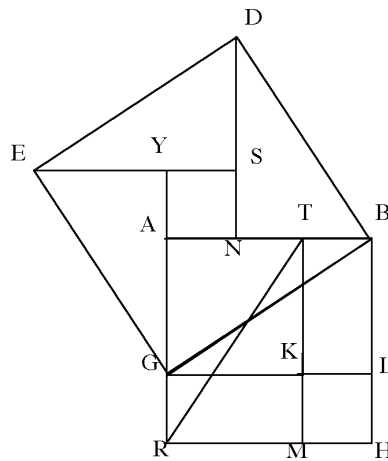


Figure 7

La preuve d'al-Kāshī (m. 1429)

al-Kāshī donne une preuve générale en introduisant le *cosinus*. La démonstration est la suivante [KĀSHĪ (al), 1967, pp. 130-138]:

Soit ABG un triangle quelconque; construisons sur son côté le carré AB . On mène de G une perpendiculaire sur AB en O . De la même manière, on construit les deux carrés sur BG , AG et on procède de la même façon que dans le carré précédent (Figure 8). Le rectangle AH , a pour longueur AE et pour largeur AO .

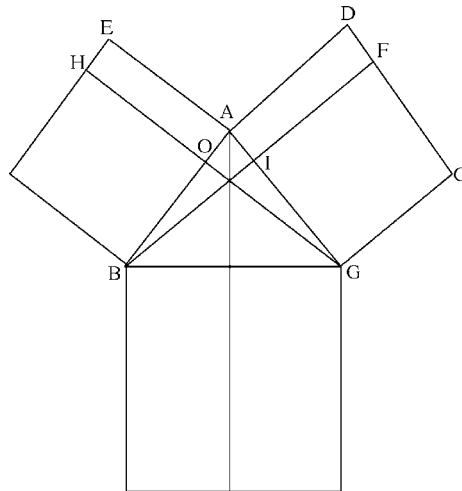


Figure 8

Dans le triangle rectangle AOG , on a:

$$OA = AG \cos(\hat{A})$$

$$OB = AB - AG \cos(\hat{A})$$

L'aire du rectangle HB est égale à $AB^2 - AB \times AG \cos(\hat{A})$

De la même façon, on calcule l'aire du rectangle FG ,

$$\text{On trouve } AG^2 - AB \times AG \cos(\hat{A})$$

Les deux rectangles HB et FG sont égaux au carré BG .

$$\text{Donc } BG^2 = AG^2 - AB \times AG \cos(\hat{A}) + AB^2 - AB \times AG \cos(\hat{A})$$

$$\text{Donc } BG^2 = AG^2 + AB^2 - 2AB \times AG \cos(\hat{A}).$$

Conclusión

Il est important de signaler, que le théorème de l'hypoténuse a été au centre des préoccupations de certains mathématiciens et artisans, comme nous l'avons indiqué dans cette communication. Découverte à partir du III^e siècle avant J. C cette proposition est encore présente dans nos cursus d'enseignement de mathématiques avec une démonstration différente.

Comme nous l'avons évoqué, cette proposition a été démontrée à l'aide de nombreux procédés. En dépit des données par Euclide sur le cas d'un triangle quelconque, en différents endroits des *Eléments*, les mathématiciens n'ont étudié que le cas du triangle rectangle. Au XV^e siècle, le mathématicien de Samarkand al-Kāshī décrit, dans son Livre *Miftāḥ al-ḥisāb* [Clé de l'Arithmétique], le cas général d'un triangle quelconque à l'aide de l'introduction de la trigonométrie. Au XVI^e siècle F. Viète (1540-1603) redécouvre une démonstration similaire à celle d'al-Kāshī.

Enfin, signalons que la preuve actuelle de cette proposition est basée sur les vecteurs, la relation de Chasles (1793-1880) et le produit scalaire.

BIBLIOGRAPHIE

- ABŪ AL-WAFĀ' (1979): *Kitāb fi ma yahtaju ilayhi aṣāni^c min al-a^cmāl al-handasiyya* [Livre sur ce qui est nécessaire à l'artisan en constructions géométriques], S.A. Al-^cAlī (édit.), Bagdad, Markaz iḥyā' at-turāth al-^cilmī al-^carabī.
- BESTHORN, R.O. & HEIBERG, J.L. (1893-1910): Codex Leidensis 399/1, *Euclides Elementa ex interpretatione al-Hadschdschhadschii cum commentariis al-Nairizii*, Arabice et Latine ed. 1-3, Hafniae.
- DJEBBAR, A. (1990): *La contribution mathématique d'al-Mu'taman et son influence au Maghreb*, Colloque Maghrébin de Bayt al-Ḥikma sur *Le patrimoine scientifique arabe*, Carthage (Tunisie), 14-15 Février 1986. Paru, en version arabe, sous le titre *al-Ishām ar-riyyāḍiyya li l-Mu'taman wa ta'thūruhu, fi l-Maghrib*, dans l'ouvrage collectif *Tārīkh al-^culūm^c inda l-^cArab* [l'Histoire des Sciences chez les Arabes], Carthage, Bayt al-Ḥikma.
- DJEBBAR, A. (1997): La rédaction de l'*Istikmāl* d'al-Mu'taman (XI^e s.) par Ibn Sartāq un mathématicien des XIII^e-XIV^e siècles, *Historia Mathematica*, 24(1997).
- DJEBBAR, A. (2002): La circulation des mathématiques entre l'Orient et l'Occident musulman: interrogations anciennes et éléments nouveaux, in, Y. Dold-Samplonius, J. W. Dauben, M. Folkerts & B. Van Dalen (édit.), *From China to Paris: 2000 Years Transmission of Mathematical Ideas*, Stuttgart, Franz Steiner Verlag.
- DJEBBAR, A. (2001): *Une histoire de la science arabe*, Paris, Editions du seuil.
- DJEBBAR, A. (1998): *La tradition arithmétique euclidienne dans le Kitāb al-Istikmāl d'al-Mu'taman et ses prolongements en Andalus et au Maghreb*, Actes du cinquième Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes, (Tunis, 1-3 Décembre 1994), Tunis, A.T.S.M..
- GUERGOUR, Y. (2006): *La géométrie euclidienne chez al-Mu'taman Ibn Hūd (m. 478/1085): Contribution à l'étude de la tradition géométrique arabe en Andalus et au Maghreb*, Thèse de Doctorat, Université d'Annaba.

- HOGENDIJK, J.P. (1988): *Le roi géomètre al-Mu'taman Ibn Hüd et son livre de la perfection (Kitāb al-Istikmāl)*, Actes du premier Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes, (Alger, 1-3 Décembre 1986), Alger, La Maison du Livres.
- IBN AL-HAYTHAM (1985): *Fī ḥall shukūk kitāb Uqlīdis fī'l-uṣūl* [Livre sur la résolution des doutes des *Eléments* et l'explication de ses notions]. Ms. Istanbul, Bibliothèque de l'Université, n°800, in, Fac-simile, F. Sezgin (édit.), Frankfurt.
- IBN KHALDŪN, A. (1983): *Kitāb al-ʿIbar*, Dār al-Kitāb al-Lubnānī wa Maktabat al-Madrassa, Beyrouth.
- IʿINĀN, M.A. (1960): *Duwal aṭ-Ṭawāʿif*, le Caire.
- KĀSHĪ (al) (1967): *Miftāḥ al-ḥisāb* [Clé de l'Arithmétique], al-Damardāche, A. S. & al-Ḥanfi al-Shikh, M. Ḥ. (Edit.), Le Caire, Dār al-Kitāb al-ʿArabi li aṭ-Ṭibāʿa wa an-Nashr.
- KHWĀRĪZMĪ (al-), M. (1968): *al-Mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa muqābala* [L'abrégée du calcul par l'algèbre et la muqābala], A. M. Mushara & M.M. Mursī (édit.), le Caire.
- MAQQARĪ (al) (1968): *Nafḥ aṭ-Ṭib min ghusn al-Andalus ar-raṭīb*, I. ʿAbbās, (édit.), Beyrouth.
- PAPPUS D'ALEXANDRIE (1982): *Collection mathématique*, P. Ver Eecke (trad.), 2 vol., Paris, Blanchard.
- ṢṢĀʿD AL-ANDALUSĪ (1912): *Kitāb Ṭabaqāt al-umam* [Livres des catégories des nations], R. Blachère (trad.) Paris, 1935, L. Cheikho, (édit.), Beyrouth, Imprimerie catholique, 1912, H. Buʿalwāne (nouvel. édit.), Beyrouth, Dār aṭ-Ṭalʿa, 1985.
- SAĪDAN, A.S. (1991): *Handasat Uqlīdis fī aydin ʿarabīyya* [La géométrie d'Euclide entre des mains arabes], Dār al-Bashīr.
- SARASVATIAMMA, T.A. (1979): *Geometry in Ancient & Medieval India*, Delhi, Motilal Banarsidas.
- SARTON, G. (1927): *Introduction to the History of Science*, Baltimore, Williams & Wilkins Cy.
- SAYIH, A. (1960): Thābit Ibn Qurra's Generalization of the Pythagorean Theorem, *Isis*, 51 (1960).
- ṬŪSĪ (AṬ-) Na.: *Taḥrīr Uqlīdis*. Ms. Istanbul, Aya Sofya, Ahmet III 3452.
- TURK, A. (1978): *El Reino de Zaragoza en el siglo XI de Cristo (V de la Hégira)*, publicaciones del Instituto Egipcio de Estudios Esla'micos en Madrid, Madrid.
- VITRAC, B. (1990): *Euclide d'Alexandrie. Les Eléments*. Vols. 1-4, traductions françaises et commentées, Paris, PUF, Bibliothèques d'histoire des sciences.

NOTES

1. E(I ; 47): *Dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle droit est égal aux carrés sur les côtés contenant l'angle droit.*
2. Ce théorème est appelé aussi en français « *pont- aux- ânes* » ou le théorème de « *la jeune mariée* ».
3. Le qualificatif al-Mu'taman signifie « *Le dépositaire de la confiance* ». La tradition andalouse, qui consistait à affubler des roitelets de qualificatifs pompeux, comme al-Ma'mūn, al-Muntaṣar, al-Mu'ataṣim, n'était pas du goût de tout le monde, comme le montrent ces vers moqueurs du poète maghrébin Ibn Rashīq al-Qayrawānī (m. 1071):
Si je fais peu de cas de la terre d'Andalousie C'est à cause des qualificatifs Mu'taḍid et Mu'tamidi
Inclus sont-ils comme titres de royaume Tel un chat qui imiterait, en se gonflant, la prestance du lion
4. Ṣā'īd dit ceci: « *Quant à Abū 'Āmir Ibn al-Amīr Ibn Hūd alors qu'il participe avec ceux-ci à la science mathématique, il se singularise parmi eux par la science de la logique, par le soin de la science physique et de la métaphysique* ».
5. E(II ; 13): *Dans les triangles acutangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle aigu est plus petit que les carrés sur les côtés contenant l'angle aigu de deux fois le rectangle contenu par celui des côtés de l'angle aigu sur lequel tombe la perpendiculaire et par la droite découpée à l'intérieur par la perpendiculaire au-delà de l'angle aigu.*
6. E(II ; 12): *Dans les triangles obtusangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle obtus est plus grand que les carrés sur les côtés contenant l'angle obtus de deux fois le rectangle contenu par celui des côtés de l'angle obtus sur lequel tombe la perpendiculaire et par la droite découpée à l'extérieur par la perpendiculaire au-delà de l'angle.*
7. E(VI, 31): *Dans les triangles rectangles, la figure sur les côtés sous-tendant l'angle droit est égale aux figures sur les côtés contenant l'angle droit, semblables et semblablement décrites.*
8. Proposition I: *Ayant un triangle ABG, si l'on décrit sur les droites AB, BG des parallélogrammes quelconques ABDE, BGZH ; si les droites DE, ZH sont prolongées jusqu'au point O et si l'on mène la droite de jonction OB les parallélogrammes ABDE, BGZH deviennent équivalents à celui qui est entouré par les droites AG, OB dans un angle égal à la somme des angles compris sous les droites BA, AG et sous les droites DO, OB.*
9. C'est la proposition 22 du premier chapitre de la deuxième section de l'*Istikmāl*, de la rédaction d'Ibn Sartāq. Voir Ms. Le Caire, Bibliothèque de l'université, n° 23029, f. 30b.
10. E(I ; 48): *Si dans un triangle, le carré sur l'un des côtés est égal aux carrés sur les deux côtés restants du triangle, l'angle contenu par les deux côtés restants du triangle est droit.*