ILUIL, *vol. 27, 2004, 357-399*

La Dialéctica del Cálculo Infinitesimal

LUIS ESPAÑOL GONZÁLEZ
Universidad de La Rioja

«It is my belief that in the next decade and in the next century the technical advances forged by category theorists will be of value to dialectical philosophy, lending precise form with disputable mathematical models to ancient philosophical distinctions such as general vs. particular, objective vs. subjective, being vs. becoming, space vs. quantity, equality vs. difference, quantitative vs. qualitative etc. In turn the explicit attention by mathematicians to such philosophical questions is necessary to achieve the goal of making mathematics (and hence other sciences) more widely learnable and useable. Of course this will require that philosophers learn mathematics and that mathematicians learn philosophy».

[LAWVERE, 1992, p. 16]

RESUMEN

En el último tercio del siglo XX se ha desarrollado una teoría formal del cálculo infinitesimal cuyos modelos son categorías de conjuntos variables con lógica intuicionista. En este trabajo se exponen las ideas básicas de esta teoría y sus modelos a fin de mostrar su conexión con varios casos de pensamiento dialéctico sobre el continuo geométrico.

ABSTRACT

In the last third part of 20th century a formal theory of the infinitesimal calculus has been developed, the models of which are categories of variable sets with an intuitionistic logic. In this work the basic ideas of this theory and its models are explained in order to show their connection with several cases of dialectical thinking about the geometrical continuum.

Palabras clave: Matemáticas, Cálculo diferencial, Categorías y topos, Ciencia e ideología, Dialéctica, F.W. Lawvere, Siglos XIX-XX.

Recibido el 9 de noviembre de 2004 *I.S.S.N. 0210-8615*

Este texto fue escrito en 1998, después de una conferencia sobre el tema pronunciada en 1996. Ambas acciones fueron realizadas a instancias de Mariano Hormigón, como contribución al tema *Ciencia e Ideología* que tanto guió su reflexión y su producción histórica. Ha permanecido inédito desde entonces y ahora aparece sin modificaciones ni actualización bibliográfica. Es un honor que *LLULL* me haya permitido rescatarlo como homenaje póstumo a quien fue su Director durante más de dos décadas.

I. Introducción

La axiomática para el cálculo infinitesimal elaborada por F.W. Lawvere en 1967 surge de una reflexión sobre los infinitesimales, alineada con el materialismo dialéctico, que adquiere expresión matemática a través de la teoría de categorías fundada por Eilemberg y Mac Lane en 1945. Esta forma dialéctica del cálculo infinitesimal ha tenido un veloz desarrollo en las décadas de los setenta y ochenta entre un reducido número de especialistas, aunque hoy presenta escasa actividad. La teoría se conoce como *geometría diferencial sintética* [KOCK, 1981; LAVENDHOMME, 1987] por su condición de teoría formalizada de conceptos de la geometría diferencial, aunque también se ha escrito sobre ella bajo otros títulos [MOERDIJK & REYES, 1991]. Precisamente Kock y Reyes, junto con Wraith, iniciaron en los primeros años setenta el desarrollo matemático de las ideas contenidas en las conferencias pioneras de Lawvere, cuyo objetivo era ofrecer una alternativa fundacional a la dinámica que permitiera, entre otras cosas, manipular en un mismo contexto el espacio como lugar de puntos y como lugar de trayectorias, para lo cual la teoría de las variedades abstractas debía abarcar también a las de dimensión infinita.

El hecho crucial de la teoría es que su axioma básico, a pesar de su evidente soporte en la intuición del continuo, es inconsistente con la lógica clásica, pero la consistencia aparece si la lógica se hace más general eliminando el *tercio excluso*. Los modelos de esta teoría formal son *topos* [JOHNSTONE, 1977], un tipo de categorías —entre ellas la categoría de los conjuntos como ejemplo básico— en las que se puede interpretar la lógica formal intuicionista[1], por lo que pueden verse como universos de *conjuntos variables* muy ricos en propiedades y aplicaciones [BUNGE, 1984]. Hay modelos algebraicos sencillos del axioma básico, pero los adecuados a los fines de la teoría son ciertos topos en los que se puede identificar como subcategoría a la categoría de las variedades diferenciables [DUBUC, 1979; MOERDIJK & REYES, 1991][2].

En la Sección 5 se exponen las ideas básicas de la derivación sintética y de sus modelos. Como los modelos son topos, la Sección 4 contiene lo necesario para una mínima comprensión de este tipo de categorías y la lógica que les acompaña, una vez que la Sección 3 ha introducido las categoría como base para un enfoque dialéctico de las matemáticas. El trabajo se inicia en la Sección 1, dedicada a observaciones sobre matemáticas e ideología que sirven de marco general, mientras que la Sección 2 da un repaso a la historia del cálculo infinitesimal clásico vista como una evolución hasta el análisis no estándar de Robinson, que es un elemento necesario de referencia y contraste respecto a la derivación sintética de Lawvere. La Sección 6 rastrea en la historia de las matemáticas propuestas de tipo dialéctico que no pasaron al ámbito de la ciencia normal y que significan brotes del mismo tipo de ideología matemática que subyace a la formulación de Lawvere. En la Sección 7 se da un repaso a la visión dialéctica del proceso de derivación que dio Marx sin recurrir al uso de límites ni infinitesimales, y su relación con la derivación sintética. La última sección es un epílogo que más parece un texto de introducción, pero quizás se entiende mejor al final, como pasa con casi todos los resúmenes introductorios.

II. Matemáticas e Ideología

El desarrollo de la ciencia puede verse como el resultado de una compleja alianza entre príncipes y sabios en la que los portadores del conocimiento científico, integrados hoy en comunidades científicas, viven en mejor o peor armonía, dentro de su inevitable vínculo social, con el poder político, organizado también en nuestro tiempo de modo complejo. Por eso, cuando se habla de ciencia e ideología, enseguida vienen a la mente los conflictos políticos del poder establecido frente a la ciencia crítica o los problemas morales en torno los usos ilícitos de la ciencia. La ideología, entendida como acervo de ideas generales que caracterizan la acción y la experiencia de los individuos o comunidades, no sólo tiene sentido asociada a la actividad política, sino que también es el substrato del pensamiento abstracto aun en ámbitos de conocimiento no vinculados directamente con la praxis social. Si consideramos la matemática como uno de estos ámbitos, la ideología puede entenderse como el conjunto de ideas generales que orientan la práctica matemática, lo que algunas veces podrá llegar a calificarse como la filosofía de los matemáticos.

La historia de las matemáticas presenta numerosos ejemplos de síntesis de ideas filosóficas y matemáticas que abordan aspectos cruciales o fundamentales y producen nuevos conceptos fructíferos. Desde que la especialización separó a filósofos y científicos, y dado que las innovaciones matemáticas llegan con cierto retraso al mundo culto no especialista, los filósofos han actuado frecuentemente sobre la matemática aprendida en libros de amplia difusión y no sobre la matemática más avanzada del momento, lo que les ha valido posteriores descalificaciones cuando su obra ha sido sometida a crítica por los que ya pudieron conocer los nuevos progresos consolidados. En lo que respecta al tema de este trabajo, cabe recordar que la interpretación de los infinitésimos como ficciones realizada por Waihinger —iniciada en 1877 y sostenida en ambientes filosóficos hasta bien entrado el siglo actual— fue criticada por Rey Pastor [1944] reprochando al filósofo del *como si* que partiera de conocimientos matemáticos elementales anclados a principios del XIX; o traer a colación que J. de Lorenzo [1984] destaca también que Marx basa su crítica a los fundamentos del cálculo infinitesimal, realizada entre 1860 y su fallecimiento en 1883, en estudios previos que sólo llegaron hasta Lagrange[3]. Pasando por alto la explícita *síntesis filosófica y científica* de Wronski [PHILI, 1996], otros matemáticos del siglo XIX, como Grassmann o Cantor, han acompañado su práctica matemática con profundas reflexiones filosóficas que no han sido plenamente comprendidas por sus colegas contemporáneos o bien la riqueza potencial de sus ideas ha quedado canalizada y reducida en parte cuando sus continuadores han compilado y desarrollado su obra [LAWVERE, 1994 y 1996b].

Un ejemplo especialmente pertinente ahora es la formulación por Riemann del concepto de variedad en su famosa habilitación de 1854 [RIEMANN, 1979], que tiene carácter filosófico y significa una alternativa a la concepción kantiana del espacio [NOVAK, 1989]. Riemann pretende en su discurso *construir el concepto general de magnitud múltiplemente extensa partiendo de conceptos generales de magnitud*, para después determinar el espacio real, entre las magnitudes triplemente extensas, mediante sus propiedades sacadas de la experiencia. De este modo, la geometría euclídea aparece como una hipótesis bastante probable pero que debe investigarse, al igual que *enjuiciar si está permitido extenderla más allá de los límites de la observación, tanto hacia la parte de magnitudes inconmensurables por grandes, como hacia la parte de las inconmensurables por pequeñas.* Las explicaciones de Riemann se centran en aquellas magnitudes múltiplemente extensas en las que las *determinaciones de lugar* pueden reducirse a un número finito de *determinaciones cuantitativas* o medidas, pero no deja de afirmar que hay casos que exigen *no un número finito, sino o una serie infinita, o una variedad continua* de ellas. Las limitaciones que presenta la teoría de las variedades diferenciales de dimensión finita, patentes como luego veremos en su diseño conceptual y en sus aplicaciones físicas, ponen de manifiesto que ha habido un desarrollo matemático sólo parcial de las ideas generales del discurso de Riemann.

Los conceptos teóricos que surgen de la reflexión filosófica sobre problemas matemáticos aparecen expresados en un lenguaje no exento de la polisemia propia del lenguaje natural y su potencialidad queda reducida en parte al cristalizarlos en la estructura más rígida del lenguaje simbólico matemático. Parece suceder así porque una teoría o lógica única no es capaz de abarcar todas las posibilidades abstractas que la realidad material o conceptual va sugiriendo al pensamiento, que pueden ser recogidas en diferentes modelos matemáticos simultáneos y no contradictorios.

Otro asunto que surge en la reflexión sobre las relaciones entre la ciencia, en este caso las matemáticas, y la ideología es la interacción entre las preferencias temáticas y los planteamientos de los problemas por un lado y las ideas generales de los científicos por otro. Demidov [1996] ha observado que ésta es una de la cuestiones importantes más complicadas que existen en la historia de las matemáticas y, como esquema para discutir las diferencias ideológicas entre las escuelas matemáticas de San Petesburgo y Moscú, plantea que cada matemático posee, en mayor o menor medida, sobre el nivel de los saberes y métodos matemáticos que domina, otros dos niveles generales: una *ideología matemática (IM)* que se refiere al objeto y al sentido de su práctica matemática y una *ideología general (IG)* que expresa su visión del mundo.

En este trabajo ocupan un lugar central las innovaciones teóricas formuladas por F.W. Lawvere entre 1964 y 1970 en un proceso de acción y experiencia en el que la práctica matemática presentaba una correlación decisiva con los niveles generales ideológicos antes mencionados. Meloni [1985] ha recogido e interpretado la conexión entre la investigación conceptual de Lawvere, basada en la capacidad fundacional de la teoría de categorías [MAC LANE, 1988], y la visión de la ciencia de los fundadores del materialismo dialéctico, pero entendiendo éste no como un repertorio doctrinal que debe ser aplicado, sino como un instrumento para indagar y avanzar en las cuestiones que la propia práctica matemática plantea en sus relaciones con otras ciencias y con la filosofía.

Los casos analizados por Demidov se refieren a dos grupos localizados en sendas ciudades rusas, pero la comunidad de matemáticos que se alistó en la teoría de categorías —que Lawvere [1992] estima en torno a los doscientos investigadores entre 1965 y 1990— era internacional y dispersa, aunque ha mantenido su cohesión gracias a las múltiples facilidades para la comunicación científica que han existido en Occidente en la segunda mitad del siglo. Es subyugante, y parece cierto en alguna medida, suponer en los primeros momentos de la corriente que siguió las propuestas iniciales de Lawvere —años sesenta y primeros setenta, los de la revuelta universitaria en Occidente— la existencia de conexiones explícitas o implícitas entre la elección personal de una práctica matemática impregnada de materialismo dialéctico y la sintonía con esta filosofía marxista en los niveles ideológicos generales antes mencionados. Pero dilucidar esta interesante cuestión debe quedar para las memorias de los protagonistas principales, todavía investigadores en activo, y para estudios históricos futuros que dispongan de documentación y perspectiva.

Lo que sí procede es describir algunos aspectos básicos del pensamiento dialéctico acerca de las cantidades infinitesimales, de sus precedentes históricos y de su reciente incorporación a la matemática axiomática, aunque este pensamiento dialéctico haya permanecido siempre al margen de la ciencia normal. A manera de referencia y contraste es oportuno trazar primero el camino seguido por el cálculo infinitesimal clásico hasta su formulación no estándar hace tres décadas.

III. La Metafísica del Cálculo Infinitesimal

Un año antes de la conferencia de Lawvere en Chicago, pórtico de la geometría diferencial sintética, había aparecido el libro *Non-standard analysis* de A. Robinson [1966], en el que su autor recopilaba investigaciones realizadas durante los cinco años previos sobre el desarrollo del cálculo diferencial e integral utilizando números infinitamente pequeños *(infinitesimales* o *infinitésimos)* e infinitamente grandes *(infinitos)*. Baste aquí decir que Robinson sumerge *R* (el conjunto de los reales *clásicos* o *estándar)* en un cuerpo ordenado **R* (*reales*) no arquimediano, de modo que en esta extensión, pero fuera de *R* excepto 0, hay números reales cuyo valor absoluto es menor o igual que todos los reales clásicos positivos; los inversos de estos infinitésimos son números reales infinitos porque ningún número real estándar es mayor o igual que el valor absoluto de uno de aquéllos. Hay pues números reales *no estándar* finitos, infinitamente grandes e infinitamente pequeños. Se produce también una ampliación $^*N$ del conjunto N de los números naturales, existiendo análogamente números naturales infinitos no estándar. Si un número real es finito, es decir menor o igual en valor absoluto que un número real clásico, entonces hay un único número real clásico infinitamente próximo a él —lo que significa que su diferencia es infinitesimal— que se conoce como su *parte estándar*.

Utilizando este sistema ampliado de números reales se caracterizan los límites de las funciones reales clásicas extendiendo éstas a $^*R$ y recurriendo a las anteriores relaciones infinitesimales como alternativa, de modo que puede edificarse el cálculo clásico sin mencionar la tradicional noción de límite. La derivada clásica

$$f'(x) = \lim_{d \to 0} \frac{f(x+d) - f(x)}{d}$$

aparece ahora como la parte estándar

$$f'(x) = est \frac{f(x+d) - f(x)}{d}$$

de un cociente incremental formalmente análogo, que ahora es un número real finito pero no clásico, porque d es un infinitésimo. Análogamente, la integral se introduce como la parte estándar del número real finito que es una suma extendida hasta un número natural infinito.

El nuevo cálculo se desarrolla sin trabas sobre estas bases, pero hay un metateorema, el *principio de transferencia*, que asegura que todo teorema alcanzado con este método se puede obtener de modo clásico, así que lo que Robinson ha creado es una nueva visión conceptual y un nuevo método para una teoría preexistente, lo que de hecho da lugar a tomas de postura sobre las ventajas que pueda ofrecer uno u otro para la investigación, la enseñanza y las aplicaciones; pero más interesantes en este momento son las interpretaciones históricas y filosóficas que suscita el análisis de Robinson [DAUBEN, 1988].

El último capítulo del libro de Robinson es una revisión de la historia de los fundamentos del cálculo infinitesimal orientada a poner de manifiesto que los infinitésimos han estado en la base intuitiva y creativa del cálculo incluso en Cauchy, pero que el rigor de fin de siglo los ha expulsado del análisis por considerarlos incompatibles con las exigencias de la lógica; juicio que Robinson invalida, precisamente, recuperándolos con pleno rigor gracias a los métodos elaborados por la lógica matemática en la primera mitad del presente siglo.

Aunque Robinson comienza su revisión histórica en Leibniz, puede tomarse a Fermat como primer ejemplo del uso contradictorio de los infinitesimales en el incipiente análisis. La evidencia geométrica lleva a los precursores del cálculo a constatar la existencia de un valor numérico concreto para la razón incremental $(1/d)[f(x+d)-f(x)]$ con independencia de la variación infinitesimal d. Para efectuar los cálculos, estos matemáticos pioneros operan con los infinitesimales como si fueran magnitudes ordinarias, permitiendo realizar con ellos las operaciones básicas de la aritmética, de modo que es posible, por ejemplo, la división por d (aspecto de infinitesimal *inversible*); pero a la vez la naturaleza infinitesimal del incremento les permite, cuando conviene, hacer $d=0$ o bien $d^2=0$ (aspecto de infinitesimal *idempotente*). Con este doble uso surge la contradicción clásica entendida como contrasentido, pues las reglas de las operaciones aritméticas, junto con las de la lógica, hacen incompatible que un número sea inversible y a la vez nulo o idempotente, salvo en la hipótesis 0=1 que es inoperante.

Robinson advierte que la historia de los infinitesimales no puede comprenderse del todo sin considerar sus aspectos filosóficos, no en vano el asunto llena prácticamente la filosofía de las matemáticas de los últimos siglos. El título dado a este apartado es el que Robinson [1967] asignó a una ponencia congresual en la que expuso las ideas del último capítulo de su libro y es claro que dicho título, al utilizar el término *metafísica*, nos recuerda alusiones análogas de Carnot y D'Alembert en torno a la ontología de los infinitesimales[4], pues desde la reformulación de la matemática y la física en el siglo XVII hay un intento de reducir las explicaciones mecánicas y las teorías matemáticas a unos principios únicos de tipo platónico que descubren una supuesta realidad ideal separada de las realidades concretas.

Una de las cuestiones filosóficas que subyacen es el problema del infinito, pues las cantidades infinitésimas e infinitas aparecen como formas del infinito actual y, como tales, son rechazables desde algunos postulados filosóficos; ésta sería la posición ideológica de los defensores de la noción de límite, cantidad variable concebible en términos de infinito potencial, desde Newton a D'Alembert y Cauchy. Pero el triunfo definitivo de los límites a finales del siglo XIX no significa el reconocimiento exclusivo del infinito potencial, cuestión más bien propia de la reacción constructivista, sino el uso de los límites como técnica de trabajo con el infinito actual del paraíso de Cantor, presente en la construcción de los números irracionales. Por el contrario, la visión de Leibniz parece alineada con el infinito actual pero, al considerar los infinitesimales como ficciones útiles —aspecto desarrollado por Waihinger—, se aproxima al punto de vista formal que hoy impera desde Hilbert. En cuanto que introducidos axiomáticamente, los infinitésimos son objetos del pensamiento abstracto útiles para desarrollar procedimientos deductivos, al igual que en el siglo XVIII fueron intuiciones útiles para resolver problemas prácticos pese a tener entonces un fundamento confuso. En esto no se distinguen de los reales clásicos, que también se pueden dar mediante axiomas; tampoco hay diferencias esenciales en su construcción efectiva a partir de los racionales, pues un primer proceso infinito lleva a los reales clásicos y un segundo a los reales no estándar, así que ambos quedan también equiparados en naturaleza. Robinson aporta una nueva extensión transfinita que presenta dos ventajas: reincorpora algunos aspectos intuitivos y facilita las demostraciones, aun a costa de algún trabajo adicional con la lógica. Pero tiene en su contra la tradición, que ha impuesto con rigor el método de los límites y mantiene a la lógica en la marca fronteriza de los fundamentos de las matemáticas. Así las cosas, la práctica matemática del cálculo se encomienda a los límites y su estatus metafísico queda garantizado por la lógica clásica y la teoría de conjuntos cantoriana.

La obra de Robinson se mantiene aparentemente en el paraíso de Cantor-Hilbert, entendido como solar metafísico sobre el que se edifican las matemáticas platónicas, pero en Robinson hay algo más. Por una parte, su formulación prospera gracias a que la lógica se incorpora en cierto modo a la praxis matemática cuando parecía estar relegada a la discusión sobre cuestiones de fundamentos. Por otra, Robinson es consciente de que la teoría de conjuntos sobre la que se asienta la matemática actual es tan sólo una de las posibles opciones para resolver los problemas fundacionales, pero no la única, pues los avances de la axiomática, particularmente la independencia de la hipótesis del continuo probada por Cohen [1963], así lo han puesto de manifiesto [DAUBEN, 1988]. Por eso augura un futuro abierto a nuevas posibilidades:

> «At the moment Cantor's point of view is that held by the majority of mathematicians. But perhaps our historical review suggests that just as the Calculus of infinitesimals, which was triumphant in the middle of the eighteenth century was still put on completely different foundations within the next one hundred years, so future generations of mathematicians, while accepting the formal results of Set Theory, may reject the platonistic claims commonly associated with it» [ROBINSON, 1966, p. 281].

En uno de sus últimos escritos aventuró que en un futuro diversas corrientes filosóficas podrían incidir en el pensamiento matemático[5]:

«I can well imagine that a serious mathematical philosophy based on the dialectical approach will make its appearance. It seems to be that this approach has already shown its great value in connection with our understanding of the evolution of scientific theories and of their heuristic aspect. As far as the detailed analysis of mathematics or of a mathematical theory (e.g. the calculus) by the dialectical method is concerned, my reading, beginning with Hegel's work in this area, has not led me to find anything that can stand up to serious criticism. It is quite possible that this situation will be remedied in the future».

La teoría abstracta de topos, surgida del trabajo conjunto de Lawvere y Tierney[6] durante el curso 1969-70, puede ser un avance en la dirección apuntada por Robinson. Cuando Lawvere [1976] afirmó que había encontrado *la base conceptual para los topos en la experiencia matemática con conjuntos variables,* señaló el análisis no estándar como uno de los antecedentes de la nueva teoría que, entendida como formalización de un nuevo concepto de conjunto, se presentaba como base para un proyecto unificador de dichos antecedentes. Otro de los antecedentes indicados por Lawvere fue la técnica usada por Cohen [1963, 1966] en la demostración de la independencia de la hipótesis del continuo, asunto que también había llamado poderosamente la atención de Robinson. Este y el resto de los antecedentes se relacionan con la teoría de categorías, cuya capacidad de expresión dialéctica es la base sobre la que Lawvere edificó su alternativa a la teoría de conjuntos y al fundamento de las matemáticas.

IV. Categorías y Dialéctica

La teoría de categorías fue fundada en los primeros años cuarenta por Eilenberg y Mac Lane [1945] y tiene sus raíces en la topología algebraica de la década anterior[7]. Sus conceptos básicos, *categoría*, *funtor*[8] y *transformación natural*, aparecieron inicialmente como elementos de un lenguaje formal que permitía expresar metódicamente cálculos complejos en los que unas estructuras algebraicas eran asociadas a espacios geométricos o topológicos de un modo compatible con las transformaciones pertinentes en cada caso[9].

En una *categoría* $\mathcal{A}$ se agrupan *objetos* $A, B, C, \dots$ y *morfismos* $f{:}A\to B$ de un objeto A en un objeto B, de modo que hay una *composición* de morfismos de la forma $f{:}A\to B$ compuesto con $g{:}B\to C$ igual a $g{\cdot}f{:}A\to C$, y que cada objeto tiene un morfismo *identidad* $id_A{:}A\to A$ neutro por composición a ambos lados, $f{\cdot}id_A=id_B{\cdot}f$; además, la composición es asociativa, es decir, si a los anteriores morfismos añadimos $h{:}C\to D$, entonces $h{\cdot}(g{\cdot}f)=(h{\cdot}g){\cdot}f$. Aunque los ejemplos de este concepto formal son de muy diversa índole, el caso más característico, de cuyo simbolismo se apropia la teoría general, es la categoría de los conjuntos en la que objeto es lo mismo que conjunto y cuyos morfismos son las aplicaciones entre conjuntos. Tomando conjuntos con estructura y aplicaciones que conservan la estructura se obtienen nuevas categorías, geométricas o algebraicas, del tipo de las que sugirieron a los fundadores la formulación general abstracta. En una categoría a encuentra su marco natural la noción de *isomorfismo*, que es la relación entre dos objetos A y B dada por morfismos $f{:}A \rightarrow B$ y $g{:}B \rightarrow A$ cuyas dos composiciones $g{\cdot}f{:}A \rightarrow A$ y $f{\cdot}g{:}B \rightarrow B$ son las respectivas identidades. Los objetos isomorfos, aun cuando sean distintos en su propio ser, son portadores de las mismas relaciones con el resto de los objetos de su categoría.

La teoría de conjuntos clásica define cada conjunto A por sus elementos $x \in A$, de modo que el principio de extensionalidad afirma que dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos. De igual modo, la determinación de una igualdad $f=g$ entre aplicaciones $f,g{:}A \rightarrow B$ se realiza elemento a elemento en el dominio de la aplicación: $f(x)=g(x)$ para cada $x \in A$. Sin embargo, en una categoría $\mathcal{A}$ se tiene $f=g$ si y sólo si $f{\cdot}x=g{\cdot}x{:}C \rightarrow B$ para cada objeto C y cada morfismo $x{:}C \rightarrow A$, mientras que los objetos se definen mediante propiedades universales que los determinan salvo isomorfismos, extensionalidad que hace referencia a la totalidad de la categoría. No obstante, en categorías particulares puede ser suficiente para determinar la igualdad componer con morfismos que pertenezcan a una familia reducida; en el caso de los conjuntos basta la familia formada por los que tienen como dominio un conjunto que tenga un solo elemento.

Este cambio en el tipo de extensionalidad es una de las características de las categorías que las hace idóneas para expresar el pensamiento dialéctico, cuyo ámbito es el de las totalidades concretas en las que se inscriben los objetos. Por ejemplo, en la teoría clásica el conjunto N de los números naturales se define por los axiomas de Peano, que dan una descripción interna del conjunto en sí mismo, aunque luego se demuestra que dos conjuntos que verifican los axiomas son biyectivos. Por el contrario, N se introduce en la definición categórica de Lawvere [1964] mediante un axioma de recursión simple que involucra a todos los conjuntos en una propiedad universal que automáticamente define N salvo isomorfismos. Esta formulación categórica permite de modo natural su interpretación en categorías con tipos de extensionalidad diferentes de la categoría de los conjuntos clásicos.

Pero sigamos con la descripción de los conceptos básicos de la teoría de categorías. Un *funtor* $F{:}\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$ de una categoría $\mathcal{A}$ en una categoría $\mathcal{B}$ es la construcción para cada objeto A de $\mathcal{A}$ de un objeto $B=F(A)$ de $\mathcal{B}$ de un modo compatible con los morfismos, su composición y las identidades, así que los funtores no alteran la relación de isomorfismo. Se pueden componer dos funtores $F{:}\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$ y $G{:}\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{C}$ para obtener un nuevo funtor $G{\cdot}F{:}\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{C}$, lo que abre la puerta a la definición de una *categoría de categorías* (con otras categorías previas como objetos y funtores entre ellas como morfismos) y, por tanto, también a la noción de *isomorfismo de categorías*.

Finalmente, una *transformación natural* es una relación $\varphi{:}F\rightarrow G$ entre dos funtores $F,G{:}\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$ que se determina en cada objeto A de $\mathcal{A}$ mediante un morfismo $\varphi_A{:}F(A)\rightarrow G(A)$ de $\mathcal{B}$, de manera que dos de estos morfismos, φ_A y φ_B, se ligan por composición en $\mathcal{B}$ a través de los respectivos transformados por F y G de los morfismos $f{:}A\rightarrow B$ de $\mathcal{A}$, es decir, se verifica la igualdad $G(f)\cdot\varphi_A=\varphi_B\cdot F(f)$. Así definidas las transformaciones naturales, surge de inmediato la posibilidad de componer dos de ellas $\varphi{:}F\rightarrow G$, $\phi{:}G\rightarrow H$ entre funtores $F,G,H{:}\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$ para obtener una nueva transformación natural $\phi\cdot\varphi{:}F\rightarrow H$, lo que da lugar a una categoría cuyos objetos son los funtores $\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$ y que tiene como morfismos las transformaciones naturales entre ellos. Los isomorfismos correspondientes a estas *categorías de funtores* surgen cuando cada uno de los φ_A es un isomorfismo en su categoría $\mathcal{B}$: son las *equivalencias naturales* que aparecen en el título del artículo pionero antes citado [EILENBERG & MAC LANE, 1945].

Cuando dos funtores $F{:}\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$, $G{:}\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$ determinan al componer uno con otro identidades en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ respectivamente, se dice que son isomorfismos inversos y que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ son isomorfas. Pero la práctica matemática suministró ejemplos de una relación menos rígida y más fructífera, llamada *equivalencia de categorías*, que se presenta cuando ambas composiciones son funtores que se relacionan con los respectivos funtores identidad a través de equivalencias naturales (no identidad sino isomorfismo en la respectiva categoría de funtores). En tal caso F, G son equivalencias inversas y las categorías $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ son equivalentes, lo que significa que son diferentes en sí mismas pero presentan las mismas relaciones con las demás categorías. De nuevo un criterio de identidad y diferencia de naturaleza dialéctica.

A lo largo de los años cincuenta se estudiaron las categorías que surgen en la homología y se experimentó la adaptación del lenguaje categorial a los estudios generales de geometría, con Grothendiek ocupado en problemas de la geometría algebraica y Ehresmann, con una terminología más peculiar, de geometría diferencial. Al referirse a los primeros efectos de su artículo fundacional con Eilenberg, Mac Lane afirma que:

> «[...] it provides a handly language to be used by topologists and others, and that it also offered a conceptual view of parts of mathematics, in some way analogous to Felix Kline's «Erlangen Program». We did not then regard it as a field for further research efforts, but just as a language and an orientation —a limitation which we followed for a dozen years or so, till the advent of adjoint functors [...]» [MAC LANE, 1988, pp. 334-335].

Los *funtores adjuntos* fueron introducidos por Kan [1958], discípulo de Eilenberg en Nueva York. Son una generalización de la noción de equivalencia en la que los funtores F, G, al componerse mutuamente, no dan equivalencias naturales con los funtores identidad sino tan sólo unas transformaciones naturales *(unidad y counidad)* verificando ciertas propiedades universales, así que también las adjunciones quedan definidas salvo isomorfismo. Las equivalencias son adjunciones muy particulares y cada adjunción se restringe de modo canónico a una equivalencia entre porciones de las categorías afectadas que, a su vez, son categorías (subcategorías). Aislado el concepto, se constató de inmediato que los ejemplos de funtores adjuntos aparecen por doquier en matemáticas.

La investigación surgida a partir de entonces eclosionó al coincidir en 1963 varios hechos notables, lo que dio pie a la convocatoria en 1965 de la conferencia de La Jolla (California), la primera gran reunión de la especialidad, que congregó a treinta y siete matemáticos. El volumen que recogió parte de las intervenciones de la conferencias se abre con un artículo de Lawvere [1966] en el que se establece una teoría de primer orden para la categoría de las categorías que puede servir como fundamento de las matemáticas. Así daba su autor expresión formal a unas ideas que había adelantado en 1963 con motivo de sus trabajos de doctorado, en los que perseguía tres objetivos encadenados relativos a los fundamentos de las matemáticas:

(i) La categoría de las categorías como base de las matemáticas,
(ii) la categoría de los conjuntos sin predicado pertenencia,
(iii) un concepto abstracto de teoría algebraica basado en categorías[10].

Desde esta plataforma Lawvere organizó el enfoque dialéctico de los infinitesimales adelantado en 1967, pero cuyo desarrollo tuvo que esperar a la formulación precisa de la idea de los *conjuntos variables,* lograda en 1970 mediante la teoría de topos, de la que nos ocuparemos en el apartado siguiente.

Mac Lane [1988] ha señalado que resulta curioso que los conjuntos sin elementos aparecieran en la matemática avanzada en la misma década en la que se generalizó en la enseñanza elemental la *matemática moderna* de los conjuntos con elementos, y ha contado la sorpresa que le produjo que fuera posible esta nueva fundamentación formal de las matemáticas, añadiendo que todavía persiste en muchas esferas cierta dificultad para comprender una teoría de conjuntos sin elementos. Esta dificultad corresponde al menos al nivel *(IM)* de Demidov, en el que actúa la tradición de las matemáticas aprendidas, y en algunos casos se podrá situar en el *(IG),* cuando la selección de temas y problemas se justifique mediante criterios extramatemáticos generales. Aunque Mac Lane recuerda la necesidad de estudios empíricos para hablar con propiedad de estos temas, desliza en la interesante referencia recién citada algunas anotaciones relativas a la cuestión ideológica. Por una parte, observa que el poderoso auge de las categorías en EE.UU. entre 1962 y 1967 coincide con una gran expansión de la comunidad matemática, lo que fue particularmente decisivo para la incorporación de jóvenes a la investigación matemática[11]. En unos años en los que entre la juventud universitaria abundaba la contestación al sistema y las ideas políticas de izquierda, hay indicios, que deberían efectivamente contrastarse con memorias personales u otros datos empíricos, de que en la incorporación de jóvenes a la teoría de categorías no fueron ajenas las componentes ideológicas de los tipos *(IM)* e *(IG)* señalados por Demidov.

Lawvere, que desde el principio ejerció un liderazgo intelectual en la nueva corriente, fue siempre explícito en la exposición de las conexiones de sus propuestas matemáticas con el materialismo dialéctico, si bien esta mutua interacción se fue haciendo más precisa en los años siguientes [MELONI, 1985]. En sus trabajos de tesis doctoral menciona ya Lawvere estos lazos ideológicos en los que profundizó con progresiva claridad, pero en el artículo escrito para el volumen de La Jolla no aparecen estas cuestiones, tan habituales en él, y el autor se mantiene en un nivel técnico a lo largo de todo el texto. Es posible que esto tenga que ver con la segunda anotación de Mac Lane en esta línea ideológica, que se refiere a la *Air Force Office of Scientific Research,* organismo que financió la conferencia:

«At the end of the La Jolla conference the AFOSR representative privately told Eilenberg and Mac Lane that AFORS could no longer support such research. This was at the beginning of the most fruitful 10 years period in the development of category theory. It may indicate that agency judgements of future prospects are not always on target» [MAC LANE, 1988, p. 351].

Queda en el aire si la decisión se debió a la inutilidad inmediata de una teoría de categorías tan abstracta para la fabricación de aviones de combate o si pudieron influir otras cuestiones generales de ideología y política científica.

V. Los conjuntos variables y su lógica

Las ejemplos más vinculados al nacimiento de la teoría de categorías eran categorías de grupos, de módulos y de haces, que a su vez podían ser haces de grupos y haces de módulos, pero incluso en los cincuenta se trataba más de trabajar en estas teorías particulares que de elaborar una nueva teoría abstracta de categorías[12].

La escuela francesa del entorno de Grothendiek desarrolló para su uso en problemas de geometría algebraica la noción de *haz*, utilizada también en topología algebraica y análisis complejo [GRAY, 1979], planteándola como un tipo especial de funtor, así que la categoría de los haces era una categoría de funtores. Inicialmente, en los trabajos de H. Cartan hacia el año 1950, un haz sobre un espacio B era un espacio más amplio E con un tipo de aplicación continua $p{:}E \to B$ en el que juegan un papel relevante las *secciones* de p definidas sobre los abiertos U de B, es decir, las funciones $s{:}U \to E$ tales que $p \cdot s$ es la inclusión de U en B. Los conjuntos $P(U)$ formados por las secciones definidas sobre cada abierto U, portadores de cierta estructura en los casos que se estudiaban, contenían información sobre el espacio B y la totalidad de ellos se organizaba como un funtor $P{:}\mathcal{B}^{op} \to C$ con valores en la categoría de los conjuntos, entendido como un *conjunto variable* a lo largo de los abiertos del espacio, que eran vistos como los objetos de una categoría $\mathcal{B}$ cuyos morfismos son las relaciones de contenido entre ellos, dando la composición mediante la propiedad transitiva y las identidades con la reflexiva[13]. La propiedad de ser haz correspondiente a la aplicación p se traduce en una propiedad del funtor P y los funtores de este tipo forman la categoría $sh(\mathcal{B})$ de los haces del espacio B. En el estudio del espacio B dado como conjunto de puntos *(constante)* se pasaba a conceder mayor importancia al espacio como conglomerado de sus porciones llamadas abiertos, categoría $\mathcal{B}$, y el conocimiento del espacio B equivalía al de la categoría $sh(\mathcal{B})$, la totalidad de los conjuntos variables sobre los abiertos, categoría que aparecía así como una noción ampliada de espacio. La siguiente generalización fue sustituir la categoría $\mathcal{B}$ de abiertos por una categoría bastante arbitraria pero capaz de soportar una noción abstracta de haz, lo que dio lugar a los *topos de Grothendieck*, quedando los topos de haces sobre un espacio como un caso muy particular, pues la noción general permite dominios de variación mucho más abstractos y grandes que las categorías de abiertos de los espacios individuales.

La teoría de primer orden de la categoría de los conjuntos [LAWVERE, 1964] establece los axiomas que la determinan salvo equivalencia en la categoría de las categorías. Caracterizar en estos términos las categorías más usuales en la práctica matemática fue uno de los primeros objetivos de la investigación en esta nueva especialidad en los primeros sesenta. En particular, Giraud estableció[14] en 1963 una lista de propiedades características de los topos de Grothendieck, lo que dio pie a comparar esta lista con los axiomas de la categoría de los conjuntos dados por Lawvere; así pudo surgir un programa de investigación encaminado a encontrar una axiomática común, que fue lo que hicieron Lawvere y Tierney[15] trabajando juntos en Halifax (Canadá) a lo largo del curso 1969-70. Encontraron tres axiomas que definen las categorías llamadas *topos elementales* o simplemente *topos*, entre las que se encuentran la categoría de los conjuntos y los topos de Grothendieck. Para Mac Lane [1988] el concepto elemental de topos es la innovación más decisiva de la teoría de categorías después de los funtores adjuntos.

Un topos $\mathcal{E}$ es una categoría que tiene *límites finitos*, es *exponenciable* y posee *clasificador de subobjetos*. La primera condición significa que hay un objeto *final* 1 con un morfismo único $A \to 1$ para cada objeto A y también que para cada par de objetos A, B hay un objeto *producto* $A \times B$ definido por una propiedad universal de las proyecciones $A \times B \to A$, $A \times B \to B$ y, además, que para cada par de morfismos $f,g:A \to B$ hay un objeto *igualador* K con morfismo $k:K \to A$ universal para la igualdad $f \cdot k = g \cdot k$. En el caso de los conjuntos, estos objetos corresponden respectivamente al conjunto con un único elemento, al producto cartesiano o conjunto de pares y al conjunto de los elementos $x \in A$ tales que $f(x) = g(x)$. La segunda condición dice que para cada dos objetos A, B hay un nuevo objeto B^A de forma que los morfismo del tipo $C \to B^A$ están en biyección con los de la forma $C \times A \to B$, de tal modo que se obtiene un par de funtores adjuntos si se fija el objeto A. Esto sucede con los conjuntos ordinarios si se toma como B^A el conjunto de las aplicaciones de A en B. Finalmente, la tercera condición afirma la existencia de un objeto Ω tal que cada *subobjeto*

U de A (versión categórica de subconjunto) queda determinado biunívocamente por un *morfismo característico* $A \to \Omega$ de modo tal que traduce en lenguaje de categorías la situación de los conjuntos, en cuyo caso $\Omega=\{0,1\}$ y la función característica del subconjunto U de A envía a 1 los elementos de U y a 0 los demás elementos de A. Todos los objetos mencionados quedan definidos salvo isomorfismo y se adivina que el clasificador Ω representa los valores de verdad y será el portador de las relaciones del topos con la lógica, que en el caso de los conjuntos es la lógica bivaluada clásica en la que 0 es el valor falso y 1 el verdadero.

Los topos elementales se dieron a conocer en la comunidad matemática internacional en 1970 y en los cinco años siguientes quedó establecida la parte general de la correspondiente teoría formal, incluyendo el estudio particular de los ejemplos más notables, desarrollo que fue compilado por Johnstone [1977][16]. Se produjo entonces la realización explícita de los topos como categorías de conjuntos (variables) portadoras de su propia lógica (intuicionista). En efecto, cada topos posee un lenguaje de tipos análogo al de los conjuntos clásicos, pero con un álgebra de valores de verdad que en general no es booleana. Este lenguaje se interpreta en el topos de modo que alcanzan validez las fórmulas de la lógica formal intuicionista. Kripke [1965] ya había obtenido modelos de esta lógica usando funtores definidos sobre conjuntos ordenados y los métodos de Cohen dieron lugar poco más tarde a modelos de la teoría de conjuntos que eran categorías de haces sobre álgebras de Boole [MAC LANE & MOERDIJK, 1992]. Se obtienen así múltiples teorías de conjuntos más generales que la clásica, cada una con su cálculo de proposiciones y de predicados, lo que lleva a múltiples paraísos matemáticos, entre ellos el clásico de Cantor-Hilbert, que podrán ser aplicados a diversos problemas generales de las matemáticas y de las ciencias. Los conjuntos clásicos (constantes) son los conjuntos variables con variación nula y el álgebra de Boole $\{0,1\}$ no es sino un caso mínimo muy especial entre las múltiples álgebras de valores de verdad posibles, pero sigue siendo un caso particular importantísimo.

En definitiva, los antecedentes de la teoría de topos fueron los siguientes, según refiere el propio Lawvere [1976, p. 102]:

($A1$) El análisis no estándar [Robinson].
($A2$) Las demostraciones de independencia [Cohen].
($A3$) La semántica para la lógica intuicionista [Kripke].
($A4$) Los axiomas de la categoría de los conjuntos [Lawvere].

($A5$) Los axiomas de las categorías de haces [Giraud].

De ellos, el último es el más claro precursor de la idea dialéctica de los conjuntos variables y ($A4$) muestra los conjuntos clásicos como conjuntos de variación nula o constantes. Los otros contienen ejemplos de sistemas de conjuntos variando a lo largo de un conjunto ordenado, aunque ($A1$) y ($A2$) lo hacen para obtener modelos de los conjuntos clásicos y ($A3$) para proporcionar una semántica al cálculo de predicados intuicionista de Heyting. Es curioso que todos estos antecedentes aparezcan[17] en 1963:

> «Around 1963 (the same year in which I completed my doctoral dissertation under Professor Eilenberg's direction) five distinct developments in geometry and logic became known, the subsequent unification of which has, I believe, forced upon us the serious consideration of a new concept of set [...]» [LAWVERE, 1976, p. 102].

Después de la axiomatización podemos definir un conjunto variable como un objeto de un topos, pero esto es una inversión histórica, porque fue precisamente haber captado la presencia de conjuntos variables en la experiencia matemática lo que llevó al concepto de topos; también los vectores existieron antes que los espacios vectoriales y han pasado a ser sus elementos. La característica fundamental de la investigación de Lawvere es que explora el conocimiento matemático con un criterio dialéctico, en busca de lo que es principal en la práctica matemática para elevarlo a concepto abstracto y crear la teoría formal que clarifique su conocimiento, desarrollo y uso.

Además de completar aspectos de la propia teoría de topos, el programa de investigación comenzó de inmediato a proponer la reconstrucción de fragmentos de la matemática sobre estos nuevos fundamentos, siendo el cálculo infinitesimal una de las primeras cuestiones abordadas. Antes de pasar a la cuestión de los infinitésimos que protagoniza este trabajo —aunque ya hemos ocupado mucho terreno en su contexto— terminaremos la reseña del surgimiento de la teoría de los conjuntos variables con nuevos apuntes ideológicos relacionados con dos de los protagonistas principales de la génesis del concepto, Grothendieck y Lawvere. Este último presentó la teoría elemental de topos en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Niza en 1970, dos años después de la simbólica fecha de mayo de 1968. Mac Lane señala que:

> «By coincidence, it was at the same conference that Grothendieck announced his shift of interest to political questions; other such questions had preoccupied Lawvere at Halifax [...]» [MAC LANE, 1988, p. 354].

Sin duda se perdió la oportunidad de ver trabajar a un tiempo sobre este tema de interés común a estos dos grandes matemáticos. En el primer caso se produjo una alternancia desde la matemática a la actividad política, en particular a la crítica de la ideología cientista, y en el segundo ambas acciones, matemática e ideológica, se daban en paralelo. Lawvere presentó su teoría de topos enclavada en la teoría del conocimiento del materialismo dialéctico en la línea de Hegel, Marx, Lenin y Mao, como una etapa de unificación en la oposición *lógica vs. geometría*, característica histórica de la matemática, y expresamente colocó en la bibliografía de su artículo un escrito de Mao: *On contradiction. Where do correct ideas come from?* El propio autor[18] lo expresó así:

> «When the main contradictions of a thing have been found, the scientific procedure is to summarize them in slogans which one then constantly uses as an ideological weapon for the further development and transformation of the thing. [...] experience with sheaves [...] shows that a «set theory» for geometry should apply not only to «abstract sets» divorced from time, space, ring of definition, etc., but also to more general sets which do in fact develop along such parameters. For such sets, usually logic is «intuitionistic» (in its formal properties), usually the axiom of choice is false, and usually a set is not determined by its points defined over 1 only [...]» [LAWVERE, 1971, p. 329].

En esta su primera presentación pública de los topos, Lawvere insistió en que se trataba de crear una plataforma sobre la que elaborar las matemáticas, pues terminaba su artículo con estas palabras:

> «While the application of our method to algebraic geometry has only begun, other questions also immediately arise. [...] In any topos satisfying (w) each definition of the real numbers yields a definite object, but it is not yet known what theorems of analysis can be proved about it [...]» [LAWVERE, 1971, p. 334][19].

De inmediato se produjeron trabajos que precisaron y ampliaron las propuestas iniciales de Lawvere sobre la construcción en topos del espectro primo de los anillos conmutativos y de los números reales a partir de los naturales[20]. Además, desde la plataforma de los topos se pudo replantear el estudio detallado de los fundamentos del cálculo infinitesimal propuesto por Lawvere y sus aplicaciones a la mecánica de medios continuos.

VI. La Derivación Sintética. Axiomas y modelos

Ha llegado el momento de exponer el punto de partida y los desarrollos fundacionales de la geometría diferencial sintética. La primera vez que

Lawvere expuso sus ideas germinales fue en Chicago, en el año 1967, cuando dictó unas conferencias alternativas al curso que Mac Lane había impartido sobre dinámica clásica. Las conferencias no se publicaron, quizás porque eran ideas en estado embrionario, pero más de diez años después, una vez que la teoría había dado sus primeros pasos y se iniciaban las reuniones monográficas de expertos en la materia, apareció un resumen de las mismas[21] con algunos comentarios añadidos que figuran entre corchetes. El texto se inicia con un párrafo a manera de presentación (de los añadidos) en el que se lee:

«In these lectures I offered some preliminary calculations in support of a program to (3) axiomatize the foundations of continuum mechanics in the spirit of Walter Noll on the basis of (2) a direct axiomatization of the essence of differential topology using results and methods of the French work in algebraic geometry (some of which I had learned from Gabriel); but I further maintained that this requires (1) axiomatic study of categories of smooth sets, similar to the topos of Grothendieck, since the most natural form of (2) is incompatible with «usual» set theory [...]» [LAWVERE, 1979, p. 1].

El objetivo de Lawvere era ofrecer un bosquejo de fundamentación de la mecánica superando algunas carencias de la matemática[22]. Así por ejemplo, después de Riemann se desarrolló una teoría de las variedades diferenciales de dimensión finita insuficiente para describir ciertos fenómenos mecánicos por varias razones:

(i) La teoría rechaza las variedad con autointersecciones,
(ii) los espacios de trayectorias del cálculo variacional, en general los espacios de aplicaciones entre espacios, no son variedades,
(iii) los infinitesimales, que siguen vigentes en el pensamiento de los físicos, han sido eliminados de la teoría de las variedades.

Dice Lawvere en el texto fundacional reconstruido:

«Some physicists and engineers seem in effect to have the insight that geometrical and physical constructions can be performed, with almost as much freedom as sets can be defined in set theory, without ever leaving the realm of smooth objects and smooth maps. But usual mathematical models, such as the category of smooth manifolds, on the other hand presuppose a long intrincate purely mathematical construction (there does not seem to be an intrinsic description of the category which could reasonably be taken as a «simple» starting point) and on the other hand are poor in regard to closure properties since even something so fundamental (for calculus of variations etc) as the smooth space of smooth maps between two smooth spaces is ambiguous and difficult, and pullbacks in general don't exist [...]» [LAWVERE, 1979, p. 3].

La técnica de Lawvere es axiomática, como corresponde a la matemática del presente siglo, pero no se trata de una axiomática radicada en los fundamentos últimos e inmutables del paraíso de Cantor-Hilbert, sino de una matemática abstracta que modeliza un fragmento de la realidad a partir de la propia experiencia matemática, obteniendo una teoría cuyos modelos son conjuntos no clásicos. Lawvere postula que el universo de las variedades debe ser una categoría e con límites finitos y exponenciable, condiciones que no cumple la categoría m de las variedades diferenciables. Pero m deberá ser una subcategoría de e de manera que la geometría diferencial sintética sea una extensión de la clásica, lo que se pondrá de manifiesto cuando sus teoremas sobre e se apliquen en particular a m. En cuanto a la variedad básica, la recta real R tendrá que ser un anillo conmutativo y contener un subconjunto D de elementos infinitesimales, entre ellos el 0 y los nilpotentes. A fin de permitir la diferenciación, Lawvere introduce el axioma que afirma la existencia de un isomorfismo

$$R^D \cong R \times R.$$

Este axioma formaliza que en el entorno infinitesimal de cada uno de sus puntos la curva se determina por la componente punto y la componente dirección.

A partir de estos ingredientes, bosqueja el funcionamiento categorial de la derivada direccional y de los campos de vectores, pasando luego a las aplicaciones a la mecánica y a discutir sobre la existencia de modelos. Nada más introducir el axioma de diferenciación ya advierte el autor que en la teoría de conjuntos clásica no parece existir el tipo de anillo propuesto, así que sondea modelos a partir de la experiencia de la escuela francesa de geometría algebraica[23], sustituyendo los anillos de polinomios por anillos de funciones reales C^∞ (infinitamente derivables), que pueden ser tratados como los anteriores gracias a la elaboración previa de un concepto categorial de teoría algebraica [LAWVERE, 1965].

Sin que ello quiera decir que Lawvere hizo en un principio una aplicación explícita de estos precedentes, cabe señalar que su modo de proceder se asemeja a formas de pensamiento dialéctico presentes en el matemático Grassmann y en el filósofo Engels, que mencionaremos con más detalle en la sección siguiente. Como hizo el primero de ellos, capta el continuo mediante un acto de creación conceptual independiente de lo discreto y lo formaliza con el uso simultáneo de ideas geométricas y algebraicas. Al igual que el segundo, Lawvere considera que la naturaleza del continuo geométrico se encuentra en la contradicción entre lo recto y lo curvo, que es lo que el axioma anterior expresa.

La exposición de estas nuevas ideas en las conferencias del 67 fue de momento un hecho aislado, mientras se gestaba la teoría general de topos que emergió entre 1969 y 1971. Realizado esto, la *dinámica categorial* resurgió de la mano de Kock —que trabajó con Lawvere en Halifax— y Wraith[24], a los que enseguida se unió Reyes[25]. De inmediato se probó que, en efecto, el axioma básico es inconsistente con la lógica clásica, pues en presencia del tercio excluso el anillo R ha de verificar 0=1, así que la teoría se hace trivial. Este hecho probó que la obstrucción al progreso formal de las intuiciones sobre los infinitesimales radica en la lógica clásica, obstrucción que se evita trabajando en universos de lógica no clásica.

Sin entrar en detalles técnicos, en esta exposición general interesa resaltar que, casi diez años después de las conferencias programáticas de Lawvere, la versión definitiva del axioma básico y los primeros desarrollos de la teoría sintética de la derivación se deben al danés Kock. Su primer trabajo [KOCK, 1977] utiliza el lenguaje de diagramas propio de las categorías, pero muy pronto se extendió el uso del lenguaje conjuntista con las restricciones necesarias en los axiomas (por ejemplo, sin axioma de elección) y en la lógica, interpretable luego en las categorías de modelos. Kock definió el objeto D de los infinitesimales como el subobjeto del anillo R formado por los elementos cuyo cuadrado es nulo

$$D = \{d \in R | d^2=0\}$$

Si se calcula la intersección de la recta R, eje de abscisas del plano RxR, con la circunferencia de ecuación $x^2+(y-1)^2=1$, centrada en el eje de ordenadas y que pasa por el origen, no sólo se obtiene el origen sino todo el subconjunto D. Lo mismo sucede con la parábla $y=x^2$. Por otra parte, por los puntos (0,0) y $(0,d)$, con $d \in D$, distintos pero *muy próximos*, no sólo pasa la recta $x=0$, sino también otras como $y=dx$, $y=2dx$, etc. Con esta opción para D se establece una teoría con infinitesimales idempotentes, tan utilizados en la geometría algebraica del presente siglo. Que en D hay efectivamente elementos no nulos es una consecuencia del *axioma de Kock-Lawvere*, que completa la definición del objeto infinitesimal D afirmando que la aplicación

$$\alpha : R \times R \to R^D$$

que al par $(a,b) \in R \times R$ asigna la aplicación lineal $\alpha(a,b)=f:D \to R$ definida por

$$f(d) = a + b\,d, \qquad d \in D$$

es un isomorfismo. Se formaliza así completamente una percepción intuitiva bien aceptada, a saber, que en el entorno infinitesimal de cada uno de sus puntos la curva se comporta como una recta. Bastan los postulados anteriores para elaborar las bases del cálculo infinitesimal. Dada una función $f:R \to R$ y un punto $x \in R$, aplicamos a la función $g:D \to R$ dada por $g(d)=f(x+d)$ el axioma de Kock-Lawvere y obtenemos dos valores $a,b \in R$ únicos tales que $g(d)=a+bd$. Es claro que $a=g(0)=f(x)$, así que existe un único $b \in R$ tal que

$$f(x+d) = f(x)+bd, \qquad \text{para cada } d \in D.$$

Esta cantidad b es el valor finito que desde Fermat se buscaba para el cociente incremental infinitesimal, obtenido ahora sin hacer operaciones prohibidas con los infinitesimales. Una de ellas era dividir o simplificar los infinitesimales en los productos, lo que se hacía considerando cada uno de ellos como un número aislado; en cambio, lo que el axioma anterior permite es simplificar los infinitesimales universalmente, es decir, cancelarlos todos a la vez, pues es inmediato deducir de la unicidad que figura en el axioma que si para todo $d \in D$ se tiene $xd = yd$, entonces $x = y$.

La cantidad b es la derivada de la función f en el punto x

$$b = f'(x)$$

y dejando variar x se obtiene la función derivada $f':R\varnothing R$. A partir de aquí no pasa de ser un ejercicio sencillo, sin duda mucho más sencillo que con la teoría de límites, deducir las reglas básicas de la derivación:

$$(f+g)' = f' + g'$$
$$(fg)' = f'g + fg'$$
$$(f \cdot g)' = (f' \cdot g)\, g'$$

La consistencia de las teorías se prueba encontrando modelos que la satisfagan, y también Kock [1977] abordó esta tarea para la teoría de la diferenciación sintética. Al igual que los matemáticos inventores del cálculo ensayaron primero sus métodos diferenciales con funciones algebraicas, el primer modelo de Kock verificaba el axioma con polinomios. El universo $\mathcal{E}$ considerado era el topos de Grothendiek formado por los funtores $F:\mathcal{A}^{op} \to C$, donde $\mathcal{A}$ es una categoría de anillos conmutativos característica de la geometría algebraica. Una variedad se contempla en este caso como un conjunto variable sobre tales anillos; así, por ejemplo, la recta R es el conjunto variable que en cada anillo particular A es la recta correspondiente, es decir, $R(A)=A$, lo que se expresa con el vocabulario de las categorías diciendo que R es el *funtor olvido*, que toma de cada anillo su conjunto subyacente olvidando la estructura algebraica. Análogamente, el conjunto variable D determina en cada anillo A el conjunto de los elementos de cuadrado nulo de A, de modo que será $D(A)=\{0\}$ cuando A sea un cuerpo. La construcción del plano variable $R\times R$ es muy simple, pues basta tomar planos $A\times A$ en cada estado o nivel de la variación. Más sofisticada es la construcción del conjunto variable exponencial R^D, que calculado con las técnicas propias de los topos resulta ser

$$R^D(A) = A[\varepsilon],$$

siendo este anillo el de los *números duales* sobre el anillo A, es decir, elementos de la forma $a+b\varepsilon$ con $a,b\in A$ que se operan extendiendo a $\mathcal{E}$ las operaciones de A pero con la condición $\mathcal{E}^2=0$. Ahora el isomorfismo α de la axiomática está dado en cada estado A por la biyección

$$A \times A \cong A[\varepsilon].$$

El proceso de derivación en este modelo es como sigue: si en la exponenciación anterior colocamos R en el exponente se obtienen anillos de polinomios

$$R^R(A) = A[x],$$

de modo que un elemento f del conjunto variable R^R en el estado de variación A es un polinomio $f_A\in A[x]$; pues bien, interpretando la construcción de la derivada f' en el topos e resulta que en el estado A se obtiene el polinomio derivado habitual $f'_A\in A[x]$, de modo que ya se vislumbra que la inconsistencia del axioma con la lógica clásica no impide que la nueva formulación sea una extensión de la derivación clásica. Este modelo puede repetirse con anillos que contengan un anillo fijo K, que en particular puede ser el propio anillo R de los números reales clásicos (R-álgebras).

Pasar de esta consistencia formal a la construcción de un modelo que respondiera a las previsiones formuladas por Lawvere en relación con las variedades diferenciales llevó algo más de tiempo y fue finalmente conseguido por Dubuc [1979] a lo largo de 1978. En primer lugar fue necesario elaborar una copia del modelo algebraico de Kock que sustituyera los polinomios de R-álgebras por las funciones diferenciables reales, lo que se consigue con la teoría de los C^∞-anillos, que proporciona un modelo $\mathcal{F}$ como el anterior en el que se hacen las sustituciones siguientes:

$$A[x] = A \otimes R[x] \qquad por \qquad A \otimes C^\infty(R)$$

$$A[\varepsilon] = A \otimes R[x]/(x^2) \qquad por \qquad A \otimes C^\infty(R)/(x^2)$$

Obtenido este modelo $\mathcal{F}$ hay que refinarlo para que contenga de modo adecuado a la categoría $\mathcal{M}$ de las variedades diferenciales. El método consiste en usar la técnica de las topologías de Grothendieck para obtener un topos de haces $\mathcal{G}$ más pequeño que $\mathcal{F}$ que resulte *bien adaptado* para contener a la categoría $\mathcal{M}$ de las variedades diferenciales, lo que se hace incluyendo una variedad M en $\mathcal{G}$ a través del anillo de funciones reales $C^\infty(M)$, técnica que es similar a la usada en geometría algebraica.

El axioma de Kock-Lawvere no es, desde luego, el único de la geometría diferencial sintética, que necesita crear otros objetos infinitesimales más complejos que D mediante axiomas análogos al anterior a fin de disponer de cálculo de varias variables o del desarrollo de Taylor de longitud arbitraria, que también exige suponer que R contiene a los números racionales. Por otra parte, se debe dar una relación de orden en R para introducir un axioma que permita la integración, etc. Avanzar en la teoría exige adentrarse en los libros señalados en la bibliografía. En paralelo hay que refinar los modelos para que no sólo satisfagan el primer axioma, sino los desarrollos geométricos o analíticos más generales.

Un amplio catálogo de modelos ha sido profusamente estudiado por Moerdijk y Reyes [1991], que también se detienen en la analogía de sus métodos con el análisis no estándar. Afirman estos autores:

«Our main concern has been to show that synthetic differential geometry has a clear and direct relation to the classical theory. This relation is based on the fact that, unlike non-standard analysis, synthetic differential geometry has natural models built from smooth functions and their ideals. The main novelty of our approach, with regard to both non-standard analysis and synthetic differential geometry, is precisely the construction of such mathematically natural models containing nilpotent as wel as invertible infinitesimals [...]» [MOERDIJK & REYES, 1991, p. vi].

En cuanto a la primera parte, cabe destacar que llegan a dar versiones sintéticas de teoremas clásicos que, cuando se reinterpretan en las variedades clásicas, no sólo recuperan el resultado clásico conocido sino que amplían su validez a espacios singulares y a espacios de funciones, superando así la limitaciones de la variedades diferenciales clásicas antes señaladas[26].

Por otro lado, algunos modelos de Moerdijk y Reyes no sólo admiten la existencia de los infinitesimales nilpotentes de la geometría diferencial sintética, sino que —y ello explica el título más general dado a la obra— los hay que admiten también infinitesimales inversibles con una aritmética de Peano modificada, incorporando en este contexto aspectos de la teoría de Robinson. En definitiva, construyen modelos parciales y un modelo general para un análisis infinitesimal presentado como un sistema axiomático que parte de un lenguaje formal, similar al que se puede asociar a cada topos, y de una veintena de axiomas que se distribuyen en seis grupos: sobre las propiedades algebraicas de R, sobre los espacios infinitesimales (axiomas del tipo Kock-Lawvere), sobre la integración, sobre la aritmética (axiomas que se refieren a R, así que lo discreto se introduce a partir del continuo), sobre la topología de R y del intervalo unidad y sobre la existencia de infinitesimales inversibles.

VII. El devenir de los Infinitesimales y el Continuo

A manera de eslogan dialéctico puede afirmarse que buena parte de la matemática ha ido creciendo en torno a la contradicción entre la geometría y la aritmética devenida en álgebra; esto es, la unidad y oposición entre lo discreto y lo continuo. En este campo de batalla se enfrenta el pensamiento con el problema del infinito, esforzándose por comprender lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño. Desde que la raíz cuadrada de 2 provocó el despertar del sueño pitagórico de unidad entre el número aritmético y el punto geométrico, el contraste ha sido permanente en los niveles intuitivos, pero las formulaciones matemáticas se han inclinado por reducir lo continuo a lo discreto, explicando el continuo mediante procesos más o menos elaborados de aritmetización basados en una visión idealista de las matemáticas que tiene sus raíces en Pitágoras y Platón. Tannery [1887] relata, con citas a la *Metafísica* de Aristóteles, que Demócrito escribió una obra sobre el contacto de la circunferencia y de la esfera en la que polemizaba con Protágoras porque éste sostenía que el contacto de una circunferencia material y de una regla se realizaba sobre más de un punto. La visión materialista de Protágoras encontraba evidencia geométrica en el contacto extensivo, mientras que el punto de vista atomista de Demócrito reclamaba un punto único de contacto; éste fue el enfoque que dominó en el amplio periodo del paradigma griego[27], que se estandariza en los *Elementos* de Euclides, en los que la geometría ideal se encadena con la lógica de Aristóteles. Cuando se inició el cambio de paradigma la cuestión volvió a suscitarse en los *Diálogos* de Galileo, en los que la naturaleza de la intersección de una esfera con su plano tangente es caballo de batalla en las disputas filosóficas sobre los fundamentos de la nueva mecánica y las matemáticas [ISRAEL, 1996].

En la revisión de la matemática de los antiguos efectuada a lo largo del siglo XVII se observa una reducción metódica de la geometría al álgebra a partir de la obra de Descartes, en la que la multiplicidad de contacto de una curva con su tangente se refiere no a una variedad de puntos sino a una presencia repetida como solución de la ecuación algebraica de la representación numérica del punto geométrico único. Más interesante para nuestros fines es recordar ahora el tratamiento de las tangentes efectuado desde Fermat, que contiene las claves del entonces inminente cálculo infinitesimal; la posibilidad práctica de despreciar el cuadrado de una magnitud muy pequeña se traduce en contradicción lógica cuando se eleva al plano teórico. A pesar de llevar en su seno el problema no resuelto de la naturaleza de los infinitesimales, el nuevo cálculo se consolidó definitivamente con Newton y Leibniz y, junto con la geometría analítica, abrió las puertas del paradigma lagrangiano, la época del esplendor práctico de la matemática de las variables. Las críticas de Rolle o de Berkeley ponían el acento en problemas ciertos de fundamentación lógica, pero apenas fueron un pequeño obstáculo incapaz de frenar el éxito del cálculo infinitesimal en la resolución de problemas de aplicación.

Una de las ideas geométricas intuitivas que se afianzaron desde el triángulo diferencial pascaliano y que ya quedó recogida en el primer texto de L'Hôpital es considerar que toda curva está formada por fragmentos infinitesimales de recta, que son los contactos de la curva con sus tangentes. Esta forma de pensar el contacto de una curva con su tangente responde a la evidencia material que defendió Protágoras a propósito de recta y circunferencia, cuyo encuentro es más amplio que un solo punto; pero la historia siguió la herencia de Demócrito. Nada tiene de extraño que fuera de nuevo un filósofo materialista, Engels, quien resaltara esta idea como la esencia dialéctica del cálculo infinitesimal al considerar recta y curva como conceptos opuestos cuya identidad se realiza en el nivel infinitesimal. Aunque Engels escribió sobre estos temas entre 1873 y 1883[28], desconoce la evolución del cálculo en el siglo XIX y sus juicios se refieren a lo aprendido en la obra de Bossut [1798], pero lo que ahora nos interesa resaltar es que esta idea dialéctica es la formalizada con rigor en el axioma de Kock-Lawvere.

Las contradiciones provocadas por la naturaleza y el uso de los infinitesimales se solventaron al modo idealista mediante el proceso de aritmetización del siglo XIX, que llevó a definir el continuo a partir de lo discreto y a basar el cálculo en la teoría de conjuntos, procesos de reducción típicos de la metafísica del cálculo. En esta teoría, el axioma de comprensión impone una distinción de elementos mas acorde con un concepto aritmético de separación de puntos que con uno geométrico. Dice McLarty:

> «Yet in the dominant nineteenth century conception, while the continuum contained points, the continuum was not made of well distinguished points. [...] sets were first conceived as sets of points of spaces, and then various assumptions and discoveries were made relating spaces to their sets of points until eventualy spaces could be defined as sets of points with some estructure. Then set theoretic thinking displaced geometric intuition in the foundation of mathematics, although neither was rigorously formalized as for 1900 [...]» [McLARTY, 1988, p. 75][29].

El papel de la lógica en el proceso aritmetizador y en la teoría de conjuntos es evidente, pues ya las primeras controversias entre Dedekind y Kronecker tenían como base la aceptación o no de la ley del tercio excluso. Las diversas construcciones de los números reales a partir de los números naturales son equivalentes gracias a este principio de la lógica clásica, que es imprescindible, por ejemplo, para demostrar que los reales de Cauchy-Cantor dados por sucesiones son isomorfos a los reales obtenidos mediante cortaduras de Dedekind. Hay ejemplos bien conocidos de topos con números naturales (definidos mediante el esquema de recursión simple de Lawvere ya comentado) en los que las dos construcciones dan objetos diferentes a causa de la no validez del principio del tercio excluso en la lógica no clásica que acompaña en general a las categorías de conjuntos variables.

Antes del proceso de aritmetización, geómetras como Grassmann y Riemann defendieron ideas sobre el continuo y los infinitesimales que fueron dejadas de lado en el avance hacia la fundamentación del cálculo. Los infinitesimales no fueron desterrados del pensamiento matemático de Riemann y los geómetras diferenciales que trabajaron bajo su influencia los utilizaron con éxito en paralelo con el avance de la formalización de Weierstrass[30]. Por su parte, Grassmann [1947] defendió en la introducción a la *Teoría de la extensión* una visión de las matemáticas en la que lo continuo y lo discreto se encuentran en relación dialéctica análoga al contraste entre lo igual y lo distinto. Lo continuo y lo discreto son dos productos distintos y autónomos del pensamiento cada uno de los cuales se expresa en forma algebraica o combinatoria: con lo discreto se obtiene la aritmética y la combinatoria, mientras que el continuo algebraico es la teoría de las funciones y el continuo combinatorio la teoría de la extensión. Grassmann (recordemos que publicó su obra por primera vez en 1844) advirtió la reducción del continuo a lo discreto que se estaba operando y explicó así el devenir histórico de las matemáticas:

«De estas dos ramas [del continuo] suele subordinarse la primera a la aritmética como rama elevada, en cambio la segunda aparece como una rama aún desconocida [...] Históricamente se ha desarrollado de las cuatro ramas de las matemáticas, lo discreto antes que lo continuo (por ser más fácilmente captable por el espíritu analítico), lo algebraico antes que lo combinatorio (porque es más fácil reunir lo semejante que lo diverso). De ahí que la teoría de los números sea la más antigua, la combinatoria y el cálculo diferencial se hayan formado al mismo tiempo, mientras que de las cuatro tuvo que ser la teoría de la extensión, en su forma abstracta, la última, cuando por otro lado su representación concreta (aunque limitada), la teoría del espacio, pertenezca ya a los tiempos más antiguos [...]» [GRASSMANN, 1947, p. 27].

Antes de entrar en la exposición de la teoría de la extensión, Grassmann traza los elementos de una *teoría general de las formas*, un tipo de álgebra abstracta que estudia las leyes comunes a las cuatro ramas. De este modo, la teoría geométrica abstracta que establece contiene elementos algebraicos y geométricos formando una unidad, frente a la separación de estos componentes en el caso de la geometría cartesiana[31].

Ideas como las que acabamos de exponer, que no formaron parte de la matemática dominante en sus respectivas épocas, no han dejado de emerger incluso en nuestro siglo, inmerso hasta ahora en el paradigma hilbertiano. En un escrito pedagógico de 1907 Klein explica que la matemática puede ser *de precisión* o *de aproximación*, discutiendo en particular las relaciones entre la geometría abstracta y la práctica. En esta última:

«Dos puntos determinan su recta de unión, de modo más preciso cuanto más distantes estén uno de otro. Cuando están muy próximos entre sí, no son a propósito para determinar la recta.

Dos rectas determinan su punto de intersección de modo tanto más preciso cuanto mayor es el ángulo que forman; a medida que decrece el ángulo aumenta la inexactitud del punto de intersección [...]» [KLEIN, 1919, p. 306].

La geometría abstracta determina con carácter absoluto estas *vaguedades* de la práctica, dejando de lado la intuición, que una vez hecho su trabajo introductorio cede el puesto a los razonamientos lógicos a partir de axiomas:

«Como los entes de la Geometría abstracta no pueden ser concebidos como pertenecientes al espacio intuitivo, ninguna demostración rigurosa de la Geometría abstracta puede fundarse nunca en la simple intuición, sino que debe obtenerse como consecuencia lógica de los axiomas supuestos exactos. [Y sigue en nota añadida a pie de página] En el estado actual de la Ciencia se supone que todo matemático teórico está de acuerdo con esta condición; a mí me parece convincente, pero en tanto en cuanto se funda en la imprecisión de nuestra concepción del espacio [...]» [KLEIN, 1919, p. 308].

Pero la matemática alcanzó tal grado de independencia respecto del mundo real que se dispuso a axiomatizar sin más regla que la consistencia lógica. Así por ejemplo, Hjelmslev introdujo en los años 20 una geometría que distingue puntos *muy próximos* por los que puede pasar más de una recta; en esta geometría los puntos de la recta no forman un cuerpo y la intersección de la circunferencia y la recta es más de un punto[32]. La axiomatización propia del paradigma hilbertiano pareció nacer metafísica al entenderse como un único fundamento al que todas las matemáticas, y por ende todas las ciencias, debían remitirse en última instancia, pero en la segunda mitad del siglo la axiomática se vuelve dialéctica al fragmentarse en múltiples modelos que podrán interaccionar con diversos fragmentos de la realidad, aun sin perder la permanente aspiración a las más amplias unificaciones generales[33].

Este brote permanente de intentos de modelar en forma matemática una intuición geométrica del continuo que no sea una extensión de lo discreto se repite en la formulación de Lawvere, pero esta vez ha salido a la luz el papel que juegan los principios de la lógica y la teoría ha llegado a formar un cuerpo de doctrina. Además, Lawvere fue perfeccionando a lo largo del tiempo la compenetración entre su práctica matemática y reflexión dialéctica [MELONI, 1985]. En la introducción de un trabajo en honor de Ehresmann, Lawvere [1980] explicó, en sintonía con Lenin, su visión materialista de la dinámica en términos de *materia que se mueve y materia que piensa*, y cómo su axiomática para la derivación pretendía captar las *relaciones generales abstractas decisivas* del proceso, algunas de las cuales ya consideraba contenidas en la teoría de categorías. Y remite a la *Crítica de la economía política* de Marx para comprender el papel que dichas relaciones decisivas juegan en la *reconstrucción de lo concreto como concepto.* En dicho trabajo vuelve a insistir en la capacidad que su formulación puede tener para explicar el movimiento de los cuerpos materiales[34].

VIII. Marx y las Derivadas

Dedicaremos esta última sección a exponer brevemente la relación que tiene la geometría diferencial sintética con la reflexión sobre el proceso de obtención de la derivada que aparece en los *Manuscritos matemáticos* de Marx [1983], proceso que ha sido estructurado por Lawvere [1996a] utilizando métodos de la teoría de categorías, dando así una muestra más de la capacidad de esa teoría para *disipar algunos de los misterios* de la filosofía dialéctica.

La obra más moderna de matemáticas que aparece citada en los *Manuscritos* es el texto de cálculo diferencial e integral de Moigno, seguidor de Cauchy. Este libro es el último de los que figuran en el índice previo al análisis histórico sobre los fundamentos del cálculo que Marx se propuso llevar a cabo, pero cuya redacción terminó en el apartado anterior, que era la exposición algebraica del cálculo según Lagrange. Como resultado de su análisis crítico del confuso estado conceptual en que conoció el cálculo diferencial, Marx quiso evitar los infinitesimales y también los límites, explicando el proceso de derivar en clave dialéctica, como la transformación de un valor de la variable x a otros dos distintos x, y, de manera que la diferencia de los valores que la función $f(x)$ toma en ellos se pueda calcular de la forma

$$f(x) - f(y) = (x - y)\, g(x,y)$$

donde la función $g(x,y)$ es un anticipo de la derivada de f, porque es una función de dos variables a partir de la cual resulta la derivada por un proceso de identificación

$$f\,'(x) = g(x,x).$$

Marx verificó la existencia de esta *derivada preliminar* g cuando f es un polinomio y en otros casos de funciones elementales[35]. La versión de Hadamard [1927] del teorema fundamental del cálculo nos da $g(x,y)$ como la integral entre 0 y 1 de la función $f\,'(y+t(x-y))$ con variable t, pero la propuesta de Marx significaba invertir el proceso, obteniendo primero g y después $f\,'$ mediante la evaluación de g en la diagonal.

El asunto tomó un nuevo enfoque cuando se inició la geometría diferencial sintética. Reyes observó que, en vez de introducir el conjunto D de los infinitesimales y el axioma de Kock-Lawvere, se puede dar como alternativa el que llamó *axioma de Fermat*[36], que afirma que para cada función $f{:}R \to R$ existe una única función $g{:}R \times R \to R$ que verifica la igualdad anterior destacada por Marx, para cada $x,y \in R$. Este axioma no utiliza los infinitesimales nilpotentes, pero es suficiente para obtener las reglas básicas de la derivación si se toma $f'(x)$ como indicó Marx. Con esta alternativa se llega también a una obstrucción de tipo lógico, pues el axioma de Fermat resulta incompatible con la ley del tercio excluso de la lógica clásica, pero tiene modelos en los topos. Por otra parte, si los axiomas de Kock-Lawvere y de Fermat se dan juntos, entonces las dos nociones de derivada que proponen coinciden; pero es más fuerte el axioma de Fermat, pues el de Kock-Lawvere junto con un axioma de integración —que asegura la existencia de funciones primitivas— implican el axioma de Fermat sin la unicidad de la función g, cuya existencia se obtiene a través de una integral. Este enunciado se conoce en geometría diferencial sintética como *lema de Hadamard*. La unicidad de g resulta si se añade otro axioma[37] que afirma que si una función $f:R \to R$ verifica $xf(x)=0$ para cada $x \in R$ entonces $f=0$.

Estas consideraciones permiten apreciar que el rasgo de la derivada que fue captado como esencial por Marx tiene una profunda conexión con el teorema fundamental del cálculo, que establece que derivar e integrar son procesos inversos. Interesa ahora notar que Marx afirma haber encontrado una explicación dialéctica de la derivación, pues se trata de una doble negación creadora, de lograr algo nuevo a partir de una unidad de opuestos que interaccionan: a partir de la identidad x se tiene la oposición entre los valores distintos x, y, que tras el proceso de síntesis de la derivada preliminar se unifican para dar como resultado $f'(x)$. Lawvere [1996a] plantea así este enfoque dialéctico:

> «Presopposing those laws of algebra which are equally valid for variable and constant quantities, what is additionally required in order to determine the derivatives of genuinely variable quantities and to establish the laws of the derivative? The answer is the unity and identity of opposites permitting a single variable to be split into two like variables and later collapsed again to one. How can we make this conclusion into precise mathematics?»

Lawvere representa este proceso, en una categoría, mediante un esquema que llama *cilindro* (el cilindro es un cuerpo que contiene el espacio que unifica dos bases iguales separadas), formado por dos objetos C, B, entre los que hay tres morfismos: $u:C \to B$ y $p_0,p_1:B \to C$, de modo que $u \cdot p_0 = u \cdot p_1$ es la identidad en B. Los morfismos p_0, p_1 representan la oposición en C de dos copias de B y el morfismo u la unificación. Dado un cilindro en una categoría de anillos, Lawvere introduce axiomas simples que permiten derivar a la manera de Marx. Cada elemento x del anillo pequeño da lugar a dos valores $x_0=p_0(x)$, $x_1=p_1(x)$ en el anillo grande C que determinan un incremento, $\Delta x = x_0 - x_1$, que también está en C. Por otra parte, si q está en C se escribe $q \rightarrow x$ para indicar que q se unifica con x, es decir, $u(q)=x$. Establecida esta notación, Lawvere distingue mediante la propiedad

$$q \rightarrow x = 0 \quad \text{implica} \quad q \rightarrow 0$$

a los elementos x del anillo pequeño B que van a tener estatuto de variable independiente, respecto de los cuales otros elementos y de B se podrán derivar, precisamente aquéllos para los que exista la derivada preliminar g en el anillo grande C, que será un factor de proporcionalidad incremental

$$\Delta y = g\ (\Delta x)$$

Entonces Lawvere define la derivada de y respecto de x como la cantidad y' del anillo pequeño que es la unificación de g, es decir,

$$g \rightarrow y'$$

Estos axiomas se inspiran en la derivación ordinaria, que se recupera como caso particular si se toma en la categoría de los conjuntos clásicos el cilindro en el que $C=C^{\infty}(R \times R)$ y $B=C^{\infty}(R)$, siendo u, p_0, p_1 las aplicaciones asociadas respectivamente a la diagonal $R \rightarrow R \times R$ y a las dos proyecciones $R \times R \rightarrow R$.

Lawvere completa el artículo citado sugiriendo ejemplos de aplicación a otras situaciones matemáticas y físicas, especialmente a la mecánica del continuo, sugiriendo un esquema dialéctico de tipo cilindro para la teoría matemática propuesta por Noll [1993] para estudiar los procesos de deformación de los cuerpos continuos.

IX. Epílogo

La línea dominante en la que se ha producido el desarrollo histórico del cálculo infinitesimal puede presentarse como un proceso que culmina en el análisis no estándar de Robinson, a lo largo del cual la práctica operativa del cálculo se somete a una creciente precisión técnica y conceptual. En los inicios del cálculo los infinitesimales proporcionan una base intuitiva cuya formalización plantea severas contradiciones lógicas, basadas unas veces en el caracter inversible de las cantidades infinitesimales y otras en su carácter nilpotente. Por ello, aunque los infinitesimales nunca se apartaron de las esferas de la intuición y de las aplicaciones, fueron rechazados en la rigorización del siglo

XIX, que produjo una fundamentación del análisis por medio de la teoría de conjuntos y de la aritmetización del continuo. La teoría de conjuntos exigió un profundo desarrollo de la lógica matemática y fueron precisamente sus avanzados métodos del presente siglo los que permitieron a Robinson recuperar una explicación de la derivada mediante los infinitesimales inversibles, que aparecen en un sistema ampliado de números que extiende la aritmética de Peano y los números reales clásicos. Esta concepción del cálculo se califica como metafísica porque se basa en una visión de las matemáticas de tipo idealista platónico que reduce todas sus construcciones a unos principios únicos que pretenden captar la realidad objetiva preexistente.

A lo largo del tiempo no han dejado de presentarse intentos de explicar el cálculo con infinitesimales, las relaciones entre lo discreto y lo continuo, o entre la geometría y el álgebra, mediante visiones dialécticas asociadas a filosofías materialistas y a lógicas que se debilitan sin la ley del tercio excluso y la doble negación. En los años sesenta del presente siglo surgieron teorías matemáticas que proporcionaban una nueva capacidad de expresión técnica a estos modos de pensamiento. La teoría de categorías formuló una opción dialéctica para los conjuntos, entendiendo por tal que un conjunto ya no se determina por sus elementos sino por las aplicaciones que puede soportar, el concepto primitivo ya no es lo que el conjunto es en sí mismo, sino las relaciones que puede mantener con los demás conjuntos.

Utilizando teoría de categorías progresó también en los sesenta la geometría algebraica mediante métodos en los que se hace un uso fructífero de los elementos nilpotentes de los anillos de funciones localizados. Se llegó así a formalizar un tipo de categorías, llamadas topos, que aparecen como categorías de conjuntos variables cuya lógica asociada es la lógica formal intuicionista, lo que permite disponer de una gama variada de universos de conjuntos adaptables a las situaciones particulares que diversos problemas matemáticos puedan requerir. Ello permitió a Lawvere dar una axiomática del cálculo infinitesimal mediante infinitesimales nilpotentes que, si bien era incompatible con los conjuntos constantes clásicos, tenía modelos en topos de conjuntos variables que, al ser construidos sobre los conjuntos clásicos, probaban que el nuevo cálculo era compatible con el tradicional pero aplicable en categorías más generales. Además, Moerdijk y Reyes han obtenido modelos en los que hay infinitesimales nilpotentes e inversibles junto con un tipo de aritmética que permite analogías con el análisis no estándar. Con todo ello, se han extendido teoremas clásicos sobre variedades diferenciales al caso de dimensión infinita y se apunta la posibilidad de que estos métodos permitan aplicaciones a la física que superen algunas dificultades que se presentan con la matemática actual.

La forma dialéctica que Marx dio al proceso de derivación, sin necesidad de límites ni infinitésimos, también ha sido formalizada con un amplio esquema de teoría de categorías que admite otras interpretaciones.

El objetivo de este trabajo ha sido presentar sucintamente estos desarrollos matemáticos de los últimos treinta años y algunos de sus antecedentes históricos en el marco de las relaciones entre ciencia e ideología, intentando sobre la marcha ir poniendo de manifiesto que en el fluir de las ideas matemáticas están presentes tanto aspectos que se refieren a la visión general que los matemáticos tienen de su ciencia y de su quehacer práctico como posiciones filosóficas o ideológicas que afectan a aspectos vitales más amplios que la propia actividad matemática. En el caso que nos ha ocupado la filosofía general que impregna el tratamiento no convencional es el materialismo, particularmente en su formulación dialéctica del siglo pasado, vínculo que se hace plenamente explícito en los escritos de Lawvere, el matemático que ha liderado los recientes desarrollos aquí expuestos.

Que esta conexión con la filosofía dialéctica hiciera eclosión en la década de los sesenta, en medio de la agitada juventud universitaria, sugiere otras correlaciones entre la actividad matemática y el nivel ideológico de los protagonistas, todavía pendientes de clarificación. Mac Lane, uno de los fundadores de la teoría de categorías, ha iniciado una serie de relatos de su experiencia personal en este campo en los que asoman algunos de estos aspectos de la actividad matemática en su contexto social e ideológico, pero aparecerán con el tiempo otras memorias de los protagonistas principales y documentación que pueda ser examinada por los historiadores a fin de obtener un balance acertado sobre estas correlaciones.

También hace falta tiempo para conocer las posibilidades que para la matemática del futuro van a tener estos planteamientos dialécticos. Un cierto pesimismo, al menos momentáneo, se aprecia en el párrafo siguiente de Moerdijk y Reyes que abre el prólogo de su libro sobre modelos, una obra preparada unos años antes de su publicación:

«This book appears at the wrong moment, since it goes against the mathematical tide, which nowadays seems to be moving away from abstraction and conceptualization towards concerteness and specialization. Nevertheless, we have decided to publish it, rather than wait for the turn of the tide. Our purpose is to explain infinitesimals and infinitely large integers, as they were used before their elimination by the set-theoretic trend in mathematics. Our explanation doesn't go against this trend, but tries to give a consistent reinterpretation of infinitesimals in a set-theoretic context, through the use of sheaf theory [...]» [MOERDIJK & REYES, 1991, p. v].

Al igual que en los sesenta la teoría de categorías se benefició de una explosión del interés por la matemática conceptual, en la última década las prioridades sociales en Occidente han llevado a buena parte de los teóricos de las categorías hacia la moda informática y computacional que nos invade o en otras direcciones. No obstante, la cita de Lawvere que abre el presente trabajo deja ver un ánimo más esperanzado a medio y largo plazo. Si las páginas que aquí terminan no son criticadas muy severamente por los que conocen el tema y su lectura anima a alguno de los lectores neófitos a interesarse por esta materia desde los puntos de vista matemático, histórico o filosófico, esta modesta contribución en favor de la matemática dialéctica habrá cumplido su objetivo.

NOTAS

1. No se trata de rechazar la lógica clásica desde una posición filosófica (ideológica), sino de trabajar con una lógica formal más general que tiene a la clásica como caso particular, si bien la teoría infinitesimal a la que aludimos se hace trivial en este caso.
2. Parece relevante, en un contexto de ciencia e ideología, llamar la atención sobre el protagonismo que en el primer desarrollo de esta teoría han tenido, junto al fundador norteamericano y otros europeos, la selecta terna de matemáticos originarios de América Latina que han aparecido en las referencias anteriores: los argentinos Marta Bunge y Eduardo Dubuc y el chileno Gonzalo Reyes, incorporados a la matemática más avanzada del norte continental.
3. Struik [1948] da varios argumentos que pueden explicar que Marx ignorara el trabajo de Cauchy.
4. Véanse los trabajos de los filósofos GÓMEZ PIN [1986-87] y JOVEN [1997].
5. El texto es de 1973 y apareció póstumamente dos años después [ROBINSON, 1975, p. 51]. Se trata de su conferencia en el Coloquio de Lógica de Bristol, en el que compartió tribuna, entre otros investigadores invitados, con MacLane [1975] y Lawvere [1975].
6. Las primeras exposiciones públicas fueron LAWVERE [1971] y TIERNEY [1973].
7. Corry [1996] contiene un relato del inicio de la teoría de categorías guiado por los escritos de MacLane sobre el tema y enmarcado en un estudio de la aparición de las estructuras matemáticas.

8. Desde que aprendí categorías en el año 1970 me resulta muy poco natural pronunciar *functor* en lengua española y he optado por utilizar el término *funtor*, aunque otros no lo hacen así.
9. Lawvere y Shanuel [1997] presentan la teoría de categorías de modo elemental, mostrando que esta teoría suministra conceptos generales transversales a las divisiones convencionales de las matemáticas y sirve de fundamento a la matemática discreta y a la continua al mismo tiempo. Su propuesta pedagógica es diferente a la de Hilton [1975].
10. Estos objetivos están alcanzados respectivamente en LAWVERE [1966, 1964, 1965]. En realidad los resultados presentados en La Jolla ya estaban citados, aunque posponiendo los detalles, en su presentación de la teoría de conjuntos sin elementos. Más tarde, por una parte Blanc y Donnadieu [1976] y por otra McLarty [1991] han perfeccionado técnicamente el trabajo axiomático de Lawvere sobre la categoría de las categorías.
11. Vincula así el crecimiento de la investigación en el área con un fenómeno sociopolítico bien conocido que afectó a Occidente en la década de los sesenta: el impulso a la educación matemática bajo el eslogan *matemática moderna* como arma para contrarrestar la delantera tomada por la URSS en la carrera espacial. Esta medida política trajo consigo un fuerte incremento de la comunidad matemática en todos los países occidentales.
12. En este punto es interesante ver McLARTY [1994].
13. La notación $P{:}\mathcal{B}^{op}\to C$ indica que se trata de funtores contravariantes respecto a las inclusiones de los abiertos, es decir, que a la inclusión del abierto U en el abierto V hacen corresponder una aplicación $P(V)\varnothing P(U)$, en sentido inverso, llamada *restricción*.
14. Véase GROTHENDIECK & VERDIER [1972, pp. 302-303]. Este volumen corresponde al Seminario de Geometría Algebraica du Bois-Marie celebrado en 1963-64 bajo la dirección de Artin, Grothendieck y Verdier. Los cuatro *exposés* que aparecen se deben a los dos últimos autores.
15. Para un relato extenso de este diverso origen de los topos véase McLARTY [1990].
16. Esta obra contiene una reseña histórica completa de los primeros pasos de la teoría. Un resumen accesible sobre los topos y su lógica puede verse en MAC LANE [1975] y también en BUNGE [1984]. Otras referencias panorámicas sobre topos son los artículos de BELL [1982, 1986], y un texto más moderno en MAC LANE & MOERDIJK [1992].
17. «It is difficult to understand why so many instances of this development come in just this one year», dice MAC LANE [1988, p. 346] antes de enumerar seis progresos notables que hicieron comprender que la teoría de categorías podía ser un campo de investigación matemática. Entre ellos se encuentran los temas que hemos llamado (*A*1) y (*A*5). En otro momento [p. 353] se refiere a la aparición de (*A*2) «in that magical year 1963».

18. En un trabajo posterior con abundante contenido retrospectivo ya citado [LAWVERE, 1976] expone con detalle el método dialéctico seguido en el análisis de los conjuntos y la relación de pertenencia para obtener una noción abstracta de conjunto sin dicha relación y más tarde la de conjunto variable parametrizado por un conjunto constante. Véase también MELONI [1985].
19. En el primer caso se refiere al estudio del espectro primo de los anillos conmutativos, y la condición (ω) es la existencia del objeto de los números naturales, definido en un topos mediante una formulación categórica de la recursión, a partir del cual se van extendiendo los objetos de números enteros, racionales, reales, etc., con el mismo proceso formal que en el caso clásico.
20. Véase JOYAL [1975] y STOUT [1976]. Ambos trabajos se presentaron en el Coloquio sobre Teoría y Aplicaciones de las Categorías celebrado en Amiens (Francia) en 1974.
21. Publicado con ocasión de una reunión de investigadores celebrada en Aarhus (Dinamarca) en mayo de 1978. MAC LANE [1988] pone alguna objeción al valor histórico de este documento por no ser una reproducción exacta de manuscritos originales. En el texto preliminar a la edición de 1979 Lawvere indica: «The following is intended as a summary of some lectures which I gave at several places in 1967. [...] My main external sources for the following summary have been page 937 of volume 14 of the Notices of the AMS and especially notes taken by Saunders MacLane on May 19, 1967 at Chicago and on November 25, 1967 at Urbana, which he very kindly sent to me in summer 1978».
22. Hacia 1960 Lawvere había estudiado mecánica del continuo con Truesdell y Noll en la Universidad de Indiana [MAC LANE, 1988].
23. En aquellos años estaba estudiando los topos de Grothendieck, portadores de la idea de conjunto variable que muy pronto se iba a desarrollar en forma de teoría abstracta, como ya hemos visto.
24. Kock y Wraith [1971] escribieron la primera monografía sobre la teoría de topos elementales, surgida de lecciones impartidas durante el curso 1970-71. Un año después, Wraith [1972] escribió sobre las ideas de Lawvere: «This note is an expansion of some ideas of F.W. Lawvere which occur in a manuscript entitled: «Categorical Dynamics» and dated 19th May 1967». Se ocupó del álgebra de Lie de los campos vectoriales, en la teoría formal y en los modelos.
25. Kock [1981] ofrece una cronología detallada de los primeros pasos de la teoría y sus protagonistas.
26. Véase a este respecto el análisis sobre un teorema de Ambrose, Palais y Singer en MOERDIJK & REYES [1991, pp. 226 ss.].
27. Usamos este concepto, y los de paradigma lagrangiano y paradigma hilbertiano que mencionaremos más adelante, según la terminología de HORMIGÓN [1996].

28. En esta década escribió *Dialéctica de la naturaleza* [ENGELS, 1979] y *Anti-Dühring* [ENGELS, 1968], aunque la primera no se publicó hasta 1925.
29. En este trabajo, McLarty compara los desarrollos del siglo XIX con una formalización mediante la teoría de topos de la distinción entre conjunto de puntos y espacio de puntos, en la que juega un papel esencial la ley del tercio excluso.
30. En la introducción de MOERDIJK & REYES [1991] hay una exposición muy acertada de este uso furtivo de los infinitesimales por Darboux, Lie y Cartan, uso que restaura con pleno rigor la geometría diferencial sintética.
31. Véase en LAWVERE [1996b] un comentario de la obra de Grassmann a la luz del pensamiento dialéctico expresado mediante la teoría de las categorías.
32. Esta geometría y el antecedente griego de Protágoras se citan en las notas al primer capítulo de KOCK [1981, p. 6].
33. Israel [1996] da cuenta de cómo los modelos matemáticos de la realidad han evolucionado desde el modelo mecanicista único hasta la variedad de modelos matemáticos sugeridos por la física, la biología y la economía a partir de finales del pasado siglo.
34. En mayo de 1982 se celebró en Bufffalo un encuentro sobre estos temas entre investigadores matemáticos y físicos [LAWVERE & SCHANUEL, 1986].
35. Para más detalles véase GLIVENKO [1935], STRUIK [1948] y KENNEDY [1977].
36. Cifoletti [1990] intenta hacer explícita la relación genérica que existe entre los métodos de trabajo de Fermat con los infinitesimales y la geometría diferencial sintética. También Bell [1988] relaciona estos métodos actuales con los de los autores clásicos.
37. Detalles sobre estas relaciones se encuentran en KOCK [1981], LAVENDHOMME [1987] y MOERDIJK & REYES [1991].

BIBLIOGRAFÍA

BELL, J.L. (1982) «Categories, toposes and sets». *Synthese, 51,* 293-337.

BELL, J.L. (1986) «From absolute to local mathematics». *Synthese, 75,* 409-426.

BELL, J.L. (1988) «Infinitesimals». *Synthese, 75,* 285-315.

BLANC, G. & DONNADIEU, M.R. (1976) «Axiomatisation de la catégorie des catégories». *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle, 17,* 1-35

BOSSUT, CH. (1798) *Traités de calcul différentiel et de calcul intégral.* París, 2 vols.

BUNGE, M. (1984) «Toposes in logic and logic in toposes». *Topoi, 3,* 13-22.

CIFOLETTI, G.C. (1990) *La méthode de Fermat: son statut et sa diffusion.* París, Societé Francaise d'Histoire des Sciences et des Techniques.

COHEN, P.M. (1963) «The independence of continuum hypothesis». *Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 50,* 1143-1148.

COHEN, P.M. (1966) *Set theory and the continuum hypothesis*. New York-Amsterdam, Benjamin.

CORRY, L. (1996) *Modern algebra and the rise of mathematical structures*. Basel, Birkhäuser.

DAUBEN, J.W. (1988) «Abraham Robinson and nonstandard analysis: history, philosophy, and foundations of mathematics». En: W. Aspray & Ph. Kitcher (eds.) *History and philosophy of modern mathematics*. «Minnesota Studies in the Philosophy of Science», XI. Minneapolis, University of Minnesota Press, pp. 177-200.

DEMIDOV, S.S. (1996) «Where is the meeting place of philosophical influence on mathematics? An example taken from the history of mathematics in Russia». En: E. Ausejo & M. Hormigón (eds.) *Paradigms and Mathematics*. Madrid, Siglo XXI, pp. 283-288.

DUBUC, E. (1979) «Sur les modèles de la géométrie différentielle synthétique». *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle, 20,* 231-279.

EILENBERG, S. & MACLANE, S. (1945) «General theory of natural equivalences». *Transactions of the American Mathematical Society, 58,* 231-294.

ENGELS, F. (1968) *Anti-Dühring*. México, Grijalbo [trad. M. Sacristán].

ENGELS, F. (1979) *Dialéctica de la naturaleza*. Barcelona, Grijalbo [trad. W. Roces].

GLIVENKO, V. (1935) «Der Differentialbegriff bei Marx und Hadamard». *Unter dem Banner des Marxismus, 9,* 102-110.

GÓMEZ PIN, V. (1986-87) «Ontología e historia del calculus (La tarea de Abraham Robinson)». *Theoria, II(4),* 97-119.

GRAY, J. (1979) «Fragments of the history of sheaf theory». En: *Applications of sheaves*. «Lecture Notes in Mathematics», 753. Berlín, Springer-Verlag, pp. 1-79.

GRASSMANN, H. (1947) *Teoría de la extensión*. Buenos Aires, Espasa-Calpe [trad. O. Roxin; trad. francesa París, Blanchard, 1994].

GROTHENDIECK, A. & VERDIER, J.L. (1972) *Théorie de topos et cohomologie étale des schémas*. SGA 4. «Lecture Notes in Mathematics», 269. Berlín, Springer-Verlag.

HADAMARD, J. (1927) *Cours d'analyse*. París, Hermann.

HILTON, P.J. (1975) *El lenguaje de categorías*. Madrid, Tecnos.

HORMIGÓN, M. (1996) «Paradigms and Mathematics: a theoretical model for research into the history of mathematics». En: E. Ausejo & M. Hormigón (eds.) *Paradigms and Mathematics*. Madrid, Siglo XXI, pp. 1-113.

ISRAEL, G. (1996) *La mathématisation du réel*. París, Seuil.

JOHNSTONE, P.T. (1977) *Topos theory*. New York, Academic Press.

JOYAL, A. (1975) «Les théorèmes de Chevalley-Tarski et remarques sur l'algèbre constructive». *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle, 16,* 256-258.

JOVEN, F. (1997) «Los infinitesimales como ficciones útiles para Leibniz: la polémica en la Academia de París». *Theoria, II(12),* 257-279.

KAN, D.M. (1958) «Adjoint functors». *Trans. Amer. Math. Soc., 87,* 294-329.

KENNEDY, H. (1977) «Karl Marx and the foundations of differential calculus». *Historia Mathematica, 4,* 363-368.

KLEIN, F. (1919) «Matemática de precisión y matemática de aproximación». *Revista Matemática Hispano-Americana, I(10),* 305-314 [trad. parcial de *Anwendung der Differential und Integral Rechnung auf Geometrie. Eine Revision der Principien,* Leipzig, 1907].

KOCK, A. (1977) «A simple axiomatics for differentiation». *Math. Scand., 40,* 183-193. [Inicialmente aparecido en *Preprint Series* 1975/76, N.° 12, January 1976. Aarhus Universitet, Matematisk Institut].

KOCK, A. (1981) *Synthetic differential geometry.* «LMS Lecture Note Series», 51. Cambridge, Cambridge University Press.

KOCK, A. & WRAITH, G.C. (1971) *Elementary toposes.* «Lecture Notes Series», 30. Aarhus Universitet, Matematisk Institut.

KRIPKE, S. (1965) «Semantical analysis of intuitionistic logic I». En: J.N. Crossley & M.A.E. Dummett (eds.) *Formal systems and recursive functions.* Amsterdam, North-Holland, pp. 92-130.

LAVENDHOMME, R. (1987) *Leçons de géométrie différentielle synthétique naïve.* Louvain-la-Neuve, C.I.A.C.O. [2ª ed. ampliada *Basic concepts of synthetic differential geometry.* Dordrecht, Kluwer, 1996].

LAWVERE, F.W. (1964) «An elementary theory of the category of sets». *Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 52,* 1506-1511.

LAWVERE, F.W. (1965) «Algebraic theories, algebraic categories, and algebraic fuctors». En: *Theory of models.* Amsterdam, North-Holland, pp. 413-418.

LAWVERE, F.W. (1966) «The category of categories as a foundation for mathematics». En: S. Eilenberg *et al.* (eds.) *Proceedings.of the conference on categorical algebra, La Jolla 1965.* Berlín, Springer-Verlag, pp. 1-20.

LAWVERE, F.W. (1971) «Quantifiers and sheaves». En: *Actes, Congrès Intern. Math., Nice 1970.* París, Gauthier-Villars, vol. 1, pp. 329-334.

LAWVERE, F.W. (1975) «Continuously variable sets; algebraic geometry=geometric logic». En: H.E. Rose & J.C. Shepherdson (eds.) *Logic colloquium '73.* Amsterdam, North-Holland, pp. 134-156.

LAWVERE, F.W. (1976) «Variable quantities and variable structures in topoi». En: A. Heller & M. Tierney (eds.) *Algebra, topology and category theory: a collection of papers in honour of Samuel Eilenberg.* New York, Academic Press, pp. 101-131.

LAWVERE, F.W. (1979) «Categorical dynamics». En: A. Kock (ed.) *Topos theoretic methods in geometry.* Aarhus, Mat. Inst., Aarhus Univ., pp. 1-28.

LAWVERE, F.W. (1980) «Toward the description in a smooth topos of the dynamically possible motions and deformations of a continuous body». *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle, 21,* 377-392.

LAWVERE, F.W. (1992) «Categories of space and of quantity». En: J. Echeverría *et al.* (eds.) *The space of mathematics.* Berlín, W. de Gruyter, pp. 14-30.

LAWVERE, F.W. (1994) «Cohesive toposes and Cantor's *lauter Einsen*». *Philosophia Mathematica, 3(2),* 5-15.

LAWVERE, F.W. (1996a) «Unity and identity of opposites in calculus and physics». *Appl. Categorical Structures, 4,* 167-174.

LAWVERE, F.W. (1996b) «Grassmann's dialectics and category theory». En: G. Schubring (ed.) *Hermann Günther Grassmann (1809-1877): visionary mathematician, scientist and neohumanist scholar.* Dordrecht, Kluwer, pp. 255-264.

LAWVERE, F.W. & SCHANUEL, S.H. (eds.) (1986) *Categories in continuum physics.* «Lecture Notes in Mathematics», 1174. Berlín, Springer-Verlag.

LAWVERE, F.W. & SCHANUEL, S.H. (1997) *Conceptual mathematics. A first introduction to categories.* Cambridge, Cambridge University Press.

LORENZO, J. de (1984) «La matemática en Marx y Engels». *Sistema, 63,* 59-83.

MAC LANE, S. (1975) «Sets, topoi, and internal logic in categories». En: H.E. Rose & J.C. Shepherdson (eds.) *Logic colloquium '73.* Amsterdam, North-Holland, pp. 119-134.

MAC LANE, S. (1988) «Concepts and categories in perspective». En: P. Duren (ed.) *A century of mathematics in America.* Providence, AMS, Part I, pp. 323-365.

MAC LANE, S. & MOERDIJK, I. (1992) *Sheaves in geometry and logic. A first introduction to topos theory.* New York, Springer-Verlag.

McLARTY, C. (1988) «Defining sets as sets of points of spaces». *Journal of Philosophical Logic, 17,* 75-90.

MAC LANE, S. & MOERDIJK, I. (1990) «The uses and abuses of the history of topos theory». *Brit. J. Phil. Sci., 41,* 351-375.

MAC LANE, S. & MOERDIJK, I. (1991) «Axiomatizing a category of categories». *The Journal of Symbolic Logic, 56,* 1243-1260.

MAC LANE, S. & MOERDIJK, I. (1994) «Category theory in real time». *Philosophia Mathematica, 3(2),* 36-44.

MARX, K. (1983) *The mathematical manuscripts.* First English translation, Londres, New Park Publications [trad. al gallego de X. García Suárez, Vigo, Edicións Xerais de Galicia, 1987].

MELONI, G.C. (1985) «Teoria delle categorie, fondamenti della matematica e materialismo dialettico». En: C. Mangione (ed.) *Scienza e filosofia. Saggi in onore di Ludovico Geymonat.* Milan, Garzanti.

MOERDIJK, I. & REYES, G.E. (1991) *Models for smooth infinitesimal analysis.* New York, Springer-Verlag.

NOLL, W. (1993) «The geometry of contact, separation, and reformation of continuous bodies». *Arch. Rational Mech. Anal., 122,* 197-212.

NOVAK, G. (1989) «Riemann's *Habilitationvortrag* and the synthetic *a priori* status of geometry». En: D.E. Rowe & J. McClearly (eds.) *The history of modern mathematics.* Boston, Academic Press, vol. 1, pp. 17-46.

PHILI, CH. (1996) «La loi suprême de Höene-Wronski: la rencontre de la philosophie et des mathématiques». En: E. Ausejo & M. Hormigón (eds.) *Paradigms and Mathematics*. Madrid, Siglo XXI, pp. 289-308.

REY PASTOR, J. (1944) «La filosofía ficcionista». *Minerva, Revista Continental de Filosofía, II(4),* 1-11 [Reprod. en REY PASTOR, J. (1993) *Escritos de las dos orillas*. Selección, introducción y notas de L. Español. Logroño, Gobierno de La Rioja].

RIEMANN, B. (1979) *Sobre las hipótesis que hacen de fundamento de la geometría*. Caracas, Ediciones de la Biblioteca, Universidad de Venezuela [trad. del alemán por J.D. García Bacca].

ROBINSON. A. (1966) *Non-standard analysis*. Amsterdam, North-Holland [revised ed. 1974].

ROBINSON. A. (1967) «The metaphysics of the calculus». En: *Problems in the philosophy of mathematics*. Amsterdam, North-Holland, pp. 41-52.

ROBINSON. A. (1975) «Concerning progress in the philosophy of mathematics». En: H.E. Rose & J.C. Shepherdson (eds.) *Logic colloquium '73*. Amsterdam, North-Holland, pp. 28-46.

STOUT, L. (1976) «Topological properties of the real numbers in a topos». *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle, 17,* 295-326.

STRUIK, D. (1948) «Marx and mathematics». *Science and Society, 12,* 181-196.

TANNERY, P. (1887) *La géométrie greque*. París, Gauthier-Villars [reimp. Hildesheim, G. Olm, 1988].

TIERNEY, M. (1973) «Axiomatic sheaf theory». *Proceedings of the CIME Conference on categories and commutative algebra, Varena, 1971*. Edizione Cremonese, pp. 249-36.

WRAITH, G.C. (1972) *Representable tangent bundles*. Manuscrito.