

TESIS DOCTORAL

Homología efectiva y sucesión
espectral de Eilenberg-Moore

Julio Jesús Rubio García



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TESIS DOCTORAL

Homología efectiva y sucesión
espectral de Eilenberg-Moore

Julio Jesús Rubio García

Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones
2007

Esta tesis doctoral, dirigida por el doctor D. Eladio Domínguez Murillo, fue leída el 18 de junio de 2002, y obtuvo la calificación de Sobresaliente Cum Laude Unanimidad.

© Julio Rubio García

Edita: Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones

ISBN 978-84-690-8623-0

HOMOLOGIA EFECTIVA Y SUCESION ESPECTRAL DE EILENBERG-MOORE.

por

Julio Jesús RUBIO GARCIA.

Memoria presentada para obtener el grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas.

Directores: Eladio DOMINGUEZ
(Universidad de Zaragoza).

Francis SERGERAERT
(Universidad de Grenoble I).

ABSTRACT.

In this memoir the computability of the effective homology of fibrations is studied. In Chapter 0, the basic notations about effective homology, simplicial sets and computability are introduced. In Chapter 1, an "effective version" of the Eilenberg-Moore spectral sequence is defined. Using this spectral sequence, we give in Chapter 2 an algorithm computing the effective homology of the fiber for a simplicial fibration $E \longrightarrow B$ where B is simply connected and the effective homology of E and B are known. In the last Chapter, by using the above results and the acyclic models method, we find an algorithm computing the effective homology of the simplicial loop space of a simply connected simplicial set whose effective homology is known.

A. M. S. Classification: 55R20, 55T20
68Q20.

Key Words: Effective homology.
Eilenberg-Moore spectral sequence.
Loop spaces.

La presente Tesis Doctoral fue defendida en la Universidad de Zaragoza el día 26 de Septiembre, estando el Tribunal compuesto por:

Presidente:	Dr. D. José Luis Viviente Mateu.
Vocal:	Dr. D. Jaume Agudé i Bover.
Vocal:	Dr. D. Manuel Casteller Solana.
Vocal:	Dr. D. Francisco Gómez Ruiz.
Secretario:	Dr. D. José Luis Navarro Segura.

y obtuvo, por unanimidad, la calificación de APTO CUM LAUDE.

INDICE.

INTRODUCCION.	. . .	1
Agradecimientos.	. . .	6
CAP. 0. PRELIMINARES.		
1. Definiciones y primeras propiedades en homología efectiva.	. . .	7
2. Definiciones y propiedades de la categoría de los conjuntos simpliciales.	. . .	17
3. Consideraciones acerca de la computabilidad práctica.	. . .	21
CAP. 1. LA SUCESION ESPECTRAL DE EILENBERG-MOORE EN HOMOLOGIA EFECTIVA. PARTE ALGEBRAICA.		
1. Coálgebras, comódulos y resoluciones canónicas.	. . .	25
2. Cotor y cotor efectivo.	. . .	33
3. Bicomplejos simples.	. . .	37
4. Homología efectiva de bicomplejos. Sucesión espectral de Eilenberg-Moore en homología efectiva.	. . .	43

CAP. 2. LA SUCESION ESPECTRAL DE EILENBERG-MOORE
EN HOMOLOGIA EFECTIVA. PARTE TOPOLOGICA.

1. Los teoremas de Eilenberg y Moore. . . .	49
2. Los teoremas de Eilenberg y Moore en homología efectiva. . . .	52

CAP. 3. LOS ESPACIOS DE LAZOS.

1. Primeras definiciones y propiedades. . . .	62
2. El caso de $\bar{\Delta}[r]$. Los modelos acíclicos. . . .	68
3. El caso general. . . .	74
REFERENCIAS	83

INTRODUCCION.

La idea que impulsó a los matemáticos de finales del siglo anterior y principios de éste a asociar a los espacios topológicos invariantes de tipo algebraico, y que dió lugar al nacimiento de la Topología Algebraica (en el trabajo ya clásico de Poincaré [P] o bien, con un lenguaje más moderno, en los libros de Lefschetz [L] o Veblen [V]), es que los objetos algebraicos (grupos, números, anillos, ...) son más fáciles de manejar y distinguir que los objetos topológicos. Simultáneamente se produjo una "algebraización" de los objetos topológicos para facilitar la lectura en ellos de sus invariantes algebraicos. Así aparecen las nociones de complejo simplicial, complejo abstracto, CW-complejo y finalmente la de conjunto simplicial; estas nociones dieron lugar a ramas de la Topología Algebraica conocidas como Topología Combinatorial o Simplicial.

Subyacente a esta idea de "manejabilidad" de los objetos algebraicos se encuentra la posibilidad de su manipulación "mecánica" y por ello no es extraño que, desde las primeras obras sobre Topología Algebraica, se den algoritmos para el cálculo de invariantes; un ejemplo bien conocido es el algoritmo que calcula la homología de un complejo simplicial a partir de sus matrices de incidencia (este procedimiento de cálculo aparece ya en la obra de Veblen [V] de 1930).

Sin embargo, este camino hacia el cálculo explícito de los invariantes algebraicos que permiten distinguir espacios topológicos (vía el teorema de clasificación de grupos abelianos finitamente generados, por ejemplo) chocó con problemas al encontrarse con la teoría de homotopía. Esta teoría comienza con la definición por Poincaré (en su artículo ya citado [P]) del grupo fundamental de un espacio topológico y es desarrollada por Hurewicz [Hu] que define los grupos de homotopía de orden superior. Estos grupos son mucho más difíciles de calcular que los de homología, con los que están relacionados por el famoso teorema de Hurewicz [Hu]. Una temprana llamada de atención sobre el carácter poco "intuitivo" de estos grupos fue la demostración por Hopf [Ho] de que el tercer grupo de homotopía de la esfera de dimensión dos es no nulo.

A partir de aquí, para intentar extraer información acerca de los grupos de homotopía de esferas, se comenzaron a utilizar herramientas muy sofisticadas, siendo especialmente importantes las sucesiones espectrales (que hacen su aparición en el artículo de Leray [Le] y que son expuestas con mayor precisión por Koszul [K]). Las sucesiones espectrales se mostraron muy potentes para estudiar la homología de los

espacios fibrados, pero se alejaron de los tratamientos algorítmicos, debido a los problemas de extensión que conllevan y que no permiten manipularlas de un modo totalmente "automático". Pese a ello J. P. Serre, en su tesis [Se], y gracias a la sucesión espectral que lleva su nombre (y que relaciona la homología del espacio total de un fibrado con las de la base y la fibra), consiguió calcular algunos grupos de homotopía de esferas no conocidos hasta ese momento.

Aunque los nuevos métodos empleados para el cálculo de invariantes en Topología Algebraica estaban muy lejos de la sencillez de datos y operaciones que habitualmente relacionamos con los algoritmos, los problemas de calculabilidad seguían interesando a los mejores matemáticos de la época, como lo prueba la demostración de E. H. Brown [B2] en 1957 de que los grupos de homotopía de los CW-complejos finitos y simplemente conexos son calculables (para ello utiliza las técnicas de Serre y los sistemas de Postnikov).

A partir de aquí la corriente principal de la Topología Algebraica tendió a estudios muy teóricos, con mucha riqueza de estructuras algebraicas y categoriales. En algunos casos, esta riqueza estructural dió también lugar a importantes resultados de cálculo; por ejemplo la homología de los espacios de Eilenberg-MacLane fue calculada por H. Cartan [C] con la ayuda de una estructura de álgebra que la homología de estos espacios admite de modo natural (este caso es especialmente llamativo ya que los propios Eilenberg y MacLane, en una serie de artículos previos [E-ML2], no habían logrado resolver totalmente el problema).

En otros casos, como el de la sucesión espectral de Eilenberg-Moore (introducida por estos autores en [E-M], en 1966), los trabajos que desarrollaron la teoría inicial (para esta sucesión espectral es imprescindible citar la importantísima labor realizada por L. Smith; ver por ejemplo [Sm1], [Sm2] y [Sm3]) han dado lugar a potentes resultados teóricos e importantes aplicaciones (en el ejemplo comentado, se tienen, entre otras, aplicaciones al estudio de los sistemas de Postnikov de H-espacios), pero el cálculo explícito de invariantes no ha sido, en general, abordado.

Esta sucesión espectral de Eilenberg-Moore relaciona la homología de la fibra de un fibrado con las de la base y el espacio total (como la de Serre lo hacía con la del espacio total en función de las de la base y la fibra). Uno de los objetivos de la presente memoria es el rescatar el espíritu primitivo del cálculo de invariantes en Topología Algebraica y transformar la citada sucesión en un algoritmo que nos permita el cálculo mecánico de los grupos de homología de la fibra en función de aquellos de la base y el espacio total. A continuación presentamos brevemente las herramientas empleadas para llegar a este objetivo.

Algunos de los motivos que hicieron que los topólogos abandonasen en parte el cálculo explícito de invariantes (aparte de la indiscutible belleza conceptual del tratamiento categorial de la Topología Algebraica) fueron posiblemente la no existencia de medios materiales para implementar los algoritmos que se pudiesen encontrar (es decir, el escaso o nulo desarrollo de los ordenadores) y la tremenda dificultad de los procedimientos que mostraban la calculabilidad de los invariantes de la Topología Algebraica; el ejemplo paradigmático es la demostración de Brown de la calculabilidad de los grupos de homotopía: el método es tan complejo que no conocemos su utilización para el cálculo o la "verificación" de ningún grupo de homotopía.

Pese a esta segunda dificultad, desde que se dispuso de ordenadores en las universidades, es decir desde mediados de los años sesenta, los matemáticos se lanzaron al cálculo con ordenador de los grupos de homología (Pinkerton [Pi], con el algoritmo clásico de diagonalización de matrices dado por Veblen [V]) o de otros objetos de la Topología Algebraica: resoluciones de coálgebras (Liulevicius [Li]) o incluso grupos de homotopía de esferas (Mahowald y MacLaren [M-ML]). M. E. Mahowald, junto a E. B. Curtis, puede ser considerado el precursor de una escuela de topólogos americanos (entre los que destacan, además de estos autores, Tangora [T] y Ravenel [R1],[R2]) que trabaja actualmente en el cálculo con ordenador de grupos de homotopía de esferas, vía la sucesión espectral de Adams.

A comienzos del año 1986, F. Sergeraert comienza el desarrollo de una teoría (la homología efectiva, ver [Ser1]) en la que se replantea el lenguaje del Algebra Homológica con la intención de acercarse más al mundo de la computación y, de este modo, evitar las dificultades de los algoritmos ya conocidos o encontrar nuevos procedimientos de cálculo. En esta teoría se verifica que, a condición de no trabajar más que con grupos abelianos libres y de que todos los datos en las definiciones estén dados explícitamente, los problemas de extensión en las sucesiones espectrales y las ambigüedades que aparecen en las sucesiones exactas pueden ser superados. Esto posibilita un tratamiento algorítmico de objetos de la Topología Algebraica tales como las sucesiones espectrales de Serre ([Ser1],[R-S]) o, como se muestra en esta memoria, de Eilenberg-Moore. Además, y simultáneamente, se ha desarrollado una nueva teoría de programación, denominada codificación funcional (ver [Ser2], [Ser3], [Ru]), que se ajusta a las características de los algoritmos encontrados en homología efectiva, lo que permite utilizar realmente estos procedimientos para el cálculo práctico con ordenador; esta labor está siendo desarrollada en la actualidad.

Es con estos instrumentos y utilizando como apoyo imprescindible los teoremas ya conocidos acerca de la sucesión espectral de Eilenberg-Moore (en especial los recogidos en el artículo inicial [E-M]), como hemos conseguido alcanzar el objetivo de dar a esta sucesión un tratamiento algorítmico.

Para finalizar esta introducción, comentamos la estructura de la memoria, que está dividida en cuatro capítulos, a su vez separados en párrafos.

El primer capítulo, el número cero, está dedicado a la exposición de hechos utilizados a lo largo de la memoria, pero que no son centrales en el desarrollo del tema principal. Especialmente importante es el primer párrafo en el que se dan las primeras definiciones y propiedades en homología efectiva, dada la inexistencia de buenas referencias para esta teoría, debido a que todavía está en evolución y no ha encontrado su forma definitiva; es de destacar la introducción, junto a la homología efectiva, de otra noción muy importante a lo largo de este trabajo, llamada homología efectiva fuerte. En el segundo párrafo se dan las nociones básicas de la categoría de los conjuntos simpliciales, utilizando como referencia el libro de J. P. May [M]. En el párrafo tercero se abordan las cuestiones relativas a la computabilidad teórica y práctica, explicándose en él que todos los enunciados de esta memoria pueden ser adecuadamente modificados para que sean totalmente rigurosos desde el punto de vista lógico y que los algoritmos encontrados pueden ser fácilmente implementados en un ordenador (como de hecho se está ya realizando).

El capítulo 1 trata de la parte algebraica en la que se basa la sucesión espectral de Eilenberg-Moore. En los dos primeros párrafos se hacen explícitas ciertas construcciones realizadas por Eilenberg y Moore en [E-M] y se utiliza su definición del funtor cotor para llegar a la noción de cotor efectivo. El párrafo 3 está dedicado al estudio en profundidad de un tipo especial de bicomplejos llamados bicomplejos simples ("tapered", según [E-M]); en el cuarto y último párrafo se llega a sustituir la sucesión espectral que nos interesa por un algoritmo en homología efectiva (que por analogía es denominado "sucesión espectral de Eilenberg-Moore en homología efectiva").

El capítulo 2 tiene un primer párrafo en el que se aprovechan las aplicaciones clásicas en Topología de la sucesión espectral de Eilenberg-Moore y el funtor cotor para extraer propiedades en homología efectiva. En el segundo se realiza un estudio detallado del tipo de bicomplejos que definen el cotor efectivo, gracias a lo cual obtenemos el resultado principal del capítulo: si en un fibrado simplicial de base simplemente conexa (en un sentido más restringido que el habitual; ver el teorema

2.2.7) son conocidas la homología efectiva fuerte de la base y la del espacio total, entonces se da un algoritmo que calcula la homología efectiva de la fibra.

El capítulo 3 estudia el caso particular de los fibrados asociados a los espacios de lazos. En el primer párrafo se explicitan construcciones y resultados ya conocidos en relación con la versión simplicial de los espacios de lazos. Una técnica clásica de la Topología Algebraica para encontrar y extender equivalencias de homotopía es la de los modelos acíclicos (introducida por Eilenberg y MacLane [E-ML] en 1953). El párrafo dos de este capítulo está dedicado a encontrar explícitamente homotopías que prueben que ciertos conjuntos simpliciales, que serán nuestros modelos en el párrafo siguiente, son acíclicos. Utilizando esta técnica de modelos acíclicos y la maquinaria desarrollada en los capítulos 1 y 2, conseguimos demostrar, en el último párrafo de la memoria, el siguiente resultado: si un conjunto simplicial es simplemente conexo (en el sentido comentado más arriba) y conocemos su homología efectiva fuerte, se tiene un algoritmo que calcula la homología efectiva de la versión simplicial de su espacio de lazos.

A lo largo de esta memoria, y también en esta introducción, las referencias a libros y artículos aparecen entre corchetes, mientras que las referencias internas a definiciones, observaciones o resultados de este trabajo se indican con el número del capítulo, del párrafo y del hecho señalado, eliminando el número del capítulo (párrafo) si realizamos la llamada desde el mismo capítulo (párrafo, respectivamente). Por ejemplo, la referencia "proposición 2.1.3" señala la proposición número 3 del párrafo 1 del capítulo 2; la referencia "definición 2.3" indica la definición 3 del párrafo 2 del capítulo desde el que hacemos la llamada.

En todo lo que sigue el símbolo \mathbb{Z} representará el conjunto de los números enteros y \mathbb{N} el conjunto de los enteros no negativos (es decir, el cero se considera incluido). Puesto que en la memoria aparecen distintos tipos de homología (la habitual, la efectiva, la efectiva fuerte) si este nombre aparece sin adjetivos se estará haciendo referencia a la homología ordinaria.

AGRADECIMIENTOS.

Durante la realización de la presente memoria (es decir, desde Enero de 1986) he disfrutado de una beca del "Plan de Formación del Personal Investigador" del Ministerio de Educación y Ciencia, en el área de Informática. Título del proyecto de investigación: "Problemas de decidibilidad y computación de los invariantes de la Topología Algebraica".

Puesto que mi tesis ha sido codirigida por el profesor F. Sergeraert de la Universidad de Grenoble, he realizado diversas estancias en dicha universidad; dos de ellas han sido financiadas por el "Programa Europa de estancias de investigación" de la Caja de Ahorros de la Inmaculada y el Consejo Asesor de Investigación de la Diputación General de Aragón . Títulos de los proyectos: "Cálculo con ordenador de la homología de los espacios de lazos" (nº referencia CB-17, Noviembre 1987) y "Software para el cálculo de invariantes en Topología Algebraica" (nº referencia CB-25, Abril 1988).

Deseo agradecer aquí el apoyo que me han brindado en todo momento los dos directores de este trabajo. Eladio Domínguez, además de ser mi tutor en mis estudios de tercer ciclo y haberme orientado siempre en el aspecto científico, es el responsable de que me interesase por la investigación en Matemáticas y también de que el tema elegido fuese tan "arriesgado" como "Computación y Topología". Francis Sergeraert, además de poner a mi alcance las herramientas científicas necesarias en esta memoria (es el creador de la "homología efectiva"), me ha ofrecido su hospitalidad durante mis estancias en Grenoble.

Quiero agradecer también la colaboración de todos aquellos que me indicaron, en ocasiones con fina ironía, su escepticismo acerca de lo que los topólogos podíamos esperar de los ordenadores: su opinión consiguió que redoblase mis esfuerzos para demostrar que este tema es algo más que una cuestión de moda.

Para terminar, mostrar mi agradecimiento a la cuidada labor del mecanógrafo: sólo yo sé lo que ha tenido que sufrir para conseguir este resultado.

CAPITULO 0.- PRELIMINARES.

1.- Definiciones y primeras propiedades en homología efectiva.

En este párrafo se introducen las nociones de base en la teoría de homología efectiva. Se retoman las definiciones clásicas en Algebra Homológica, pero restringiéndonos a trabajar con módulos que sean grupos abelianos libres. Además en las definiciones en homología efectiva se exige que todos los datos (las inversas homotópicas, las homotopías de cadenas, ...) estén dados explícitamente (ver las definiciones 1). Otras características particulares son que a los complejos acíclicos no se les exige que sean aumentados (ver definición 1) y que todas las sucesiones exactas serán además descomponibles (definición 2).

Denotaremos por \mathfrak{C} a la categoría cuyos objetos son los complejos de cadenas de \mathbb{Z} -módulos libres y cuyos morfismos son los morfismos de cadenas.

Si no se especifica lo contrario, todos los objetos gradudados con los que trabajemos (complejos de cadenas, complejos de \mathfrak{C} , multicomplejos, ...) serán nulos en grado negativo. Esto lo indicaremos simplemente diciendo que los índices pertenecen a \mathbb{N} en lugar de a \mathbb{Z} .

Diremos que un complejo de cadenas es de tipo finito si cada uno de sus \mathbb{Z} -módulos tiene una base finita. Excepcionalmente, y por globalizar notaciones, diremos que cualquier complejo de cadenas cuyo único \mathbb{Z} -módulo no nulo es el de grado cero es también de tipo finito (aunque el único \mathbb{Z} -módulo no nulo no tenga una base finita).

Definiciones 1.- Dos complejos de cadenas $C = \{C_n, d_n\}$ y $C' = \{C'_n, d'_n\}$ se dicen homotópicamente equivalentes si damos una equivalencia de homotopía entre ellos, es decir si damos un conjunto de datos $\{f, f', h, h'\}$, donde $f : C \rightarrow C'$, $f' : C' \rightarrow C$ son morfismos de cadenas, $h = \{h_n\}$, $h' = \{h'_n\}$ siendo $h_n : C_n \rightarrow C_{n+1}$, $h'_n : C'_n \rightarrow C'_{n+1}$ homomorfismos para todo $n \in \mathbb{Z}$ y se verifica:

$$H1) h_{n-1}d_n + d_{n+1}h_n + f_n f'_n = \text{id}_{C_n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z},$$

$$H2) h'_{n-1}d'_n + d'_{n+1}h'_n + f'_n f_n = \text{id}_{C'_n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Un complejo de cadenas $C = \{C_n, d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, se dice acíclico si se dan una familia de homomorfismos $h_n : C_n \longrightarrow C_{n+1}$ verificando que

$$h_{n-1}d_n + d_{n+1}h_n = \text{id}_{C_n} \text{ para todo } n \geq 0.$$

Entonces diremos que h es una homotopía de contracción para C .

Definiciones 2.- Dar una sucesión exacta en \mathfrak{C} es dar un conjunto datos $\{A^n, f^n, h^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, donde cada A^n es un objeto de \mathfrak{C} y $f^n : A^n \longrightarrow A^{n-1}$ y $h^n : A^n \longrightarrow A^{n+1}$ son morfismos de \mathfrak{C} para todo $n \in \mathbb{Z}$, verificando:

$$h^{n-1}f^n + f^{n+1}h^n = \text{id}_{A^n} \text{ y } f^{n-1}f^n = 0.$$

Dar un complejo (de cadenas) de \mathfrak{C} es dar $\{X^n, d^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, donde cada X^n es un objeto de \mathfrak{C} y $d^n : X^n \longrightarrow X^{n-1}$ es un morfismo de \mathfrak{C} , verificando: $d^{n+1}d^n = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Definiciones 3.- Un complejo de cadenas $C' = \{C'_n, d'_n\}$ se dice que es una reducción elemental de otro complejo $C = \{C_n, d_n\}$ si damos un índice n tal que $C'_m = C_m$ si $m \notin \{n, n-1\}$, $C_n = C'_n \oplus C''_n$, $C_{n-1} = C'_{n-1} \oplus C''_{n-1}$,

$$d'_n = d_n | C'_n : C'_n \longrightarrow C'_{n-1}, \quad d''_n = d_n | C''_n : C''_n \longrightarrow C''_{n-1},$$

siendo d''_n un isomorfismo, $d'_m = d_m$ si $m \notin \{n+1, n, n-1\}$, y estando d'_{n+1}, d'_{n-1} definidas de modo natural a partir de d_{n+1}, d_{n-1} .

Dar una reducción de un complejo de cadenas C es dar un conjunto de datos $\{C', f, h\}$, donde C' es otro complejo tal que $\{f, f, h, 0\}$ es una equivalencia de homotopía entre C y C' verificando además:

$$H3) f_{n+1}h_n = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

$$H4) h_n f_n = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

$$H5) h_{n+1}h_n = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Notar que en este caso la propiedad (H2) de la definición 1 queda convertida en:

$$H2') f_n f_n = \text{id}_{C'_n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Generalmente, diremos simplemente que C' es una reducción de C .

Un complejo de cadenas se dice irreducible si toda reducción de él define un isomorfismo de cadenas.

Proposición 4.

a) Una reducción elemental de un complejo de cadenas induce de modo natural una reducción.

b) Recíprocamente, cada reducción puede ser descompuesta en reducciones elementales sobre las flechas del complejo inicial.

Demostración.

a) Basta definir f_m, f'_m como la identidad si $m \notin \{n, n-1\}$, siendo para los índices $n, n-1$ las proyecciones e inclusiones canónicas correspondientes, $h_m = 0$ si $m \neq n-1$ y $h_{n-1} = i(d_n | C_n'')^{-1}p$, donde $p : C_{n-1} \rightarrow C_{n-1}''$, $i : C_n'' \rightarrow C_n$ son la proyección e inclusión canónica respectivamente.

b) La descomposición en cada grado viene dada por:

$$C_n = (\text{im } f'_n \oplus \text{im } d_{n+1}h_n) \oplus \text{im } h_{n-1}.$$

Definiciones 5.- Dar una homología efectiva de un complejo de cadenas es dar una equivalencia de homotopía entre dicho complejo y un complejo de cadenas de tipo finito e irreducible.

Dar una homología efectiva fuerte de un complejo de cadenas C es dar una reducción $\{HC, f, f', h\}$ de C , donde HC es un complejo de cadenas de tipo finito e irreducible.

En ambos casos el complejo irreducible y de tipo finito se dice parte irreducible de la homología efectiva (fuerte) y en ocasiones, cuando no haya posibilidad de error, denotaremos toda la homología efectiva (fuerte) por su parte irreducible.

Proposición 6.- Dos complejos de cadenas irreducibles y de tipo finito que sean homotópicamente equivalentes son isomorfos.

Demostración.- Esto se deduce de que la dimensión de cada grupo así como el rango y los coeficientes de torsión de las flechas de un complejo irreducible y de tipo finito vienen determinados por la homología ordinaria del complejo (ver [R-S]).

Observaciones 7.

1) De la anterior propiedad se sigue que la parte irreducible de las homología efectiva (fuerte) de un complejo de cadenas es, salvo cambio de base, única. Por tanto adoptaremos el convenio de decir que, si damos una homología efectiva (fuerte) de un complejo de cadenas C , conocemos la homología efectiva (fuerte, respectivamente) de C o que C tiene homología efectiva (fuerte) o que C es un complejo con homología efectiva (fuerte).

2) Con el anterior convenio, podemos decir que si un complejo de cadenas \bar{C} es homotópicamente equivalente a C y C tiene homología efectiva, entonces \bar{C} tiene homología efectiva. Análogamente, si C es una reducción de \bar{C} y C tiene homología efectiva fuerte, entonces \bar{C} tiene homología efectiva fuerte.

3) Evidentemente, un complejo de cadenas que tiene homología efectiva fuerte tiene también homología efectiva.

4) De la demostración de la propiedad 6 se deduce que la parte irreducible de la homología efectiva (fuerte) de un complejo de cadenas C viene determinada por la homología ordinaria de C . Luego una primera obstrucción a la existencia de la homología efectiva (fuerte) de C es que la homología ordinaria de C , que debe coincidir con la de la parte irreducible HC (en caso de que exista), sea de tipo finito. La siguiente proposición nos indica que la clase de los complejos de cadenas que tienen homología efectiva (fuerte) es suficientemente amplia.

Observación 8.- Cuando trabajemos sobre conjuntos graduados por los naturales, diremos que un objeto o estructura es (finitamente) calculable o computable o que existe un algoritmo que los calcula si existe un algoritmo que a cada número natural le asocia toda la información requerida para ese índice y todos los menores. Por ejemplo, diremos que una reducción $\{C', f, f', h\}$ de C es calculable si existe un algoritmo tal que a n le asocia C'_m, f'_m, f_m, h_m para todo $m \leq n$.

Proposición 9.- Dado un complejo de cadenas de tipo finito existe un algoritmo que calcula su homología efectiva fuerte. En particular, todo complejo de cadenas de tipo finito tiene homología efectiva fuerte.

Demostración.- Basta buscar una reducción elemental "maximal" de cada flecha del complejo (lo que evidentemente se puede hacer en tiempo finito) y después componer para obtener una reducción.

La siguiente propiedad, cuya demostración es muy sencilla, es la que justifica la introducción de la noción de homología efectiva.

Proposición 10.- Si un complejo de cadenas tiene homología efectiva entonces su homología ordinaria es finitamente calculable.

Demostración.- Basta calcular la homología ordinaria de la parte irreducible. Pero la homología de cualquier complejo de cadenas de tipo finito es calculable: es suficiente diagonalizar las matrices de enteros que representan el borde y leer de ellas los rangos y coeficientes de torsión correspondientes.

Observaciones 11.

1) Existen muchos complejos de cadenas que no son de tipo finito pero tienen homología efectiva. En los capítulos siguientes de esta memoria aparecen numerosos ejemplos.

2) Notar que al restringirnos a trabajar con \mathbb{Z} -módulos libres es bien conocido (ver por ejemplo [D], corolario II.4.8), que si dos complejos de cadenas tienen la misma homología ordinaria entonces existe una equivalencia de homotopía entre ellos. Pese a esto, si uno de los complejos tiene homología efectiva lo anterior no implica que el segundo complejo tenga homología efectiva, ya que el citado resultado nos asegura la existencia de una equivalencia de homotopía, pero no da ésta explícitamente tal como se exige en nuestra definición 2. Sin embargo, si dos complejos de cadenas tienen homología efectiva y su homología ordinaria coincide, podemos dar una equivalencia de homotopía explícita entre estos complejos (basta, según la propiedad 6, buscar el isomorfismo entre sus partes irreducibles y después componer con las equivalencias de homotopía que definen las homologías efectivas).

Un tipo de complejos muy utilizados en el capítulo 3 serán los complejos acíclicos. Sobre estos complejos las nociones de homología efectiva y homología efectiva fuerte coinciden, como se prueba en la demostración de la siguiente propiedad.

Proposición 12.- Un complejo acíclico tiene homología efectiva fuerte.

Demostración.- Es evidente que una homotopía de contracción h (ver la definición 2) de un complejo acíclico C define una equivalencia de homotopía entre C y un complejo de cadenas nulo salvo en el grado cero, denotado O , que es de tipo finito (por convenio, como se indicó al comienzo de este párrafo) e irreducible. Por tanto, C tiene

homología efectiva. Es fácil verificar que los morfismos $\bar{h}_n : C_n \longrightarrow C_{n+1}$ dados por $\bar{h}_n = h_n(\text{id}_{C_n} - h_{n-1}d_n)$, donde d es el borde de C , definen una homotopía de contracción de C tal que $\bar{h}_{n+1}\bar{h}_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$; es decir $\{0,0,0,\bar{h}\}$ es una reducción de C y así, C tiene homología efectiva fuerte.

Definiciones 13.- Un multicomplejo (sobre \mathbb{Z}) es un conjunto de datos $\{C_q^p, d_q^{p,r}\}_{p,q,r \in \mathbb{N}}$, donde: C_q^p es un \mathbb{Z} -módulo libre, $d_q^{p,r} : C_q^p \longrightarrow C_{q+r-1}^{p-r}$ es un homomorfismo tal que:

$$\sum_{0 \leq s \leq r} d_{q+s-1}^{p-s,r-s} d_q^{p,s} = 0, \text{ para cada } p,q,r \in \mathbb{N}.$$

La totalización de un multicomplejo $\{C_q^p, d_q^{p,r}\}$ es $\{C_p, d_p\}_{p \in \mathbb{N}}$, donde:

$$C_p = \bigoplus_{0 \leq r \leq p} C_r^{p-r} \text{ y } d_p = \sum_{0 \leq p' \leq p} \sum_{0 \leq r \leq p'} d_{p-p'}^{p',r}.$$

Proposición 14.- La totalización de un multicomplejo es un complejo de cadenas.

Observación 15.- Un bicomplejo (un "double complex", según la definición V.1 de [H-S]) es un caso particular de multicomplejo. Además, de todo complejo de \mathfrak{C} se puede obtener, tras ciertas modificaciones en los signos de las aplicaciones, un bicomplejo y viceversa. A partir de aquí diremos indistintamente complejos de \mathfrak{C} o bicomplejos sobre \mathbb{Z} y hablaremos de la totalización de un complejo de \mathfrak{C} .

Definición 16.- Un multicomplejo con homología efectiva (fuerte) es un multicomplejo tal que su totalización tiene homología efectiva (fuerte, respectivamente).

La situación más habitual en la que vamos a trabajar es aquella en la que un complejo de cadenas C está organizado como un multicomplejo (es decir, C es la totalización de este multicomplejo) y conocemos la homología efectiva fuerte de ciertos subcomplejos del multicomplejo, deseando extraer información acerca de la homología efectiva del complejo total C . Un método de trabajo sería utilizar las reducciones elementales (supuestas conocidas) de un subcomplejo para obtener una reducción de C . Esta idea queda reflejada en la siguiente definición.

Definición 17.- Un complejo de cadenas $C' = \{C'_n, d'_n\}$ se dice que es una reducción parcial de otro complejo $C = \{C_n, d_n\}$ si damos un índice n tal que $C'_m = C_m$ si $m \notin \{n, n-1\}$, $C_n = C'_n \oplus C''_n$, $C_{n-1} = C'_{n-1} \oplus C''_{n-1}$ y d_n se descompone en:

$$\begin{array}{ccc}
 C'_n & \xrightarrow{d'_n} & C'_{n-1} \\
 & \searrow & \nearrow \\
 \oplus & & \oplus \\
 & \nearrow & \searrow \\
 C''_n & \xrightarrow{d''_n} & C''_{n-1}
 \end{array}$$

verificándose que d''_n es un isomorfismo, que $d'_n = d''_n - d''_n(d''_n)^{-1}d''_n$, donde d''_n y d''_n son las componentes $C'_n \rightarrow C'_{n-1}$ y $C''_n \rightarrow C''_{n-1}$ respectivamente, y que d'_{n+1} , d'_{n-1} están definidas de modo natural a partir de d_{n+1} y d_{n-1} respectivamente.

Un razonamiento del mismo estilo que el dado en la demostración de la proposición 4.a prueba el siguiente resultado:

Propiedad 18.- Una reducción parcial de un complejo de cadenas induce de modo natural una reducción.

Observaciones 19.

1) Notar que si un complejo C aparece como la totalización de un multicomplejo entonces cada flecha de C está canónicamente descompuesta por flechas del multicomplejo. A partir de ahora, diremos que hacemos una reducción de una flecha de un multicomplejo cuando hagamos en su totalización la reducción parcial correspondiente en la descomposición canónica indicada (generalmente estas reducciones estarán inducidas por una reducción elemental de una flecha en un subcomplejo del multicomplejo).

2) Notar que al hacer una reducción de una flecha en un multicomplejo pueden aparecer flechas entre grupos entre los que antes no existían. El caso típico es el de un bicomplejo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \longrightarrow & A_1^2 & \longrightarrow & A_1^1 & \longrightarrow & A_1^0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & \nearrow f & \downarrow \\
 \dots & \longrightarrow & A_0^2 & \longrightarrow & A_0^1 & \longrightarrow & A_0^0
 \end{array}$$

Al reducir la flecha f aparece un nuevo diagrama en el que una flecha une A_0^2 y A_0^1 .

Sin embargo, es fácil probar (ver [R-S]) que esta nueva flecha no impide que el diagrama obtenido sea también un multicomplejo. Es decir, al reducir f no obtenemos un bicomplejo, pero sí un multicomplejo.

3) En las aplicaciones prácticas, al reducir sucesivamente flechas de un multicomplejo aparecen otros multicomplejos en los que la disposición de las nuevas flechas recuerdan la de las diferenciales d^r en las distintas etapas de las sucesiones espectrales. Veremos, en algún caso concreto, que estos procesos de reducción en multicomplejos juegan realmente en homología efectiva el papel de las sucesiones espectrales.

Terminamos este primer párrafo demostrando la versión "homología efectiva" del teorema de Künneth que será muy utilizado en los que sigue.

Proposición 20. (Fórmula de Künneth en homología efectiva).

Si A, B son dos complejos de cadenas con homología efectiva fuerte, entonces existe un algoritmo que calcula la homología efectiva fuerte del complejo $A \otimes B$. En particular, $A \otimes B$ tiene homología efectiva fuerte.

Demostración.- Sean d, \bar{d} los bordes de A, B respectivamente. Por comodidad de notación d, \bar{d} seguirán denotando los bordes tras las sucesivas reducciones.

Consideramos el bicomplejo que define $A \otimes B$ (es decir, el bicomplejo cuya totalización es $A \otimes B$):

$$\begin{array}{ccccccc}
& \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\dots & \longrightarrow & A_{p+1} \otimes B_q & \xrightarrow{d_{p+1} \otimes 1} & A_p \otimes B_q & \xrightarrow{d_p \otimes 1} & A_{p-1} \otimes B_q \longrightarrow \dots \\
& & (-1)^{p+1} \otimes \bar{d}_q \downarrow & & (-1)^p \otimes \bar{d}_q \downarrow & \dashrightarrow & (-1)^{p-1} \otimes \bar{d}_q \downarrow \\
\dots & \longrightarrow & A_{p+1} \otimes B_{q-1} & \xrightarrow{d_{p+1} \otimes 1} & A_p \otimes B_{q-1} & \xrightarrow{d_p \otimes 1} & A_{p-1} \otimes B_{q-1} \longrightarrow \dots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Puesto que conocemos la homología efectiva fuerte de B , podemos considerar (ver la propiedad 8.b) que $B_q = HB_q \oplus B_q''$, $B_{q-1} = HB_{q-1} \oplus B_{q-1}''$ y que $\bar{d}_q \mid B_q''$ tiene una inversa $g : B_{q-1}'' \longrightarrow B_q''$. Puesto que $C_1 \otimes (C_2 \oplus C_3)$ es isomorfo de modo canónico a $(C_1 \otimes C_2) \oplus (C_1 \otimes C_3)$ se tiene que la reducción elemental de \bar{d}_q que conocemos induce una reducción de la flecha $(-1)^p \otimes \bar{d}_q$ del bicomplejo (es decir, una reducción parcial en la flecha correspondiente del complejo $A \otimes B$). Entonces aparece una nueva flecha (puntuada en el diagrama) que no es otra que la composición (ver la definición 18):

$$-(d_p \otimes 1) (1 \otimes i) ((-1)^p \otimes g) (1 \otimes p) (d_{p+1} \otimes 1) = (-1)^{p+1} d_p d_{p+1} \otimes i g p = 0.$$

Es decir, en realidad no aparece ninguna flecha nueva. Luego podemos reducir todas las flechas verticales del bicomplejo (es decir, aplicar que HB es una reducción de B) y así obtener una reducción de $A \otimes B$ a la totalización del bicomplejo 1:

$$\begin{array}{ccccccc}
& \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\dots & \longrightarrow & A_p \otimes HB_q & \xrightarrow{d_p \otimes 1} & A_{p-1} \otimes HB_q & \longrightarrow & \dots \\
& & (-1)^p \otimes \bar{d}_q \downarrow & & (-1)^{p-1} \otimes \bar{d}_q \downarrow & & \\
\dots & \longrightarrow & A_p \otimes HB_{q-1} & \xrightarrow{d_p \otimes 1} & A_{p-1} \otimes HB_{q-1} & \longrightarrow & \dots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Un razonamiento análogo prueba que podemos reducir todas las flechas horizontales hasta obtener una reducción de la totalización del bicomplejo 1 a la totalización de:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & HA_p \otimes HB_q & \xrightarrow{d_p \otimes 1} & HA_{p-1} \otimes HB_q & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow (-1)^p \otimes \bar{d}_q & & \downarrow (-1)^{p-1} \otimes \bar{d}_q & & \\
 \dots & \longrightarrow & HA_p \otimes HB_{q-1} & \xrightarrow{d_p \otimes 1} & HA_{p-1} \otimes HB_{q-1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & &
 \end{array}$$

Pero la totalización de este último complejo es de tipo finito y por tanto conocemos su homología efectiva fuerte (proposición 9). Ahora la composición de las tres reducciones encontradas nos da la homología efectiva fuerte de $A \otimes B$ (ver la observación 7.2).

2.- Definiciones y propiedades de la categoría de los conjuntos simpliciales.

La referencia de base para todos los conceptos y resultados que aparecen en este párrafo es el libro [M] de J. P. May.

Definiciones 1.- Un conjunto simplicial es un conjunto graduado $K = \{K_q\}_{q \in \mathbb{N}}$, junto con unas aplicaciones $\partial_i : K_q \longrightarrow K_{q-1}$ (llamadas operadores cara), $s_i : K_q \longrightarrow K_{q+1}$ (operadores degeneración), $0 \leq i \leq q$, satisfaciendo:

- (i) $\partial_i \partial_j = \partial_{j-1} \partial_i$ si $i < j$,
- (ii) $s_i s_j = s_{j+1} s_i$ si $i \leq j$,
- (iii) $\partial_i s_j = s_{j-1} \partial_i$ si $i < j$,
 $\partial_j s_j = \text{identidad} = \partial_{j+1} s_j$,
 $\partial_i s_j = s_j \partial_{i-1}$ si $i > j+1$.

Los elementos de K_q se llaman q-símplices.

Un morfismo simplicial $f : K \longrightarrow L$ entre conjuntos simpliciales es un conjunto de aplicaciones $f_q : K_q \longrightarrow L_q$ tal que $f_q \partial_i = \partial_i f_{q+1}$, $f_q s_i = s_i f_{q-1}$, si $0 \leq i \leq q$.

Denotaremos por \mathfrak{S} a la categoría de los conjuntos simpliciales con los morfismos simpliciales.

Un símplice $x \in K_q$ es degenerado si existen i (con $0 \leq i \leq q-1$) y $z \in K_{q-1}$ tal que $x = s_i z$. A partir de aquí K_q^* denotará el conjunto de q-símplices no degenerados de K .

Si K es un conjunto simplicial, sea $\tilde{C}_n(K)$ el \mathbb{Z} -módulo libre generado por K_q y definamos:

$$d_n = \sum_{i=0}^n \partial_i.$$

Entonces la asignación $\tilde{C} : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{C}$ dada por $\tilde{C}(K) = \{\tilde{C}_n(K), d_n\}$ define un funtor de la categoría de los conjuntos simpliciales en la de los complejos de cadenas. Si definimos $C_n(K)$ como el \mathbb{Z} -módulo libre generado por los n-símplices no degenerados de K , podemos definir de modo análogo otro funtor $C : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{C}$ que se dice normalizado. Se puede definir una equivalencia de homotopía entre $\tilde{C}(K)$ y $C(K)$ (ver [E-ML]). A partir de aquí y a no ser que se indique lo contrario diremos que $C(K)$ en el complejo de cadenas de (o asociado a) K , es decir consideraremos el complejo de cadenas normalizado.

Observación 2.- Si \mathcal{T} denota la categoría de los espacios topológicos, existe un funtor de realización $| \cdot | : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ que asocia de modo natural a cada conjunto simplicial K un espacio topológico $|K|$, en realidad un CW-complejo. Ver la definición de este funtor en el capítulo III de [M]. Las buenas propiedades de este funtor permiten utilizar la categoría de los conjuntos simpliciales como un sustituto más algebraico de la categoría de los CW-complejos y desarrollar toda la Topología Algebraica con un lenguaje simplicial.

Definiciones 3.- Si K es un conjunto simplicial, el producto de Alexander-Whitney de K

$$\Delta : C(K) \longrightarrow C(K) \otimes C(K)$$

está definido por:

$$\Delta_q(x) = \sum_{i=0}^q \Delta'_{q,i}x \otimes \Delta''_{q,q-i}x,$$

donde:

$$\begin{aligned} x &\in K_q^*, \\ \Delta'_{q,i}x &= \partial_{i+1} \dots \partial_q x, \\ \Delta''_{q,q-i}x &= \underbrace{\partial_0 \dots \partial_0}_i x. \end{aligned}$$

Notar que $\Delta'_{q,i}x \in K_i$ y $\Delta''_{q,q-i}x \in K_{q-i}$.

Un conjunto simplicial G es un grupo simplicial si cada G_q tiene estructura de grupo y los operadores de cara y degeneración son homomorfismos de grupos. Denotaremos por e_q el elemento neutro en G_q .

Un grupo simplicial G actúa (a izquierda) sobre un conjunto simplicial K si existe un morfismo simplicial $\xi : G \times K \longrightarrow K$ (llamado acción) tal que $\xi(e_q, x) = x$ y $\xi(g_1, \xi(g_2, x)) = \xi(g_1 g_2, x)$. Denotaremos $\xi(g, x)$ por gx .

Sean F, B conjuntos simpliciales y G un grupo simplicial que actúa sobre F . Un fibrado simplicial (un "twisted cartesian product", según May; ver la definición 18.3 de [M]) de fibra F , base B , grupo G viene determinado por una aplicación $\tau : B_q \longrightarrow G_{q-1}$ (la aplicación de torsión) y un conjunto simplicial E (el espacio total), también denotado $E(\tau)$ o $F \times_{\tau} B$, que verifica $E_n = F_n \times B_n$ y

- (i) $\partial_0(f, b) = (\tau(b)\partial_0 f, \partial_0 b)$,
- (ii) $\partial_i(f, b) = (\partial_i f, \partial_i b)$ si $i > 0$,
- (iii) $s_i(f, b) = (s_i f, s_i b)$ si $i \geq 0$.

Si $p : E \longrightarrow B$ es la proyección canónica, denotaremos en ocasiones un fibrado simplicial por $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$.

Observación 4.- La importancia de esta noción es que, si exigimos una condición más sobre la fibra F (que sea un conjunto simplicial minimal, ver la definición en [M]) se tiene que la realización de un fibrado simplicial es una fibración de Serre (ver el teorema 18.4(ii) y la observación 16.5 de [M]), que es un instrumento indispensable para trabajar en Topología Algebraica.

Definiciones 5.- Un conjunto simplicial es reducido si tiene un único 0-símplice. Si K es un conjunto simplicial reducido, definimos $G_n(K)$ como el grupo libre generado por K_{n+1} con las relaciones $\{s_0x ; x \in K_n\}$. Si e_n es el elemento neutro de $G_n(K)$, se tiene una aplicación canónica $\tau : K_{n+1} \longrightarrow G_n(K)$ definida por:

$$\tau(y) = \begin{cases} e_n, & \text{si existe } x \in K_n \text{ tal que } y = s_0x, \\ y, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si ∂, s son los operadores cara y degeneración de K , definimos unos operadores sobre los generadores de $G_n(K)$ por:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_0 \tau(x) &= [\tau(\partial_0x)]^{-1} \tau(\partial_1x), \\ \bar{\partial}_i \tau(x) &= \tau(\partial_{i+1}x) \quad \text{si } i > 0, \\ \bar{s}_i \tau(x) &= \tau(s_{i+1}x) \quad \text{si } i \geq 0. \end{aligned}$$

Estos operadores se extienden de modo natural a todos los elementos de $G_n(K)$.

Observaciones 6.

1) Con estos operadores $\bar{\partial}$ y \bar{s} , $G(K)$ tiene estructura de grupo (libre) simplicial y τ define un fibrado simplicial $G(K) \times_{\tau} K$ de fibra y grupo $G(K)$ (ver las condiciones (T) de la definición 18.3 de [M] para que τ sea la aplicación de torsión de un fibrado).

2) Se verifica (ver [M], párrafo 26) que el espacio total $G(K) \times_{\tau} K$ es contráctil, de donde se deduce fácilmente que $|G(K)|$ tiene el mismo tipo de homotopía que $|\Omega K|$, donde Ω representa el funtor espacio de lazos habitual. Por tanto, podemos considerar $G(K)$ como una versión simplicial de los espacios de lazos.

Definición 7.- Un conjunto simplicial es con o tiene homología efectiva (fuerte) si su complejo de cadenas asociado tiene homología efectiva (fuerte, respectivamente).

Definición 8.- Un conjunto simplicial es finito si tiene un número finito de símlices en cada grado.

Como una consecuencia inmediata de la proposición 1.9 se tiene:

Proposición 9.- Todo conjunto simplicial finito tiene homología efectiva fuerte.

3.- Consideraciones acerca de la computabilidad práctica.

El objetivo de este párrafo es dar algunas ideas que permitan comprender que los procedimientos de cálculo que se describen a lo largo de esta memoria son verdaderos algoritmos, en el sentido de la Lógica Matemática, y que no están muy alejados del mundo de la programación de ordenadores. Por tanto, el carácter de todo lo que sigue es expositivo e informal y la rígida estructura de todos los otros párrafos de este trabajo (definiciones, proposiciones, observaciones, ... seguidas del número correspondiente) no será conservada.

El primer comentario a realizar es que, si queremos demostrar la "computabilidad" de una cierta estructura, es necesario elegir alguno de los mecanismos de cálculo (que deben ser vistos como máquinas de cálculo teóricas) que los lógicos han ideado desde principios de este siglo: máquinas de Turing, máquinas RAM, procesos de Markov, funciones recursivas, lambda-cálculo, ... Como referencia acerca de algunas de estas máquinas "ideales" ver [A-H-U]. Todas las formas de computación conocidas son esencialmente equivalentes, en el sentido de que un procedimiento que admite una representación (un programa) en una de ellas también puede ser representado en cualquiera de las otras. Por tanto, para decidirnos a elegir uno u otro modelo de computación nos debemos fijar en que las características de los objetos con los que vamos a trabajar admitan una representación sencilla en el modelo elegido.

Un primer rasgo peculiar de los objetos con los que se trabaja en Topología Algebraica ya se hizo notar en la observación 1.8: las estructuras a calcular son frecuentemente infinitas. Allí se indicó, a modo de ejemplo, que una reducción se dirá calculable si existe un algoritmo que a cada número natural n le asocia toda la información necesaria para la reducción hasta el grado n ; es decir, sustituimos una estructura infinita por una "función" (en un sentido amplio) cuyos argumentos son números naturales.

Vemos por tanto que un modo de cálculo donde las "funciones" tengan una importancia y una facilidad de tratamiento especial sería adecuado para atacar los problemas de la Topología Algebraica. Afortunadamente, a principios de los años cuarenta, A. Church [Ch] desarrolló un modelo de computación, el lambda-cálculo, en el que los algoritmos y funciones pasan a ser objetos de la máquina, como lo son las instrucciones o los datos, lo que permite su fácil manipulación. Más aún, en los años sesenta, McCarthy [MC] consiguió trasladar la filosofía del lambda-cálculo a un lenguaje de programación práctico, al que denominó LISP (el primer lenguaje llamado

de "programación funcional"), lo que permite ser optimista no sólo sobre la manipulación de los objetos de la Topología Algebraica desde el punto de vista lógico-teórico (lambda-cálculo), si no también desde el de la computación práctica (programación en LISP).

Profundizando un poco más en la línea que deja ver el lambda-cálculo, F. Sergeraert ha introducido la noción de codificación funcional (ver [Ser2], [Ser3]). En esta nueva teoría de programación nos desprendemos de todas las estructuras que no sean funciones (expresiones lambda, para ser más respetuosos con las notaciones LISP, ver [St]); todos los datos, programas, resultados, ... son funciones. De este modo, por ejemplo, no representaremos un conjunto almacenando todos sus elementos si no programando su función característica o de test. Así, y de modo muy natural, se puede trabajar con conjuntos infinitos (cualquiera puede imaginar cual es la codificación funcional del conjunto infinito de los números naturales pares) y, de paso, con conjuntos finitos pero de cardinal tan grande que no pueden ser almacenados en la memoria de ningún ordenador actual (esta situación se presenta frecuentemente en Topología Algebraica).

Resumiendo, si queremos dar rigor a nuestra noción de algoritmo, no debemos utilizar más que objetos que pertenezcan a un cierto conjunto \mathcal{U} , que en la teoría de codificación funcional es denominado universo (ver [Ser2], [Ru]), y que es el conjunto de estados de una cierta máquina teórica que, como hemos visto, en nuestro caso interesa que admita la programación funcional; así podemos pensar que \mathcal{U} es el conjunto de términos del lambda-cálculo o bien, si queremos estar más cerca del mundo "material", el conjunto de objetos de una máquina LISP a la que se le exige, por consistencia teórica, que tenga memoria infinita. Notar que, en cualquiera de estos dos casos, los algoritmos de nuestro modelo de computación quedan identificados con un cierto tipo de elementos de \mathcal{U} .

En este contexto, y desde el punto de vista práctico, no nos interesa trabajar con la categoría de los conjuntos simpliciales tal y como se indicó en el anterior párrafo 2, si no tan solo con los conjuntos simpliciales que admiten una codificación funcional en \mathcal{U} (ver los detalles de este tipo de representación de los conjuntos simpliciales en [Ru]). Puesto que el conjunto de objetos de \mathcal{U} es numerable, es evidente que no todos los conjuntos simpliciales admiten una representación en \mathcal{U} , pero hay suficientes que sí la admiten: por ejemplo, todos los finitos y todos los que se obtienen de ellos por aplicaciones reiteradas de las construcciones clásicas (espacios de lazos, clasificantes de grupos, espacios fibrados, ...; ver las definiciones en [M]). Una construcción muy utilizada en el tercer capítulo de esta memoria es la de los espacios de lazos de un

conjunto simplicial, que tiene un número infinito de símplices en cada grado y que ha sido programada en LISP en [Ru].

Un término muy utilizado a lo largo de toda la memoria y que ahora puede ser totalmente aclarado es el de definición "explícita". En el lenguaje habitual se entiende que una definición es explícita si viene dada por una fórmula o es una combinación "elemental" de datos ya conocidos. Estas ideas informales señalan claramente una relación entre "lo explícito" y "lo algorítmico" (más aún si tenemos en cuenta que toda "fórmula" en la que aparecen puntos suspensivos debe ser entendida como un algoritmo). Más en concreto, para ser totalmente rigurosos, la palabra "explícito" debería ser sustituido por "de \mathcal{U} ". Así, por ejemplo, en la definición de homología efectiva de un complejo de cadenas de \mathcal{U} (con la codificación funcional evidente) habría que exigir que todos los datos (equivalencias de homotopía, homotopías, ...) estén también en \mathcal{U} (es decir, sean algoritmos codificables en \mathcal{U}).

Podría parecer que de este modo el universo \mathcal{U} debe contener "demasiadas cosas" y que será inmanejable desde el punto de vista práctico. Sin embargo, los algoritmos que aparecen a lo largo de esta memoria son fácilmente expresables de modo funcional. Por ejemplo, en algunos casos que ya han aparecido (como en la reducción asociada a una reducción elemental o en la proposición 1.12 sobre los complejos acíclicos) se ve que las operaciones que emplean nuestros algoritmos (tan sencillos que aparecen más bien como fórmulas) son totalmente elementales: sumas, diferencias, composiciones de morfismos. Esta es la tónica general a lo largo de toda la memoria. El hecho fundamental por el que estas operaciones son fácilmente programables es que trabajamos exclusivamente con grupos abelianos libres que se pueden representar con sencillez en un ordenador.

Damos a continuación un ejemplo de como deberían ser modificados los enunciados de todos los resultados de esta memoria para que fuesen rigurosos desde el punto de vista lógico-teórico. La proposición 1.9 quedaría convertida en:

"Existe una función en \mathcal{U} que si toma como argumento un complejo de cadenas finito C en \mathcal{U} obtiene como resultado la homología efectiva fuerte de C" (implícitamente se indica que la homología efectiva fuerte de C está también en \mathcal{U} , por lo que podrá ser utilizada, si es necesario, como argumento para otro algoritmo o función de \mathcal{U}).

También se puede hacer una lectura más débil del anterior enunciado que puede resultar más gratificante desde el punto de vista práctico:

"Se puede escribir un programa (una función) LISP que a un complejo de cadenas finito codificado en LISP le asocia su homología efectiva fuerte".

Como se ve estos programas de tipo muy general pueden ser considerados algoritmos "manipuladores y constructores de algoritmos"; en el ejemplo anterior se trata un complejo de cadenas en \mathcal{U} (una función o algoritmo) para construir su homología efectiva (otro algoritmo). Es ésta una situación que, apareciendo de modo natural, consideramos que es muy novedosa y que no ha sido antes tratada en Informática Teórica.

Para terminar, hagamos notar que todas las ideas contenidas en este párrafo no se quedan en un mero planteamiento más o menos teórico, si no que los algoritmos expuestos en esta memoria están ya siendo programados en lenguaje LISP, esperándose completar, en un futuro no muy lejano, un conjunto de programas que calculen la homología efectiva de los espacios de lazos.

CAPITULO 1.- LA SUCESION ESPECTRAL DE EILENBERG-MOORE EN
HOMOLOGIA EFECTIVA. PARTE ALGEBRAICA.

1.- Coálgebras, comódulos y resoluciones canónicas.

En este párrafo trabajaremos con objetos de la categoría \mathfrak{C} (que fue definida en 0.1) que tienen una estructura adicional (definiciones 2). Notar que puesto que los objetos de \mathfrak{C} son complejos de cadenas sobre grupos abelianos libres, en \mathfrak{C} no existen, en general, conúcleos; sin embargo sí que existen en los casos particulares que aquí interesan (ver el lema 10).

Todas las nociones definidas en este párrafo aparecieron inicialmente en el artículo de Eilenberg y Moore [E-M] en el que construyen la sucesión espectral que lleva su nombre. En el principal resultado de este párrafo (proposición 11) se definen explícitamente (como es necesario siempre en homología efectiva) todos los morfismos que aparecen en una de las construcciones de Eilenberg y Moore en [E-M].

Notación 1.- Si A es un objeto de \mathfrak{C} , realizaremos las identificaciones $A \otimes \mathbb{Z} \equiv A \equiv \mathbb{Z} \otimes A$, dadas por los isomorfismos canónicos

$$A \longrightarrow A \otimes \mathbb{Z}, \quad A \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes A$$

que a un elemento a de A le asocian, respectivamente, $a \otimes 1$ y $1 \otimes a$.

Definiciones 2.- Una coálgebra A es un objeto de \mathfrak{C} junto con dos morfismos de \mathfrak{C} , $\varepsilon : A \longrightarrow \mathbb{Z}$ (llamado counidad) y $\Phi : A \longrightarrow A \otimes A$ (el coproducto), que hacen conmutativos los siguientes diagramas:

(1)

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\Phi} & A \otimes A \\
 \Phi \downarrow & \searrow 1_A & \downarrow 1_A \otimes \varepsilon \\
 A \otimes A & \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1_A} & A
 \end{array}$$

Es decir: $(1_A \otimes \varepsilon)\Phi = 1_A$ y $(\varepsilon \otimes 1_A)\Phi = 1_A$.

(2)

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\Phi} & A \otimes A \\
 \Phi \downarrow & & \downarrow 1_A \otimes \Phi \\
 A \otimes A & \xrightarrow{\Phi \otimes 1_A} & A \otimes A \otimes A
 \end{array}$$

Es decir: $(1_A \otimes \Phi)\Phi = (\Phi \otimes 1_A)\Phi$.

Un A-comódulo a derecha M es un objeto de \mathcal{C} junto a un morfismo $\Phi_M : M \rightarrow M \otimes A$ de \mathcal{C} , llamado coproducto externo, que hace conmutativos los siguientes diagramas:

(1)

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\Phi_M} & M \otimes A \\
 & \searrow 1_M & \downarrow 1_M \otimes \varepsilon \\
 & & M
 \end{array}$$

Es decir: $(1_M \otimes \varepsilon)\Phi_M = 1_M$.

(2)

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\Phi_M} & M \otimes A \\
 \Phi_M \downarrow & & \downarrow \Phi_M \otimes 1_A \\
 M \otimes A & \xrightarrow{1_M \otimes \Phi} & M \otimes A \otimes A
 \end{array}$$

Es decir: $(1_M \otimes \Phi)\Phi_M = (\Phi_M \otimes 1_A)\Phi_M$.

Si M, M' son A -comódulos a derecha, un morfismo de A -comódulos a derecha es un morfismo $f : M \longrightarrow M'$ de \mathfrak{C} tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & M' \\
 \Phi_M \downarrow & & \downarrow \Phi_{M'} \\
 M \otimes A & \xrightarrow{f \otimes 1_A} & M' \otimes A
 \end{array}$$

Es decir: $\Phi_{M'} f = (f \otimes 1_A) \Phi_M$.

Con estos objetos y morfismos se construye la categoría de los A -comódulos a derecha, que denotaremos por $\mathfrak{C}A$. Con definiciones totalmente simétricas se construye la categoría de los A -comódulos a izquierda, que denotaremos $A\mathfrak{C}$.

Proposición 3.- Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de $\mathfrak{C}A$. Si f tiene un conúcleo en \mathfrak{C} , entonces f tiene un conúcleo en $\mathfrak{C}A$.

Demostración.- Supongamos que f como morfismo de \mathfrak{C} tiene un conúcleo $\text{Coker } f$. Veamos que $\text{Coker } f$ tiene una estructura natural de A -comódulo a derecha. Tenemos una sucesión exacta:

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{p} \text{Coker } f \longrightarrow 0.$$

El funtor $_{-} \otimes A$ es exacto a derecha (ver el teorema V.5.1 de [ML]), luego se tiene otra sucesión exacta:

$$M \otimes A \xrightarrow{f \otimes 1_A} N \otimes A \xrightarrow{p \otimes 1_A} \text{Coker } f \otimes A \longrightarrow 0.$$

y que $\text{Coker } (f \otimes 1_A)$ es canónicamente isomorfo a $\text{Coker } f \otimes A$. El diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{p} & \text{Coker } f \rightarrow 0 \\
 \Phi_M \downarrow & & \Phi_N \downarrow & & \tilde{\Phi} \downarrow \\
 M \otimes A & \xrightarrow{f \otimes 1_A} & N \otimes A & \xrightarrow{p \otimes 1_A} & \text{Coker } f \otimes A \rightarrow 0
 \end{array}$$

puede ser completado por un morfismo $\tilde{\Phi}$ de \mathfrak{T} . Que $\tilde{\Phi}$ es un coproducto para $\text{Coker } f$ se sigue de la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{p} & \text{Coker } f \rightarrow 0 \\
 & & \nearrow 1_M & & \nearrow 1_N & & \nearrow 1_C \\
 & & M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{p} & \text{Coker } f \rightarrow 0 \\
 \Phi_M \downarrow & & \nearrow 1_M \otimes \varepsilon & & \nearrow 1_N \otimes \varepsilon & & \nearrow 1_C \otimes \varepsilon \\
 & & M \otimes A & \xrightarrow{f \otimes 1_A} & N \otimes A & \xrightarrow{p \otimes 1_A} & \text{Coker } f \otimes A \rightarrow 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & M \otimes A & \xrightarrow{f \otimes 1_A} & N \otimes A & \xrightarrow{p \otimes 1_A} & \text{Coker } f \otimes A \rightarrow 0 \\
 \Phi_M \nearrow & & \downarrow \Phi_M \otimes 1_A & & \downarrow \Phi_N \otimes 1_A & & \downarrow \tilde{\Phi} \otimes 1_A \\
 & & M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{p} & \text{Coker } f \rightarrow 0 \\
 \Phi_M \downarrow & & \downarrow \Phi_N & & \downarrow \tilde{\Phi} & & \downarrow \\
 & & M \otimes A \otimes A & \xrightarrow{f \otimes 1_A \otimes 1_A} & N \otimes A \otimes A & \xrightarrow{p \otimes 1_A \otimes 1_A} & \text{Coker } f \otimes A \otimes A \rightarrow 0 \\
 & & \nearrow 1_M \otimes \Phi & & \nearrow 1_N \otimes \Phi & & \nearrow 1_C \otimes \Phi \\
 \Phi_M \downarrow & & M \otimes A & \xrightarrow{f \otimes 1_A} & N \otimes A & \xrightarrow{p \otimes 1_A} & \text{Coker } f \otimes A \rightarrow 0
 \end{array}$$

Definición 4.- Sea M un objeto de $\mathfrak{C}A$ y N un objeto de $A\mathfrak{C}$; definimos el producto cotensorial de M y N sobre A , escrito $M \square_A N$, como el objeto de \mathfrak{C} que es el núcleo del siguiente morfismo de \mathfrak{C} :

$$\Phi_M \otimes 1_N - 1_M \otimes \Phi_N : M \otimes N \longrightarrow M \otimes A \otimes N.$$

Definición 5.- Un comódulo extensión (a derecha) $M \otimes A$ es un objeto de $\mathfrak{C}A$ tal que M es un objeto de \mathfrak{C} y el coproducto externo $\Phi_{M \otimes A}$ es:

$$1_M \otimes \Phi : M \otimes A \longrightarrow M \otimes A \otimes A.$$

Observaciones 6.- Los complejos (de cadenas) de $\mathfrak{C}A$ se escribirán como los de \mathfrak{C} (ver la definición 0.1.2):

$$X^0 \longrightarrow X^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow X^n \longrightarrow \dots \quad , \text{ o bien:}$$

$$X_0 \longrightarrow X_{-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow X_{-n} \longrightarrow \dots \quad , \text{ con}$$

$X^k = X_{-k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Una sucesión exacta de $\mathfrak{C}A$ será una sucesión en $\mathfrak{C}A$ que es exacta en \mathfrak{C} (ver la definición 0.1.2).

Notar que en una sucesión exacta de $\mathfrak{C}A$, las aplicaciones $f^n : A^n \longrightarrow A^{n-1}$ deben ser morfismos de $\mathfrak{C}A$, pero las $h^n : A^n \longrightarrow A^{n+1}$ deben ser morfismos de \mathfrak{C} , pero no necesariamente de $\mathfrak{C}A$. Notar que un candidato para comenzar a construir una sucesión exacta a partir de $\Phi_M : M \longrightarrow M \otimes A$ es $1_M \otimes \varepsilon$, ya que $(1_M \otimes \varepsilon)\Phi_M = 1_M$; sin embargo el morfismo $1_M \otimes \varepsilon$ de \mathfrak{C} no es en general un morfismo de $\mathfrak{C}A$. Suponer que $1_M \otimes \varepsilon$ es un morfismo de $\mathfrak{C}A$ ha llevado a Eilenberg y Moore, en el artículo inicial [E-M], a enunciar una proposición que es falsa (ver la proposición 3.1 de [E-M]).

Definición 7.- Una resolución canónica de un objeto M de $\mathfrak{C}A$ es un complejo de $\mathfrak{C}A$:

$$X^0 \longrightarrow X^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow X^n \longrightarrow \dots$$

tal que se tiene una sucesión exacta de $\mathfrak{C}A$:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow X^0 \longrightarrow X^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow X^n \longrightarrow \dots$$

(o para abreviar $M \longrightarrow X$) y que X^k es un comódulo extensión para todo $k \in \mathbb{N}$.

Definición 8.- Una coálgebra A es conexa si $A_0 = \mathbb{Z}$ y $\varepsilon|_{A_0}: A_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ es la identidad.

Observaciones 9.- Si A es un objeto de \mathfrak{C} , definimos otro objeto \bar{A} de \mathfrak{C} por:

$$\bar{A}_n = \begin{cases} A_n, & \text{si } n > 0, \\ 0, & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Notar que si A es una coálgebra conexa, entonces \bar{A} es el núcleo de la counidad $\varepsilon: A \rightarrow \mathbb{Z}$.

Denotaremos el producto tensorial de \bar{A} r veces por si mismo por \bar{A}^r .

Es evidente que si A tiene homología efectiva fuerte también \bar{A} tiene homología efectiva fuerte.

El siguiente lema es de fácil demostración:

Lema 10.- Sean M, N objetos de \mathfrak{C} y $\varphi: M \rightarrow N$, $h: N \rightarrow M$ morfismos de \mathfrak{C} tal que $h\varphi = 1_M$. Entonces $\text{Coker } \varphi$ existe y puede ser representado por $\text{Ker } h$; escribiremos simplemente $\text{Coker } \varphi = \text{Ker } h$. Además, la proyección canónica $p: N \rightarrow \text{Coker } \varphi$ es $p = 1_N - \varphi h$ y la inclusión canónica $j: \text{Coker } \varphi \rightarrow N$ verifica que $pj = 1_N$.

Proposición 11.- Si A es una coálgebra conexa, cada objeto M de $\mathfrak{C}A$ tiene una resolución canónica:

$$0 \rightarrow M \xrightarrow[\varphi_{-1}]{h_0} M \otimes A \xrightarrow[\varphi_0]{h_1} M \otimes \bar{A} \otimes A \xrightarrow[\varphi_1]{h_2} M \otimes \bar{A}^2 \otimes A \rightarrow \dots$$

donde:

$$\begin{aligned} \varphi_{-1} &= \Phi_M, \\ h_0 &= 1_{M \otimes A} \otimes \varepsilon, \\ h_n &= 1_{M \otimes \bar{A}^{(n-1)}} \otimes i \otimes \varepsilon \text{ (con } i: \bar{A} \longrightarrow A \text{ la inclusión canónica)} \\ &\quad \text{si } n \geq 1, \\ p_n &= 1_{M \otimes \bar{A}^n \otimes A} - \varphi_{n-1} h_n \text{ si } n \geq 0, \\ \varphi_n &= (p_n \otimes 1_A) (1_{M \otimes \bar{A}^n} \otimes \Phi) \text{ si } n \geq 0. \end{aligned}$$

Demostración.- Puesto que $(1_M \otimes \varepsilon)\Phi_M = 1_M$ se tiene, según el lema 10, que $\text{Coker } \Phi_M = \text{Ker } (1_M \otimes \varepsilon)$. Puesto que A es conexa se tiene (ver observación 9) que $\text{Ker } (1_M \otimes \varepsilon) = M \otimes \bar{A}$. La proyección canónica $M \otimes A \longrightarrow M \otimes \bar{A}$ es:

$$1_{M \otimes A} - \Phi_M(1_M \otimes \varepsilon) = 1_{M \otimes A} - \varphi_{-1} h_0 = p_0$$

y por tanto $p_0(1_M \otimes i) = 1_{M \otimes \bar{A}}$.

Si consideramos $M \otimes A$ como un comódulo extensión se tiene que $\Phi_M: M \longrightarrow M \otimes A$ es un morfismo de A -comódulos y por tanto (ver la proposición 3) tenemos $\text{Coker } \Phi_M = M \otimes \bar{A}$. Además (ver la demostración de la proposición 3), se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} M \otimes A & \xrightarrow{p_0} & M \otimes \bar{A} \\ \downarrow 1_M \otimes \Phi & & \downarrow \Phi_{M \otimes \bar{A}} \\ M \otimes A \otimes A & \xrightarrow{p_0 \otimes 1_A} & M \otimes \bar{A} \otimes \bar{A} \end{array}$$

Es decir: $\varphi_0 = (p_0 \otimes 1_A) (1_M \otimes \Phi) = \Phi_{M \otimes \bar{A}} p_0$.

Análogamente encontramos que $\text{Coker } \Phi_{M \otimes \bar{A}} = \text{Ker } (1_{M \otimes \bar{A}} \otimes \varepsilon) = M \otimes \bar{A} \otimes \bar{A}$. La proyección canónica en este caso es:

$$\begin{aligned} 1_{M \otimes \bar{A} \otimes A} - \Phi_{M \otimes \bar{A}}(1_{M \otimes \bar{A}} \otimes \varepsilon) &= 1_{M \otimes \bar{A} \otimes A} - \Phi_{M \otimes \bar{A}} p_0(1_M \otimes i)(1_{M \otimes \bar{A}} \otimes \varepsilon) = \\ &= 1_{M \otimes \bar{A} \otimes A} - \varphi_0 h_1 = p_1. \end{aligned}$$

Y por tanto: $p_1(1_{M \otimes \bar{A}} \otimes i) = 1_{M \otimes \bar{A}^2}$.

Se ve que podemos continuar el proceso y que siempre se tiene que

$$\varphi_n = (p_n \otimes 1_A) (1_{M \otimes \bar{A}^n} \otimes \Phi) = \Phi_{M \otimes \bar{A}^{(n+1)}} p_n$$

y que p_{n+1} es la proyección canónica

$$M \otimes \bar{A}^{(n+1)} \otimes A \longrightarrow \text{Coker } \Phi_{M \otimes \bar{A}^{(n+1)}} = M \otimes \bar{A}^{(n+2)}.$$

Hasta ahora sólo hemos demostrado que la sucesión está bien definida y que los φ_n son morfismos de $\mathfrak{C}A$. Veamos ahora que la sucesión es exacta. Es evidente que $\varphi_n \varphi_{n-1} = 0$ y además:

$$\text{si } n = -1: h_0 \varphi_{-1} = 1_M,$$

$$\begin{aligned} \text{si } n \geq 0: h_{n+1} \varphi_n + \varphi_{n-1} h_n &= \\ &= (1_{M \otimes \bar{A}^n} \otimes i \otimes \varepsilon) (p_n \otimes 1_A) (1_{M \otimes \bar{A}^n} \otimes \Phi) + \varphi_{n-1} h_n = \\ &= (1_{M \otimes \bar{A}^{(n+1)}} \otimes \varepsilon) \Phi_{M \otimes \bar{A}^{(n+1)}} p_n + \varphi_{n-1} h_n = \\ &= p_n + \varphi_{n-1} h_n = 1_{M \otimes \bar{A}^n \otimes A} - \varphi_{n-1} h_n + \varphi_{n-1} h_n = \\ &= 1_{M \otimes \bar{A}^n \otimes A}. \end{aligned}$$

Observaciones 12.

1) A partir de aquí la anterior resolución canónica queda asociada a cada objeto M de $\mathfrak{C}A$ (con A conexa) y cuando nos refiramos a la resolución canónica de un comódulo queremos indicar ésta de la proposición 11.

2) Consideraciones y construcciones totalmente análogas se pueden realizar para los comódulos a izquierda.

2.- Cotor y Cotor efectivo.

La referencia básica en este párrafo sigue siendo el artículo [E-M] de Eilenberg y Moore. Aquí uno de nuestros resultados (proposición 3) nos va a permitir desembarazarnos de los productos cotensoriales para calcular el funtor cotor y, de paso, nos servirá también para introducir la noción de cotor efectivo.

Sea $0 \rightarrow X_0 \rightarrow X_{-1} \rightarrow \dots$ un complejo X de $\mathfrak{C}A$ y $0 \rightarrow Y_0 \rightarrow Y_{-1} \rightarrow \dots$ un complejo Y de $A\mathfrak{C}$. Del diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_0 \square_A Y_0 & \rightarrow & X_0 \square_A Y_{-1} & \rightarrow & \dots & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 X_{-1} \square_A Y_0 & \rightarrow & X_{-1} \square_A Y_{-1} & \rightarrow & \dots & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 \vdots & & \vdots & & & &
 \end{array}$$

se puede deducir, con las adecuadas modificaciones en los signos de las flechas, un multicomplejo (con dos diferenciales "externas" y dos "internas"). Cada grupo de este multicomplejo es denotado por $T_{q,s,t}(X,A,Y) = (X_s \square_A Y_t)_q$ y el complejo de cadenas totalización por $T(X,A,Y)$. Notar que este complejo de cadenas está indexado por \mathbb{Z} .

La siguiente proposición es un caso particular de la proposición 4.1 de [E-M].

Proposición 1.- Sea M un objeto de $\mathfrak{C}A$ y N un objeto de $A\mathfrak{C}$ y sean $M \rightarrow X$, $N \rightarrow Y$ sus resoluciones canónicas. Entonces, las homologías ordinarias de $T(X,A,N)$, $T(X,A,Y)$ y $T(M,A,Y)$ son isomorfas; denotaremos al valor común de estas tres homologías por $\text{Cotor}^A(M,N)$.

La siguiente proposición es la 2.1 de [E-M].

Proposición 2.- Sea $M \otimes A$ un comódulo extensión en $\mathfrak{C}A$ y sea N un objeto de $A\mathfrak{C}$. Entonces, el morfismo $1_M \otimes \epsilon_N : M \otimes N \rightarrow (M \otimes A) \square_A N$ de \mathfrak{C} es un isomorfismo con inversa:

$$1_M \otimes \epsilon \circ 1_M \mid (M \otimes A) \square_A N : (M \otimes A) \square_A N \rightarrow M \otimes N.$$

Proposición 3.- Sea A una coalgebra conexa, M un objeto de $\mathcal{C}A$ y N un objeto de $A\mathcal{C}$. Entonces $\text{Cotor}^A(M, N)$ es la homología ordinaria de la totalización del bicomplejo

$$0 \longrightarrow M \otimes N \xrightarrow{\Psi_0} M \otimes \bar{A} \otimes N \xrightarrow{\Psi_1} M \otimes \bar{A}^2 \otimes N \longrightarrow \dots$$

con $\Psi_n = (p_n \bullet 1_N) (1_{M \otimes \bar{A}^n} \bullet \Phi_N)$, donde p_n están definidas como en la proposición 1.11.

Demostración.- Consideremos la resolución canónica de M encontrada en la proposición 1.11:

$$M \otimes A \xrightarrow{\varphi_0} M \otimes \bar{A} \otimes A \xrightarrow{\varphi_1} M \otimes \bar{A}^2 \otimes A \longrightarrow \dots$$

Se tiene por la proposición 2:

$$\begin{array}{ccc}
 (M \otimes A) \square_A N & \xleftarrow[\cong]{1_{M \otimes \Phi_N}} & M \otimes N \\
 \downarrow \varphi_0 \square_A 1_N & & \downarrow \Psi_0 \\
 (M \otimes \bar{A} \otimes A) \square_A N & \xrightarrow[\cong]{1_{M \otimes \bar{A}} \bullet \varepsilon \bullet 1_N} & M \otimes \bar{A} \otimes N \\
 \downarrow \vdots & & \downarrow \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (M \otimes \bar{A}^n \otimes A) \square_A N & \xleftarrow[\cong]{1_{M \otimes \bar{A}^n} \bullet \Phi_N} & M \otimes \bar{A}^n \otimes N \\
 \downarrow \varphi_n \square_A 1_N & & \downarrow \Psi_n \\
 (M \otimes \bar{A}^{(n+1)} \otimes A) \square_A N & \xrightarrow[\cong]{1_{M \otimes \bar{A}^{(n+1)}} \bullet \varepsilon \bullet 1_N} & M \otimes \bar{A}^{(n+1)} \otimes N \\
 \downarrow \vdots & & \downarrow \vdots
 \end{array}$$

Es decir: $\Psi_n = (1_{M \otimes \bar{A}^{(n+1)}} \otimes \varepsilon \otimes 1_N) (\varphi_n \square_A 1_N) (1_{M \otimes \bar{A}^n} \otimes \Phi_N)$.

Pero en el siguiente diagrama son conmutativos los diagramas triangulares de los lados y el inferior así como el cuadrado total:

$$\begin{array}{ccccc}
 M \otimes \bar{A}^n \otimes A \otimes N & & \xleftarrow{1_{M \otimes \bar{A}^n} \otimes \Phi_N} & & M \otimes \bar{A}^n \otimes N \\
 & \searrow & & \swarrow & \\
 & & P_n \otimes 1_N & & \Psi_n \\
 & & & & \Psi_n \\
 \varphi_n \otimes 1_N \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & M \otimes \bar{A}^{(n+1)} \otimes N & & \\
 & \nearrow & & \nwarrow & \\
 & & \Phi_{M \otimes \bar{A}^{(n+1)}} \otimes 1_N & & \\
 M \otimes \bar{A}^{(n+1)} \otimes A \otimes N & & \xrightarrow{1_{M \otimes \bar{A}^{(n+1)}} \otimes \varepsilon \otimes 1_N} & & M \otimes \bar{A}^{(n+1)} \otimes N
 \end{array}$$

Por tanto el diagrama triangular superior es también conmutativo y se tiene:

$$\Psi_n = (p_n \otimes 1_N) (1_{M \otimes \bar{A}^n} \otimes \Phi_N).$$

Observaciones 4.

1) Notar que, a pesar de que los complejos de $\mathfrak{C}A$ están indexados por los enteros negativos, la construcción de \bar{A} (nulo en grado cero) hace que la totalización del bicomplejo de la última proposición sea nula en grado negativo.

2) La última proposición es una generalización de la construcción COBAR definida por Adams en [A], por lo que llamaremos al bicomplejo definido en el enunciado $\text{Cobar}^A(M, N)$.

Definición 5.- Sea A una coálgebra conexa, M un objeto de $\mathfrak{C}A$ y N un objeto de $A\mathfrak{C}$; si el bicomplejo $\text{Cobar}^A(M, N)$ tiene homología efectiva la denominaremos cotor efectivo de M y N sobre A y la escribiremos $\text{CE}^A(M, N)$.

Corolario 6.- Si existe $CE^A(M,N)$ entonces la homología ordinaria de su parte irreducible es $Cotor^A(M,N)$.

Demostración.- Se deduce de la definición 5 y de la proposición 3.

3.- Bicomplejos simples.

En todo este apartado (y tal como se indicó en la observación 0.1.15) identificaremos las nociones de bicomplejo (sobre \mathbb{Z}) y de complejo de la categoría \mathfrak{C} .

Definición 1.- Un bicomplejo simple o complejo simple ("tapered", según Eilenberg y Moore en el apartado 6 de [E-M]) es un complejo de \mathfrak{C}

$$X^0 \longrightarrow X^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow X^n \longrightarrow \dots$$

tal que, para cada $n \geq 0$, se tiene $(X^n)_r = 0$ si $r < 2n$.

Definición 2.- Una coálgebra A es simplemente conexa si es conexa y $A_1 = 0$.

Lema 3.- Si A es un coálgebra simplemente conexa y M, N son objetos de \mathfrak{C} , entonces:

$$(M \otimes \bar{A}^n \otimes N)_r = 0 \quad \text{si } r < 2n.$$

Demostración.- Es una simple comprobación.

De este lema se deduce directamente:

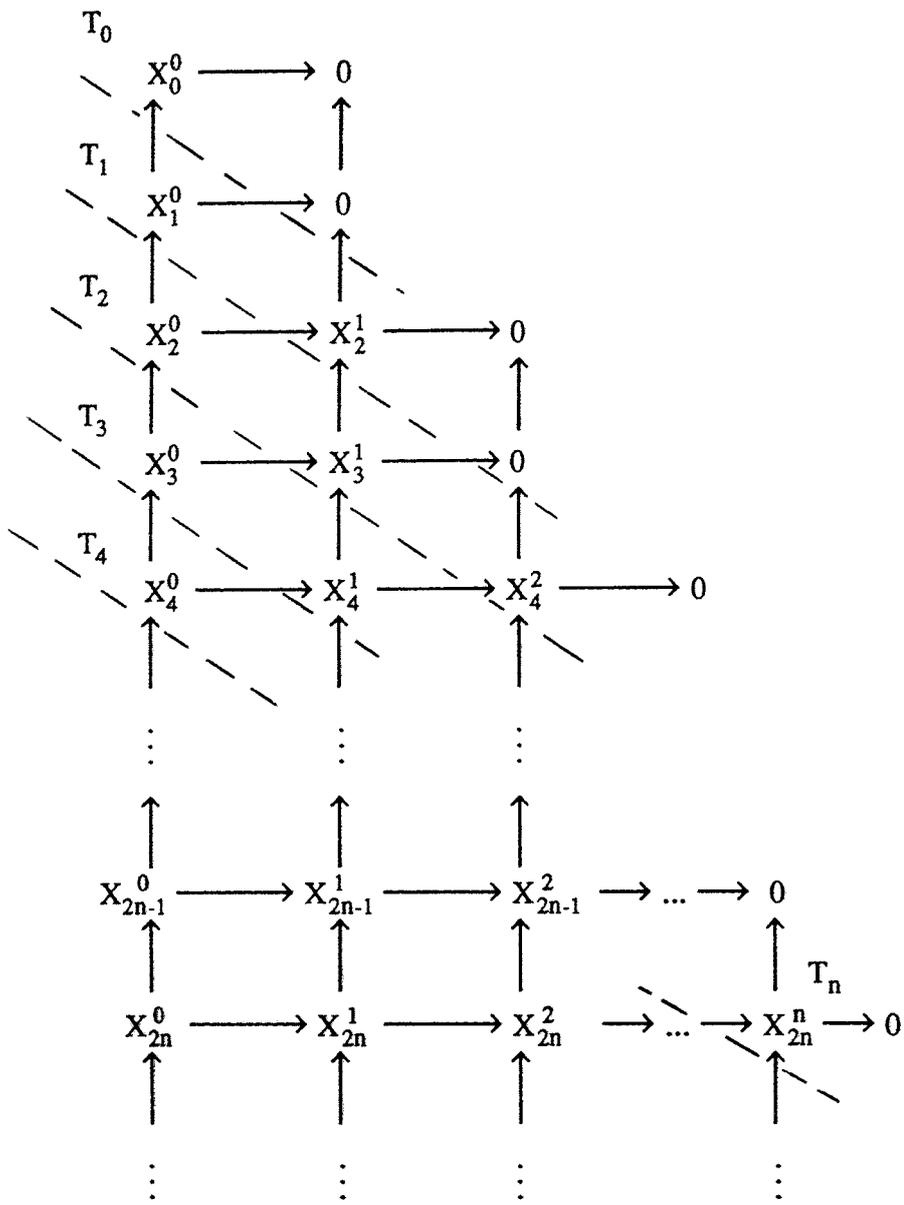
Proposición 4.- Si A es una coálgebra simplemente conexa, entonces la resolución canónica de un objeto cualquiera de $\mathfrak{C}A$ (proposición 1.11) y la construcción Cobar generalizada (proposición 2.3) son simples.

Proposición 5.- Si T es la totalización de un bicomplejo simple

$$X^0 \xrightarrow{\Psi_0} X^1 \xrightarrow{\Psi_1} X^2 \longrightarrow \dots$$

en el que cada X^i es de tipo finito, entonces T es de tipo finito.

Demostración.- Es esta situación se tiene:



Es decir, se tiene: $T_n = X_n^0 \oplus \dots \oplus X_{2n}^n$, de tipo finito si cada X_i^j es de tipo finito.

Observación 6.- En las condiciones de la proposición anterior y si d^n es el borde de X^n , se tiene que el borde δ de T viene dado explícitamente por

$$\begin{aligned} \delta_n : X_n^0 \oplus \dots \oplus X_{2n}^n &\longrightarrow X_n^0 \oplus X_n^1 \oplus \dots \oplus X_{2n-2}^{n-1} \\ (x_0, \dots, x_n) &\longrightarrow (d^0(x_0), d^1(x_1) + \psi_0(x_0), \dots, d^{n-1}(x_{n-1}) + \psi_{n-2}(x_{n-2})) \end{aligned}$$

La última proposición nos permite dar un primer resultado de existencia y cálculo del cotor efectivo.

Proposición 7.- Si A es una coálgebra simplemente conexa, M es un objeto de $\mathfrak{C}A$, N es un objeto de $A\mathfrak{C}$ y A, M, N son de tipo finito, entonces $\text{Cobar}^A(M, N)$ tiene homología efectiva fuerte; en particular $\text{CE}^A(M, N)$ existe y es finitamente calculable.

Demostración.- Basta aplicar las proposiciones 4 y 5, la proposición 0.1.9 y la definición 2.5 de cotor efectivo.

Proposición 8.- Si tenemos una sucesión exacta de \mathfrak{C} :

$$0 \longrightarrow X \begin{array}{c} \xleftarrow{h_0} \\ \xrightarrow{\psi_{-1}} \end{array} X^0 \begin{array}{c} \xleftarrow{h_1} \\ \xrightarrow{\psi_0} \end{array} X^1 \begin{array}{c} \xleftarrow{h_2} \\ \xrightarrow{\psi_1} \end{array} X^2 \longrightarrow \dots$$

tal que $X^0 \longrightarrow X^1 \longrightarrow X^2 \longrightarrow \dots$ es simple, entonces

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} : X_n &\longrightarrow T_n = X_n^0 \oplus \dots \oplus X_{2n}^n, \\ x &\longrightarrow (\psi_{-1}(x), 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{h} : X_n^0 \oplus \dots \oplus X_{2n}^n &\longrightarrow X_n & y \\ (x_0, \dots, x_n) &\longrightarrow h_0(x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_n : X_n^0 \oplus \dots \oplus X_{2n}^n &\longrightarrow X_{n+1}^0 \oplus \dots \oplus X_{2n}^{n-1} \oplus X_{2n+1}^n \oplus X_{2n+2}^{n+1} \\ (x_0, \dots, x_n) &\longrightarrow (h_1(x_1), \dots, h_n(x_n), 0, 0) \end{aligned}$$

definen una equivalencia de homotopía entre X y T .

Demostración.- Sea d^n el borde de X^n . Notar en primer lugar que:

(a) la composición

$$X_{2n}^n \xrightarrow{h_n} X_{2n}^{n-1} \xrightarrow{\psi_{n-1}} X_{2n}^n \text{ es la identidad,}$$

ya que $h_n \psi_n + \psi_{n-1} h_n = 1$, pero en este caso $\psi_n : X_{2n}^n \rightarrow X_{2n}^{n+1} = 0$.

(b) la composición

$$X_{2n}^n \xrightarrow{h_n} X_{2n}^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} X_{2n-1}^{n-1} \text{ es nula,}$$

ya que $d^{n-1} h_n = h_n d^n$ o bien $d^{n-1} h_n + h_n d^n = 0$, pero en este caso

$$\begin{array}{ccc} X_{2n}^n & \xrightarrow{h_n} & X_{2n}^{n-1} \\ d^n \downarrow & & \downarrow d^{n-1} \\ 0 = X_{2n-1}^n & \xrightarrow{h_n} & X_{2n-1}^{n-1}. \end{array}$$

Basta demostrar que $\delta_{n+1} H_n + H_{n-1} \delta_n + \tilde{\psi} \tilde{h} = 1$, donde δ es el borde de T (ver su definición explícita en la observación 6). Se tiene:

$$\begin{aligned} \delta_{n+1} H_n(x_0, \dots, x_n) &= \delta_{n+1}(h_1(x_1), \dots, h_n(x_n), 0, 0) = \\ &= (d^0 h_1(x_1), d^1 h_2(x_2) + \psi_0 h_1(x_1), \dots, d^{n-1} h_n(x_n) + \psi_{n-2} h_{n-1}(x_{n-1}), \psi_{n-1} h_n(x_n)), \\ H_{n-1} \delta_n(x_0, \dots, x_n) &= H_{n-1}(d^0(x_0), d^1(x_1) + \psi_0(x_0), \dots, d^{n-1}(x_{n-1}) + \psi_{n-2}(x_{n-2})) = \\ &= (h_1 d^1(x_1) + h_1 \psi_0(x_0), \dots, h_{n-1} d^{n-1}(x_{n-1}) + h_{n-1} \psi_{n-2}(x_{n-2}), 0, 0), \\ \tilde{\psi} \tilde{h}(x_0, \dots, x_n) &= (\psi_{-1} h_0(x_0), 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Por tanto: } [\delta_{n+1} H_n + H_{n-1} \delta_n + \tilde{\psi} \tilde{h}](x_0, \dots, x_n) &= \\ &= (d^0 h_1(x_1) + h_1 d^1(x_1) + h_1 \psi_0(x_0) + \psi_{-1} h_0(x_0), \dots, \\ &\quad d^{n-2} h_{n-1}(x_{n-1}) + h_{n-1} d^{n-1}(x_{n-1}) + h_{n-1} \psi_{n-2}(x_{n-2}) + \psi_{n-3} h_{n-2}(x_{n-2}), \\ &\quad d^{n-1} h_n(x_n) + \psi_{n-2} h_{n-1}(x_{n-1}), \psi_{n-1} h_n(x_n)) = \\ &= (0 + x_0, \dots, 0 + x_{n-2}, 0 + x_{n-1}, x_n) = (x_0, \dots, x_n), \end{aligned}$$

donde en las dos últimas componentes se han utilizado los dos hechos (a), (b) señalados al comienzo de la demostración.

Proposición 9.- Si A es una coálgebra simplemente conexa, cualquier objeto de \mathfrak{CA} es homotópicamente equivalente a la totalización de su resolución canónica.

Demostración.- Basta aplicar las proposiciones 1.11, 4 y 8.

Corolario 10.- Si A es una coálgebra simplemente conexa y un objeto M de \mathfrak{CA} tiene homología efectiva, entonces la resolución canónica de M tiene homología efectiva y es finitamente calculable.

Observaciones 11.

1) El corolario 10 nos proporciona el primer ejemplo de un complejo de cadenas no de tipo finito pero con homología efectiva: por ejemplo, si M es de tipo finito, pero A no lo es, la resolución canónica de M no es un complejo de tipo finito, pero tiene homología efectiva.

2) Si consideramos \mathbb{Z} como un objeto de \mathfrak{C} , la proposición 9 da una demostración, con homotopías explícitas, del hecho, señalado por Adams en [A], de que el "espacio total" de la construcción COBAR es acíclico.

Proposición 12.- Sea $X^0 \xrightarrow{\psi_0} X^1 \xrightarrow{\psi_1} X^2 \rightarrow \dots$ un bicomplejo simple X y sea X^i una reducción de un complejo Y^i para cada $i \in \mathbb{N}$, verificando que $(Y^i)_j = 0$ si $j < 2i$. Entonces, existe un bicomplejo canónico Y

$$Y^0 \longrightarrow Y^1 \longrightarrow Y^2 \longrightarrow \dots$$

tal que la totalización de X es una reducción de la de Y .

Demostración.- Sea d^i (\bar{d}^i) el borde de X^i (Y^i , respectivamente) y sea (X^i, f^i, g^i, h^i) una reducción de Y^i . Si definimos

$$\bar{\psi}_i = g^{i+1} \psi_i f^i : Y^i \longrightarrow Y^{i+1}$$

es fácil verificar que se tiene un bicomplejo (para demostrar que $\bar{\psi}_{i+1} \bar{\psi}_i = 0$, es necesario utilizar que $f^{i+1} g^{i+1} = 1$, es decir que no sólo X^{i+1} e Y^{i+1} son homotópicamente equivalentes, sino que X^{i+1} es una reducción de Y^{i+1}).

Veamos ahora que la totalización de

$$X^0 \xrightarrow{\Psi_0} X^1 \xrightarrow{\Psi_1} X^2 \longrightarrow \dots$$

es una reducción de la de

$$Y^0 \xrightarrow{\bar{\Psi}_0} Y^1 \xrightarrow{\bar{\Psi}_1} Y^2 \longrightarrow \dots$$

Notar que, por hipótesis, este segundo bicomplejo es también simple.

Definimos:

$$\begin{aligned} F_n : Y_n^0 \oplus \dots \oplus Y_{2n}^n &\longrightarrow X_n^0 \oplus \dots \oplus X_{2n}^n \\ (y_0, \dots, y_n) &\longrightarrow (f^0 y_0, \dots, f^n y_n) \\ G_n : X_n^0 \oplus \dots \oplus X_{2n}^n &\longrightarrow Y_n^0 \oplus \dots \oplus Y_{2n}^n \\ (x_0, \dots, x_n) &\longrightarrow (g^0 x_0, \dots, g^n x_n) \\ H_n : Y_n^0 \oplus \dots \oplus Y_{2n}^n &\longrightarrow Y_{n+1}^0 \oplus \dots \oplus Y_{2n+1}^n \oplus Y_{2n+2}^{n+1} \\ (y_0, \dots, y_n) &\longrightarrow (h^0 y_0, \dots, h^n y_n, 0). \end{aligned}$$

Se verifica que estas aplicaciones definen la reducción buscada. En las comprobaciones es imprescindible utilizar que X^i es una reducción de Y^i . Por ejemplo, se utiliza que $h^i \bar{\Psi}_{i-1} = 0$, lo que es cierto puesto que $h^i g^i = 0$.

Corolario 13.- Sea A una coálgebra conexa, M un objeto de $\mathfrak{C}A$ y N un objeto de $A\mathfrak{C}$. Supongamos que $M \otimes \bar{A}^i \otimes N$ es una reducción de un objeto Y^i de \mathfrak{C} de modo que el bicomplejo

$$Y^0 \longrightarrow Y^1 \longrightarrow Y^2 \longrightarrow \dots$$

inducido por $\text{Cobar}^A(M, N)$ (como en la proposición anterior) es simple y con homología efectiva. Entonces $\text{CE}^A(M, N)$ está definido y es finitamente calculable.

4.- Homología efectiva de bicomplejos. Sucesión espectral de Eilenberg-Moore en homología efectiva.

En este párrafo utilizamos la sucesión espectral de Eilenberg-Moore (como fue inicialmente definida en [E-M]) para, convenientemente modificada, obtener resultados en homología efectiva. En esta teoría no existe un concepto de sucesión espectral similar al del Algebra Homológica clásica, pero ciertos procesos (algoritmos) juegan el papel de dichas sucesiones, por lo que los denominamos "sucesiones espectrales en homología efectiva".

Proposición 1.- Sea $X^0 \longrightarrow X^1 \longrightarrow X^2 \longrightarrow \dots$ un bicomplejo simple tal que cada X^i , con $i \geq 0$, tiene homología efectiva fuerte. Entonces, la totalización del bicomplejo tiene homología efectiva fuerte, que es finitamente calculable.

Demostración.- La técnica empleada es similar a la de la demostración de la proposición 0.1.20: descomponemos la reducción de cada X^i en reducciones elementales de cada una de sus flechas; estas reducciones elementales inducen reducciones parciales en la totalización lo que permite obtener una reducción de ésta a un complejo de tipo finito.

Notar que en el diagrama inicial:

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_0^0 & \longrightarrow & 0 & & & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 X_1^0 & \longrightarrow & 0 & & & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 X_2^0 & \longrightarrow & X_2^1 & \longrightarrow & 0 & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 X_3^0 & \longrightarrow & X_3^1 & \longrightarrow & 0 & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 X_4^0 & \longrightarrow & X_4^1 & \longrightarrow & X_4^2 & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & &
 \end{array}$$

podemos reducir las flechas de la columna cero sin que aparezcan nuevas flechas (ver la observación 0.1.18.2) y obtener una reducción a :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{HX}_0^0 & \longrightarrow & 0 & & & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 \text{HX}_1^0 & \longrightarrow & 0 & & & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 \text{HX}_2^0 & \longrightarrow & \text{X}_2^1 & \longrightarrow & 0 & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \text{HX}_3^0 & \longrightarrow & \text{X}_3^1 & \longrightarrow & 0 & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \text{HX}_4^0 & \longrightarrow & \text{X}_4^1 & \longrightarrow & \text{X}_4^2 & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \text{HX}_5^0 & \longrightarrow & \text{X}_5^1 & \longrightarrow & \text{X}_5^2 & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \text{HX}_6^0 & \longrightarrow & \text{X}_6^1 & \longrightarrow & \text{X}_6^2 & \longrightarrow & \text{X}_6^3 \longrightarrow 0 \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Al reducir las flechas de la columna 1 sí que aparecen nuevas aplicaciones y obtenemos una reducción a:

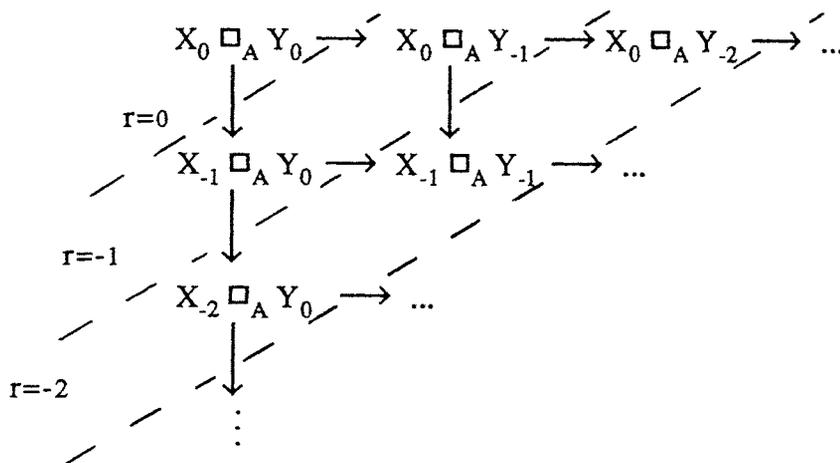
$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{HX}_0^0 & \longrightarrow & 0 & & & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 \text{HX}_1^0 & \longrightarrow & 0 & & & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 \text{HX}_2^0 & \longrightarrow & \text{HX}_2^1 & \longrightarrow & 0 & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \text{HX}_3^0 & \longrightarrow & \text{HX}_3^1 & \longrightarrow & 0 & & \\
 \uparrow & \searrow & \uparrow & \searrow & \uparrow & & \\
 \text{HX}_4^0 & \longrightarrow & \text{HX}_4^1 & \longrightarrow & \text{X}_4^2 & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow & \searrow & \uparrow & \searrow & \uparrow & & \uparrow \\
 \text{HX}_5^0 & \longrightarrow & \text{HX}_5^1 & \longrightarrow & \text{X}_5^2 & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow & \searrow & \uparrow & \searrow & \uparrow & & \uparrow \\
 \text{HX}_6^0 & \longrightarrow & \text{HX}_6^1 & \longrightarrow & \text{X}_6^2 & \longrightarrow & \text{X}_6^3 \longrightarrow 0 \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

denominar al anterior proceso sucesión espectral de un bicomplejo en homología efectiva.

Sea ahora A una coálgebra simplemente conexa, M un objeto de \mathcal{CA} , N un objeto de $A\mathcal{C}$ y $M \rightarrow X$, $N \rightarrow Y$ sus resoluciones canónicas. Eilenberg y Moore [E-M] definen una filtración de $T(X,A,Y)$ por:

$$F_{r,n} = \bigoplus_{\substack{n=q+s+t \\ s+t \leq r}} T_{q,s,t}(X,A,Y),$$

que queda reflejada en el siguiente diagrama:

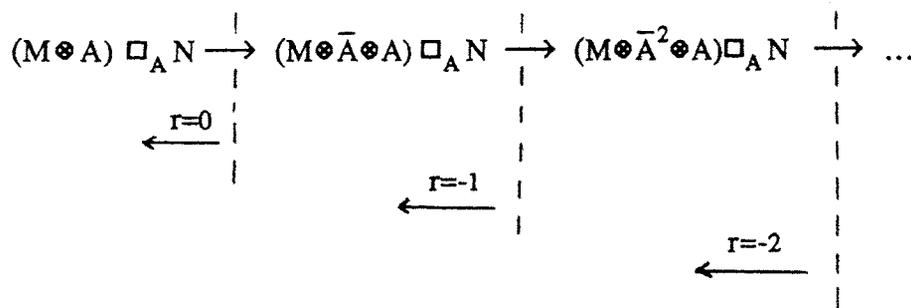


Eilenberg y Moore [E-M] prueban la siguiente proposición:

Proposición 3. (Eilenberg y Moore).

En las condiciones anteriores, la sucesión espectral asociada a esta filtración, denominada sucesión espectral de Eilenberg-Moore, converge a $\text{Cotor}^A(M,N)$.

Si filtramos de modo análogo $T(X,A,N)$ en lugar de $T(X,A,Y)$, obtenemos la filtración que se indica en el siguiente diagrama:



O bien, teniendo en cuenta el isomorfismo encontrado en la demostración de la proposición 2.3 entre este complejo y $\text{Cobar}^A(M,N)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 M \otimes N & \xrightarrow{\psi_0} & M \otimes \bar{A} \otimes N & \xrightarrow{\psi_1} & M \otimes \bar{A}^2 \otimes N & \longrightarrow & \dots \\
 \leftarrow r=0 \downarrow & & \leftarrow r=-1 \downarrow & & \leftarrow r=-2 \downarrow & & \\
 & & & & & &
 \end{array}$$

Pero construir la sucesión espectral asociada a esta filtración se convierte en homología efectiva en reducir las columnas en el paso $r = 0, r = -1, r = -2, \dots$; es decir reencontramos el proceso explicado en la demostración de la proposición 1. Así, en este caso particular, el citado proceso puede ser denominado sucesión espectral de Eilenberg-Moore en homología efectiva y se utiliza para demostrar el siguiente teorema.

Teorema 4.- Si A es una coálgebra simplemente conexa, M es un objeto de $\mathcal{C}A$, N es un objeto de $A\mathcal{C}$ y A, M y N tienen homología efectiva fuerte, entonces $\text{Cobar}^A(M,N)$ tiene homología efectiva fuerte; en particular $\text{CE}^A(M,N)$ existe y es finitamente calculable.

Demostración.- Aplicando reiteradamente la fórmula de Künneth en homología efectiva (proposición 0.1.20) obtenemos que $M \otimes \bar{A}^n \otimes N$ tiene homología efectiva fuerte. Ahora, teniendo en cuenta la proposición 3.4, aplicamos la proposición 1 y obtenemos el resultado.

Corolario 5.- Si A es una coálgebra simplemente conexa, M es un objeto de $\mathcal{C}A$, N es un objeto de $A\mathcal{C}$ y A, M y N tienen homología efectiva fuerte, entonces existe un algoritmo que calcula $\text{Cotor}^A(M,N)$.

Corolario 6.- En las condiciones del corolario 3.13 y si se conoce la homología efectiva fuerte de cada uno de los Y^i de los que $M \otimes \bar{A}^i \otimes N$ son reducción, entonces $\text{CE}^A(M,N)$ existe y es finitamente calculable.

CAPITULO 2.- LA SUCESION ESPECTRAL DE EILENBERG-MOORE EN
HOMOLOGIA EFECTIVA. PARTE TOPOLOGICA.

1.- Los teoremas de Eilenberg y Moore.

En este párrafo retomamos las notaciones y el lenguaje simplicial que fueron introducidos en el párrafo 0.2. Todos los resultados acerca de los conjuntos simpliciales aquí indicados pueden ser encontrados en el párrafo 30 de[M].

Aquí aparecen complejos de cadenas entre los que se conoce la existencia de una equivalencia de homotopía, pero que en principio no tienen porque ser homotópicamente equivalentes según nuestra definición 0.1.1 (ya que la inversa homotópica y las homotopías de cadenas no son conocidas explícitamente; esta situación ya se nos presentó en la observación 0.1.11.2). En estas condiciones, y por comodidad de notación, diremos que estos complejos de cadenas tienen el mismo tipo de homotopía.

Sea $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$ un fibrado simplicial. El complejo de cadenas $C(B)$ tiene estructura de coálgebra con el producto de Alexander-Whitney (ver la definición 0.2.3):

$$\Phi_B : C(B) \longrightarrow C(B) \otimes C(B).$$

Además, $C(E)$ tiene estructura de $C(B)$ -comódulo a izquierda con el coproducto externo definido por la composición:

$$C(E) \xrightarrow{\Phi_E} C(E) \otimes C(E) \xrightarrow{p \otimes 1} C(B) \otimes C(E).$$

Notar que $C(B)$ es una coálgebra conexa sí y sólo si B es un conjunto simplicial reducido; es simplemente conexa si y sólo si B es reducido y sin 1-símplices no degenerados, es decir $B_1^* = \emptyset$.

Un conjunto simplicial se dice conexo (simplemente conexo) si su realización es un espacio topológico conexo (simplemente conexo, respectivamente).

El principal resultado acerca del cotor y la sucesión espectral de Eilenberg-Moore está recogido en el siguiente teorema (es el 12.2 de [E-M]):

Teorema 1. (Teorema de Eilenberg-Moore).

Si $F \longrightarrow E \longrightarrow B$ es un fibrado simplicial y B es simplemente conexo, entonces la homología ordinaria de F es $\text{Cotor}^{C(B)}(\mathbb{Z}, C(E))$.

Corolario 2. (Eilenberg y Moore).

Si B es un conjunto simplicial simplemente conexo, la homología ordinaria de $G(B)$ (y por tanto la de $\Omega|B|$) es $\text{Cotor}^{C(B)}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.

Teniendo en cuenta estos resultados y la observación 0.1.11.2, podemos relacionar el tipo de homotopía de $C(F)$ con el cotor efectivo, aunque sin obtener por el momento resultados de cálculo.

Proposición 3.- Si $F \longrightarrow E \longrightarrow B$ es un fibrado simplicial, B es reducido y simplemente conexo y $\text{CE}^{C(B)}(\mathbb{Z}, C(E))$ está definido, entonces $C(F)$ es del mismo tipo de homotopía que la parte irreducible de $\text{CE}^{C(B)}(\mathbb{Z}, C(E))$.

Corolario 4.- Si B es un conjunto simplicial reducido y simplemente conexo y $\text{CE}^{C(B)}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ está definido, entonces $C(F)$ es del mismo tipo de homotopía que la parte irreducible de $\text{CE}^{C(B)}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.

Ahora, aplicando el teorema 1.4.4:

Corolario 5.- Si $F \longrightarrow E \longrightarrow B$ es un fibrado simplicial, B es reducido y simplemente conexo y E, B tienen homología efectiva fuerte, entonces $C(F)$ es del mismo tipo de homotopía que la parte irreducible de $\text{CE}^{C(B)}(\mathbb{Z}, C(E))$. En particular la homología ordinaria de F es finitamente calculable.

Corolario 6.- Si B es un conjunto simplicial reducido, simplemente conexo y con homología efectiva fuerte, entonces $C(G(B))$ es del mismo tipo de homotopía que la parte irreducible de $\text{CE}^{C(B)}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$. En particular la homología ordinaria del espacio de lazos de B es finitamente calculable.

Observaciones 7.

1) El teorema 1 está demostrado por Eilenberg y Moore (teorema 12.1 de [E-M]) de una forma más general por dos motivos:

a) Si $f : B' \longrightarrow B$ es un morfismo simplicial y $F \longrightarrow E' \longrightarrow B'$ es el fibrado simplicial inducido, se tiene que f determina en $C(B')$ una estructura de $C(B)$ -comódulo a derecha; entonces Eilenberg y Moore demuestran que la homología ordinaria de E' es $\text{Cotor}^{C(B)}(C(B'), C(E))$.

b) Todos los resultados están demostrados con coeficientes en un complejo de cadenas.

Estas dos generalizaciones también pueden ser estudiadas, con técnicas similares a las aquí utilizadas, en homología efectiva. Para conocer un tratamiento de la homología efectiva con coeficientes ver [R-S].

2) El corolario 4 da, en particular, una nueva demostración de que la homología ordinaria de los espacios de lazos es la homología ordinaria de la construcción COBAR (ver [A]).

3) El objetivo de nuestro trabajo es llegar a encontrar la homología efectiva de F en función de la homología efectiva fuerte de E y B . Para ello, en el siguiente párrafo, sustituimos $C(E)$ por un complejo de cadenas que es un producto tensorial "torcido" de $C(F)$ y $C(B)$, lo que nos permitirá demostrar que la homología efectiva de F no es otra cosa que el cotor efectivo sobre $C(B)$ de dicho producto tensorial "torcido".

2.- Los teoremas de Eilenberg-Moore en homología efectiva.

En este párrafo llegamos al resultado principal del capítulo: un teorema (el número siete) que relaciona la homología efectiva de la fibra con las de la base y el espacio total en un fibrado, tal y como Eilenberg y Moore lo hacían en homología ordinaria (ver el teorema 1.1).

Definición 1.- Un bicomplejo

$$C^0 \xrightarrow{\Psi_0} C^1 \xrightarrow{\Psi_1} C^2 \xrightarrow{\Psi_2} C^3 \longrightarrow \dots$$

se dirá admisible si tiene las propiedades siguientes:

$$(a1) C_j^i = A_j^i \oplus B_j^i \quad \text{si } j > 2i+1,$$

$$C_{2i}^i = A_{2i}^i, \quad C_{2i+1}^i = A_{2i+1}^i,$$

$$C_j^i = 0 \quad \text{si } j < 2i \quad (\text{es decir, el bicomplejo es simple}).$$

(a2) Si d^i es la diferencial de C^i , entonces $(A^i, d^i | A^i)$ es un subcomplejo de (C^i, d^i) y denotaremos $d^i | A^i$ por d^i . Sin embargo, B^i con la restricción de la diferencial no es un subcomplejo, es decir:

$$d_j^i | B_j^i : B_j^i \longrightarrow A_{j-1}^i \oplus B_{j-1}^i$$

tiene una componente en A_{j-1}^i , denotada $d_j^{i,A}$, y otra en B_{j-1}^i , denotada $d_j^{i,B}$.

(a3) Se tiene que $\psi_n | A^n$ define un morfismo de (A^n, d^n) en (A^{n+1}, d^{n+1}) , es decir $\psi_n | A_i^n : A_i^n \longrightarrow A_i^{n+1}$, para todo i , y lo denotaremos simplemente ψ_n . La componente de

$$\psi_n | B_i^n : B_i^n \longrightarrow A_i^{n+1} \oplus B_i^{n+1}$$

en A_i^{n+1} sera denotada ψ_n^A y la componente en B_i^{n+1} será ψ_n^B .

(a4) Se tiene que $\psi_0 | A_i^0 : A_i^0 \longrightarrow A_i^1$ es la aplicación nula y que $\psi_n^A : B_i^n \longrightarrow A_i^{n+1}$ es un isomorfismo para todo i .

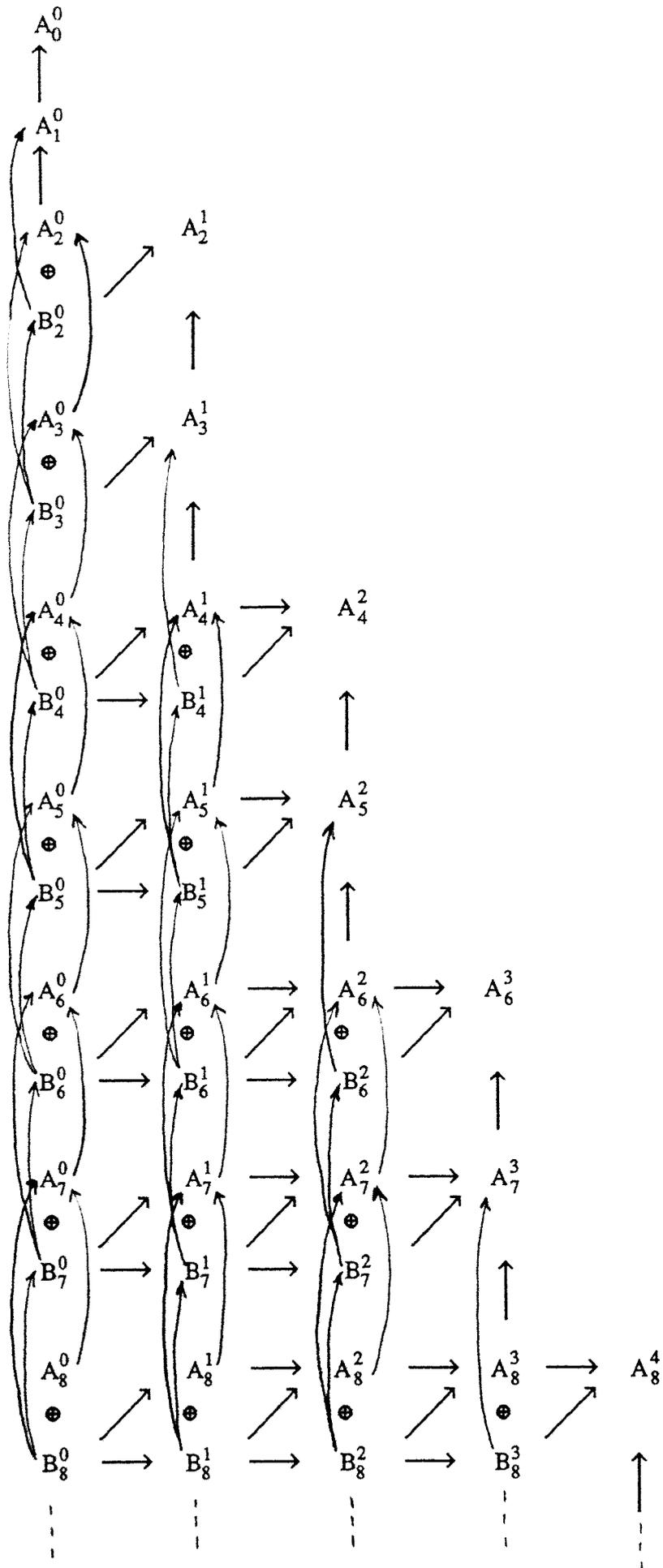
Observaciones 2.- En el grado n , la totalización T de un bicomplejo admisible es:

$$T_n = A_n^0 \oplus B_n^0 \oplus \dots \oplus A_{2n-2}^{n-2} \oplus B_{2n-2}^{n-2} \oplus A_{2n-1}^{n-1} \oplus A_{2n}^n$$

El borde δ de esta totalización viene explícitamente definido por:

$$\begin{aligned} \delta_n(a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{n-4}, b_{n-4}, a_{n-3}, b_{n-3}, a_{n-2}, b_{n-2}, a_{n-1}, a_n) = \\ = (d_n^0(a_0) + d_n^{0,A}(b_0), d_n^{0,B}(b_0), d_{n+1}^1(a_1) + d_{n+1}^{1,A}(b_1) + \psi_0^A(b_0), d_{n+1}^{1,B}(b_1) + \psi_0^B(b_0), \\ d_{n+2}^2(a_2) + d_{n+2}^{2,A}(b_2) + \psi_1^A(b_1) + \psi_1(a_1), d_{n+2}^{2,B}(b_2) + \psi_1^B(b_1), \dots, \\ d_{2n-3}^{n-3}(a_{n-3}) + d_{2n-3}^{n-3,A}(b_{n-3}) + \psi_{n-4}^A(b_{n-4}) + \psi_{n-4}(a_{n-4}), d_{2n-3}^{n-3,B}(b_{n-3}) + \psi_{n-4}^B(b_{n-4}), \\ d_{2n-2}^{n-2}(a_{n-2}) + d_{2n-2}^{n-2,A}(b_{n-2}) + \psi_{n-3}^A(b_{n-3}) + \psi_{n-3}(a_{n-3}), \\ d_{2n-1}^{n-1}(a_{n-1}) + \psi_{n-2}^A(b_{n-2}) + \psi_{n-2}(a_{n-2})). \end{aligned}$$

La totalización T puede ser organizada como el multicomplejo indicado en el diagrama siguiente (en el que todas las flechas diagonales son isomorfismos).



Teorema 3.- Todo complejo admisible admite una reducción $\{A_*^0, g, f, h\}$ de su totalización, siendo A_*^0 el subcomplejo

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow A_n^0 \xrightarrow{d_n^0} A_{n-1}^0 \longrightarrow \dots, \\ f_n : A_n^0 &\longrightarrow T_n = A_n^0 \oplus B_n^0 \oplus \dots \oplus A_{2n-2}^{n-2} \oplus B_{2n-2}^{n-2} \oplus A_{2n-1}^{n-1} \oplus A_{2n}^n, \\ a &\longrightarrow (a, 0, \dots, 0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

(es decir, f es la inclusión canónica),

$$g_n : A_n^0 \oplus B_n^0 \oplus \dots \oplus A_{2n-2}^{n-2} \oplus B_{2n-2}^{n-2} \oplus A_{2n-1}^{n-1} \oplus A_{2n}^n \longrightarrow A_n^0$$

está definida por:

$$\begin{aligned} g_n(a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{n-2}, b_{n-2}, a_{n-1}, a_n) &= \\ = a_0 - d_{n+1}^{0,A}(\psi_0^A)^{-1}(a_1 - d_{n+2}^{1,A}(\psi_1^A)^{-1}(a_2 - \dots (a_{n-1} - d_{2n}^{n-1,A}(\psi_{n-1}^A)^{-1}a_n) \dots)) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y \quad h_n(a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{n-2}, b_{n-2}, a_{n-1}, a_n) &= \\ = (0, (\psi_0^A)^{-1}(a_1 - d_{n+2}^{1,A}(\psi_1^A)^{-1}(a_2 - \dots (a_{n-1} - d_{2n}^{n-1,A}(\psi_{n-1}^A)^{-1}a_n) \dots)), 0, & \\ (\psi_1^A)^{-1}(a_2 - \dots (a_{n-1} - d_{2n}^{n-1,A}(\psi_{n-1}^A)^{-1}a_n) \dots), \dots, 0, (\psi_{n-1}^A)^{-1}a_n, 0, 0). & \end{aligned}$$

Demostración.- El método que vamos a utilizar es realizar en el complejo totalización las reducciones parciales de las flechas δ_n que quedan inducidas por los isomorfismos ψ_*^A . Consideremos el complejo totalización

$$\dots \longrightarrow T_n \xrightarrow{\delta_n} T_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow T_2 \xrightarrow{\delta_2} T_1 \xrightarrow{\delta_1} T_0$$

que definimos explícitamente en la observación 2.

Caso $i=2$. - Al reducir en δ_2 la flecha ψ_0^A , obtenemos:

$$\begin{array}{c}
 \dots \rightarrow T_3 \xrightarrow{\delta_3} \left\{ \begin{array}{l}
 A_2^0 \xrightarrow{\tilde{h}_1} A_1^0 \longrightarrow A_0^0 \\
 \oplus \nearrow \oplus \\
 B_2^0 \xrightarrow{\cong} A_2^1 \\
 \oplus \nearrow \\
 A_3^1 \\
 \oplus \\
 A_4^2
 \end{array} \right. \\
 \\
 \begin{array}{c}
 1_{T_3} \downarrow \\
 \tilde{g}_2 \downarrow \uparrow \tilde{f}_2 \quad \tilde{g}_1 \downarrow \uparrow \tilde{f}_1 \quad g_0 \downarrow \uparrow f_0
 \end{array} \\
 \dots \rightarrow T_3 \xrightarrow{\tilde{g}_2 \delta_3} \left\{ \begin{array}{l}
 A_2^0 \xrightarrow{d_2^0} A_1^0 \xrightarrow{d_1^0} A_0^0 \\
 \oplus \\
 A_3^1 \\
 \oplus \\
 A_4^2
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Por definición de reducción parcial se tiene:

$$\tilde{g}_1(a_0, a_1) = a_0 - d_2^{0,A} (\psi_0^A)^{-1} a_1 = g_1(a_0, a_1),$$

$$\tilde{h}_1(a_0, a_1) = (0, (\psi_0^A)^{-1} a_1, 0, 0) = h_1(a_0, a_1)$$

y evidentemente, tenemos:

$$\tilde{T}_1 = \bar{f}_1, \quad \tilde{g}_2 = \bar{g}_2, \quad \tilde{T}_2 = \bar{f}_2.$$

Caso $i = n$. - Por hipótesis de inducción podemos suponer que se tiene:

$$\begin{array}{ccc}
 T_n & \xrightarrow{\delta_n} & T_{n-1} \\
 \downarrow 1_{T_n} & & \downarrow \bar{g}_{n-1} \uparrow \bar{f}_{n-1} \\
 A_n^0 & \longrightarrow & A_{n-1}^0 \\
 \oplus & \nearrow & \oplus \\
 B_n^0 & \xrightarrow{\cong} & A_n^1 \\
 \oplus & \nearrow & \oplus \\
 A_{n+1}^1 & & \oplus \\
 \oplus & \nearrow & \oplus \\
 B_{n+1}^1 & \xrightarrow{\cong} & A_{n+1}^2 \\
 \oplus & & \oplus \\
 \vdots & & \vdots \\
 \oplus & & \oplus \\
 A_{2n-2}^{n-2} & \longrightarrow & A_{2n-3}^{n-2} \\
 \oplus & \nearrow & \oplus \\
 B_{2n-2}^{n-2} & \xrightarrow{\cong} & A_{2n-2}^{n-1} \\
 \oplus & \nearrow & \oplus \\
 A_{2n-1}^{n-1} & & \oplus \\
 \oplus & & \oplus \\
 A_{2n}^n & & \oplus
 \end{array}$$

Al reducir aquí la flecha ψ_{n-2}^A la única flecha no trivial que aparece es:

$$\check{g}_{n-1} : A_{n-1}^0 \oplus \dots \oplus A_{2n-3}^{n-2} \oplus A_{2n-2}^{n-1} \longrightarrow A_{n-1}^0 \oplus \dots \oplus A_{2n-3}^{n-2},$$

definida por: $\check{g}_{n-1}(a_0, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}) = (a_0, \dots, a_{n-3}, a_{n-2} - d_{2n-2}^{n-2, A} (\psi_{n-2}^A)^{-1} a_{n-1})$.

Vemos ahora que, si reducimos $\psi_{n-3}^A, \dots, \psi_1^A, \psi_0^A$, se obtiene un morfismo:

$$\tilde{g}_{n-1} : A_{n-1}^0 \oplus \dots \oplus A_{2n-3}^{n-2} \oplus A_{2n-2}^{n-1} \longrightarrow A_{n-1}^0,$$

$$\tilde{g}_{n-1}(a_0, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}) = a_0 - d_n^{0,A}(\psi_0^A)^{-1}(a_1 - \dots (a_{n-2} - d_{2n-2}^{n-2,A}(\psi_{n-2}^A)^{-1}a_{n-1}) \dots),$$

que compuesto con \bar{g}_{n-1} nos da g_{n-1} .

Análogamente se verifica que la homotopía $\tilde{h}_{n-1} : T_{n-1} \longrightarrow T_n$ asociada a estas reducciones es h_n . Las otras comprobaciones son triviales. Por tanto, el proceso de inducción puede continuar y la demostración está terminada.

Teorema 4.- Sea B una coálgebra simplemente conexa con coproducto Φ , F un complejo de cadenas y $B \otimes_t F$ un complejo de cadenas con las siguientes propiedades:

(i) $B \otimes_t F$ como \mathbb{Z} -módulo graduado coincide con $B \otimes F$, pero su diferencial, denotada d_t , puede ser diferente de la canónica sobre el producto tensorial.

(ii) $B \otimes_t F$ tiene estructura de B -comódulo a izquierda con coproducto exterior $\Phi \otimes 1_F$.

(iii) Existe un isomorfismo canónico $F \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_t F$ que lleva un elemento f de F a $1 \otimes f$.

En estas condiciones $\text{Cobar}^B(\mathbb{Z}, (B \otimes_t F, \Phi \otimes 1_F))$ es admisible. En particular, F es homotopicamente equivalente a la totalización de $\text{Cobar}^B(\mathbb{Z}, (B \otimes_t F, \Phi \otimes 1_F))$.

Demostración.- Tenemos:

$$C_j^i = (\bar{B}^i \otimes B \otimes F)_j \quad \text{y tomamos:}$$

$$A_j^i = (\bar{B}^i \otimes \mathbb{Z} \otimes F)_j \quad \text{y}$$

$$B_j^i = (\bar{B}^i \otimes \bar{B} \otimes F)_j ;$$

por tanto las propiedades (a1) de la definición 1 de bicomplejo admisible son verificadas.

La propiedad (iii) nos dice que $d_t | \mathbb{Z} \otimes F = 1 \otimes d_F$ y por tanto se verifica (a2).

Por la proposición 1.2.3 se tiene que

$$\Psi_n = (p_n \otimes 1_B \otimes 1_F) (1_{\bar{B}^n} \otimes \Phi \otimes 1_F).$$

De $\Phi(1) = 1 \otimes 1$ se deduce que $\Psi_n|_{A_i^n}$ no tiene componente en B_i^{n+1} y que

$\Psi_0|_{Z \otimes F} = 0$, teniendo en cuenta que $p_0: B \rightarrow \bar{B}$ es la proyección canónica.

$$\begin{aligned} \text{Además: } \Psi_n^A(\bar{b}_1 \otimes \bar{b}_2 \otimes f) &= (p_n \otimes 1_B \otimes 1_F)(\bar{b}_1 \otimes \Phi^{B \otimes Z}(\bar{b}_2) \otimes f) = \\ &= (p_n \otimes 1_B \otimes 1_F)(\bar{b}_1 \otimes \bar{b}_2 \otimes 1 \otimes f) = \\ &= p_n(\bar{b}_1 \otimes \bar{b}_2) \otimes 1 \otimes f = \bar{b}_1 \otimes \bar{b}_2 \otimes 1 \otimes f, \end{aligned}$$

ya que $p_n: \bar{B}^n \otimes B \rightarrow \bar{B}^{n+1}$ es la proyección canónica (ver la demostración de la proposición 1.1.11); en esta cadena de igualdades $\bar{b}_1 \in \bar{B}^n$, $\bar{b}_2 \in \bar{B}$, $f \in F$ y $\Phi^{B \otimes Z}$ es la componente de $\Phi: B \rightarrow B \otimes B$ en $B \otimes Z$. Por tanto, Ψ_n^A es un isomorfismo y las condiciones (a3), (a4) se verifican, lo que termina la demostración del teorema.

Ahora damos un enunciado detallado del teorema de Brown [B] que relaciona las aplicaciones de torsión de los fibrados simpliciales con las cocadenas de torsión que dan lugar a diferenciales "torcidas" sobre productos tensoriales de complejos de cadenas.

Teorema 5. (Teorema de Brown).

Sea $F \rightarrow E \xrightarrow{P} B$ un fibrado simplicial tal que B no tiene 1-símplices no degenerados y es reducido. Entonces se tiene un complejo de cadenas $C(B) \otimes_t C(F)$ y una reducción $\{C(B) \otimes_t C(F), f, g, h\}$ de $C(E)$ tal que $C(B) \otimes_t C(F)$ verifica las condiciones (i)-(ii)-(iii) del teorema 4 anterior. En particular, $C(B) \otimes_t C(F)$ y $C(E)$ son homotópicamente equivalentes.

Demostración.- La demostración del teorema de Brown que nos interesa es la dada por Shih en [S]. Allí Shih define explícitamente la diferencial torcida d_t y las fórmulas que nos dan f , g y h ([S], teorema 1, página 115). Además, Shih demuestra que $\Phi_B \otimes 1: C(B) \otimes_t C(F) \rightarrow C(B) \otimes C(B) \otimes_t C(F)$ es un morfismo de cadenas ([S], proposición II.3.1) de donde se sigue fácilmente que $\Phi_B \otimes 1$ es un coproducto externo. Por tanto las condiciones (i) y (ii) del teorema 4 son verificadas y la (iii) es evidente.

El siguiente lema es de fácil demostración.

Lema 6.- Sean M, N, N' objetos de \mathfrak{C} . Si N' es una reducción de N , entonces $M \otimes N'$ es de modo canónico una reducción de $M \otimes N$.

TEOREMA 7.- Sea $F \rightarrow E \rightarrow B$ un fibrado simplicial tal que B es reducido y sin 1-símplices no degenerados. Si E, B tienen homología efectiva fuerte, entonces F tiene homología efectiva y existe un algoritmo que la calcula.

Demostración.- El teorema 5 nos da una reducción de $C(E)$ a $C(B) \otimes_t C(F)$ y por el lema 6 tendremos una reducción de $C(\bar{B})^n \otimes C(E)$ a $C(\bar{B})^n \otimes C(B) \otimes_t C(F)$ para todo n . Por la fórmula de Künneth en homología efectiva (proposición 0.1.20) aplicada reiteradas veces se tiene que $C(\bar{B})^n \otimes C(E)$ tiene homología efectiva fuerte para todo n y, por tanto, nos encontramos en las condiciones del corolario 1.4.6. Concluimos que $CE^{C(B)}(\mathbb{Z}, C(B) \otimes_t C(F))$ existe y es finitamente calculable, es decir que $\text{Cobar}^{C(B)}(\mathbb{Z}, C(B) \otimes_t C(F))$ tiene homología efectiva.

Ahora, aplicando los teoremas 3, 4, 5 anteriores, se tiene que $C(F)$ es homotópicamente equivalente a $\text{Cobar}^{C(B)}(\mathbb{Z}, C(B) \otimes_t C(F))$ y por tanto F tiene homología efectiva que es finitamente calculable.

CAPITULO 3.- LOS ESPACIOS DE LAZOS.

1.- Primeras definiciones y propiedades.

Lo que se persigue en este párrafo es emplear un método diferente al usado por Brown y Shih para definir la diferencial torcida utilizada en 2.2, restringiéndonos al caso particular de los fibrados asociados a los espacios de lazos. Este nuevo método está desarrollado en el párrafo 31 de [M] y el trabajo realizado aquí es el de hacer explícitas todas las construcciones utilizadas para poder aplicarlas en homología efectiva.

Recordar que si K es un conjunto simplicial, K_q^* denota el conjunto de los q -símplices no degenerados de K ; si ∂, s denotan los operadores de cara y degeneración de un conjunto simplicial reducido K , entonces $\bar{\partial}, \bar{s}$ denotaban los de $G(K)$, la versión simplicial del espacio de lazos de K .

Definiciones 1.- Un (r,s) -shuffle es una permutación π de $\{0,1,\dots,r+s-1\}$ que verifica:

$$\pi(i) < \pi(j) \quad \text{si} \quad \begin{cases} 0 \leq i < j \leq r-1, & \text{o} \\ r \leq i < j < r+s-1. \end{cases}$$

Si escribimos

$$\begin{cases} \alpha_i = \pi(i-1), & \text{con } 0 < i \leq r \\ \beta_j = \pi(j+r-1), & \text{con } 0 < j \leq s, \end{cases}$$

entonces se tiene que α o β fijan π y denotaremos $\pi = (\alpha, \beta)$.

Sea L un grupo simplicial con producto μ ; definimos la aplicación de Eilenberg-Mac Lane de L , también denotada μ , pero que es una aplicación $C(L) \otimes C(L) \longrightarrow C(L)$, por

$$\mu_{r+s}(x_r \otimes y_s) = \sum (-1)^{\sigma(\alpha)} \mu(s_{\beta_s} \dots s_{\beta_1} x_r, s_{\alpha_r} \dots s_{\alpha_1} y_s),$$

donde el sumatorio está tomado sobre $(\alpha, \beta) \in \{(r,s)\text{-shuffles}\}$, $x_r \in L_r^*$, $y_s \in L_s^*$ y

$$\sigma(\alpha) = \sum_{i=1}^r [\alpha_i - i + 1] \quad (\text{la signatura}).$$

Si tenemos un conjunto de homomorfismos de grupos $\varphi_i : C_i(K) \longrightarrow C_{i-1}(L)$, $1 \leq i \leq q$, se define un nuevo homomorfismo $(\varphi \cup \varphi)_q : C_q(K) \longrightarrow C_{q-2}(L)$ dado sobre los generadores $x \in K_q^*$ por la expresión:

$$\sum_{j=1}^{q-1} [-1]^j \mu_{q-2}(\varphi_j \Delta'_{q,j} x \otimes \varphi_{q-j} \Delta''_{q,q-j} x),$$

donde $\Delta'_{q,i}$, $\Delta''_{q,q-i}$ son como en la definición del producto de Alexander-Whitney (ver 0.2.3), es decir:

$$\begin{aligned} \Delta'_{q,i} x &= \partial_{i+1} \dots \partial_q x, \\ \Delta''_{q,q-i} x &= \begin{array}{c} \partial_0 \dots \partial_0 x \\ \longleftarrow \text{i veces} \longrightarrow \end{array} \end{aligned}$$

Entonces, $\varphi \cup \varphi$ se llama cup-producto de φ .

Observación 2.- En el caso $L = G(K)$, el producto μ es simplemente $\mu(x,y) = xy$, ya que el grupo es libre.

Definición 3.- Una cocadena de torsión $t = t(\tau)$ para $G(K) \times_{\tau} K$ es un conjunto de morfismos $t_i : C_i(K) \longrightarrow C_{i-1}(G(K))$ que verifican

$$\bar{d}t_q + t_{q-1}d + (t \cup t)_q = 0,$$

donde d , \bar{d} son las diferenciales asociadas a ∂ , $\bar{\partial}$, respectivamente.

Proposición 4.- Si t es una cocadena de torsión para $G(K) \times_{\tau} K$, entonces se tiene una diferencial torcida d_t sobre $C(K) \otimes C(G(K))$ definida por

$$d_t(x_q \otimes y_r) = dx_q \otimes y_r + [-1]^q x_q \otimes \bar{d}y_r + \sum_{i=0}^q [-1]^i \Delta'_{q,i} x_q \otimes \mu_{q-i+r-1}(t_{q-i} \Delta''_{q,q-i} x_q \otimes y_r),$$

donde $x_q \in K_q^*$, $y_r \in G_r^*(K)$.

Observaciones 5.

1) La demostración de la anterior proposición se encuentra en el párrafo 30 de [M].

2) En general la expresión $d_t(x_q \otimes y_r) - dx_q \otimes y_r - [-1]^q x_q \otimes \bar{d}y_r$ es denotada en la literatura por $t\eta(x_q \otimes y_r)$ y $t\eta$ se llama cap-producto.

3) En lo que sigue vamos a definir una cocadena de torsión t de forma explícita y de modo que el complejo de cadenas $C(K) \otimes_t C(G(K))$ (es decir, $C(K) \otimes C(G(K))$ con la diferencial torcida d_t) es el que, según el teorema de Brown 2.2.5, es homotópicamente equivalente a $C(G(K) \times_\tau K)$. Ver el párrafo 31 de [M].

Definiciones 6.- La versión simplicial del p -símplice estándar, denotada $\Delta[p]$, está definida por:

$$\Delta_n[p] = \{ (a_0, \dots, a_n) ; 0 \leq a_i \leq a_{i+1} \leq p, a_i \in \mathbb{N}, i = 0, \dots, n \},$$

$$\partial_i(a_0, \dots, a_n) = (a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

$$s_i(a_0, \dots, a_n) = (a_0, \dots, a_i, a_i, \dots, a_n).$$

Entonces $\bar{\Delta}[p]$ será el conjunto simplicial reducido obtenido de $\Delta[p]$ por la identificación de todos los 0-símplices de $\Delta[p]$ a un solo punto. Si no existe posibilidad de error, denotaremos los símplices y los operadores de $\Delta[p]$ y $\bar{\Delta}[p]$ de la misma forma. Un elemento $\tau(a_0, \dots, a_{n+1})$ de $G_n(\bar{\Delta}[p])$ será denotado $[a_0, \dots, a_{n+1}]$.

Lema 7.- Las aplicaciones

$$h_n : G_n(\bar{\Delta}[p]) \longrightarrow G_{n+1}(\bar{\Delta}[p])$$

$$x = [a_0, \dots, a_{n+1}] \longrightarrow \begin{cases} \bar{s}_0[0, a_1, \dots, a_{n+1}] \cdot [0, a_0, \dots, a_{n+1}]^{-1}, & \text{si } a_0 \neq 0 \\ \bar{s}_0 x, & \text{si } a_0 = 0 \end{cases}$$

dan una homotopía de contracción sobre el complejo acíclico

$$\dots \longrightarrow C_{n+1}(G(\bar{\Delta}[p])) \xrightleftharpoons[\bar{d}_{n+1}]{h_n} C_n(G(\bar{\Delta}[p])) \xrightleftharpoons[\bar{d}_n]{h_{n-1}} C_{n-1}(G(\bar{\Delta}[p])) \longrightarrow \dots$$

Demostración.- Basta demostrar que, para cada generador $x = [a_0, \dots, a_{n+1}]$, se tiene: $(h_{n-1}\bar{d}_n + \bar{d}_{n+1}h_n)(x) = x$. Se verifica que:

a) si $a_0 \neq 0$:

$$\bar{\partial}_0 h_n x = x,$$

$$\bar{\partial}_1 h_n x = h_{n-1} \bar{\partial}_0 x,$$

$$\vdots$$

$$\bar{\partial}_{n+1} h_n x = h_{n-1} \bar{\partial}_n x.$$

b) si $a_0 = 0$:

$$\bar{\partial}_0 h_n x = \bar{\partial}_1 h_n x (= x),$$

$$h_{n-1} \bar{\partial}_0 x = x,$$

$$\bar{\partial}_2 h_n x = h_{n-1} \bar{\partial}_1 x,$$

$$\vdots$$

$$\bar{\partial}_{n+1} h_n x = h_{n-1} \bar{\partial}_n x.$$

De esta serie de igualdades se deduce el lema.

Notar que estas aplicaciones inducen una homotopía de contracción tanto en el complejo de cadenas normalizado como en el no normalizado.

Observación 8.- Vamos a definir una sucesión $\{m_q\}_{q \geq 2}$ de cadenas

$$m_q \in C_q(G(\bar{\Delta}[p+1]))$$

que se llamará sucesión universal.

En primer lugar, para cada conjunto simplicial reducido K , definimos:

$$\begin{aligned} t_1 : C_1(K) &\longrightarrow C_0(G(K)) \\ x &\longrightarrow e_0 - \tau(x)^{-1}, \quad \text{si } x \in K_1^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_2 : C_2(K) &\longrightarrow C_1(G(K)) \\ x &\longrightarrow -\tau(x)^{-1} \tau(s_1 \partial_0 x)^{-1}, \quad \text{si } x \in K_2^*. \end{aligned}$$

Se verifica que $\bar{d}t_2 + t_1 d + (t \cup t)_2 = 0$.

Sea ahora $q > 2$ y podemos suponer conocidos :

$$t_i : C_i(\bar{\Delta}[n]) \longrightarrow C_{i-1}(G(\bar{\Delta}[n])),$$

donde $i < q \leq n$ y $\bar{d}t_i + t_{i-1}d + (t \cup t)_i = 0$.

Para cada $q \leq n$, denotamos:

$$X_q = -t_{q-1}d - (t \cup t)_q : C_q(\bar{\Delta}[n]) \longrightarrow C_{q-2}(G(\bar{\Delta}[n])).$$

Puesto que el cup-producto es un morfismo de cadenas, es fácil comprobar que $\bar{d}X_q = 0$. Como un caso particular encontramos que el elemento $y \in C_{q-2}(G(\bar{\Delta}[q]))$ definido por:

$$\begin{aligned} X_q : C_q(\bar{\Delta}[q]) &\longrightarrow C_{q-2}(G(\bar{\Delta}[q])) \\ \bar{\Delta}_q = (0, 1, \dots, q) &\longrightarrow y \end{aligned}$$

es un ciclo.

Definimos entonces $m_{q-1} = h_{q-2}(y) \in C_{q-1}(G(\bar{\Delta}[q]))$, donde h_{q-2} es el morfismo del lema 7 anterior.

Definimos además:

$$\begin{aligned} t_q : C_q(\bar{\Delta}[q]) &\longrightarrow C_{q-1}(G(\bar{\Delta}[q])) \\ \bar{\Delta}_q &\longrightarrow m_{q-1} \end{aligned}$$

Por construcción se tiene: $[\bar{d}t_q + t_{q-1}d + (t \cup t)_q] \bar{\Delta}_q = \bar{d}m_{q-1} - X_q(\bar{\Delta}_q) = \bar{d}h_{q-2}(y) - y = 0$, ya que y es un ciclo.

Ahora, para cada $n > q$ y para cada $x \in \bar{\Delta}_q^*[n]$, existe un morfismo simplicial canónico y único:

$$\begin{aligned} \bar{x} : \bar{\Delta}[q] &\longrightarrow \bar{\Delta}[n] \\ \bar{\Delta}_q &\longrightarrow x \end{aligned}$$

Consideremos los morfismos asociados:

$$\begin{aligned} G(\bar{x}) : G(\bar{\Delta}[q]) &\longrightarrow G(\bar{\Delta}[n]) & y \\ \tau(z) &\longrightarrow \tau(\bar{x}(z)) \end{aligned}$$

$$G(\bar{x})_* : C(G(\bar{\Delta}[q])) \longrightarrow C(G(\bar{\Delta}[n])).$$

Ahora, para cada $n > q$, definimos

$$\begin{aligned} t_q : C_q(\bar{\Delta}[n]) &\longrightarrow C_{q-1}(G(\bar{\Delta}[n])) \\ x &\longrightarrow G(\bar{x})_{q-1}(m_{q-1}), \quad \text{si } x \in \bar{\Delta}_q^*[n]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Se tiene: } [\bar{d}t_q + t_{q-1}d + (t \cup t)_q](x) &= \bar{d}t_q(x) - X_q(x) = \bar{d}G(\bar{x})_{q-1}(m_{q-1}) - X_q(x) = \\ &= G(\bar{x})_{q-1}\bar{d}(m_{q-1}) - X_q(x) = G(\bar{x})_{q-1}X_q(\bar{\Delta}_q) - X_q(x) = X_q G(\bar{x})\tau(\bar{\Delta}_q) - X_q(x) = \\ &= X_q(\bar{x}(\bar{\Delta}_q)) - X_q(x) = X_q(x) - X_q(x) = 0. \end{aligned}$$

Podemos por tanto proseguir el proceso y definir m_q, m_{q+1}, \dots

Teorema 9.- Si K es un conjunto simplicial reducido, se tiene una cocadena de torsión $t = t(\tau)$ para $G(K) \times_{\tau} K$.

Demostración.- Se definen t_1, t_2 como en la observación 11. Sea $q > 2$ y $x \in K_q^*$. Consideramos el morfismo simplicial canónico:

$$\begin{aligned} \bar{x} : \bar{\Delta}[q] &\longrightarrow K \\ \bar{\Delta}_q &\longrightarrow x \end{aligned}$$

Definimos

$$\begin{aligned} t_q : C_q(K) &\longrightarrow C_{q-1}(G(K)) \\ x &\longrightarrow G(\bar{x})_{q-1}(m_{q-1}), \end{aligned}$$

donde m_{q-1} es el elemento correspondiente de la sucesión universal definida en la observación 8. La misma demostración que en el caso $K = \bar{\Delta}[n]$, $n > q$, muestra que:

$$\bar{d}t_q + t_{q-1}d + (t \cup t)_q = 0.$$

2.- El caso de $\bar{\Delta}[r]$. Los modelos acíclicos.

En primer lugar vamos a encontrar una homotopía de contracción para $C(\bar{\Delta}[r]) \otimes_t C(G(\bar{\Delta}[r]))$.

Lema 1.- Sean A, B complejos de cadenas, $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow A$ morfismos de cadenas y $h : A_* \longrightarrow B_{*+1}$ un operador de homotopía entre gf y 1_A . Si B es acíclico y h' es una homotopía de contracción para B , entonces A es acíclico con una homotopía de contracción definida por:

$$\begin{aligned} H_n : A_n &\longrightarrow A_{n+1} \\ a &\longrightarrow g_{n+1} h'_n f_n(a) + h_n(a) \end{aligned}$$

Observaciones 2.

1) La demostración del anterior lema es una simple verificación.

2) Notar que si $\pi = \pi_1(|\bar{\Delta}[r]|)$, se tiene que este grupo fundamental se puede presentar de modo combinatorial como el grupo generado por los 1-símplices de $\bar{\Delta}[r]$ con las relaciones $(a_1, a_2) = (a_0, a_1)(a_0, a_1)^{-1}$, siempre que $(a_0, a_1, a_2) \in \bar{\Delta}_2[r]$.

3) Si π es el grupo fundamental de $\bar{\Delta}[r]$, consideramos el anillo de grupo $\mathbb{Z}[\pi]$ generado por π . Se puede ver $\mathbb{Z}[\pi]$ como un complejo de cadenas libre en el que el único grado no trivial es el nulo. Denotaremos por $\{a_0, a_1\}$ a los generadores de $\mathbb{Z}[\pi]$. Entonces se tiene que la homotopía de contracción h del lema 1.7 prueba que los homomorfismos:

$$\begin{aligned} e : C_0(G(\bar{\Delta}[r])) &\longrightarrow \mathbb{Z}[\pi] \\ [a_0, a_1] &\longrightarrow \{a_0, a_1\} \\ e' : \mathbb{Z}[\pi] &\longrightarrow C_0(G(\bar{\Delta}[r])) \\ \{a_0, a_1\} &\longrightarrow \begin{cases} [a_0, a_1] & , \text{ si } a_0=0 \\ [0, a_1][0, a_0]^{-1} & , \text{ si } a_0 \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

dan una equivalencia de homotopía $(e, e', h, 0)$ entre $C(G(\bar{\Delta}[r]))$ y $\mathbb{Z}[\pi]$; basta para ello observar que $ee'=1$, puesto que $\{a_0, a_1\} = \{0, a_1\}\{0, a_0\}^{-1}$ en π , y que

$$\bar{d}_1 h_0([a_0, a_1]) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } a_0=0 \\ [a_0, a_1] - [0, a_1][0, a_0]^{-1} & , \text{ si } a_0 \neq 0 \end{cases} .$$

Notar que aunque $(e, e', h, 0)$ sea una equivalencia de homotopía no definirá, en general, una reducción, puesto que la condición $h^2 = 0$ no será verificada. Este tipo de equivalencias de homotopía que no son reducciones aparecen repetidamente a lo largo de este párrafo.

Observar también que la aplicación $\pi \longrightarrow G_0(\bar{\Delta}[r])$ dada sobre los generadores por e' está realmente bien definida y se extiende a un homomorfismo de grupos.

4) En lo que sigue se nos presentará frecuentemente la siguiente cuestión: dado un morfismo de cadenas $f : F \longrightarrow F'$, ¿cuándo la aplicación inducida $1 \otimes f : B \otimes_{\mathbb{Z}} F \longrightarrow B \otimes_{\mathbb{Z}} F'$ es también un morfismo de cadenas? May, en la observación 31.6 de [M], prueba, como una consecuencia del teorema de comparación de sucesiones espectrales, que basta que f defina un isomorfismo entre los grupos de homología de F y F' ; en particular si f es una equivalencia de homotopía se tendrá que $1 \otimes f$ es un morfismo de cadenas entre los productos tensoriales torcidos.

La demostración de la siguiente proposición se basa en las observaciones anteriores y en los resultados de la página 146 de [M].

Proposición 3.- Tenemos una equivalencia de homotopía $(1 \otimes e, 1 \otimes e', 1 \otimes h, 0)$ entre $C(\bar{\Delta}[r]) \otimes_{\mathbb{Z}} C(G(\bar{\Delta}[r]))$ y $C(\bar{\Delta}[r]) \otimes_{e'} \mathbb{Z}[\pi]$, donde la diferencial torcida del segundo complejo viene dada explícitamente por:

$$\tilde{d}_n(x \otimes \alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} [-1]^i \partial_i x \otimes \alpha + [-1]^n \partial_n x \otimes (\{\partial_0^{n-1} x\} \cdot \alpha),$$

donde $x \in \bar{\Delta}_n[r]$ y $\alpha \in \pi$.

Vamos a buscar a continuación una homotopía de contracción de $C(\bar{\Delta}[r]) \otimes_{e'} \mathbb{Z}[\pi]$.

La demostración del siguiente lema es una simple comprobación:

Lema 4.- Sea $x = (a_0, \dots, a_n) \in \bar{\Delta}_n[r]$, donde $n \geq 1$ y definimos $\tilde{s}(a_0, \dots, a_n) = (0, a_0, \dots, a_n) \in \bar{\Delta}_{n+1}[r]$. Entonces:

- 1) Si $a_0 \neq 0$: $\partial_0 \tilde{s}x = x$ y $\tilde{s}\partial_i x = \partial_{i+1} \tilde{s}x$, si $0 \leq i \leq n$.
- 2) Si $a_0 = 0$: $\partial_0 \tilde{s}x = x = \partial_1 \tilde{s}x = \tilde{s}\partial_0 x$ y
 $\tilde{s}\partial_i x = \partial_{i+1} \tilde{s}x$, si $0 < i \leq n$.
- 3) $\partial_0^n \tilde{s}x = \partial_0^{n-1} x$.

Proposición 5.- Definimos una homotopía de contracción de $C(\bar{\Delta}[r]) \otimes_{\text{el}} \mathbb{Z}[\pi]$ por:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_n : C_n(\bar{\Delta}[r]) \otimes \mathbb{Z}[\pi] &\longrightarrow C_{n+1}(\bar{\Delta}[r]) \otimes \mathbb{Z}[\pi], \text{ si } n \geq 1. \\ x \otimes a &\longrightarrow \tilde{s}x \otimes a \end{aligned}$$

y, si $n = 0$, definimos \tilde{h}_0 por inducción sobre la longitud r de los elementos $y_1 \dots y_r$ de π :

$$\begin{aligned} \tilde{h}_0 : C_0(\bar{\Delta}[r]) \otimes \mathbb{Z}[\pi] &\longrightarrow C_1(\bar{\Delta}[r]) \otimes \mathbb{Z}[\pi] \\ x_0 \otimes y_1 \dots y_r &\longrightarrow \begin{cases} 0 & , \text{ si } r=1, y_1=1 \text{ y en otro caso:} \\ (0, b) \otimes y_1 \dots y_r - (0, a) \otimes y_2 \dots y_r + \tilde{h}_0(x_0 \otimes y_2 \dots y_r) & , \text{ si } y_1 = \{a, b\} \\ (0, a) \otimes y_1 \dots y_r - (0, b) \otimes y_2 \dots y_r + \tilde{h}_0(x_0 \otimes y_2 \dots y_r) & , \text{ si } y_1 = \{a, b\}^{-1} \end{cases} \end{aligned}$$

Demostración.- Del lema 4 se sigue que $\tilde{h}_{n-1} \tilde{\alpha}_n + \tilde{\alpha}_{n+1} \tilde{h}_n = 1$, si $n > 1$.

Por otra parte, si $\alpha \neq \{a_0, a_1\} \beta$ se tiene:

$$\begin{aligned} &(\tilde{h}_0 \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 \tilde{h}_1)((a_0, a_1) \otimes \alpha) = \\ &= \tilde{h}_0(x_0 \otimes \alpha - x_0 \otimes \{a_0, a_1\}^{-1} \alpha) + \tilde{\alpha}_2((0, a_0, a_1) \otimes \alpha) = \\ &= \tilde{h}_0(x_0 \otimes \alpha) - \tilde{h}_0(x_0 \otimes \{a_0, a_1\}^{-1} \alpha) + (a_0, a_1) \otimes \alpha - \\ &- (0, a_1) \otimes \alpha + (0, a_0) \otimes \{a_0, a_1\}^{-1} \alpha = (a_0, a_1) \otimes \alpha. \end{aligned}$$

Se verifica también que la igualdad es cierta en el caso $\alpha = \{a_0, a_1\} \beta$, lo que termina la demostración de la proposición.

Podemos ahora aplicar el lema 1 para encontrar una homotopía de contracción de $C(\bar{\Delta}[r]) \otimes_t C(G(\bar{\Delta}[r]))$:

Teorema 6.- Las aplicaciones

$$H_n : C_p(\bar{\Delta}[r]) \otimes C_{n-p}(G(\bar{\Delta}[r])) \longrightarrow (C(\bar{\Delta}[r]) \otimes C(G(\bar{\Delta}[r])))_{n+1}$$

definidas por $H_n(a \otimes b) = (1 \otimes e') \bar{h}_n(1 \otimes e)(a \otimes b) + (1 \otimes h_{n-p})(a \otimes b)$, dan una homotopía de contracción de $C(\bar{\Delta}[r]) \otimes_t C(G(\bar{\Delta}[r]))$.

Vamos a definir a continuación unos complejos de cadenas y a demostrar que son acíclicos. En el siguiente párrafo serán utilizados para encontrar una homotopía de contracción de $C(K) \otimes_t C(G(K))$.

Sobre el producto $G(\bar{\Delta}[r]) \times \Delta[s]$ se considera una acción

$$\begin{aligned} \mu : G(\bar{\Delta}[r]) \times [G(\bar{\Delta}[r]) \times \Delta[s]] &\longrightarrow G(\bar{\Delta}[r]) \times \Delta[s] \\ (a, b, c) &\longrightarrow (a * b, c) \end{aligned}$$

De este modo se tiene un fibrado simplicial de fibra $G(\bar{\Delta}[r]) \times \Delta[s]$, base $\bar{\Delta}[r]$, grupo $G(\bar{\Delta}[r])$ y espacio total $[G(\bar{\Delta}[r]) \times \Delta[s]] \times \bar{\Delta}[r]$, donde τ es la misma aplicación de torsión que define $G(\bar{\Delta}[r]) \times_{\tau} \bar{\Delta}[r]$. De una forma análoga a como definimos d_t sobre $C(\bar{\Delta}[r]) \otimes C(G(\bar{\Delta}[r]))$, se tiene una diferencial torcida, también denotada d_t , sobre $C(\bar{\Delta}[r]) \otimes C(G(\bar{\Delta}[r]) \times \Delta[s])$. Explícitamente, si

$$\mu_* : C(\bar{\Delta}[r]) \otimes C(G(\bar{\Delta}[r]) \times \Delta[s]) \longrightarrow C(G(\bar{\Delta}[r]) \times \Delta[s])$$

es el morfismo de cadenas inducido por μ y los shuffles y $x \in \bar{\Delta}_m^*[r]$, $y \in G_1^*(\bar{\Delta}[r])$, $z \in \Delta_1^*[s]$; entonces:

$$d_t(x \otimes (y, z)) = dx \otimes (y, z) + [-1] x \otimes (dy, dz) + \sum_{i=0}^m [-1]^i \Delta'_{q,i} x \otimes \mu_{q-i+r-1}(t_{q-i} \Delta''_{q,q-i} x \otimes (y, z)),$$

donde se han retomado las notaciones del párrafo 1. Observar que $t = t(\tau)$ es exactamente la misma cocadena de torsión que la definida en el caso $G(K) \times_{\tau} K$. Este producto tensorial torcido será denotado $C(\bar{\Delta}[r]) \otimes_t C(G(\bar{\Delta}[r]) \times \Delta[s])$.

El siguiente lema es de fácil demostración:

Lema 7.- Las aplicaciones

$$h_i : \Delta_n[s] \longrightarrow \Delta_{n+1}[s], \quad 0 \leq i < n,$$

$$(a_0, \dots, a_n) \longrightarrow (0, \dots, 0, a_i, \dots, a_n)_{[i+1]}$$

verifican que:

- (i) $\partial_0 h_0 = 1$, $\partial_{n+1} h_n x = s_0^n(0) = (0, \dots, 0)_{[n+1]}$, para todo $x \in \Delta_n[s]$.
- (ii) $\partial_i h_j = h_{j-1} \partial_i$ si $i < j$.
 $\partial_{j+1} h_{j+1} = h_{j+1} \partial_j$.
 $\partial_i h_j = h_j \partial_{i-1}$ si $i > j+1$.

Además se tiene que las aplicaciones

$$\bar{h}_n : C_n(\Delta[s]) \longrightarrow C_{n+1}(\Delta[s])$$

$$x \in \Delta_n[s] \longrightarrow \sum_{i=0}^n [-1]^i h_i(x)$$

dan una homotopía de contracción de $C(\Delta[s])$.

Lema 8.- Sea K un conjunto simplicial. Definimos unos morfismos simpliciales $f : K \times \Delta[s] \longrightarrow K$, $g : K \longrightarrow K \times \Delta[s]$ por:

$$f_n : K_n \times \Delta_n[s] \longrightarrow K_n, \quad g_n : K_n \longrightarrow K_n \times \Delta_n[s].$$

$$(a, b) \longrightarrow a, \quad a \longrightarrow (a, s_0^n(0))$$

Definimos $h_i : K_n \times \Delta_n[s] \longrightarrow K_{n+1} \times \Delta_{n+1}[s]$,
 $(a, b) \longrightarrow (s_i a, h_i b)$

donde $0 \leq i \leq n$ y $h_i b$ está definido como en el lema 7.

Entonces tenemos una equivalencia de homotopía $(f, g, \bar{h}, 0)$ entre $C(K \times \Delta[s])$ y $C(K)$, donde \bar{h} es:

$$\bar{h}_n(a, b) = \sum_{i=0}^n [-1]^i h_i(a, b).$$

Demostración.- Se verifica que las condiciones (ii) del enunciado del lema 7 siguen siendo ciertas para los nuevos h_i y además que $\partial_0 h_0 = 1$ y $\partial_{n+1} h_n = g_n f_n$. De aquí se sigue fácilmente que $\bar{h}_{n-1} d_n + d_{n+1} \bar{h}_n = 1 - g_n f_n$.

Proposición 9.- Con las notaciones del lema 8, tenemos una equivalencia de homotopía $(1 \otimes f, 1 \otimes g, 1 \otimes \bar{h}, 0)$ entre $C(\bar{\Delta}[r]) \otimes_t C(G(\bar{\Delta}[r]) \times \Delta[s])$ y $C(\bar{\Delta}[r]) \otimes_t C(G(\bar{\Delta}[r]))$.

Demostración.- El resultado se deduce del lema 8 y de que la acción de $G(\bar{\Delta}[r])$ sobre $\Delta[s]$ es trivial (ver [M], página 145).

Podemos aplicar nuevamente el lema 1 y, teniendo en cuenta el teorema 6, obtener:

Teorema 10.- Las aplicaciones

$$h_n : C_p(\bar{\Delta}[r]) \otimes C_{n-p}(G(\bar{\Delta}[r]) \times \Delta[s]) \longrightarrow (C(\bar{\Delta}[r]) \otimes C(G(\bar{\Delta}[r]) \times \Delta[s]))_{n+1}$$

definidas por $h_n(a \otimes b) = (1 \otimes g)_{n+1} H_n(1 \otimes f_{n-p})(a \otimes b) + (1 \otimes \bar{h}_{n-p})(a \otimes b)$, dan una homotopía de contracción del complejo de cadenas $C(\bar{\Delta}[r]) \otimes_t C(G(\bar{\Delta}[r]) \times \Delta[s])$.

3.- El caso general.

En este párrafo obtenemos, utilizando la técnica de modelos acíclicos, el principal resultado (teorema 15) sobre la computabilidad de la homología efectiva de los espacios de lazos.

Recordar que Δ_s denota el único s-símplice no degenerado del s-símplice estandar $\Delta[s]$, que e_s denota el elemento neutro en $G_s(K)$ (donde K es un conjunto simplicial reducido) y que si x es un s-símplice de un conjunto simplicial (reducido), \bar{x} denota el único morfismo simplicial de $\Delta[s]$ ($\bar{\Delta}[s]$, respectivamente) en K que envía Δ_s ($\bar{\Delta}_s$, respectivamente) a x . En este párrafo $H(\)$ representa el funtor de homología en el sentido habitual.

Exponemos en primer lugar el método de modelos acíclicos, introducido por Eilenberg y Mac Lane [E-ML], tal como aparece en el párrafo 28 de [M].

Definiciones 1.- Sea \mathcal{A} una categoría y \mathfrak{M} un conjunto de objetos de \mathcal{A} , llamados modelos. Recordar que \mathfrak{C} es la categoría de los complejos de cadenas y sea \mathfrak{B} la de los \mathbb{Z} -módulos libres. Sea $A : \mathcal{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ un funtor covariante. Llamamos

$$X(K) = \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} (\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M \times K) \times A^{\mathbb{Z}}(M)),$$

donde K es un objeto de \mathcal{A} y $A^{\mathbb{Z}}(M)$ representa un conjunto de generadores de $A(M)$. Definimos $\tilde{A}(K)$ como el \mathbb{Z} -módulo libre generado por $X(K)$. Entonces $\tilde{A} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ es un funtor covariante. Definimos una transformación natural de funtores $\lambda : \tilde{A} \longrightarrow A$, por $\lambda(K)(\mu, a) = A(\mu)(a)$, donde $\mu \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M \times K)$ y $a \in A^{\mathbb{Z}}(M)$.

Decimos que $A : \mathcal{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ es representable si existe una transformación natural $\xi : A \longrightarrow \tilde{A}$ tal que $\lambda\xi = 1$, es decir: $\lambda\xi$ es la transformación natural identidad. Diremos que ξ es una representación de A .

Si tenemos un funtor $A : \mathcal{A} \longrightarrow \mathfrak{C}$, escribiremos $A_n : \mathcal{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ para denotar el funtor definido por $A_n(K) = [A(K)]_n$. Entonces, $d_n : A_n \longrightarrow A_{n-1}$ definido por $d_n(K) = d_n^{A(K)}$ es una transformación natural.

Como caso particular del teorema 28.3 de [M], encontramos:

Proposición 2.- Sea $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ un funtor covariante. Si se tienen dos transformaciones naturales $\tilde{h}_0 : F_0 \longrightarrow F_1$, $\tilde{h}_1 : F_1 \longrightarrow F_2$ que verifican $\tilde{h}_0 d_1 + d_2 \tilde{h}_1 = 1$ y además F_n es representable para todo n y $H_n(F(M)) = 0$ para todo $n > 0$ y $M \in \mathfrak{M}$; entonces existe una homotopía de contracción natural \tilde{h} tal que $\tilde{h}|_{F_i} = \tilde{h}_i$, $i = 0, 1$.

Demostración.- Vamos a definir \tilde{h} por inducción: suponemos \tilde{h}_i definido para todo $i < n$, $n > 1$. Dado $a \in F(M)$, se tiene que $d_n(1 - \tilde{h}_{n-1} d_n)(a) = d_n(a) - d_n \tilde{h}_{n-1} d_n(a) = d_n(a) - (1 - \tilde{h}_{n-2} d_{n-1}) d_n(a) = 0$. Por tanto $(1 - \tilde{h}_{n-1} d_n)(a)$ es un ciclo y puesto que $H_n(F(M)) = 0$, podemos elegir $c \in F_{n+1}(M)$ tal que $d_{n+1}(c) = (1 - \tilde{h}_{n-1} d_n)(a)$.

Definimos una transformación natural $\eta : \tilde{F}_n \longrightarrow F_{n+1}$ por $\eta(K)(\mu, a) = F_{n+1}(\mu)(c)$, donde $\mu \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M \times K)$ y $a \in A^S(M)$. Se tiene: $d_{n+1} \eta(K)(\mu, a) = d_{n+1} F_{n+1}(\mu)(c) = F_n(\mu) d_{n+1}(c) = F_n(\mu)(1 - \tilde{h}_{n-1} d_n)(a)$. Pero por la naturalidad de \tilde{h}_{n-1} y d_n , los dos operadores en la última expresión conmutan; así podemos continuar la cadena de igualdades y escribir: $d_{n+1} \eta(K)(\mu, a) = (1 - \tilde{h}_{n-1} d_n) F_n(\mu)(a) = (1 - \tilde{h}_{n-1} d_n) \lambda(K)(\mu, a)$. Por tanto, $d_{n+1} \eta = (1 - \tilde{h}_{n-1} d_n) \lambda$. Elegimos $\xi : F_n \longrightarrow \tilde{F}_n$ una representación de F_n y definimos $\tilde{h} = \eta \xi : F_n \longrightarrow F_{n+1}$. Así: $d_{n+1} \tilde{h}_n = d_{n+1} \eta \xi = (1 - \tilde{h}_{n-1} d_n) \lambda \xi = 1 - \tilde{h}_{n-1} d_n$.

Observación 3.- Si se tiene una definición explícita para ξ y se conocen homotopías de contracción para $F(M)$, entonces se puede encontrar explícitamente una homotopía de contracción para $F(K)$. Es en estas condiciones como vamos a aplicar el anterior resultado.

Definiciones 4.- Si G y G' son grupos simpliciales con acciones sobre F , F' respectivamente y $\gamma : G \longrightarrow G'$ es un homomorfismo simplicial, un morfismo simplicial $\alpha : F \longrightarrow F'$ se dirá γ -equivariante si $\alpha(g.f) = \gamma(g)\alpha(f)$, para todo $g \in G_q$, $f \in F_q$.

Sean $F \times_{\tau} B$, $F' \times_{\tau'} B'$ dos fibrados simpliciales de grupos G , G' respectivamente. Sea $\gamma : G \rightarrow G'$ un homomorfismo simplicial, $\alpha : F \rightarrow F'$ un morfismo γ -equivariante, $\beta : B \rightarrow B'$ un morfismo simplicial y $\psi : B \rightarrow G'$ una función. Si se cumple que $\gamma\tau = \tau'\beta$ y que la aplicación

$$\begin{aligned} F \times_{\tau} B &\longrightarrow F' \times_{\tau'} B' \\ (f, b) &\longrightarrow (\psi(b)\alpha(f), \beta(b)) \end{aligned}$$

es un morfismo simplicial, la denominaremos morfismo γ -especial.

Observación 5.- Un morfismo γ -especial será denotado (γ, α, β) . Las siguientes propiedades serán utilizadas más adelante:

$$(P1) \quad \alpha(g.f) = \gamma(g)\alpha(f).$$

$$(P2) \quad \gamma\tau(b) = \tau'\beta(b).$$

Sea \mathfrak{B} la categoría cuyos objetos son fibrados simpliciales con espacio base un conjunto simplicial reducido y cuyos morfismos son morfismos γ -especiales, para todo homomorfismo simplicial γ . May (párrafo 31, [M]) ha aplicado el método de los modelos acíclicos sobre \mathfrak{B} para encontrar una demostración del teorema de Brown (ver nuestro teorema 2.2.5). Ahora, vamos a trabajar con una subcategoría de \mathfrak{B} y vamos a utilizar todas las propiedades que May demuestra para \mathfrak{B} .

La categoría \mathfrak{A} es una subcategoría de \mathfrak{B} cuyos objetos son

$$M^{r,s} = (G(\bar{\Delta}[r]) \times \Delta[s]) \times_{\tau} \bar{\Delta}[r]$$

(definidos en el párrafo anterior), para todo $r, s \in \mathbb{N}$, que serán nuestros modelos, y $G(K) \times_{\tau} K$, donde K es un conjunto simplicial reducido.

Lema 6.- La aplicación

$$\begin{aligned} F &: \mathfrak{A} &\longrightarrow &\mathfrak{C} \\ M^{r,s} &\longrightarrow &C(\bar{\Delta}[r]) \otimes_1 C(G(\bar{\Delta}[r]) \times \Delta[s]) \\ G(K) \times_{\tau} K &\longrightarrow &C(K) \otimes_1 C(G(K)) \end{aligned}$$

define un functor. En particular, $d_n : F_n \rightarrow F_{n-1}$ definidas por $d_n(M^{r,s}) = d_{t,n}$, $d_n(G(K) \times_{\tau} K) = d_{t,n}$ son transformaciones naturales.

Demostración.- Se tiene que F es la restricción a \mathcal{A} del funtor $B_T : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C}$ definido por May en la página 144 de [M]. Se tiene que si (γ, α, β) es un morfismo γ -especial, entonces $F(\gamma, \alpha, \beta) = \beta_* \otimes \alpha_*$ es un morfismo de cadenas.

Lema 7.- Dados $a \in G_s(\bar{\Delta}[m])$, $b \in \Delta_s[l]$, $c \in \bar{\Delta}_l[m]$, $x \in G_s(K)$, $y \in K_r$, definimos:

$$\begin{aligned} \theta(a, b, c) &: M^{r,s} \longrightarrow M^{m,l} \\ ((u, v), w) &\longrightarrow ((G(\bar{c})(u), \bar{a}(v), \bar{b}(v)), \bar{c}(w)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta(x, y) &: M^{r,s} \longrightarrow G(K) \times_{\tau} K \\ ((u, v), w) &\longrightarrow (G(\bar{y})(u), \bar{x}(v), \bar{y}(w)) \end{aligned}$$

Entonces, si $r+s = n$,

$$\xi(M^{r,s})(\alpha_1 \otimes (\alpha_2, \alpha_3)) = (\theta(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1), \bar{\Delta}_r \otimes (e_s, \Delta_s))$$

$$\xi(G(K) \times_{\tau} K)(\beta_1 \otimes \beta_2) = (\theta(\beta_2, \beta_1), \bar{\Delta}_r \otimes (e_s, \Delta_s))$$

definen una representación $\xi : F_n \longrightarrow \tilde{F}_n$ de F_n .

Demostración.- Es un caso particular de la representación encontrada por May en la página 145 de [M].

Observaciones 8.

1) En el enunciado anterior, el primer tipo de morfismos son $G(\bar{c})$ -especiales y el segundo son $G(\bar{y})$ -especiales.

2) Sean $a \in \bar{\Delta}_r[m]$, $b \in G_s(\bar{\Delta}[m])$, $c \in \Delta_s[l]$, $x \in K_r$, $y \in G_s(K)$. Si $r+s = n$ y denotamos $\Theta(a, b, c) = F_n(\theta(b, c, a))$, $\Theta(x, y) = F_n(\theta(y, x))$, tenemos que Θ está explícitamente definido por:

$$\begin{aligned} \Theta(a, b, c) &: C(\bar{\Delta}[r]) \otimes_{\iota} C(G(\bar{\Delta}[r]) \times \Delta[s]) \longrightarrow C(\bar{\Delta}[m]) \otimes_{\iota} C(G(\bar{\Delta}[m]) \times \Delta[l]) \\ u \otimes (v, w) &\longrightarrow \bar{a}(u) \otimes (G(\bar{a})(v), \bar{b}(w), \bar{c}(w)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta(x, y) &: C(\bar{\Delta}[r]) \otimes_{\iota} C(G(\bar{\Delta}[r]) \times \Delta[s]) \longrightarrow C(K) \otimes_{\iota} C(G(K)) \\ u \otimes (v, w) &\longrightarrow \bar{x}(u) \otimes (G(\bar{x})(v), \bar{y}(w)) \end{aligned}$$

Se tiene evidentemente que:

$$\mathfrak{F}(a,b,c)(\bar{\Delta}_r \otimes (e_s, \Delta_s)) = a \otimes (b,c),$$

$$\mathfrak{F}(x,y)(\bar{\Delta}_r \otimes (e_s, \Delta_s)) = x \otimes y.$$

Notaciones 9.- A partir de aquí, $L \times_\tau B$ denotará un objeto de \mathcal{A} , es decir $L \times_\tau B = M^{r,s}$ o $L \times_\tau B = G(K) \times_\tau K$. Además x_n denotará un elemento de B_n^* y w_n un elemento de L_n^* , es decir $w_n = y_n$ o $w_n = (y_n, z_n)$, donde $y_n \in G_n^*(B)$ y $z_n \in \Delta_n^*[s]$. Observar que, por definición de la acción de $G(\bar{\Delta}[r])$ sobre $G(\bar{\Delta}[r]) \times \Delta[s]$, tenemos $\bar{y}_n w_n = (\bar{y}_n y_n, z_n)$ si $L \times_\tau B = M^{r,s}$. La diferencial d_1 sobre $F(L \times_\tau B)$ será denotada \tilde{d} .

Lema 10.

(a) Si definimos $[x_1, w_0] = x_0 \otimes \tau(x_1) w_0 - x_0 \otimes w_0$, se tiene que la familia $\{[x_1, w_0]\}$ es una base de $F_0(L \times_\tau B)$.

(b) Si definimos $[x_2, w_1] = x_0 \otimes \tau(x_2) w_1 - x_0 \otimes w_1$, se tiene que la familia $\{[x_2, w_1]\}$ genera $C_0(B) \otimes C_1(L)$.

Demostración.

(a) Es análoga a la que May da en la página 120 de [M].

(b) Se tiene que:

$$x_0 \otimes \tau(x_2) w_1 = x_0 \otimes w_1 + [x_2, w_1],$$

$$x_0 \otimes \tau(x_2)^{-1} w_1 = x_0 \otimes w_1 - [x_2, \tau(x_2)^{-1} w_1].$$

Por inducción sobre la longitud de las palabras en $G_1(B)$ se deduce el resultado.

Lema 11.

$$(L1) \tilde{\alpha}_1(x_1 \circledast w_0) = [x_1, \tau(x_1)]^{-1} w_0.$$

$$(L2) \tilde{\alpha}_1(x_0 \circledast w_1) = x_0 \circledast \partial_0 w_1 - x_0 \circledast \partial_1 w_1.$$

$$(L3) \tilde{\alpha}_2(x_2 \circledast w_0) = \partial_0 x_2 \circledast w_0 - \partial_1 x_2 \circledast w_0 + \partial_2 x_2 \circledast \tau(\partial_0 x_2)^{-1} w_0 - \\ - x_0 \circledast \tau(x_2)^{-1} \cdot \bar{s}_0 \tau(\partial_0 x_2)^{-1} \cdot s_0 w_0.$$

$$(L4) \tilde{\alpha}_2(x_1 \circledast w_1) = -x_1 \circledast \partial_0 w_1 + x_1 \circledast \partial_1 w_1 + x_0 \circledast w_1 - x_0 \circledast \bar{s}_0 \tau(x_1)^{-1} \cdot w_1.$$

$$(L5) \tilde{\alpha}_2(x_0 \circledast w_2) = x_0 \circledast \partial_0 w_2 - x_0 \circledast \partial_1 w_2 + x_0 \circledast \partial_2 w_2.$$

$$(L6) \tilde{\alpha}_1[x_2, w_1] = -[\partial_0 x_2, \bar{\partial}_0 \tau(x_2) \cdot \partial_0 w_1] + [\partial_1 x_2, \partial_0 w_1] - [\partial_2 x_2, \partial_1 w_1].$$

Demostración.- Se tiene que (L1)-(L5) se deducen de las definiciones de d_i (en la proposición 1.4 y en el párrafo 2) y t_1, t_2 (en la observación 1.8). Además:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1[x_2, w_1] &= \tilde{\alpha}_1(x_0 \circledast \tau(x_2) w_1) - \tilde{\alpha}_1(x_0 \circledast w_1) = \\ &\stackrel{(L2)}{=} x_0 \circledast \bar{\partial}_0 \tau(x_2) \cdot \partial_0 w_1 - x_0 \circledast \bar{\partial}_1 \tau(x_2) \cdot \partial_1 w_1 - x_0 \circledast \partial_0 w_1 + x_0 \circledast \partial_1 w_1 = \\ &= x_0 \circledast \tau(\partial_0 x_2)^{-1} \tau(\partial_1 x_2) \partial_0 w_1 - x_0 \circledast \partial_0 w_1 - x_0 \circledast \tau(\partial_2 x_2) \partial_1 w_1 + \\ &+ x_0 \circledast \partial_1 w_1 = -[\partial_0 x_2, \bar{\partial}_0 \tau(x_2) \cdot \partial_0 w_1] + x_0 \circledast \tau(\partial_1 x_2) \partial_0 w_1 - \\ &- x_0 \circledast \partial_0 w_1 - [\partial_2 x_2, \partial_1 w_1] = -[\partial_0 x_2, \bar{\partial}_0 \tau(x_2) \cdot \partial_0 w_1] + \\ &+ [\partial_1 x_2, \partial_0 w_1] - [\partial_2 x_2, \partial_1 w_1]. \end{aligned}$$

Proposición 12.- Las aplicaciones $\tilde{\hbar}_0 : F_0 \longrightarrow F_1$, $\tilde{\hbar}_1 : F_1 \longrightarrow F_2$ definidas por:

$$\tilde{\hbar}_0[x_1, w_0] = x_1 \circledast \tau(x_1) w_0,$$

$$\tilde{\hbar}_1(x_1 \circledast w_0) = 0,$$

$$\begin{aligned} \tilde{\hbar}_1[x_2, w_1] &= x_2 \circledast \tau(\partial_1 x_2) \partial_0 w_1 + \partial_2 x_2 \circledast \tau(x_2) w_1 + \\ &+ x_0 \circledast \bar{s}_0 \tau(x_2)^{-1} \cdot \bar{s}_1 \tau(x_2) \cdot s_1 w_1, \end{aligned}$$

verifican: $\tilde{\hbar}_0 \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 \tilde{\hbar}_1 = 1$.

Demostración.

$$(i) (\tilde{h}_0 \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 \tilde{h}_1)(x_1 \circ w_0) = \tilde{h}_0 \tilde{\alpha}_1(x_1 \circ w_0) \stackrel{(L1)}{=} \tilde{h}_0[x_1, \tau(x_1)^{-1} w_0] = x_1 \circ w_0.$$

(ii) Por (L6) tenemos:

$$(a) \tilde{h}_0 \tilde{\alpha}_1[x_2, w_1] = -\partial_0 x_2 \circ \tau(\partial_1 x_2) \cdot \partial_0 w_1 + \partial_1 x_2 \circ \tau(\partial_1 x_2) \partial_0 w_1 - \\ - \partial_2 x_2 \circ \bar{\partial}_1 \tau(x_2) \cdot \partial_1 w_1.$$

Por (L3) tenemos:

$$(b) \tilde{\alpha}_2(x_2 \circ \tau(\partial_1 x_2) \cdot \partial_0 w_1) = \partial_0 x_2 \circ \tau(\partial_1 x_2) \partial_0 w_1 - \partial_1 x_2 \circ \tau(\partial_1 x_2) \partial_0 w_1 + \\ + \partial_2 x_2 \circ \bar{\partial}_0 \tau(x_2) \cdot \partial_0 w_1 - x_0 \circ \tau(x_2)^{-1} \cdot \bar{s}_0 \bar{\partial}_0 \tau(x_2) \cdot s_0 \partial_0 w_1.$$

Por (L4) tenemos:

$$(c) \tilde{\alpha}_2(\partial_2 x_2 \circ \tau(x_2) \cdot w_1) = -\partial_2 x_2 \circ \bar{\partial}_0 \tau(x_2) \cdot \partial_0 w_1 + \\ + \partial_2 x_2 \circ \bar{\partial}_1 \tau(x_2) \cdot \partial_1 w_1 + x_0 \circ \tau(x_2) \cdot w_1 + \\ + x_0 \circ (\bar{s}_0 \bar{\partial}_1 \tau(x_2)^{-1}) \cdot \tau(x_2) \cdot w_1.$$

Por (L5) tenemos:

$$(d) \tilde{\alpha}_2(x_0 \circ \bar{s}_0 \tau(x_2)^{-1} \cdot \bar{s}_1 \tau(x_2) \cdot s_1 w_1) = x_0 \circ \tau(x_2)^{-1} \bar{s}_0 \bar{\partial}_0 \tau(x_2) s_0 \partial_0 w_1 - \\ - x_0 \circ w_1 + x_0 \circ (\bar{s}_0 \bar{\partial}_1 \tau(x_2)^{-1}) \cdot \tau(x_2) \cdot w_1.$$

Si reunimos (b), (c) y (d), se tiene:

$$\tilde{\alpha}_2 \tilde{h}_1[x_2, w_1] = \partial_0 x_2 \circ \tau(\partial_1 x_2) \cdot \partial_0 w_1 - \partial_1 x_2 \circ \tau(\partial_1 x_2) \cdot \partial_0 w_1 + \\ + \partial_2 x_2 \circ \bar{\partial}_1 \tau(x_2) \cdot \partial_1 w_1 + x_0 \circ \tau(x_2) \cdot w_1 - x_0 \circ w_1.$$

Teniendo en cuenta (a), encontramos:

$$(\tilde{h}_0 \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 \tilde{h}_1)[x_2, w_1] = x_0 \circ \tau(x_2) \cdot w_1 - x_0 \circ w_1 = [x_2, w_1].$$

Proposición 13.- Las aplicaciones \tilde{h}_0, \tilde{h}_1 de la proposición anterior son transformaciones naturales.

Demostración.- Sea $(\gamma, \alpha, \beta) : L \times_{\tau} B \longrightarrow L' \times_{\tau'} B'$ un morfismo de nuestra categoría \mathcal{A} . Se tiene $F(\gamma, \alpha, \beta) = \beta_* \circ \alpha_*$. Vamos a utilizar aquí las propiedades (P1), (P2) de la observación 5. Tenemos:

$$\begin{aligned} (\beta_* \circ \alpha_*)[x_1, w_0] &= (\beta_* \circ \alpha_*)(x_0 \circ \tau(x_1)w_0) - (\beta_* \circ \alpha_*)(x_0 \circ w_0) = \\ &= x_0 \circ \alpha(\tau(x_1)w_0) - x_0 \circ \alpha(w_0) \stackrel{(P1)}{=} x_0 \circ \gamma\tau(x_1)\alpha(w_0) - x_0 \circ \alpha(w_0) = \\ &\stackrel{(P2)}{=} x_0 \circ \tau'\beta(x_1).\alpha(w_0) - x_0 \circ \alpha(w_0) = [\beta(x_1), \alpha(w_0)]. \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto : } \tilde{h}_0(\beta_* \circ \alpha_*)[x_1, w_0] = \tilde{h}_0[\beta(x_1), \alpha(w_0)] = \beta(x_1) \circ \tau'\beta(x_1).\alpha(w_0).$$

Por otra parte, se tiene:

$$\begin{aligned} (\beta_* \circ \alpha_*)\tilde{h}_0[x_1, w_0] &= (\beta_* \circ \alpha_*)(x_1 \circ \tau(x_1).w_0) = \beta(x_1) \circ \alpha(\tau(x_1).w_0) = \\ &\stackrel{(P1)}{=} \beta(x_1) \circ \gamma\tau(x_1).\alpha(w_0) \stackrel{(P2)}{=} \beta(x_1) \circ \tau'\beta(x_1).\alpha(w_0). \end{aligned}$$

Evidentemente se tiene: $\tilde{h}_1(\beta_* \circ \alpha_*)(x_1 \circ w_0) = 0 = (\beta_* \circ \alpha_*)\tilde{h}_1(x_1 \circ w_0)$ y se verifica también que $\tilde{h}_1(\beta_* \circ \alpha_*)[x_2, w_0] = (\beta_* \circ \alpha_*)\tilde{h}_1[x_2, w_0]$.

Teorema 14.- Sea $h = h(M^{r,s})$ la homotopía de contracción encontrada al final del párrafo 2 y sean \tilde{h}_0, \tilde{h}_1 como en la proposición 12. Entonces, definimos por inducción ($n \geq 2$):

$$\begin{aligned} \tilde{h}_n &: F_n(M^{m,l}) \longrightarrow F_{n+1}(M^{m,l}) \\ &\quad a \circ (b,c) \longrightarrow \mathcal{G}(a,b,c)h_n(1 - \tilde{h}_{n-1}d_l)(\bar{\Delta}_r \circ (e_s, \Delta_s)) \\ \tilde{h}_n &: F_n(G(K) \times_{\tau} K) \longrightarrow F_{n+1}(G(K) \times_{\tau} K) \\ &\quad x \circ y \longrightarrow \mathcal{G}(x,y)h_n(1 - \tilde{h}_{n-1}d_l)(\bar{\Delta}_r \circ (e_s, \Delta_s)) \end{aligned}$$

donde K es un conjunto simplicial reducido, $a \in \bar{\Delta}_r[m]$, $b \in G_s(\bar{\Delta}[m])$, $c \in \Delta_s[l]$, $x \in K_r$, $y \in G_s(K)$ y $r+s = n$.

Entonces, se tiene que \tilde{h}_n definen una homotopía de contracción de $F(G(K) \times_{\tau} K) = C(K) \circledast_{\tau} C(G(K))$.

Demostración.- Es una aplicación de la proposición 2, puesto que en este caso:

$$\begin{aligned} \eta\xi(x \circ y) &= \eta(\theta(y,x), \bar{\Delta}_r \circ (e_s, \Delta_s)) = \\ &= F_{n+1}(\theta(y,x))(h_n(1 - \bar{h}_{n-1}d_t)(\bar{\Delta}_r \circ (e_s, \Delta_s))) = \\ &= \bar{\theta}(x,y)h_n(1 - \bar{h}_{n-1}d_t)(\bar{\Delta}_r \circ (e_s, \Delta_s)), \end{aligned}$$

por la observación 8.2.

TEOREMA 15.- Si K es un conjunto simplicial reducido, sin 1-símplices no degenerados y con homología efectiva fuerte, entonces la versión simplicial del espacio de lazos de K tiene homología efectiva que es finitamente calculable.

Demostración.- Por la propiedad 0.1.12 se tiene que conocemos la homología efectiva fuerte de $C(K) \circledast C(G(K))$. Si a este complejo de cadenas le damos estructura de $C(K)$ -comódulo a izquierda con coproducto externo $\Phi_K \circledast 1$, se tiene (teorema 1.4.4) que $CE^{C(K)}(\mathbb{Z}, C(K) \circledast C(G(K)))$ existe y es finitamente calculable. Ahora se tiene que el complejo utilizado para calcular este cotor efectivo (es decir la correspondiente construcción Cobar) es admisible (teorema 2.2.4) y por tanto (teorema 2.2.3) tenemos una equivalencia de homotopía entre su totalización y $C(G(K))$, de donde se deduce el resultado.

REFERENCIAS.

[A] J. F. Adams, "On the cobar construction", Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A., 42 (1956), 409-412.

[A-H-U] A. V. Aho, J. E. Hopcroft, J. D. Ullman, "The design and analysis of computer algorithms", Addison-Wesley, 1974.

[B] E. H. Brown, "Twisted tensor products I", Ann. of Math., 69 (1959), 223-246.

[B2] E. H. Brown, "Finite computability of Postnikov complexes", Ann. of Math., 65, nº 1 (1957), 1-20.

[C] H. Cartan, "Algèbres d'Eilenberg-Mac Lane et homotopie", Sémin. Ecole Normale Sup. Paris, 1955.

[Ch] A. Church, "The calculi of lambda-conversion", Ann. of Math. Studies 6, Princeton University Press, 1941.

[D] A. Dold, "Lectures on Algebraic Topology", Springer, 1972.

[E-M] S. Eilenberg, J. C. Moore, "Homology and fibrations I. Coalgebras, cotensor products and its derived functors", Comm. Math. Helv., 40 (1966), 199-236.

[E-ML] S. Eilenberg, S. Mac Lane, "Acyclic models", Amer. J. Math., 75 (1953), 189-199.

[E-ML2] S. Eilenberg, S. Mac Lane, "On the groups $H(\Pi, n)$ ", I, II, III, Ann. of Math., 58 (1953), 55-106; 60 (1954), 49-139; 60 (1954), 513-557.

[E-Z] S. Eilenberg, J. A. Zilber, "Semi-simplicial complexes and singular homology", Ann. of Math., 51 (1950) 499-513.

[Ho] H. Hopf, "Über die abbildungen der dreidimensionalen sphäre auf die kugelfläche", Math. Ann., 104 (1931), 637-665.

[Hu] W. Hurewicz, "Beiträge zur Topologie der deformationen", Akad. van Wetensch., 38 (1935), 112-119, 521-588; 39 (1936), 117-126, 215-224.

- [H-S] P. J. Hilton, U. Stammbach, "A course in Homological Algebra", Springer, 1971.
- [K] J. L. Koszul, "Sur les opérateurs de dérivations dans un anneau", C. R. Acad. Sc. Paris, 222 (1946), 1419-1422.
- [L] S. Lefschetz, "Topology", A.M.S. Coll. Publ., vol. 12, 1930.
- [Li] A. Liulevicius, "Coalgebras, resolutions and the computer", Math. Algorithms, 1 (1966), 4-12.
- [M] J. P. May, "Simplicial objects in Algebraic Topology", Van Nostrand, 1967.
- [MC] J. McCarthy, "A basis for a mathematical theory of computation", en "Computer Programming and Formal Systems", Van Nostrand, 1967.
- [ML] S. Mac Lane, "Homology", Springer, 1967.
- [M-ML] M. E. Mahowald, M. D. Mac Laren, "A machine calculation of a spectral sequence", Proc. Symp. Applied Math., 19 (1967) 117-124.
- [P] H. Poincaré, "Analysis Situs", J. Ecole Polytechnique, Paris, 2, vol. 1 (1885), 1-23.
- [Pi] T. Pinkerton, "An algorithm for the automatic computation of integral homology groups", Math. Algorithms, 1 (1966), 27-44.
- [R1] D. C. Ravenel, "Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres", Academic Press, 1986.
- [R2] D. C. Ravenel, "Homotopy groups of spheres on a small computer". Preprint.
- [Ru] J. J. Rubio, "Codage fonctionnel des ensembles simpliciaux infinis: les espaces de lacets", Actas III Seminario de Topología, Jaca, 1987.
- [R-S] J. J. Rubio, F. Sergeraert, "Introduction à l'homologie effective". Por aparecer.
- [S] W. Shih, "Homologie des espaces fibrés", Publ. Math. I.H.E.S., 13, 1962.
- [Se] J. P. Serre, "Homologie singulière des espaces fibrés", Ann. of Math., 54, n° 3 (1951), 425-505.

[Ser1] F. Sergeraert, "Homologie effective I, II", C. R. Acad. Sc. Paris, 304, n° 11 (1987), 279-282; 304, n° 12 (1987), 319-321.

[Ser2] F. Sergeraert, "The computability problem in Algebraic Topology". Preprint.

[Ser3] F. Sergeraert, "Functional coding and effective homology", Congress Computational Geometry and Topology and Computation in Teaching Mathematics, Sevilla, 1987.

[Sm1] L. Smith, "Homological Algebra and the Eilenberg-Moore spectral sequence", Trans. Amer. Math. Soc., 129 (1967), 58-93.

[Sm2] L. Smith, "Lectures on the Eilenberg-Moore spectral sequence", Lecture notes in Math., n° 134, Springer, 1970.

[Sm3] L. Smith, "On the Eilenberg-Moore spectral sequence", Proc. Simp. Pure Math., A.M.S., vol. XXII (1971), 231-246.

[St] G. L. Steele, "Common LISP. The language", Digital Press, 1984.

[T] M. C. Tangora, "Computing the homology of the lambda algebra", Memoirs A.M.S., vol. 58, n° 337, 1985.

[V] O. Veblen, "Analysis Situs", A.M.S. Coll. Publ., vol. 5, 1931.

SECCION 1

1. - JUAN C CANDEAL, JOSE E. GALE. ON SOME PROPERTIES OF A_* , L^1/H_0^1 & BANACH ALGEBRAS. 1988.
2. - OSCAR BLASCO, ALEKSANDER PELCZYNSKI. THEOREMS FO HARDY AND PALEY FOR VECTOR VALUED ANALYTIC FUNCTIONS AND RELATED CLASSES OF BANACH SPACES. 1988.
3. - M. GONZALEZ, V. M. ONIEVA. LIFTING RESULTS FOR SEQUENCES IN BANACH SPACES. 1988.
4. - J.I. EXTREMIANA, L.J. HERNANDEZ, M.T. RIVAS. UNA (CO)HOMOLOGIA PROPIA PARA ESPACIOS CON VARIOS FINALES. 1988.
5. - J. I. EXTREMIANA, L. J. HERNANDEZ, M. T. RIVAS. PROPER CW-COMPLEXES: AN ADEQUATE CATEGORY FOR THE STUDY OF PROPER HOMOTOPY. 1988.
6. - M. A. DE PRADA VICENTE, M. MACHO STADLER. T-PREFILTER THEORY. 1988.
7. - M. MACHO STADLER, M. A. DE PRADA VICENTE. FUZZY T-NET THEORY. 1988.
8. - A. MARQUEZ PEREZ. CALCULATIONS ON UP-HOMOTOPY GROUPS. 1988.
9. - A. MARQUEZ PEREZ. UNIFORMLY CONTINUOUS AND PROPER HOMOTOPY GROUPS. 1988.
10. - JULIO LAFUENTE. ON THE SECOND LOEWY TERM PROJECTIVES OF A GROUP ALGEBRA. 1988.
11. - JESUS A LALIENA. DUALISMOS DE ALGEBRAS ALTERNATIVAS. 1988.
12. - JOSE J. GUADALUPE, MARIO PEREZ and JUAN L. VARONA. WEAK BEHAVIOUR OF FOURIER JACOBI SERIES. 1988.
13. - ALBERTO MARQUEZ PEREZ. UP-COVERING SPACES. 1988.
14. - M. GONZALEZ, V.M. ONIEVA. SEMIFREDHOLM OPERATORS AND SEMIGROUPS ASSOCIATED WITH SOME CLASSICAL OPERATOR IDEALS II. 1988.
15. - M. GONZALEZ, V.M. ONIEVA. IDEAL FUNCTIONS AND OPERATOR IDEALS. 1988.
16. - M. GONZALEZ, V.M. ONIEVA. ON FACTORIZATION OF OPERATORS. 1988.
17. - M. GONZALEZ, V.M. ONIEVA. DUALITY AND FACTORIZATION OF OPERATOR IDEALS. 1988.
18. - O. BLASCO. SPACES OF ANALYTIC FUNCTIONS AND APPLICATIONS. 1988.
19. - M. T. LOZANO, H. R. MORTON. PAIRS OF CLOSED 3-BRAIDS WITH THE SAME ALEXANDER POLYNOMIAL. 1988.
20. - M. GONZALEZ, V. M. ONIEVA. UNCONDITIONALLY CONVERGING OPERATORS AND FREDHOLM THEORY. 1988.
21. - M. GONZALEZ, V. M. ONIEVA. SEMIEMBEDDINGS AND SEMI-FREDHOLM OPERATORS. 1988.
22. - M. GONZALEZ, V. M. ONIEVA. CHARACTERIZATIONS OF TAUBERIAN OPERATORS AND OTHER SEMIGROUPS OF OPERATORS. 1988.

SECCION 2

- 1.- GUSTAVO OCHOA. LOS GRUPOS DE AUTOMORFISMOS DE LOS ANILLOS DE BURNSIDE DE LOS GRUPOS FINITOS HAMILTONIANOS Y DIEDRICOS. 1984.
- 2.- ALBERTO J. ABAD. ESTUDIO DE SISTEMAS ESTELARES MULTIPLES. 1984.
- 3.- M. PILAR GALLEG0. CLASES DE GRUPOS FINITOS RESOLUBLES DEFINIDOS POR INYECTORES. 1984.
- 4.- ALBERTO ELDUQUE. ESTRUCTURA DE UN ALGEBRA DE MALCEV A TRAVES DE SU RETICULO DE SUBALGEBRAS. 1984.
- 5.- CARMEN SAFONT. SOBRE CUBIERTAS RAMIFICADAS. 1984.
- 6.- MIGUEL PAREDES HERNANDEZ. PROLONGACION DE VALORES ABSOLUTOS EN ANILLOS DE DIVISION. 1984.
- 7.- LUIS A. IBORT. ESTRUCTURA GEOMETRICA DE LOS SISTEMAS CON SIMETRIA EN MECANICA CLASICA Y TEORIA CLASICA DE CAMPOS. 1985
- 8.- M. A. TRIANA. ESPACIOS F-NORMADOS DE FUNCIONES Y SUCESSIONES VECTORIALES. 1985
- 9.- J. M. MORENO JIMENEZ. MODELOS AUTORREGRESIVOS EN LA ESTIMACION DE SERIES TEMPORALES ESTACIONARIAS. 1985.
- 10.-E. INDURAIN. SOBRE GEOMETRIA DE SUCESSIONES EN ESPACIOS DE BANACH POSICION UNIDAD. 1985.
- 11.-F. GARCIA. GEOMETRIA DE LOS HIPERPLANOS ASOCIADOS A UNA SUCESSION EN UN ESPACIO DE BANACH, APLICACION AL PROBLEMA DE LA SIMPLIFICACION LINEAL. 1985
- 12.-H* J. CHASCO. SUCESSIONES EN LA GEOMETRIA AFIN DEL ESPACIO DE BANACH. 1985.
13. - ANA FERNANDEZ-FERREIROS. ESTUDIO ANALITICO DE LIBRACIONES LUNARES. 1985.
14. - OSCAR BLASCO. ESPACIOS DE HARDY DE FUNCIONES CON VALORES VECTORIALES. 1985.
15. - M.C. MINGUEZ. CALCULO DIFERENCIAL SINTETICO Y SU INTERPRETACION EN MODELOS DE PREHACES. 1985
16. - J.M. PEÑA FERRANDEZ. GRUPOS LOCALMENTE GRADUADOS MINIMALES NO (CC-GRUPOS). 1986
17. - M. TERESA RIVAS. SOBRE INVARIANTES DE HOMOTOPIA PROPIA Y SUS RELACIONES. 1987
18. - J.I. EXTREMIANA. UNA TEORIA DE OBSTRUCCION PARA LA EXTENSION Y CLASIFICACION DE APLICACIONES PROPIAS. 1987.
19. - VICTOR ARENZANA HERNANDEZ. LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS EN ESPAÑA EN EL SIGLO XVIII. LA ESCUELA DE MATEMATICAS DE LA REAL SOCIEDAD ECONOMICA ARAGONESA DE AMIGOS DEL PAIS. 1988.
20. - J. J. RUBIO GARCIA. HOMOLOGIA EFECTIVA Y SUCESSION ESPECTRAL DE EILENBERG-MOORE. 1988.

SECCION 3

- 1.- CLAUDE BREZINSKI. CONVERGENCE ACCELERATION METHODS: THE PAST DECADE.1984.
- 2.- JOSE MARIA MONTESINOS. REVETEMENTS RAMIFIES DE NOEUDS, ESPACES FIBRES DE SEIFERT ET SCINDEMENTS DE HEEGARD. 1984.
- 3.- J. BASTERO. TECNICAS MODERNAS EN LA TEORIA DE LOS ESPACIOS DE BANACH.1985.
- 4.- E. DOMINGUEZ. GEOMETRICAL INTRODUCTION TO BORDISM THEORY. 1985.
- 5.- F. JAVIER RIBERA. LA FORMULACION HAMILTONIANA TRANSFORMACIONES CANONICAS. 1985.
6. - PAUL VER ECKE. LE GROUPOIDE FONDAMENTAL D'UN FEUILLETAGE DE STEFAN. 1986.
7. - E. INDURAIN. SEQUENCES IN BANACH SPACES: SOME PROPERTIES AND APPLICATIONS FROM A GEOMETRICAL POINT OF VIEW. 1986
8. - R. AYALA. A. QUINTERO. CLASIFICACION HOMOTOPICA DE LOS FIBRADOS. 1987.
9. - W.T. VAN EST. FOLIACIONES, ESTRUCTURA COCIENTE Y VARIETADES. 1987.
- 10.- T. PORTER, PROPER HOMOTOPY, PROMOTOPY AND COHERENCE. 1987
11. - JUAN LUIS VARONA MALUMBRES. CONVERGENCIA DE SERIES DE FOURIER RESPECTO DE SISTEMAS ORTOGONALES. 1987
12. - R. AYALA, E. DOMINGUEZ, A. QUINTERO, TOPOLOGIA POLIEDRAL[†]. 1987.
13. - B. GANBOA DE BUEN. COMPLEMENTACION EN ESPACIOS DE BANACH, 1987

SECCION 4

- 1.- J.M. MORENO, A. PEREZ, M.P. LASALA. TEORIA DE GRAFOS EN LA PROGRAMACION Y CONTROL DE PROYECTOS. 1985.
- 2.- MANUEL VAZQUEZ. UNA INTRODUCCION AL LENGUAJE LISP. 1986.
- 3.- M^a JESUS LAPEÑA. CALCULO DE SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES, COMPARACION DE METODOLOGIA REPRESENTACION GRAFICA. 1987

SECCION 5

- 1.- M^a PILAR LASALA. UN JUEGO DE CEROS Y UNOS. 1985
- 2.- M.A. ALVAREZ, R. ARRIBAS, B. GARCIA, M.P. LASALA. RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES POR SIMULACION DE CADENAS DE MARKOFF. 1985.
3. - PASCUAL LLORENTE. MATEMATICAS E INFORMATICA. 1985.
4. - ARACELI MARTIN . ESTRUCTURA FORMAL Y POLITICA DEL PARLAMENTO CATALAN DE 1980. 1985.
5. - A. PEREZ, J. ESCRIBANO, R. ARRIBAS. RESOLUCION DE SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES. 1985.
6. - JESUS CARNICER. SOBRE ENDOMORFISMOS NORMALES Y SUBESPACIOS INVARIANTES. 1986.
7. - J. RIBERA PASCUAL. MODELOS MATEMATICOS. MATEMATICAS APLICADAS. 1986
8. - J. RIBERA PASCUAL. LA FORMULACION LAGRANGIANA DE LA MECANICA. 1986
9. - L.J. HERNANDEZ. HISTORIA DEL QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES. 1986.
10. - E. DOMINGUEZ, ED. CONFERENCIAS EN UNA CLASE DE PRACTICAS. 1987.
11. - J.J. RUBIO. CALCULO CON ORDENADOR DEL GRUPO FUNDAMENTAL DE UN COMPLEJO SIMPLICIAL ABSTRACTO. 1987.
12. - M. PEREZ. CALCULO CON ORDENADOR DE POLINOMIOS ORTOGONALES Y DE SUS RAICES. 1987.
13. - M. SANCHEZ, A. PEREZ, M^a J. DOMENCH. TRANSFORMACION DE PRINCIPIOS DE CONSISTENCIA ALEATORIOS EN DETERMINISTICOS. 1987.
14. - M. C. MINGUEZ. CALCULO INFINITESIMAL SINTETICO. 1987
15. - J.A. ANQUELA, T. CORTES. EL ENIGMA DE LA PERFECCION. 1987.
16. - M. BENITO. PROXIMIDADES Y TOPOLOGIAS. 1987.
17. J.C. CANDEAL, J.J. MARTINEZ, L. RANDEZ. APLICACION DE METODOS NUMERICOS PARA LA RESOLUCION DE ECUACIONES NO LINEALES AL ESTUDIO DEL FENOMENO ECONOMICO CICLOS DE LA TELARAÑA . 1987.

SECCION 6

1. - ISABEL COICOECHEA, JUANA MARIA MARTINEZ, MARIA DEL CARMEN PRADOS, TRABAJANDO CON LOGO LAS FRACCIONES EN EL CICLO SUPERIOR DE E. G. B. 1987