

# TESIS DOCTORAL

## Control predictivo con modos deslizantes

M<sup>a</sup> de las Mercedes Pérez de la Parte



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA



# **TESIS DOCTORAL**

**Control predictivo  
con modos deslizantes**

**M<sup>a</sup> de las Mercedes Pérez de la Parte**

**Universidad de La Rioja  
Servicio de Publicaciones  
2005**

Esta tesis doctoral, dirigida por los doctores D. Eduardo Fernández Camacho y D. Óscar Camacho Quintero, fue leída el 4 de junio de 2004, y obtuvo la calificación de Sobresaliente Cum Laude

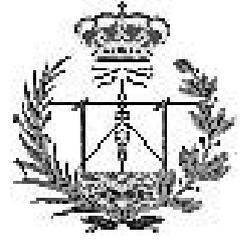
© M<sup>a</sup> de las Mercedes Pérez de la Parte

Edita: Universidad de La Rioja  
Servicio de Publicaciones

ISBN 84-689-1172-0



**TESIS DOCTORAL**



**Control Predictivo  
con Modos Deslizantes**

**Autora:**

M<sup>a</sup> de las Mercedes Pérez de la Parte

**Directores:**

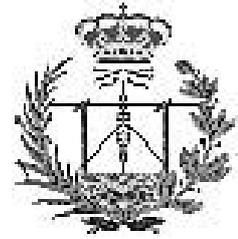
Eduardo Fernández Camacho

Oscar Camacho Quintero





**TESIS DOCTORAL**



**Control Predictivo  
con Modos Deslizantes**

por

M<sup>a</sup> de las Mercedes Pérez de la Parte

Ingeniera de Telecomunicación por la  
Escuela Superior de Ingenieros de la Universidad de Sevilla

presentada en la

Escuela Superior de Ingenieros  
Universidad de Sevilla

para la obtención del

Grado de Doctora Ingeniera de Telecomunicación

Sevilla, 4 de Junio de 2004



# Índice general

Índice general	III
Índice de figuras	VII
Índice de tablas	XV
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.1.1. Control por modo deslizante . . . . .	1
1.1.2. Control predictivo basado en modelo . . . . .	6
1.2. Resumen histórico . . . . .	8
1.2.1. Control por modo deslizante en tiempo continuo . . . . .	8
1.2.2. Control por modo deslizante en tiempo discreto . . . . .	10
1.2.3. Control predictivo basado en modelo . . . . .	11
1.3. Objetivos y estructura de la tesis . . . . .	12
1.3.1. Motivación . . . . .	12
1.3.2. Estado del arte . . . . .	14

1.3.3. Objetivos . . . . .	15
1.3.4. Estructuración de contenidos . . . . .	15
<b>2. Control por acercamiento predictivo al modo pseudodeslizante</b>	<b>17</b>
2.1. Introducción . . . . .	17
2.2. Controlador predictivo por modo pseudodeslizante con supercie diferencial PSMC1 . . . . .	18
2.2.1. Síntesis del controlador PSMC1 . . . . .	19
2.2.2. Sintonización de parámetros . . . . .	21
2.2.3. Análisis de Estabilidad . . . . .	32
2.2.4. Análisis de Robustez . . . . .	44
2.3. Controlador predictivo por modo pseudodeslizante con supercie íntegro-diferencial PSMC2 . . . . .	54
2.3.1. Síntesis del controlador PSMC2 . . . . .	55
2.3.2. Sintonización de parámetros . . . . .	58
2.3.3. Análisis de Robustez . . . . .	60
<b>3. Control por acercamiento predictivo al modo pseudodeslizante con restricciones</b>	<b>69</b>
3.1. Introducción . . . . .	69
3.2. Controlador predictivo por modo pseudodeslizante con restricciones CPSMC	71
3.2.1. Síntesis del controlador CPSMC . . . . .	71
3.2.2. Sintonización de parámetros . . . . .	75
3.2.3. Análisis de Estabilidad . . . . .	80

3.2.4. Análisis de Robustez . . . . .	86
<b>4. Estudio comparativo mediante simulación</b>	<b>93</b>
4.1. Introducción . . . . .	93
4.2. Simulaciones con PSMC1 . . . . .	95
4.3. Simulaciones con PSMC2 . . . . .	100
4.4. Simulaciones con CPSMC . . . . .	107
4.5. Simulaciones con leyes conmutadas entre PSMC1 y CPSMC . . . . .	108
4.5.1. Híbrido PSMC1C . . . . .	108
4.5.2. Híbrido CPSMC1 . . . . .	111
<b>5. Aplicaciones</b>	<b>113</b>
5.1. Intercambiador de Calor . . . . .	114
5.1.1. Descripción del sistema . . . . .	114
5.1.2. Descripción del entorno de programación . . . . .	116
5.1.3. Experimentos en la planta . . . . .	119
5.2. Planta Solar . . . . .	135
5.2.1. Descripción del sistema . . . . .	135
5.2.2. Descripción de los programas para la simulación . . . . .	137
5.2.3. Resultados de simulación . . . . .	138
5.2.4. Experimentos en la planta . . . . .	154
<b>6. Aportaciones y desarrollos futuros</b>	<b>159</b>

<b>7. Apéndices</b>	<b>163</b>
7.1. Programa para el control en CUBE . . . . .	163
7.2. Programas para la simulación del control del campo ACUREX . . . . .	168
<b>Bibliografía</b>	<b>179</b>

# Índice de figuras

1.1. Modo de alcance y modo de deslizamiento. . . . .	3
1.2. Predicción con horizonte $N = N_2 - N_1$ . . . . .	6
1.3. Leyes de control predictivo por modo pseudodeslizante. . . . .	16
2.1. Ejemplo de comportamiento de control por PSMC1 para un sistema con $d = 1$ . . . . .	20
2.2. Valores de $IAE_3$ para las plantas (1) $a = 0.5$ $d = 2$ , (2) $a = 0.5$ $d = 6$ , (3) $a = 0.5$ $d = 10$ , (4) $a = 0.7$ $d = 2$ , (5) $a = 0.7$ $d = 6$ , (6) $a = 0.7$ $d = 10$ , (7) $a = 0.95$ $d = 2$ (8), $a = 0.95$ $d = 6$ y (9) $a = 0.95$ $d = 10$ . . . . .	23
2.3. Funciones objetivo (a) $\frac{\alpha}{\beta}$ y (b) $\varepsilon T$ . . . . .	24
2.4. Patrones de entrenamiento ( $\times$ ) y de prueba (O). . . . .	29
2.5. (a) Función $\alpha/\beta$ a interpolar. (b) Aproximación mediante 5 Hiperplanos en Bisagra. (c) Aproximación mediante Red Neuronal de 14 nodos en la capa oculta. (d) Aproximación mediante funciones algebraicas. . . . .	31
2.6. (a) Función $\varepsilon T$ a interpolar. (b) Aproximación mediante 8 Hiperplanos en Bisagra. (c) Aproximación mediante Red Neuronal de 4 nodos en la capa oculta. (d) Aproximación mediante funciones trascendentes. . . . .	32
2.7. Simulaciones en casos de máximo error de interpolación (línea continua) y sin error (línea discontinua): (P1 HH) $P_1: a_m = 0.9$ $d_m = 10$ ; (P2 HH) $P_2: a_m = 0.95$ $d_m = 5$ ; (P3 RN) $P_3: a_m = 0.8$ $d_m = 3$ ; (P4 RN) $P_4: a_m = 0.5$ $d_m = 7$ ; (P5 FE) $P_5: a_m = 0.85$ $d_m = 6$ ; (P6 FE) $P_6: a_m = 0.5$ $d_m = 6$ . . . . .	34

2.8. Sistema de control por realimentación con PSMC1. . . . .	35
2.9. Representación temporal. Pseudodeslizamiento: $a = 0.9$ , $b = 0.1$ , $d = 2$ , $\varepsilon T = 0.25$ , $\alpha/\beta = -0.75$ , $\xi^* = 0.0014$ . . . . .	36
2.10. Proyección de una trayectoria en un plano definido por los estados $e_k$ y $e_{k-1}$ . Pseudodeslizamiento: $a = 0.9$ , $b = 0.1$ , $d = 2$ , $\varepsilon T = 0.25$ , $\alpha/\beta = -0.75$ , $\xi^* = 0.0014$ . . . . .	37
2.11. Valores máximos del mínimo coeficiente de contractividad de la función de Lyapunov $V(z_k)$ para la familia de plantas analizadas con cada sin- tonización de $\frac{\alpha}{\beta}$ y $\varepsilon T$ . . . . .	40
2.12. Variación del máximo autovalor de $A_{z1}^{bc}$ y $A_{z3}^{bc}$ cuando $ s^T E z_k  > 0$ . . . .	41
2.13. Representación de trayectorias (-.-) en $X$ del sistema controlado con PSMC1 y modelado como de POMTM con $a = 0.75$ $b = 0.25$ $d = 2$ , con restricciones en estado $\pm 1$ y señal de control de $\pm 1$ , $\varepsilon T = 0.4$ y $\alpha/\beta = -0.75$ . . . . .	44
2.14. Simulaciones con errores superiores a los encontrados resolviendo las LMIs. . . .	48
2.15. Máximo autovalor en valor absoluto de $\tilde{A}_{z1}^{bc}$ y $\tilde{A}_{z3}^{bc}$ para sistemas inciertos con errores en $a_m$ . . . . .	50
2.16. Máximo autovalor en valor absoluto de $\tilde{A}_{z1}^{bc}$ y $\tilde{A}_{z3}^{bc}$ para sistemas inciertos con errores en $b_m$ . . . . .	50
2.17. Máximo autovalor en valor absoluto de $\tilde{A}_{z1}^{bc}$ y $\tilde{A}_{z3}^{bc}$ para sistemas inciertos con errores en $d_m$ . . . . .	51
2.18. Máximo autovalor en valor absoluto de $\tilde{A}_{z1}^{bc}$ y $\tilde{A}_{z3}^{bc}$ para sistemas inciertos con errores iguales en $a_m$ , $b_m$ y $d_m$ . . . . .	51
2.19. Representación de trayectorias (-.-) en $X$ (trazo grueso caso con error, trazo fino caso sin error) para un sistema de POMTM con $a_m = 0.75$ $b_m = 0.25$ $d_m = 2$ , restricciones en estado $\pm 0.5$ y señal de control de $\pm 0.5$ , $\varepsilon T = 0.4$ y $\alpha/\beta = -0.75$ , y error de modelado $a_p = 130\%a_m$ , $b_p = 130\%b_m$ . . . . .	53
2.20. Plano de fase para comparar un ejemplo de los desempeños de PSMC2 y SMC. . . . .	57

2.21. (a) Simulaciones aceptadas; (b) Simulaciones rechazadas. . . . .	61
2.22. Volumen de Estabilidad frente a Relación de Controlabilidad para procesos con $\tau_m = 5$ : con incertidumbres estructuradas (- - -); con incertidumbres estructuradas y no estructuradas (—). . . . .	63
2.23. Volumen de estabilidad frente a Constante de Tiempo para procesos con $RC = 4$ : con incertidumbres estructuradas (- - -); con incertidumbres estructuradas y no estructuradas (—). . . . .	64
2.24. Comportamientos con errores en $[-2, 2]$ % en $K_m$ , $\tau_m$ y $t_{0m}$ con GPC PSMC2 y SMC. . . . .	65
2.25. Curvas de AEK, AE $\tau$ y AE $t_0$ para los controladores SMC, GPC y PSMC2.	67
3.1. Funciones objetivo (a) $\alpha$ y (b) $\lambda$ . . . . .	76
3.2. Valores de $IAE_3$ para las plantas (1) $a = 0,5$ $d = 5$ , (2) $a = 0,5$ $d = 10$ , (3) $a = 0,5$ $d = 15$ , (4) $a = 0,7$ $d = 5$ , (5) $a = 0,7$ $d = 10$ , (6) $a = 0,7$ $d = 15$ , (7) $a = 0,9$ $d = 5$ (8), $a = 0,9$ $d = 10$ y (9) $a = 0,9$ $d = 15$ . . . . .	77
3.3. Valores máximos del mínimo coeficiente de contractividad de la función de Lyapunov $V(z_k)$ para la familia de plantas analizadas con cada sintonización de $\frac{\alpha}{\beta}$ y $\varepsilon T$ . . . . .	84
3.4. Variación del máximo autovalor de $A_{z1}^{bc}$ y $A_{z3}^{bc}$ cuando $0 <  s_{k-1}  \leq \rho$ . . . . .	85
3.5. Representación de trayectorias (-.-) en $X$ que parten de $O_{\infty x}^{cpsmc}$ ( $\mathbf{x}_{01}$ y $\mathbf{x}_{02}$ ) y de $\Phi$ ( $\mathbf{x}_{03}$ y $\mathbf{x}_{04}$ ) para un sistema de POMTM con $a = 0.9$ $b = 0.15$ $d = 2$ , restricciones en estado $\pm 1$ y señal de control de $\pm 2$ , $\varepsilon T = 0.45$ , $\alpha = -0.1$ , $\lambda = 1.5$ , $N = 60$ .y $s_{min} = \rho = 0.5$ . . . . .	87
3.6. Simulaciones con errores superiores a los encontrados resolviendo el LMI.	88
3.7. Máximo autovalor en valor absoluto de $A_{z1}^{bc}$ y $A_{z3}^{bc}$ para sistemas inciertos con errores (a) sólo en el polo, (b) sólo en la ganancia, (c) sólo en el retardo y (d) en los tres parámetros a la vez. . . . .	89

3.8. Representación de trayectorias (-.-) en $X$ (trazo grueso caso con error, trazo fino caso sin error) para un sistema de POMTM con $a_m = 0.9$ , $b_m = 0.1$ , $d_m = 2$ , restricciones en estado $\pm 2$ y señal de control de $\pm 2$ , $\varepsilon T = 0.45$ y $\alpha = -0.1$ , $\lambda = 1.5$ , $N = 60$ , $s_{min} = \rho = 0.5$ . y error de modelado $a_p = 120\%a_m$ , $b_p = 120\%b_m$ . . . . .	92
4.1. Simulaciones de control GPC, PSMC1 e IM-SMC de $G_1(s)$ sin incertidumbres. . . . .	96
4.2. Control con GPC,PSMC1 e IM-SMC de $G_1(s)$ e incertidumbres paramétricas: (a) $a_p = a_m + 0.3a_m$ (b) $a_p = a_m - 0.3a_m$ (c) $b_p = b_m + 0.3b_m$ (d) $b_p = b_m - 0.3b_m$ (e) $d_p = d_m + 0.3d_m$ (f) $d_p = d_m - 0.3d_m$ . . . . .	97
4.3. 1000 simulaciones de control de $G_1(s)$ con errores aleatorios en: (a)(b)(c) $[-31, 31]\%$ en los tres parámetros con $\tau_1 = 0$ ; (d)(e)(f) $[-28, 28]\%$ en los tres parámetros y error aleatorio en $\tau_1 = [0, 1]$ . . . . .	98
4.4. (a) Ganancia variable con el incremento de la señal de control con un incremento máximo de $\overline{\Delta u} = 10$ . (b) Simulación de control GPC, PSMC1 e IM-SMC de $G_1(s)$ cuando $K_p(\Delta u)$ , $\overline{\Delta u} = 10$ y $p_1 = 3$ . . . . .	98
4.5. Comparaciones de: (a) GPC y PSMC2 con $G_1(s)$ ; (b) SMC y PSMC2 con $G_1(s)$ ; (c) GPC y PSMC2 con $G_2(s)$ ; (d) SMC y PSMC2 con $G_2(s)$ ; (e) SMC y PSMC2 con $G_3(s)$ ; (f) SMC y PSMC2 con $G_4(s)$ . . . . .	101
4.6. Respuesta de $G_2(s)$ ante escalón con PSMC2 y evolución de la superficie deslizante cuando hay errores de modelado de $\pm 50\%$ en: (a)(b) Ganancia; (c)(d) Constante de tiempo; (e)(f) Retardo puro. . . . .	102
4.7. Respuesta de temperatura de salida del tanque controlado con GPC, SMC y PSMC2. . . . .	105
4.8. Control con GPC, CPSMC e IM-SMC de $G_1(s)$ : (a) $\tau_1 = 0$ (b) $\tau_1 = 3$ . . . . .	106
4.9. 1000 simulaciones de control de $G_1(s)$ con errores aleatorios en $[-7, 7]\%$ en los tres parámetros: (a)(b)(c) con $\tau_1 = 0$ ; (d)(e)(f) con error aleatorio en $\tau_1 = [0, 1]$ . . . . .	107
4.10. Control con GPC, CPSMC y CPSMC1 de $G_1(s)$ con 20% de error en $a_m$ y $b_m$ y 14% de error en $d_m$ . PSMC1 es inestable. . . . .	111

5.1. Planta Piloto del Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Universidad de Sevilla. . . . .	114
5.2. Equipos del laboratorio empleados para el control de la temperatura del agua de salida de un intercambiador de calor. . . . .	115
5.3. Diagrama del sistema intercambiador en circuito de recirculación de agua.	115
5.4. Diagrama esquemático del sistema intercambiador de calor. Aplicación <i>GSM Run-Time</i> . . . . .	118
5.5. Sintonización de los controladores probados. . . . .	118
5.6. Control de la temperatura de salida: (a) PID, (b) GPC, (c) SMC, (d) PSMC2, (e) PSMC1, (f) CPSMC, (g) PSMC1C, (h) CPSMC1. . . . .	121
5.7. Control de la temperatura de salida con errores de modelado negativos en $t_{0m}(-66\%)$ : (a) PID, (b) GPC, (c) SMC, (d) PSMC2, (e) PSMC1, (f) CPSMC, (g) PSMC1C, (h) CPSMC1. . . . .	122
5.8. Control de la temperatura de salida con errores de modelado negativos en $t_{0m}(-50\%)$ : (a) PID, (b) GPC, (c) SMC, (d) PSMC2, (e) PSMC1, (f) CPSMC, (g) PSMC1C, (h) CPSMC1. . . . .	123
5.9. Control de la temperatura de salida con errores de modelado positivos en $t_{0m}(+66\%)$ : (a) PID, (b) GPC, (c) SMC, (d) PSMC2, (e) PSMC1, (f) CPSMC, (g) PSMC1C, (h) CPSMC1. . . . .	124
5.10. Control de la temperatura de salida con errores de modelado positivos en $t_{0m}(+92\%)$ : (a) PID, (b) GPC, (c) SMC, (d) PSMC2, (e) PSMC1, (f) CPSMC, (g) PSMC1C, (h) CPSMC1. . . . .	125
5.11. Control de la temperatura de salida con errores de modelado negativos en $K_m(-55\%)$ : (a) PID, (b) GPC, (c) SMC, (d) PSMC2, (e) PSMC1, (f) CPSMC, (g) PSMC1C, (h) CPSMC1. . . . .	126
5.12. Control de la temperatura de salida con errores de modelado negativos en $K_m(-22\%)$ : (a) PID, (b) GPC, (c) SMC, (d) PSMC2, (e) PSMC1, (f) CPSMC, (g) PSMC1C, (h) CPSMC1. . . . .	128
5.13. Control de la temperatura de salida con errores de modelado positivos en $K_m(+22\%)$ : (a) PID, (b) GPC, (c) SMC, (d) PSMC2, (e) PSMC1, (f) CPSMC, (g) PSMC1C, (h) CPSMC1. . . . .	129

5.14. Control de la temperatura de salida con errores de modelado negativos en $\tau_m(-55\%)$ : (a) PID, (b) GPC, (c) SMC, (d) PSMC2, (e) PSMC1, (f) CPSMC, (g) PSMC1C, (h) CPSMC1. . . . .	130
5.15. Control de la temperatura de salida con errores de modelado positivos en $\tau_m(+55\%)$ : (a) PID, (b) GPC, (c) SMC, (d) PSMC2, (e) PSMC1, (f) CPSMC, (g) PSMC1C, (h) CPSMC1. . . . .	131
5.16. Control de la temperatura de salida con errores de modelado de $-35\%K_m$ , $+35\%\tau_m$ y $-35\%t_{0m}$ . . . . .	132
5.17. Campo de colectores distribuidos ACUREX y su entorno. . . . .	136
5.18. Diagrama esquemático del campo de colectores ACUREX. . . . .	137
5.19. Diagrama de bloques del sistema de control. . . . .	137
5.20. Seguimiento en bucle cerrado sin perturbaciones. GPC, PSMC1 e IM-SMC. $K_m = 0.63$ , $\tau_m = 5T$ , $t_{0m} = 9T$ , $T_{in} = 100^\circ C$ , $T_{amb} = 15^\circ C$ , $Irr = 800W/m^2$ . . . . .	139
5.21. Seguimiento con perturbaciones con datos de Septiembre de 1991: (a) Radiación corregida y temperatura de entrada; (b) Escalón a $230^\circ C$ ; (c) Escalón a $270^\circ C$ ; (d) Escalones de bajada; (e) Escalones de subida; (e) Escalón de $230^\circ C$ a $270^\circ C$ . . . . .	141
5.22. Seguimiento en bucle cerrado sin perturbaciones. GPC, PSMC1 e IM-SMC. $K_m = 0.66$ , $\tau_m = 3T$ , $t_{0m} = 6T$ , $T_{in} = 150^\circ C$ , $T_{amb} = 18^\circ C$ , $Irr = 700W/m^2$ . . . . .	143
5.23. (a) Radiación corregida y temperatura de entrada (datos de Marzo de 1993); (b) Seguimiento en bucle cerrado con perturbaciones. . . . .	144
5.24. Seguimiento en bucle cerrado sin perturbaciones. GPC, PSMC1 e IM-SMC. $K_m = 0.69$ , $\tau_m = 4T$ , $t_{0m} = 9T$ , $T_{in} = 130^\circ C$ , $T_{amb} = 28.5^\circ C$ , $Irr = 900 W/m^2$ . . . . .	144
5.25. (a) Radiación corregida y temperatura de entrada (datos de Junio de 2003); (b) Seguimiento en bucle cerrado con perturbaciones. . . . .	145
5.26. Seguimiento en bucle cerrado sin perturbaciones. GPC, IM-SMC y PSMC2. $K_m = 0.63$ , $\tau_m = 5T$ , $t_{0m} = 9T$ , $T_{in} = 100^\circ C$ , $T_{amb} = 15^\circ C$ , $Irr = 800W/m^2$ . . . . .	146

5.27. Seguimiento con perturbaciones (datos de Septiembre de 1991): (a) Escalón a 230 °C; (b) Escalones de subida. . . . .	147
5.28. Seguimiento en bucle cerrado sin perturbaciones. GPC, IM-SMC y PSMC2. $K_m = 0.66$ , $\tau_m = 3T$ , $t_{0m} = 6T$ , $T_{in} = 150^\circ C$ , $T_{amb} = 18^\circ C$ , $Irr = 700W/m^2$ . . . . .	148
5.29. (a) Radiación corregida y temperatura de entrada (datos de Marzo de 1993); (b) Seguimiento en bucle cerrado con perturbaciones. . . . .	148
5.30. Seguimiento en bucle cerrado sin perturbaciones. GPC, IM-SMC y PSMC2. $K_m = 0.69$ , $\tau_m = 4T$ , $t_{0m} = 9T$ , $T_{in} = 130^\circ C$ , $T_{amb} = 28,5^\circ C$ , $Irr = 900W/m^2$ . . . . .	149
5.31. (a) Radiación corregida y temperatura de entrada (datos de Junio de 2003); (b) Seguimiento en bucle cerrado con perturbaciones. . . . .	150
5.32. Seguimiento en bucle cerrado sin perturbaciones. Septiembre 1991. $K_m = 0.63$ , $\tau_m = 5T$ , $t_{0m} = 9T$ , $T_{in} = 100^\circ C$ , $T_{amb} = 15^\circ C$ , $Irr = 800W/m^2$ . (a) GPC, CPSMC y IM-SMC; (b) CPSMC y PSMC2. . . . .	150
5.33. Seguimiento en bucle cerrado con perturbaciones (datos de Septiembre de 1991): (a) Escalón a 230 °C; (b) Escalones de bajada; (c) Escalones de subida. . . . .	152
5.34. (a) Seguimiento en bucle cerrado sin perturbaciones. GPC, CPSMC e IM-SMC. $K_m = 0.66$ , $\tau_m = 3T$ , $t_{0m} = 6T$ , $T_{in} = 150^\circ C$ , $T_{amb} = 18^\circ C$ , $Irr = 700W/m^2$ . (b) Con perturbaciones (Marzo de 1993). . . . .	153
5.35. (a) Seguimiento en bucle cerrado sin perturbaciones. GPC, CPSMC e IM-SMC. $K_m = 0.66$ , $\tau_m = 3T$ , $t_{0m} = 6T$ , $T_{in} = 150^\circ C$ , $T_{amb} = 18^\circ C$ , $Irr = 700W/m^2$ . (b) Con perturbaciones (Junio de 2003). . . . .	154
5.36. Experimentos de seguimiento en la planta solar de Tabernas: (a) PSMC1; (b) PSM2; (c) CPSMC y $\alpha = -0.8$ . . . . .	156
5.37. Experimentos de seguimiento en la planta solar de Tabernas: (a) PSMC1; (b) PSM2; (c) CPSMC y $\alpha = -0.8$ . . . . .	157
5.38. Experimentos de seguimiento con CPSMC en la planta solar de Tabernas: (a) $\alpha = -0.8$ ; (b) $\alpha = -0.7$ . . . . .	158



# Índice de tablas

2.1. Errores relativos para cada función objetivo y cada método de aproximación . . . . .	31
2.2. Plantas P1-P6 para las que las aproximaciones proporcionan los máximos errores de sintonización . . . . .	33
2.3. Máximo error de modelado en los tres parámetros $e_a=e_b=e_d$ en porcentaje	47
2.4. Pruebas de optimización de ISE . . . . .	59
2.5. Volúmenes de estabilidad con incertidumbres estructuradas . . . . .	62
2.6. Volúmenes de estabilidad con incertidumbres estructuradas y no estructuradas . . . . .	62
2.7. Radios mínimos de estabilidad . . . . .	64
3.1. Errores relativos para cada función objetivo y cada método de aproximación . . . . .	79
3.2. Máximo error de modelado en los tres parámetros $e_a=e_b=e_d$ en porcentaje	87
4.1. Parámetros estimados de los modelos de POMTM de las plantas G1-G4	95
4.2. Parámetros de los controladores según PSMC1 con modelos POMTM .	95
4.3. Parámetros de los controladores para mínimo IAE . . . . .	95
4.4. IAEs con dos sintonizaciones diferentes . . . . .	96

4.5. Índice de desempeño IAE para G1 y cada controlador . . . . .	99
4.6. Parámetros de los controladores con modelos POMTM . . . . .	100
4.7. Índices de desempeño ISE . . . . .	100
4.8. Índices de desempeño ISE con errores de modelado y G2(s) . . . . .	104
4.9. Parámetros de los controladores con modelos POMTM . . . . .	104
4.10. Parámetros de los controladores ajustados según los modelos POMTM de cada sistema . . . . .	106
4.11. Índice de desempeño IAE con sintonización propuesta . . . . .	106
4.12. Índice de desempeño IAE para G1 y cada controlador . . . . .	108
4.13. Parámetros de los controladores según CPSMC1 . . . . .	110
4.14. Índice de desempeño IAE con sintonización propuesta . . . . .	110
4.15. Índice de desempeño IAE para G1 y cada controlador . . . . .	110
5.1. Constantes de tiempo en bucle cerrado. Simulaciones con PSMC1. Sep- tiembre 1991. . . . .	140
5.2. IAEs de las simulaciones de comparación con PMC1. Septiembre 1991. . . . .	142
5.3. Constantes de tiempo en bucle cerrado. Simulaciones con PSMC1. Marzo 1993. . . . .	142
5.4. IAEs de las simulaciones de comparación con PSMC1. Marzo 1993. . . . .	143
5.5. Constantes de tiempo en bucle cerrado. Simulaciones con PSMC1. Junio 2003. . . . .	144
5.6. IAEs de las simulaciones de comparación con PSMC1. Junio 2003. . . . .	145
5.7. Constantes de tiempo en bucle cerrado. Simulaciones con PSMC2. Sep- tiembre 1991. . . . .	146
5.8. IAEs de las simulaciones de comparación con PSMC2. Septiembre 1991. . . . .	146

5.9. Constantes de tiempo en bucle cerrado. Simulaciones con PSMC2. Marzo 1993. . . . .	147
5.10. Constantes de tiempo en bucle cerrado. Simulaciones con PSMC2. Junio 2003. . . . .	148
5.11. Constantes de tiempo en bucle cerrado. Simulaciones con CPSMC. Septiembre 1991. . . . .	151
5.12. IAEs de las simulaciones de comparación con CPSMC. Septiembre 1991.	151
5.13. Constantes de tiempo en bucle cerrado. Simulaciones con CPSMC. Marzo 1993. . . . .	153



# Agradecimientos

Antes de nada, gracias a todos y todas que habéis apoyado mi ánimo en estos largos años de doctorado. Todo el trabajo resumido en este documento está dedicado a vosotros y vosotras, y muy especialmente a mis padres y a mi hermano que con su dedicación, cariño y comprensión han llenado tantas veces mi corazón.

El comienzo de esta tesis se gestó en la Universidad de Los Andes, Venezuela. La ilusión, las ideas refrescantes y el cariño de los que conocí ha de ser agradecido y recordado. Muchas gracias a Oscar, su familia y su equipo de trabajo en control por modos deslizantes, que me acogieron y me aportaron nuevas y fuertes energías para emprender este camino.

Muchas gracias también a Eduardo, mi tutor en la Universidad de Sevilla, que en los años que siguieron orientó mis esfuerzos para estructurar y desarrollar este trabajo en el campo del control predictivo.

No puedo olvidar agradecer a mis compañeros los ratos de reflexión, orientación y revisión que me han regalado para completar mis desarrollos. Gracias a Teodoro Álamo, en los estudios de teoría de sistemas y desigualdades matriciales lineales. Gracias a Daniel Limón, en los estudios de estabilidad y admisibilidad de sistemas de control. Gracias a Manuel Ruiz, en el desarrollo de redes neuronales para identificación de funciones. Gracias a Carlos Bordóns, en la aplicación de control predictivo a sistemas de primer orden más tiempo muerto. Gracias a Daniel Rodríguez, en el desarrollo de algoritmos para determinar hiperplanos en bisagra. Gracias a Amparo Núñez, José Ramos y Manuel Gil, en la aplicación a la planta piloto. Gracias a Manuel Román, con el Scientific Word. Gracias a todos los participantes del Grupo de Control Predictivo de nuestro Departamento a lo largo de estos años. Y gracias a Manuel Berenguel y Cristina Martínez, en la planta solar de Almería.

Así como a mis queridas amigas de desayuno: MariCarmen, Nuria, Espe, Pilares, Oché y Dora; y a mis amigos y amigas del Departamento de Matemática Aplicada II, que siempre me han recibido ofreciendo su tiempo y su cariño: Emilio, Enrique,

Piti, Celestino, Paco, Antonio, Alejandro, Carmen, Encarni, Toñi, Jorge, Fernando, Estanislao,...

Y para comenzar, gracias a mi Emi, por cada momento y cada sueño compartido.

# Resumen

En los últimos 25 años, las estrategias de control avanzado por estructura variable (*Variable Structure Control VSC*), en particular las de Control por Modo Deslizante (*Sliding Mode Control SMC*), y las de Control Predictivo basado en Modelo (*Model Predictive Control MPC*), han experimentado una gran evolución. Sus buenas características operacionales, que las han hecho tan populares tanto en el sector industrial como en el académico, y la superación de algunas de las desventajas que presentan cada una por separado, motivaron la realización de esta tesis doctoral. En los últimos años, varias leyes y aplicaciones con modelos en el espacio de estado han sido desarrolladas en esta línea de trabajo, como las de Corradini y Orlando (1997) y García-Gabín y E. F. Camacho (2000) con Control Predictivo Generalizado (GPC), o las de Tang y Misawa (2002), con el regulador lineal cuadrático (LQR). Pero no se han empezado a obtener resultados generales en control SMC de sistemas con retardos en el espacio de estados hasta los recientes trabajos de Richard que analizan el SMC en tiempo continuo (2001) y su aproximación discreta (2003). En cuanto a desarrollos que empleen la representación externa de sistemas mediante la función de transferencia y modelos simplificados de Primer Orden más Tiempo Muerto (POMTM), O. Camacho y otros han propuesto en 2003 un controlador híbrido en tiempo continuo empleando el control por modelo interno (IM-SMC).

A partir de los fundamentos teóricos de SMC y MPC, se presentan en esta tesis algunas leyes de control híbridas basadas en el modelo de POMTM del proceso a controlar, que caracteriza apropiadamente la mayoría de los procesos industriales y es de sencilla obtención. Además, dichas leyes son fácilmente programables en sistemas de control digital y son aplicables a sistemas modelables como de fase no mínima y con grandes retardos. Adicionalmente se han obtenido varias reglas de sintonización sencillas, en función de los parámetros del modelo, que proporcionan respuestas en bucle cerrado estables y suaves, incluso con alto grado de incertidumbre estructurada y no estructurada en el modelado. Los controladores han sido diseñados a partir de modelos exactos y sintonizados considerando cierto grado de incertidumbre. En varios apartados se han realizado análisis de estabilidad, admisibilidad y robustez con el fin de completar los apartados de síntesis.

Se ha dedicado un capítulo a la simulación de las leyes propuestas con un sistema de POMTM, dos sistemas de tercer y cuarto orden con retardo, y un sistema de fase no mínima con retardo, obteniéndose resultados favorables en cuanto a seguimiento de escalón y rechazo de perturbaciones en la salida, en comparación con GPC (C. Bordóns, 1994) y SMC (O. Camacho, 1996) e IM-SMC (O. Camacho y otros, 2003), obtenidos a partir del modelado de POMTM de los procesos. Por último se han programado y aplicado las leyes a dos sistemas no lineales con incertidumbres y perturbaciones: un intercambiador de calor en un circuito de recirculación de agua situado en la planta piloto del Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Universidad de Sevilla y un campo de colectores de radiación solar distribuidos situados en la plataforma solar del Centro de Investigaciones Energéticas, Medioambientales y Tecnológicas en Tabernas (Almería). Los resultados han sido satisfactorios y fueron comparados, en la primera aplicación, con GPC, SMC y el control PID sintonizado con las reglas de Ziegler-Nichols.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Introducción

#### 1.1.1. Control por modo deslizante

En la formulación de cualquier problema de control siempre se producen discrepancias entre la planta real y el modelo matemático desarrollado para el diseño del controlador. Éstas pueden deberse a dinámicas no modeladas, variaciones en los parámetros del sistema o a la aproximación de un comportamiento complejo de la planta por un modelo más sencillo. El ingeniero debe garantizar que el controlador diseñado proporciona respuestas en bucle cerrado que satisfacen ciertas especificaciones requeridas de desempeño a pesar de las incertidumbres de modelado. Esto ha despertado un gran interés en el desarrollo de métodos llamados de control robusto que pretenden resolver este problema. Una aproximación concreta al diseño de control robusto es la llamada metodología de Control por Modo Deslizante (*Sliding Mode Control*, SMC). La mayoría de las leyes de control robusto se componen de términos que determinan las características de la respuesta del sistema sin incertidumbres de modelado (o desempeño nominal) y de términos adicionales que compensan las posibles incertidumbres de modelado. El SMC es una estrategia de control robusto, ya que fuerza al sistema a anular cierta función de conmutación de orden reducido de forma poco sensible a incertidumbres estructuradas y no estructuradas, abandonando la dinámica compleja del sistema en bucle abierto [1].

El Control por Modo Deslizante es un tipo particular de Control por Estructura Variable (*Variable Structure Control*, VSC). Los sistemas de VSC se caracterizan por dos o más leyes de control y una regla de decisión. La regla de decisión se denomina función de conmutación. Su entrada es alguna medida del comportamiento del sistema

en el instante actual, y su salida es la ley de control que debería aplicarse en ese instante de tiempo. El resultado es un sistema de estructura variable, que puede ser entendido como una combinación de subsistemas, donde cada uno tiene una ley fija de control y es válida en determinada región del comportamiento del sistema. Una de las ventajas de introducir esta complejidad adicional consiste en la capacidad de combinar las propiedades útiles de cada una de las estructuras del sistema. Es más, el sistema se puede diseñar para que tenga nuevas propiedades que no presenten ninguna de las estructuras componentes por sí sola. Las primeras leyes elementales de VSC se obtuvieron en la Unión Soviética al final de los años 50 y fueron publicadas en inglés a partir de los 70 por Itkis [2], Utkin [3] y Slotine [4].

En el Control por Modo Deslizante, los sistemas de VSC se diseñan para conducir y restringir el estado del sistema a permanecer en un entorno de la función de conmutación llamada *superficie deslizante*  $s(t) = 0$ . Esta aproximación presenta dos ventajas principales. En primer lugar, se puede obtener un comportamiento dinámico concreto del sistema en bucle cerrado con la elección de la función de conmutación. En segundo lugar, dicho comportamiento se vuelve completamente insensible a un tipo particular de incertidumbre. Esta última propiedad de invariancia hace de esta metodología una buena candidata dentro del control robusto [5]. Un excelente artículo compendio (survey), que aporta además un resumen de los principales conceptos y propiedades de los sistemas VSC, es el de Hung, Gao y Hung (1993) [6].

El SMC se caracteriza por dos comportamientos en bucle cerrado que se denominan modos:

- *Modo de alcance.* El sistema se encuentra en este modo cuando se aplica una ley de control, denominada *ley de alcanzabilidad*, para forzar el alcance de la superficie deslizante. Cuando el sistema está en la superficie, o lo suficientemente cerca, se pasa al siguiente modo de control.
- *Modo deslizante o de deslizamiento:* es el comportamiento en el que la trayectoria del estado se “desliza” sobre la superficie y converge a un atractor estable incluido en dicha superficie (figura 1.1). Se produce mediante una ley denominada *control equivalente* que satisface la siguiente condición de deslizamiento

$$\frac{ds(t)}{dt} = 0 \tag{1.1}$$

El método de diseño de una ley de SMC se compone de dos etapas. En la primera se diseña la función de conmutación o superficie deslizante  $s(t)$  de forma que el modo deslizante satisfaga especificaciones de diseño. En la segunda se elige la ley de control (ley de alcanzabilidad) que atraerá el estado a la superficie deslizante.

En los estudios de SMC hasta mediados de los años 60 se establecía que cuando la superficie deslizante y las estructuras de la ley de control se escogen de forma que se

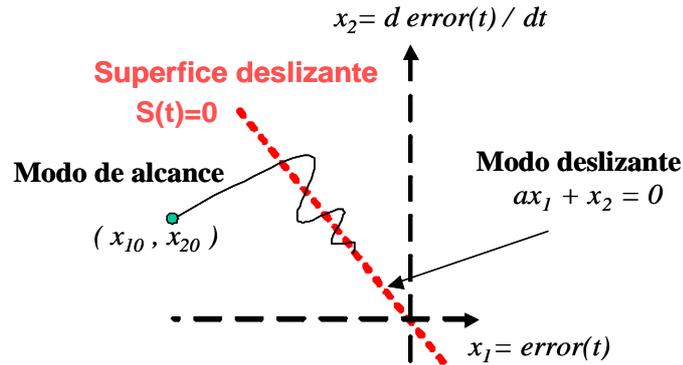


Figura 1.1: Modo de alcance y modo de deslizamiento.

satisface la siguiente *condición de alcanzabilidad*

$$s(t) \frac{ds(t)}{dt} < 0 \quad (1.2)$$

denominada aproximación de función de conmutación directa (*Direct Switching Function Approach*), las trayectorias desde puntos de cierta región del espacio de estados tendían hacia algún punto de la superficie deslizante. Esto es así ya que se fuerza a que el signo de la derivada sea distinto del de la superficie. Pero dada la naturaleza discontinua de la ley de control, caracterizada por la función *signo* de la superficie, se producía el fenómeno de “*chattering*”, por el cual se excitaban algunos modos de alta frecuencia, manifestándose los efectos de las dinámicas no modeladas o incertidumbres no estructuradas. Por tanto, el modo deslizante era una situación *ideal* que correspondía al comportamiento medio, era independiente de los parámetros del sistema a controlar (por lo tanto el control era robusto) y sólo dependía de los parámetros de la superficie deslizante escogida.

Para eliminar el “*chattering*”, Slotine y Sastry (1984) [4] propusieron un nuevo controlador que incluía un término continuo de *control equivalente* [7] y la conmutación según una función *saturación* de la superficie. La ley completa satisface la *condición de alcanzabilidad-η*

$$\frac{1}{2} \frac{ds^2(t)}{dt} \leq -\eta |s(t)| \quad (1.3)$$

que garantiza que desde cualquier punto del espacio de estados las trayectorias tienden a la superficie deslizante en un tiempo finito.

La mayor ventaja del Control por Estructura Variable es que resulta ser robusto cuando se alcanza el modo de deslizamiento. Las propiedades de robustez de SMC fueron analizadas por Utkin [8] [9] y por Slotine y Sastry [10][4]. Pero también presenta algunas desventajas:

- Cuando la ley de control se diseña con la función *signo*, el cambio de estructu-

ra debería ocurrir a una frecuencia infinita para lograr el movimiento deslizante ideal. Al no ser esto posible se producen conmutaciones (*chattering*) que los actuadores no pueden tolerar. El empleo de funciones de suavizado [4] aumenta la aplicabilidad de la ley de control y el grado de robustez ante incertidumbres no estructuradas, pero empeora las características de la respuesta en cuanto a desempeño y disminuye la cancelación de los efectos de las incertidumbres paramétricas. Se dice que se alcanza un *modo quasideslizante o pseudodeslizante*.

- Cuando el proceso tiene un tiempo muerto grande, la respuesta del sistema controlado se aleja del desempeño óptimo [11]. SMC no se diseña teniendo en cuenta directamente el retardo (tan sólo una aproximación de Pade o Taylor para el término del retardo en diseños con modelos de Primer Orden más Tiempo Muerto), que, cuando el retardo es grande, no es suficiente para proporcionar respuestas satisfactorias.
- Si la superficie deslizante se elige en función del modelo del sistema, el grado de desempeño en bucle cerrado disminuye cuando existen errores de modelado en la ganancia estática, produciendo respuestas con error en régimen permanente.
- No ha sido planteada explícitamente la inclusión de restricciones en el estado o en la variable manipulada en el diseño de la superficie y de la ley de control SMC.

En la literatura se presentan muchas estructuras alternativas para escoger una superficie deslizante. Una de ellas (Slotine [1]), que se empleará en alguno de los desarrollos de esta tesis, es una ecuación íntegro-diferencial de orden  $n$  (orden del modelo del sistema a controlar) que se aplica a la integral del error de seguimiento de la forma

$$s(t) = \left( \frac{d}{dt} + \mu \right)^n \int_0^t e(t) dt \quad (1.4)$$

donde en  $\mu$  se engloban los parámetros de la superficie. O. Camacho (1996) [12] propuso un controlador SMC y su sintonización para procesos químicos descritos mediante modelos de POMTM (ecuación 1.6) basada en esta superficie. La idea consistía en forzar un *modo pseudodeslizante*, empleando una ley de control compuesta por una primera parte obtenida por el método de la ley de control equivalente, y una segunda parte que utiliza como función conmutadora, en lugar del *signo* o *saturación*, la función *sigmoide* de la forma

$$\frac{s(t)}{|s(t)| + \eta} \quad (1.5)$$

donde a mayor  $\eta$ , mayor ancho de banda de control y, por tanto, mayor robustez ante incertidumbres no estructuradas. Esta función garantiza que el estado permanecerá en una banda en torno a la superficie deslizante en lugar de sobre ella, y, por esto, se denomina en la literatura *modo pseudodeslizante*. La ventaja es una reducción del efecto de “*chattering*”. La desventaja es que empeora el grado de desempeño deseado y disminuye la cancelación de los efectos de las incertidumbres paramétricas. La estructura

variable consiste sencillamente en una ganancia de control  $K_D$  elegida de forma que un mayor valor de la misma implica una respuesta más agresiva. Mediante un procedimiento de optimización del índice de desempeño ISE (*Integral of Square Error*), basado en el algoritmo de búsqueda de Nelder-Mead, O. Camacho obtuvo ecuaciones de ajuste de  $K_D$  (1.7) y de  $\eta$  (1.8) y de los parámetros de la superficie  $\mu_0$  y  $\mu_1$  (1.9) en función de los parámetros del modelo de POMTM, a saber, la ganancia estática  $K_m$ , la constante de tiempo  $\tau_m$  y el tiempo muerto o retardo puro  $t_{0m}$ .

$$G_{POMTM}(s) = \frac{K_m}{\tau_m s + 1} e^{-t_{0m}s} \quad (1.6)$$

$$K_D = \frac{0,51}{|K_m|} \left( \frac{\tau_m}{t_{0m}} \right)^{0,76} \quad (1.7)$$

$$\eta = 0,68 + 0,12 |K_m| K_D \frac{t_{0m} + \tau_m}{t_{0m}\tau_m} \quad (1.8)$$

La ley equivalente  $u_{equiv}$  se obtuvo de sustituir la dinámica del sistema aproximada por un modelo de segundo orden, en la condición de deslizamiento (1.1), con la siguiente superficie

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{de(t)}{dt} + \mu_1 e(t) + \mu_0 \int_0^t e(t) dt \\ \mu_0 &= \frac{1}{4} \left( \frac{t_{0m} + \tau_m}{t_{0m}\tau_m} \right)^2 \\ \mu_1 &= \frac{t_{0m} + \tau_m}{t_{0m}\tau_m} \end{aligned} \quad (1.9)$$

La ley de control completa SMC es

$$U_{SMC}(t) = u_{equiv} + u_{alcance} = (y(t) + \mu_0 t_{0m} \tau_m e(t)) / K_m + K_D \frac{s(t)}{|s(t)| + \eta} \quad (1.10)$$

En la actualidad existe una gran variedad de leyes de control SMC con un amplio campo de aplicación: robots manipuladores, vehículos submarinos, motores eléctricos, sistemas de potencia, procesos químicos, etc.



donde  $u$  es la secuencia de señales futuras y  $w$  es la secuencia correspondiente a la trayectoria de referencia futura (si se desconoce se supone igual a la referencia en el instante actual). El objetivo del control MPC es obtener en cada instante de muestreo la secuencia de actuaciones  $u^*$  admisibles que minimiza  $J$ .

3. *Estrategia de Horizonte Deslizante*: anterior al MPC [13], consiste en aplicar sólo el primer valor de la secuencia calculada  $u^*$ ,  $u^*(t|t)$ , descartando el resto de la secuencia. En el instante siguiente  $t+1$  se repite el cálculo y se aplica sólo el primer valor de la secuencia óptima, y así sucesivamente. Debido a las incertidumbres de modelado, en general,  $u^*(t+1|t) \neq u^*(t+1|t+1)$ . Esta forma de aplicar la ley de control supone la resolución de un problema de control óptimo en bucle abierto en cada instante de muestreo que se aplica en bucle cerrado, con el fin de predecir en el siguiente instante de muestreo con datos más precisos que en el instante anterior, y por tanto calcular una solución más acertada.

Las aplicaciones del Control Predictivo basado en Modelo se cuentan por miles en la actualidad, especialmente en el sector de la industria petroquímica y de procesos [14]. En [15] (1999) se presentó un estudio de las necesidades futuras de la teoría del control en la industria. En él se preveía la alta posibilidad de implementación de las leyes MPC en los próximos años, así como la excelente efectividad de dichas aplicaciones. Todo ello en virtud de las numerosas ventajas que presentan, que permiten lograr un incremento en la productividad de las instalaciones. A continuación se enumeran las ventajas fundamentales de las estrategias MPC y del Control Predictivo generalizado (*Generalized Predictive Control*, GPC) en particular:

- Son aplicables a prácticamente cualquier tipo de proceso: lineal o no lineal, de fase no mínima, inestable en bucle abierto, con grandes retardos, etc.
- Es posible obtener formulaciones con diversos modelos de representación interna o externa.
- Las leyes se pueden extender de manera natural a sistemas multivariables.
- Pueden compensar los retardos de manera natural y óptima, sin necesidad de recurrir a compensadores como el predictor de Smith (Normey-Rico y E. F. Camacho 1999) [16].
- Las perturbaciones medibles pueden ser compensadas mediante prealimentación.
- Las leyes se obtienen con criterios óptimos.
- Las leyes pueden aprovechar el conocimiento de la evolución de la referencia en el horizonte de predicción. Esta característica es muy útil para el control de procesos por lotes (*batch*) o en robótica [17] [18] [19].
- Permite considerar en el diseño restricciones en las entradas y salidas del proceso.

Las técnicas de MPC presentan también desventajas que motivan a los investigadores para el desarrollo de la teoría de control predictivo:

- En general se requiere el conocimiento de un modelo dinámico del sistema suficientemente preciso, pues la robustez de las estrategias depende de dicho modelo. En la actualidad se vienen desarrollando métodos para aumentar la robustez de las formulaciones de MPC [20] (GPC basado en predictor de Smith), [21] (algoritmos MIN-MAX).
- En general se requiere la resolución de problemas de optimización mediante métodos numéricos, lo que conlleva a una carga de cálculo superior a la de las técnicas clásicas de control (sobre todo si el horizonte de predicción es alto y se incluyen restricciones en el problema). Por esto su aplicación suele estar dirigida a procesos con dinámicas lentas.
- Resulta compleja la consideración de incertidumbres. Debido a la consideración de horizonte finito en las estrategias de MPC, la estabilidad y robustez es compleja de analizar y garantizar, en especial cuando existen restricciones. En los últimos años se han propuesto modificaciones de los algoritmos básicos imponiendo restricciones terminales, regiones terminales u horizontes de control quasi-infinitos, con el fin de aumentar la estabilidad de las estrategias de MPC. Recientemente se han desarrollado teorías sobre la garantía de estabilidad y diseños en MPC con restricciones en el espacio de estados [22]. Aún es un campo abierto para la investigación.

En esta tesis se emplea el control predictivo generalizado (GPC) en su formulación básica, en la cual la solución del problema de optimización es explícita y el modelo de la planta es de Primer Orden más Tiempo Muerto (POMTM). La formulación detallada de GPC, propuesta por Clarke en 1987 [23] [24], puede encontrarse en el libro de E. F. Camacho y C. Bordóns [25].

## 1.2. Resumen histórico

### 1.2.1. Control por modo deslizante en tiempo continuo

Los sistemas de Control por Estructura Variable son sistemas no lineales que presentan una parte discontinua en la ley de control. La estrategia consiste en conmutar entre varios sistemas de control con dinámicas diferentes en bucle cerrado. Incluso aunque estas dinámicas sean inestables, el alternar convenientemente entre ellas puede producir un comportamiento estable en bucle cerrado. El Control por Modo Deslizante,

(*Sliding Mode Control* - SMC) es un tipo particular de Control por Estructura Variable (*Variable Structure Control* - VSC). Los sistemas de VSC se desarrollaron a partir de los estudios de Emelyanov y Barbashin (Rusia 1957-1970) [26] [27] [28]. Estas ideas no salieron de Rusia hasta mediados de los 70 cuando se publican en inglés en un libro de Itkis (1976) [2] y un artículo compendio ("*survey*") de Utkin (1977) [3].

Los sistemas de VSC son una clase de sistemas en los que la ley de control se cambia durante el control del proceso según unas reglas definidas que dependen del estado del sistema. Cuando la regla que conmuta de una estructura de control a otra se establece mediante una función de conmutación denominada *superficie deslizante*  $s(t)$  y la ley de control se diseña para obtener un comportamiento en bucle cerrado descrito por dicha superficie, al Control por Estructura Variable se le denomina Control por Modo Deslizante. En la etapa inicial de SMC hasta 1962, los sistemas estudiados fueron de segundo orden y lineales, en el espacio de estados canónico (estado y su derivada) con estructuras de control proporcional y conmutación por *signo* de una función lineal de los estados. La ley de control SMC en esta etapa inicial es discontinua según el signo de la superficie deslizante, resultando un control robusto ante perturbaciones y errores de modelado (incertidumbres paramétricas), y proporciona el desempeño dinámico correspondiente a un control proporcional o constante. Utkin presenta en 1972 el concepto de *ley de control equivalente* [7], basado en los desarrollos de Filippov [29] y Drazenovic [30] que representa la señal de control nominal cuando  $s(t) = 0$ . A partir de 1962 se consideraron sistemas variables en el tiempo de cualquier orden y de 1970 a 1983 se estudió el SMC en espacios de estados más generales y sistemas no lineales con superficies no lineales [7].

En las décadas de los 80 y 90 se dieron grandes pasos para la difusión y aplicación del SMC. Utkin publica un excelente trabajo de visión de conjunto sobre VSC en 1984 [8]. En 1983 Slotine y Sastry [10] [4] transformaron los esquemas de la teoría clásica de SMC para un gran número de sistemas no lineales y variables en el tiempo. La metodología que desarrollaron establecía un compromiso entre el seguimiento preciso y la robustez ante dinámicas no modeladas de alta frecuencia (incertidumbres no estructuradas). Se introduce el concepto de *modo quasideslizante* o *pseudodeslizante* en una banda en torno a la superficie, de forma que al suavizar la discontinuidad de la ley de control, la dinámica del estado dentro de dicha banda es sólo una aproximación de la dinámica ideal deseada que anula la superficie (modo de deslizamiento). Otras publicaciones sobre desarrollos para sistemas no lineales son las de Sira-Ramirez [31] y Young y Rao [32] con incertidumbres y retardos. En 1988 DeCarlo y otros presentaron una guía compendio de las aplicaciones de SMC a los sistemas multivariables [33]. También se desarrollaron observadores basados en modos deslizantes que quedan bien documentados en el libro de Edwards y Spurgeon (1998) [5], así como diseños mediante redes neuronales [34] y sistemas borrosos [35]. Gao y Hung [36] propusieron en 1993 un nuevo diseño de SMC basado en la aproximación de la ley de alcanzabilidad (*Reaching Law Approach*). En los últimos años se han sintetizado controladores para seguimiento de trayectorias [37], de barcos [38] y vehículos [39]. Richard ha desarrollado (2001, 2003) el SMC para sistemas con retardo [40] [41]. Algunos libros o capítulos de libros de consulta sobre

SMC en tiempo continuo son [1], [9] y [42].

Una excelente guía acerca de las tendencias del control SMC fue presentada por Young, Utkin y Özgüner en 1999 [43]. Por último, cabe mencionar las aplicaciones de O. Camacho y otros a procesos no lineales químicos de un SMC con modelo de Primer Orden más Tiempo Muerto, sintonizado mediante reglas del tipo Ziegler-Nichols (O. Camacho y Smith, 2000) y suavizado del “*chattering*” empleando la función sigmoideal de la superficie [12] [11]. Uno de los controladores de esta tesis se ha sintetizado a partir de esta ley SMC discretizada y afectada de una ley de control predictivo.

### 1.2.2. Control por modo deslizante en tiempo discreto

Dos de las leyes de control desarrolladas en esta tesis se han diseñado a partir de modelos discretos, y por lo tanto fue precisa una revisión de los desarrollos, leyes y metodologías de análisis y síntesis de controladores por modo deslizante discreto (*Discrete-time sliding mode control* DSMC) hasta nuestros días. Aunque su mayor desarrollo se ha producido en la década de los 90, los primeros estudios en control por estructura variable en tiempo discreto se realizaron a mediados de los años 80. Milosavljevic en 1985 [44] demostró que en este tipo de sistemas el modo deslizante no existe, debido a que la frecuencia de conmutación está limitada por el periodo de muestreo, denominándose en la literatura posterior *modo quasideslizante* o *pseudodeslizante*. Otra de sus inspiradoras aportaciones fue proponer una condición necesaria de existencia y alcanzabilidad de dicho modo. La robustez de los controladores por estructura variable en tiempo discreto empezó ser analizada por Opitz en 1986 [45] y Magaña y Zak en 1988 [46], basándose en la teoría de hiperestabilidad de Popov [47] y Landau [48]. Sarpturk y otros propusieron en 1987 [49] una condición suficiente y Furuta en 1990 [50] diseñó un DSMC probando la existencia del modo pseudodeslizante en base a la teoría de Lyapunov. La alcanzabilidad del modo de pseudodeslizamiento se conseguía imponiendo la denominada aproximación de la función de Lyapunov (*Lyapunov Function Approach*)

$$s_k \Delta s_{k+1} < -\frac{1}{2} (\Delta s_k)^2 \text{ con } s_k \text{ superficie en el instante } k \text{ no nula} \quad (1.12)$$

Furuta emplea la ley de control equivalente discreta a partir de la condición

$$s_k = s_{k+1} \quad (1.13)$$

Sira-Ramirez (1991) [51] propone otro DSMC con una nueva ley de alcanzabilidad

$$|s_{k+1} s_k| < s_k^2 \quad (1.14)$$

Otras publicaciones sobre DSMC son las de Chan [52] [53], Yu y Potts (1992) [54] y Gao y otros (1995) [55]. Estos últimos desarrollan una ley de control DSMC imponiendo la aproximación de la ley de alcanzabilidad en tiempo discreto (*Reaching Law Approach*)

$$s_{k+1} = (1 - qT)s_k - \varepsilon T \operatorname{sgn}(s_k) \quad (1.15)$$

donde  $q$  y  $\varepsilon$  son parámetros positivos, y  $T$  es el periodo de muestreo. En 1996 Pieper [56] desarrolló un DSMC adaptativo y Chern y otros [57] proponen un DSMC con superficie integral y suavizado del “*chattering*” empleando la función sigmoideal de la superficie. Naranjo [58] publicó un compendio de los controladores DSMC desarrollados hasta 1997. En 1999 Park y Kim [59] presentan un controlador que mezcla las estrategias de control de sistemas con retardos (*Time Delayed Control* TDC) y DSMC denominado TDSMC. También se desarrollaron controladores DSMC basados en observadores (Mitsawa, 1995) [60] y DSMC con sistemas borrosos (Xie y otros, 2002) [61]. El principal inconveniente del DSMC es que no es efectivo cuando los procesos presentan grandes retardos [62]. En los últimos años se han llevado a cabo algunas investigaciones en este sentido, Guo y Zhang (2002) [63], Richard (2003) [41].

En sistemas por modo deslizante en tiempo continuo, el pseudodeslizamiento se provocaba para reducir el “*chattering*” dentro de una banda de grosor uniforme en torno a la superficie deslizante ideal. En los sistemas en tiempo discreto la forma de la banda de pseudodeslizamiento, cuyo origen se encuentra en el periodo de muestreo, en vez de en el suavizado de la discontinuidad de las leyes de SMC, depende del tipo de incertidumbres del sistema y del diseño del DSMC. Así, para sistemas con incertidumbres aditivas (perturbaciones a la salida), los controladores desarrollados consideran una banda de grosor uniforme [55] [64]. Otra tendencia en el desarrollo de DSMC para sistemas con incertidumbres paramétricas, dada la dependencia de éstas del estado del sistema, es la que considera bandas cuyo grosor crece de forma proporcional a la norma del estado: (Furuta, 1990) [50] [65] [66], (Yu, 1994) [67], (Yu y Yu, 2000) [68] [69]. En estos casos, la banda es de forma cónica o piramidal y se introduce el concepto de *sector deslizante* en [65].

### 1.2.3. Control predictivo basado en modelo

Al final de los 70 surgieron algoritmos que explícitamente utilizaban un modelo dinámico del proceso para prever el efecto de las acciones futuras de control en la salida del sistema. Entre otros se desarrolló el algoritmo de *Model Predictive Heuristic Control* (MPHC) [70] [71], más tarde conocido por *Model Algorithm Control* (MAC), y el algoritmo de *Dynamic Matrix Control* (DMC) [72]. Las leyes de control se obtenían minimizando el error entre la salida futura predicha por el modelo y la referencia futura conocida, sujeto a restricciones de operación. Un artículo que presenta la visión de conjunto del Control Predictivo basado en Modelo (*Model Predictive Control* MPC) hasta 1989 es el de Clarke y Mohtadi [73]. D. W. Clarke estableció los primeros conceptos sobre Control Predictivo Generalizado (*Generalized Predictive Control* GPC) en 1987 [23] [24] [73], utilizando modelos del tipo CARIMA (*Controller Auto-Regresive Integrated Moving-Average*) de gran aceptación en los últimos 20 años para controlar procesos descritos por modelos de entrada-salida. Este controlador se puede aplicar a sistemas multivariantes, sistemas inestables o plantas de fase de no-mínima. Además, se pueden establecer una gran variedad de objetivos de control en comparación con otros algo-

ritmos predictivos. En general, para resolver el problema de optimización que plantea esta estrategia de control se requiere emplear algún método numérico, aunque existen casos en los que se puede obtener una expresión analítica de la ley de control. Esto ocurre cuando el modelo es lineal, la función objetivo representa un criterio cuadrático y no se consideran restricciones explícitamente. En este campo, con modelos de Primer Orden más Tiempo Muerto (POMTM), se destacan los desarrollos y aplicaciones en la década de los 90 de E. F. Camacho y C. Bordóns [74] [75] [76]. Como referencia de identificación de modelos prácticos para el control puede consultar el libro [77] (Picó y otros, 1996).

Dado que MPC presenta una formulación abierta, que contempla un amplio espectro de situaciones académicas y aplicadas, ha sido una estrategia utilizada en muy diversas áreas de la ingeniería de control. Ejemplos recientes de aplicaciones de MPC son en la etapa de purificación en el refinamiento del azúcar (Mata y otros, 1998 [78]), el control en invernaderos (Rodríguez y otros, 2003 [79]) y el control de pH (Berenguel y otros, 2004 [80]).

En MPC con restricciones y MPC robusto cabe señalar los trabajos de E. F. Camacho [81], Gossner y otros [82], Kothare y otros [83] [84], Álvarez y otros [85], Mayne y otros [86] [87], Kerrigan [88], Normey-Rico y E. F. Camacho [89], Megías y otros [90], Limón Marruedo [22], Ramírez [21] y Ramírez y otros [91]. Para el aprendizaje y simulación de GPC con restricciones, un equipo interuniversitario español ha desarrollado recientemente una excelente herramienta (Dormido y otros 2003 [92]).

## 1.3. Objetivos y estructura de la tesis

### 1.3.1. Motivación

Tal como se ha indicado en los apartados anteriores, el SMC es en general un controlador que proporciona respuestas con buenas características cuando existen incertidumbres de modelado, aunque su comportamiento se deteriora cuando es aplicado a sistemas con grandes retardos, frecuentes en la industria, o sistemas modelados con incertidumbres en la estimación de la ganancia del proceso. La formulación básica del control predictivo puede hacer frente a sistemas con grandes retardos, pero la ley de control depende del modelo, y por tanto puede ser muy sensible a incertidumbres, sobre todo en la estimación del retardo. La posibilidad de encontrar un controlador que proporcione respuestas rápidas, con poca sobreoscilación, robustas ante incertidumbres y aplicable a procesos reales con grandes retardos ha motivado esta tesis doctoral.

La sencillez de implementación y ajuste, otra característica deseada de los controladores industriales, ha motivado el empleo del modelo aproximado de Primer Orden

más Tiempo Muerto (POMTM) para el desarrollo de las leyes de control propuestas. La mayoría de los procesos en la industria pueden describirse por un modelo lineal de alto orden cuando se consideran pequeños cambios en torno a un punto de operación. Este modelo se compone de una sucesión de plantas de primer orden. Normalmente una de las constantes de tiempo es mucho mayor que las otras. Las menores pueden considerarse como un retardo puro y es posible aproximar el modelo de un proceso de dinámica compleja y alto orden por un modelo simplificado de POMTM. Dicho modelo se describe según

$$G(s) = \frac{K_m}{1 + \tau_m s} e^{-t_{0m}s} \quad (1.16)$$

cuyos parámetros son la ganancia  $K_m$ , la constante de tiempo  $\tau_m$  y el tiempo muerto o retardo puro del proceso  $t_{0m}$ , y se obtienen fácilmente a partir del método de la curva de reacción

$$\begin{aligned} K_m &= \frac{\Delta variable\_salida}{\Delta variable\_entrada} \\ \tau_m &= 1.5(t_2 - t_1) \\ t_{0m} &= 1.5\left(t_1 - \frac{1}{3}t_2\right) \quad \text{donde} \\ t_1 &= \text{tiempo al 28.3\% del valor final} \\ t_2 &= \text{tiempo al 63.2\% del valor final} \end{aligned} \quad (1.17)$$

La función de transferencia discreta correspondiente es de la forma

$$G(z^{-1}) = \frac{b_m z^{-1}}{1 - a_m z^{-1}} z^{-d_m} \quad (1.18)$$

donde se ha considerado por simplicidad la aproximación del tiempo muerto discreto como un múltiplo entero del tiempo de muestreo  $T$  y los parámetros discretos se relacionan con los continuos mediante las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} a_m &= e^{-\frac{T}{\tau_m}} \\ b_m &= K_m(1 - a_m) \\ d_m &= \left\lceil \frac{t_{0m}}{T} \right\rceil \end{aligned} \quad (1.19)$$

La mayoría de los procesos industriales pueden modelarse con la función de transferencia discreta (1.18). Eligiendo el tiempo de muestreo entre  $\frac{1}{15}$  y  $\frac{1}{4}$  del tiempo que emplea el sistema en alcanzar el 95% del valor de salida final, como se recomienda en [93] [94] [82], el polo del modelo variará entre 0.5 y 0.95 para la mayoría de los procesos industriales. Por esta razón, la sintonización óptima propuesta de los parámetros del primero de los controladores sintetizados en esta tesis (PSMC1, apartado 2.2.2), que propociona un control satisfactorio según ciertos objetivos prefijados, se obtuvo por

simulaciones sucesivas con una familia de procesos modelados con los parámetros

$$\begin{aligned}
 a_m &= 0.5 + 0.05k \text{ con } k = 0, 1, \dots, 9 \\
 b_m &= 1 - a_m \text{ (ganancia normalizada)} \\
 T &= 1 \\
 d_m &= 2, 3, \dots, 10
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Y para el controlador CPSMC (apartado 3.2.2), la sintonización óptima de los parámetros se obtuvo por simulaciones sucesivas para modelos con los parámetros  $a_m$  y  $b_m$  indicados en (1.20) y con  $d_m = 5, 6, \dots, 15$  para analizar una familia de procesos con mayor retardo.

### 1.3.2. Estado del arte

En los últimos años, varias leyes y aplicaciones con modelos en el espacio de estado han sido desarrolladas en la línea de trabajo que motiva esta tesis, como las de Corradini y Orlando (1997) [95] basado en la formulación GPC, García-Gabín y E. F. Camacho (2000), modificando la función objetivo y la superficie con GPC [96] [97] o las de Tang y Misawa [98], empleando control lineal cuadrático (LQR).

Por otra parte, la estrategia predictiva nos proporciona herramientas para encontrar un control óptimo incluso en presencia de restricciones, las cuales no pueden ser contempladas en la teoría de modos deslizantes. Como ejemplo, Zhou y otros (2001) [99] han desarrollado recientemente un controlador híbrido de SMC con MPC no lineal con restricciones. Los conceptos de la predicción y el horizonte deslizante que aporta el control GPC pueden mejorar el desempeño de los controladores SMC en la etapa de aproximación a la superficie deslizante que representa el comportamiento en bucle cerrado deseado.

Aunque la mayoría de los resultados en SMC o MPC se han sintetizado en el espacio de estados, existen algunas líneas de desarrollo que emplean la representación externa entrada-salida (función de transferencia) y un modelo simplificado de los procesos a controlar denominado de Primer Orden más Tiempo Muerto (POMTM). Estos desarrollos permiten modelar y compensar el retardo de forma natural. Así, en tiempo discreto cabe mencionar las tesis doctorales de C. Bordóns [100] (en GPC 1994) y O. Camacho [12] (en SMC 1996), que proponen controladores de fácil sintonización e implementación para un gran número de procesos industriales modelables con modelos de POMTM.

Además, con la introducción de la teoría predictiva se podría solventar el problema de implementación del controlador por modo deslizante, ya que dicho controlador

supone que todo estado del sistema se puede medir y la ley de control puede ser computada instantáneamente, lo cual no es siempre cierto. Liu y otros [101] comenzaron en 1992 a emplear un primer predictor en DSMC. Misawa y Young propusieron en 1994 [102] la aplicación de un observador de Luenberger para la estimación del estado en la ley DSMC. Pero no se han empezado a obtener resultados generales en el espacio de estados para sistemas con retardos hasta los recientes trabajos de Richard que analizan el SMC en tiempo continuo [40] y su aproximación discreta [41]. O. Camacho y otros [62] han propuesto en 2003 un controlador híbrido de SMC con Control por Modelo Interno (IMC) en tiempo continuo, que calcula la ley de control equivalente y la superficie deslizante en función del modelo interno del sistema, es decir, proponen la alcanzabilidad de una superficie deslizante predicha. Este controlador es más robusto que el controlador por modelo interno y presenta mejor desempeño con sistemas de gran retardo que el controlador SMC desarrollado por O. Camacho en 1996 [12] [11]. En tiempo discreto y como resultados de la investigación de esta tesis, se han publicado algunos de los desarrollos híbridos entre GPC y DSMC [103] [104] [105] (2001-2002).

### 1.3.3. Objetivos

Los objetivos principales a alcanzar en el desarrollo de esta tesis son:

1. Encontrar estructuras de control basadas en MPC y SMC aplicables a la mayoría de los procesos industriales con retardo que se puedan describir con un modelo de Primer Orden más Tiempo Muerto, de sencilla identificación en el entorno industrial.
2. Proponer leyes sencillas de sintonización de los controladores en función de los parámetros del modelo para aumentar su aplicabilidad.
3. Validar las leyes con resultados de simulación y aplicaciones reales.

### 1.3.4. Estructuración de contenidos

Con estas líneas de investigación a la vista, tras este primer capítulo introductorio, se ha dividido el trabajo en los siguientes:

- Capítulos 2 y 3, en que se formulan varias leyes de control, se proponen reglas de sintonización y se realizan análisis de estabilidad, robustez y admisibilidad de los sistemas de control.

- Capítulo 4, donde se exponen algunos de los resultados de simulación que muestran las propiedades de los controladores probados con un conjunto representativo de plantas.
- Capítulo 5, que muestra algunas aplicaciones a sistemas no lineales con incertidumbres de modelado y perturbaciones: un intercambiador de calor en un circuito de recirculación de agua situado en la planta piloto del Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Universidad de Sevilla y un campo de colectores de radiación solar distribuidos situados en la plataforma solar del Centro de Investigaciones Energéticas, Medioambientales y Tecnológicas en Tabernas (Almería).
- Capítulo 6, en el que se resumen las aportaciones de esta tesis y se proponen algunos desarrollos futuros.
- Capítulo 7, en el que se presentan a modo de apéndices algunos ejemplos de los programas desarrollados para la aplicación de las leyes de control propuestas.

En el esquema de la figura 1.3 se presentan los tres controladores sintetizados, analizados y validados en esta tesis.

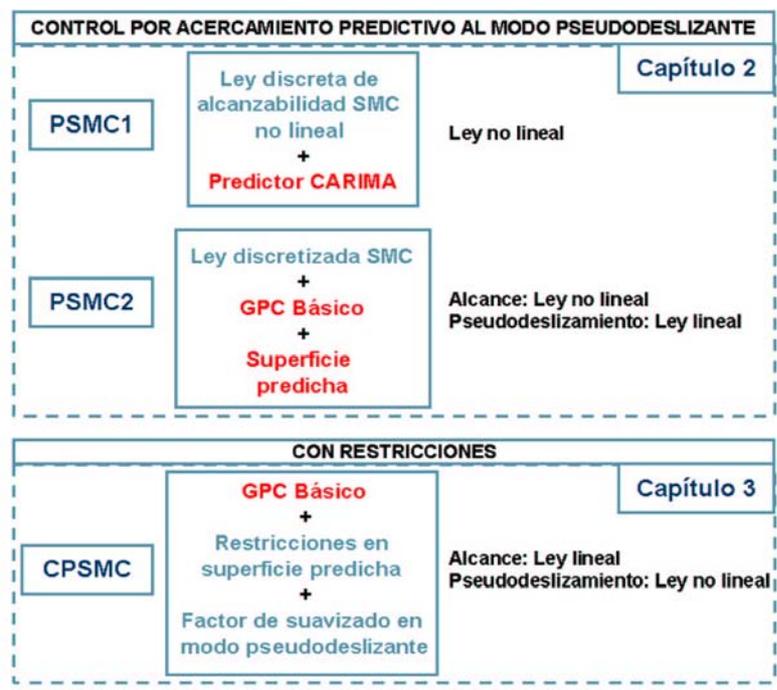


Figura 1.3: Leyes de control predictivo por modo pseudodeslizante.

# Capítulo 2

## Control por acercamiento predictivo al modo pseudodeslizante

### 2.1. Introducción

En este capítulo se desarrollan dos leyes de control que utilizan las ventajas de la predicción y el horizonte deslizante para alcanzar un modo pseudodeslizante. Se obtienen comportamientos satisfactorios en seguimiento y rechazo de perturbaciones aditivas de salida a pesar de que las leyes se calculan con grandes incertidumbres en el modelado. Las aportaciones fundamentales son la introducción del concepto de alcanzabilidad de una superficie predicha, y la aplicabilidad para sistemas con retardo que pueden ser descritos con modelos del tipo Primer Orden más Tiempo Muerto (POMTM). Dichas aportaciones se han desarrollado mediante la síntesis y el análisis de dos leyes de control, que se han denominado en la literatura como Control Predictivo por Modo pseudoDeslizante (*Predictive Sliding Mode Control* PSMC).

PSMC1 es una ley desarrollada en tiempo discreto para sistemas con retardo y superficie del tipo diferencial. PSMC2 se obtuvo mediante: 1) la discretización de una ley equivalente continua; 2) la adición de la ley GPC afectando a una función no lineal de una superficie predicha pseudodeslizante del tipo íntegro-diferencial. Ambas leyes se diseñan según la estrategia de desarrollo de una ley de SMC con las particularidades que se describen a continuación:

1. *Diseño de una superficie deslizante*, que proporciona un comportamiento estable en bucle cerrado. Se emplearon una superficie diferencial (en PSMC1) y una superficie íntegro-diferencial (en PSMC2).
2. *Obtención de la ley de control equivalente continua* que mantendría la superficie

nula si no hubiera incertidumbres en el modelo ni perturbaciones (en PSMC2).

3. *Diseño de la estructura variable* empleando una función no lineal que depende del valor de la superficie para satisfacer la condición de alcanzabilidad y obtener un desempeño dinámico deseado. Se proponen dos leyes de control en las que la discontinuidad tradicional de la estructura variable se suaviza con una función sigmoide del valor de la superficie después del tiempo muerto estimado. La función sigmoide se ajusta con el fin de obtener una solución de compromiso entre el grado de robustez deseado ante incertidumbres no estructuradas y la optimalidad del desempeño dinámico del controlador así como la cancelación de los efectos de las incertidumbres paramétricas. Para ello:
  - En PSMC1: se emplea una ley de alcanzabilidad contractiva afectada por la función sigmoide, desarrollada a partir de un modelo CARIMA (*Controller Auto-Regresive Integrated Moving-Average*) de la planta.
  - En PSMC2: la ganancia de la función sigmoide en la ley de alcanzabilidad se calcula en función del tiempo con la ley de control GPC. Dicha ganancia optimiza el comportamiento en el modo de alcance de la superficie deslizante.

El objetivo de este capítulo es obtener leyes de control explícitas, de sencilla implementación y sintonización aplicables a sistemas con retardo, que garanticen respuestas estables con pequeños índices de desempeño incluso con grandes errores de modelado.

## 2.2. Controlador predictivo por modo pseudodeslizante con supercie diferencial PSMC1

En esta sección se pretende aplicar algunos aspectos del diseño de SMC en tiempo discreto a sistemas con retardo que pueden ser descritos con modelos del tipo Primer Orden más Tiempo Muerto (POMTM) y modelos del tipo CARIMA para predecir el estado y el valor de la superficie futura. A partir de los desarrollos de Gao y otros [55] y Misawa [64], se extendieron al tiempo discreto los conceptos de modo de alcance y modo de deslizamiento en tiempo continuo. Misawa y Young emplearon un predictor en una ley SMC discreta en el espacio de estados [102]. PSMC1 aporta una variante de la ley de alcanzabilidad de [55] aplicada a sistemas con retardo e incorporando el concepto de predicción. Se obtienen además únicamente dos parámetros de sintonización para los cuales se han encontrado reglas de ajuste sencillas en función de los parámetros del modelo de POMTM del proceso. En las siguientes secciones se han realizado también análisis de estabilidad, admisibilidad y robustez de la ley de control.

### 2.2.1. Síntesis del controlador PSMC1

Conocido el modelo discreto del sistema de Primer Orden más Tiempo Muerto (POMTM) (1.18), para muchas aplicaciones industriales en que las perturbaciones no son estacionarias [23] resulta más apropiada la descripción CARIMA (*Controller Auto-Regresive Integrated Moving-Average*) de la forma

$$(1 - a_m z^{-1})y_k = b_m z^{-d_m} u_{k-1} + \frac{C(z^{-1})\varepsilon_k}{\Delta} \quad (2.1)$$

con  $\Delta = 1 - z^{-1}$  y en lo siguiente se considerará el caso simplificado de ruido  $\varepsilon_k$  blanco de media cero, es decir,  $C(Z^{-1}) = 1$ . El controlador se va a desarrollar a partir de dicho modelo de predicción en tiempo discreto

$$y_{k+1} = (1 + a_m)y_k - a_m y_{k-1} + b_m(u_{k-d_m} - u_{k-(d_m+1)}) + \varepsilon_{k+1} \quad (2.2)$$

y el mejor valor esperado de la variable controlada en el instante  $k + d_m + 1$  es

$$\hat{y}_{k+d_m+1} = (1 + a_m)\hat{y}_{k+d_m} - a_m \hat{y}_{k+d_m-1} + b_m(u_k - u_{k-1}) \quad (2.3)$$

El objetivo de control es que la salida  $y_k$  siga a la referencia  $r_k$  en presencia de perturbaciones e incertidumbres de modelado. Cuando los procesos pueden ser modelados según la ecuación (2.1), es posible utilizar dicho modelo para predecir los valores de la salida después del retardo puro del sistema, y utilizar las predicciones para construir una superficie predicha  $s_k^p$  en cada instante  $k$ . La superficie, según la teoría de Control por Modo Deslizante, ha de presentar un comportamiento estable. Para PSMC1 se propone la siguiente estructura de superficie diferencial

$$s_k = \alpha e_k + \beta e_{k+1} \quad (2.4)$$

y de superficie predicha

$$s_k^p = \alpha \hat{e}_{k+d_m} + \beta \hat{e}_{k+d_m+1} \quad (2.5)$$

donde los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  se eligen para satisfacer estabilidad en  $s_k = 0$ . (ver apartados 2.2.2 y 2.2.3).

PSMC1 se desarrolla a partir de una variante de la ley de alcanzabilidad de Gao y otros (1995) (1.15) [55]. Consiste en una ley de control que satisface cierta dinámica de alcanzabilidad a la superficie predicha basada en la predicción que proporciona el modelo. La dinámica propuesta es

$$s_k^p = (1 - \varepsilon T) \left(1 - \frac{|s_{k-1}^p|}{|s_{k-1}^p| + \delta}\right) s_{k-1}^p = f(s_{k-1}^p) s_{k-1}^p \quad (2.6)$$

donde  $T$  es el periodo de muestreo y  $\varepsilon$  y  $\delta$  son parámetros positivos del controlador (apartado 2.2.2). Sustituyendo (2.5) en (2.6) se obtiene

$$s_k^p = \alpha \hat{e}_{k+d_m} + \beta \hat{e}_{k+d_m+1} = f(s_{k-1}^p) (\alpha \hat{e}_{k+d_m-1} + \beta \hat{e}_{k+d_m})$$

$$r_{k+d_m+1} - \hat{y}_{k+d_m+1} = (f(s_{k-1}^p) - \frac{\alpha}{\beta})(r_{k+d_m} - \hat{y}_{k+d_m}) + \frac{\alpha}{\beta} f(s_{k-1}^p)(r_{k+d_m-1} - \hat{y}_{k+d_m-1})$$

Suponiendo la referencia futura desconocida e igualándola a la referencia en el instante actual, es decir,  $r_{k+d_m+1} = r_{k+d_m} = r_k$  y sustituyendo el modelo de predicción (2.3), se obtiene la siguiente ley de control

$$u_k^{psmc1} = u_{k-1} + c_1 \hat{y}_{k+d_m} + c_2 \hat{y}_{k+d_m-1} + c_3 r_k \quad (2.7)$$

donde

$$c_1(k) = \frac{f(s_{k-1}^p) - \frac{\alpha}{\beta} - 1 - a_m}{b_m} \quad (2.8)$$

$$c_2(k) = \frac{a_m + \frac{\alpha}{\beta} f(s_{k-1}^p)}{b_m} \quad (2.9)$$

$$c_3(k) = \frac{(1 + \frac{\alpha}{\beta})(1 - f(s_{k-1}^p))}{b} = -c_1(k) - c_2(k) \quad (2.10)$$

Los parámetros del controlador son en principio  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon$  y  $\delta$  que, como se verá en el apartado 2.2.2, se pueden reducir a dos:  $\alpha$  y  $\varepsilon$ .

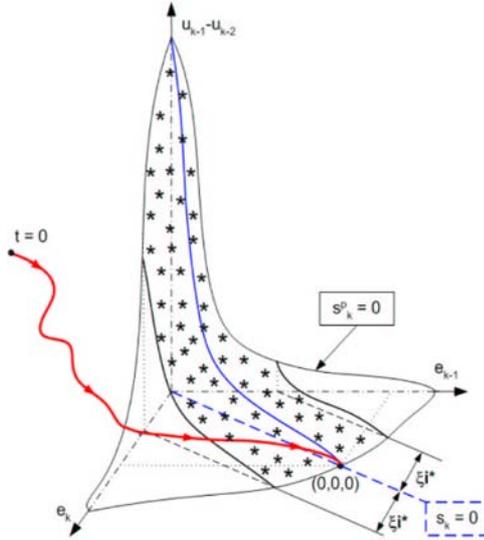


Figura 2.1: Ejemplo de comportamiento de control por PSMC1 para un sistema con  $d = 1$ .

En la figura 2.1, se muestra una trayectoria de la dinámica de un sistema con  $d = 1$  controlado con PSMC1. Dicha trayectoria alcanza una vecindad del hiperplano  $s_k^p = 0$  y pseudodesliza en un entorno de él, disminuyendo los errores en la salida y los incrementos pasados de la señal de control, hasta ingresar a la región estrellada que verifica la ecuación (2.11), y alcanzar una vecindad de  $s_k = 0$ . En dicha vecindad se puede hablar de un modo de pseudodeslizamiento en  $s_k$ . En él, la ley de control es

prácticamente lineal,  $f(s_{k-1}^p) \simeq 1 - \varepsilon T$ , y estabilizante. Esta estrategia comparte la buena propiedad del Control por Modo Deslizante que consiste en reducir la dinámica de alto orden del sistema original con retardo a una dinámica en bucle cerrado con un comportamiento que se puede describir por la inecuación de bajo orden (en nuestro caso de primer orden)

$$|s_{k-1}| = |\alpha e_{k-1} + \beta e_k| \leq \xi^* \quad (2.11)$$

donde  $\xi^*$  es suficientemente pequeño.

### 2.2.2. Sintonización de parámetros

En este apartado se han obtenido funciones para realizar un ajuste inicial de los parámetros de la ley PSMC1 en función de los parámetros del modelo de POMTM del proceso a controlar. Con este fin, se ha escogido un procedimiento de sintonización basado en la minimización de un índice de desempeño que contempla cierto margen de incertidumbre en el modelado. Dicho procedimiento ha proporcionado dos conjuntos representativos de tríos,  $\langle a_m, d_m, \alpha \rangle$  y  $\langle a_m, d_m, \varepsilon T \rangle$ , para interpolar dos funciones de sintonización, a saber,  $\alpha(a_m, d_m)$  y  $\varepsilon(a_m, d_m, T)$ . A continuación se han presentado tres métodos de interpolación de dichos conjuntos de patrones: mediante funciones elementales algebraicas o trascendentes, con hiperplanos en bisagra (*Hinging Hyperplanes*) y con redes neuronales. Por último se han realizado algunas pruebas de validez de las funciones obtenidas y se han comparado los resultados de la aplicación de cada método. Este apartado se ha dividido en los siguientes subapartados:

- Minimización de un índice de desempeño.
- Sintonización mediante funciones elementales algebraicas o trascendentes.
- Sintonización mediante hiperplanos en bisagra.
- Sintonización mediante redes neuronales.
- Estudio comparativo de los métodos.

#### 2.2.2.1. Minimización de un índice de desempeño

Para escoger los parámetros apropiadamente se siguió el procedimiento de sintonización propuesto por Marlin [106] para el controlador PID, que se basa en la optimización de una medida cuantitativa del desempeño del sistema de control. Dicha medida se especifica de forma tal que satisface los siguientes objetivos:

1. El controlador bien sintonizado debe proporcionar un rendimiento satisfactorio para una o más medidas del comportamiento de la variable controlada. Por tanto, una medida del rendimiento que satisficiera este objetivo sería aquella que minimiza el índice IAE (*Integral of Absolute Error*)

$$IAE = \sum_{k=1}^M |SP(k) - CV(k)| \Delta k \quad (2.12)$$

donde  $SP(k)$  es la señal de referencia,  $CV(k)$  es la variable controlada y  $M$  es el horizonte de simulación.

2. Debe proporcionar así mismo un rendimiento satisfactorio ante errores de modelado del proceso, es decir, garantizar cierto grado de robustez. Se escogió una medida del rendimiento que minimiza la suma de los índices  $IAE$  calculados sin errores de modelado y con errores de  $\pm 25\%$  en el retardo  $d_m$ , en el polo  $a_m$  y en  $b_m$ .

El índice que satisface los objetivos y que se minimizó es

$$IAE_3 = \sum_{k=1}^{250} (|0.5 - CV_{1.25abd}(k)| + |0.5 - CV_{abd}(k)| + |0.5 - CV(k)_{0.75abd}|) \Delta k \quad (2.13)$$

donde  $CV_{1.25abd}(k)$  es la variable controlada cuando  $a$ ,  $b$  y  $d$  son un 25% mayor que los modelados,  $CV_{abd}(k)$  cuando son iguales y  $CV(k)_{0.75abd}$  cuando es un 25% menor que los modelados. En los casos de sistemas con  $d_m = 2$  no se consideró el error de modelado negativo, y en los casos de sistemas con  $a_m = 0.8, 0.9, 0.95$  se simuló con  $a_p = 0.99$  en lugar del +25%.

La sintonización óptima de los parámetros propuesta, que propociona un control satisfactorio según los objetivos prefijados, se obtuvo por simulaciones sucesivas para la familia de procesos modelados con los parámetros indicados en el apartado 1.3.1. Los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  se escogen con el fin de garantizar la estabilidad sobre la superficie deslizante y además la relación entre ellos determina la agresividad del controlador. Las mejores respuestas se consiguieron para  $\beta = 0.1$  y se sintonizó la relación entre  $\alpha$  y  $\beta$ . Por otra parte, la variación del parámetro  $\delta$  de la dinámica de alcanzabilidad, descrita en la ecuación (2.6) apenas introduce mejora en la respuesta, por lo que se fijó a  $\delta = 0.1$  también. Los parámetros que optimizaban  $IAE_3$  (2.13) para las plantas modeladas según (1.20) se escogieron dentro de los siguientes rangos

$$\begin{aligned} \varepsilon T &= 0,1 + 0,05h \text{ con } h = 0, 1, \dots, 18 \\ \frac{\alpha}{\beta} &= -0,99 + 0,01i \text{ con } i = 0, 1, \dots, 29 \end{aligned} \quad (2.14)$$

pues fuera de ellos las mejoras no eran apreciables. Algunos de los resultados se ilustran en la figura 2.2.

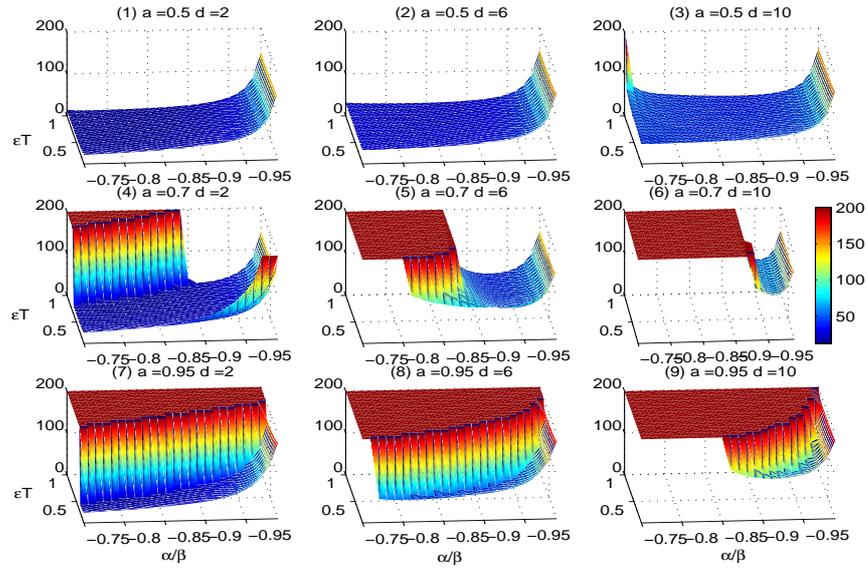


Figura 2.2: Valores de  $IAE_3$  para las plantas (1)  $a = 0.5$   $d = 2$ , (2)  $a = 0.5$   $d = 6$ , (3)  $a = 0.5$   $d = 10$ , (4)  $a = 0.7$   $d = 2$ , (5)  $a = 0.7$   $d = 6$ , (6)  $a = 0.7$   $d = 10$ , (7)  $a = 0.95$   $d = 2$  (8),  $a = 0.95$   $d = 6$  y (9)  $a = 0.95$   $d = 10$ .

En ella se muestra cómo varía  $IAE_3$  con  $\varepsilon T$  y con la relación  $\frac{\alpha}{\beta}$  en los casos (1)  $a_m = 0.5$   $d_m = 2$ , (2)  $a_m = 0.5$   $d_m = 6$ , (3)  $a_m = 0.5$   $d_m = 10$ , (4)  $a_m = 0.7$   $d_m = 2$ , (5)  $a_m = 0.7$   $d_m = 6$ , (6)  $a_m = 0.7$   $d_m = 10$ , (7)  $a_m = 0.95$   $d_m = 2$  (8),  $a_m = 0.95$   $d_m = 6$  y (9)  $a_m = 0.95$   $d_m = 10$ . Se ha representado valor máximo de 200 que indica que al menos una de las tres simulaciones necesarias para obtener  $IAE_3$  presenta una sobreoscilación mayor o igual al 20% del valor de referencia o que es inestable. Al analizarlas en horizontal, por ejemplo (7)-(8)-(9), se observa que, al aumentar el retardo nominal de la planta, la sintonización óptima según el criterio de  $IAE_3$  se consigue al escoger la relación  $\frac{\alpha}{\beta}$  más próxima a -1, lo que implica un controlador menos agresivo. Sin embargo, si se analiza en vertical, por ejemplo (3)-(6)-(9), se observa que es preferible utilizar un controlador menos agresivo con sistemas cuyo polo nominal esté en torno a 0.7, pues el error de modelado en dicho parámetro que se ha tenido en cuenta es grande tanto positivo como negativo. En cuanto a  $\varepsilon T$  se aprecia que, para plantas de polo intermedio (4)-(5)-(6), se ha sintonizado a 1 que corresponde a un controlador más agresivo (lineal) en el modo de pseudodeslizamiento para compensar la elección de  $\alpha/\beta$  más suave. Nótese que las gráficas (3)-(6)-(9) muestran que la sintonización óptima de  $(\alpha/\beta, \varepsilon T)$  es muy diferente para las tres plantas. Esto no indica que si se comete un error de modelado con la sintonización propuesta pueda inestabilizar el sistema, puesto que  $IAE_3$  ya contempla un error de modelado de  $\pm 25\%$  de  $a_m$ . Estas mismas conclusiones se pueden obtener de la figura 2.3 que muestra la variación de la sintonización óptima de  $\frac{\alpha}{\beta}$  y  $\varepsilon T$  con el polo  $a_m$  y el retardo  $d_m$ .

En resumen, los efectos de los parámetros del controlador son:

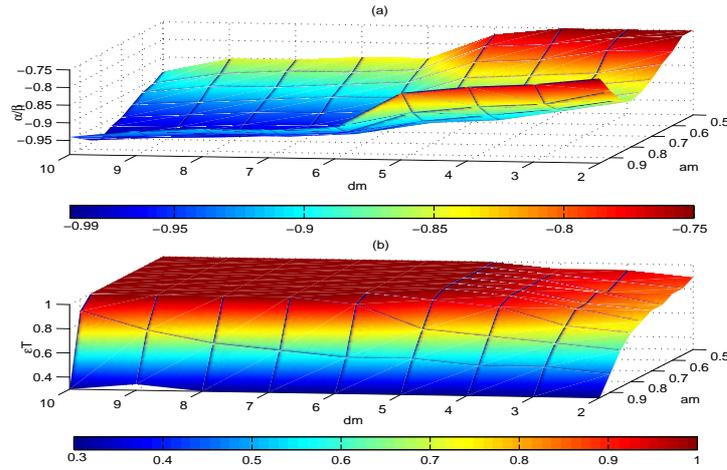


Figura 2.3: Funciones objetivo (a)  $\frac{\alpha}{\beta}$  y (b)  $\varepsilon T$ .

- $\varepsilon T$  : Aumenta el margen de incertidumbres paramétricas admisibles en el modo de pseudodeslizamiento al tender a 0.3, pero aumenta también el tiempo de asentamiento de la señal de salida. Para un valor menor que 0.1, la mejora de  $IAE_3$  no es apreciable.
- $\frac{\alpha}{\beta}$  : Disminuye el índice de desempeño del controlador al tender a cero, pero disminuye también el margen de incertidumbres paramétricas admisibles. Es responsable de la agresividad en el modo de alcance.

### 2.2.2.2. Sintonización mediante funciones elementales algebraicas o trascendentes

A partir de la observación de la figura 2.3 se proponen aproximaciones que emplean funciones algebraicas en el caso de la función  $\alpha$ , y funciones trascendentes en el caso de la función  $\varepsilon$  :

$$\begin{aligned}
 \alpha(d_m, a_m, \beta) &= (K_1 [d_m] (a_m - m)^2 + K_2 [d_m] (a_m - m) + K_3 [d_m]) * \beta \\
 K_1 [d_m] &= k_{11} + k_{12}d_m = 2.52 - 0.13d_m \\
 K_2 [d_m] &= k_{21} + k_{22}d_m = 0.24 - 0.02d_m \\
 K_3 [d_m] &= k_{31} + k_{32}d_m = -0.82 - 0.02d_m \\
 m = 0.8 &\text{ es el valor de } a_m \text{ para el que se da el } \min(\alpha_{iae3}) \text{ para cada } d_m \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon(d_m, a_m, T) &= (0.3 + g[d_m] (1 - e^{-\frac{0.95-a_m}{\tau[d_m]}})) / T \\
g[d_m] &= 0.0068d_m + 0.6451 \\
\tau[d_m] &= -0.0142d_m + 0.1683
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Para el ajuste de  $K_1[d_m]$ ,  $K_2[d_m]$ ,  $K_3[d_m]$ ,  $g[d_m]$  y  $\tau[d_m]$  se empleó el procedimiento de regresión por mínimos cuadrados. En el primer caso (2.15) el vector de parámetros que identificar es

$$\Theta = [k_{12} \ k_{11} \ k_{22} \ k_{21} \ k_{32} \ k_{31}]^T \tag{2.17}$$

Dada una matriz  $X$  de 90 filas, cada una obtenida para cada par  $\langle a_m, d_m \rangle$  de los especificados en (1.20), y 6 columnas, cuyos elementos se calculan a partir de  $a_m$ ,  $d_m$  y  $m$  según

$$\text{Fila de } X = [d_m(a_m - m)^2 \ (a_m - m)^2 \ d_m(a_m - m) \ a_m - m \ d_m \ 1]$$

y dado el vector  $Y$  de 90 componentes obtenidas optimizando  $IAE_3$  para cada par  $\langle a_m, d_m \rangle$  (figura 2.3), el procedimiento obtiene los coeficientes calculando el vector (2.17) según

$$\Theta = (X^T X)^{-1} X^T Y \tag{2.18}$$

Para el segundo caso (2.16), la fila de la matriz de medidas es sencillamente

$$\text{Fila de } X = [d_m \ 1]$$

y el vector  $Y$  se obtiene con los valores de la ganancia máxima de cada curva para cada  $d_m$  ( $g[d_m]$ ) y con los valores del coeficiente de subida al 63 % de cada curva para cada  $d_m$  ( $\tau[d_m]$ ).

### 2.2.2.3. Sintonización mediante Hiperplanos en Bisagra

Una aproximación construida con hiperplanos parece ser una elección apropiada para interpolar las funciones de sintonización óptimas encontradas en el apartado anterior según  $IAE_3$  (2.13), y representadas en la figura 2.3, dada su marcada naturaleza lineal a trozos debida a la discretización de los parámetros de simulación con que fueron obtenidas. La técnica de hiperplanos en bisagra (*Hinging Hyperplanes*), aproxima cualquier función no lineal con una superposición de hiperplanos que se ajustan mediante procedimientos de regresión como el de mínimos cuadrados. Fue propuesta originalmente por Breiman (1993) [107] y consiste en aproximar la función objetivo  $f(x)$  por la adición de funciones base del tipo bisagra (*Hinge Functions*). Dichas funciones,  $y = h(\theta, x)$ , se componen de dos hiperplanos unidos descritos por

$$\begin{aligned}
h^+ &= \theta^+ x \\
h^- &= \theta^- x \\
h &= \max(h^+, h^-) \text{ o } h = \min(h^+, h^-)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

donde  $x$  es el vector regresor con las entradas de la función a interpolar expresado de la forma  $x^T = [x_1, x_2, \dots, x_m, 1]$ . Una función bisagra se define por  $h^+, h^-$  y el tipo max o min. Se denomina bisagra (*hinge*) al vector de parámetros  $\theta$  descrito por

$$\theta = \theta^+ - \theta^- \quad (2.20)$$

o cualquier múltiplo de  $\theta$ .

Para aplicar la técnica de hiperplanos en bisagra hay que decidir el número de funciones bisagra necesario y el procedimiento de estimación de las bisagras. El número de bisagras dependerá de cuántas zonas distintas aparecen en la función objetivo y el algoritmo de estimación empleado suele ser el de mínimos cuadrados, por ser rápido y eficiente. Los elementos principales de la interpolación mediante hiperplanos en bisagra son:

**1. El algoritmo HFA (Hinge Finding Algorithm).** De los dos algoritmos que describió Breiman [107] para buscar la posición óptima de la función bisagra se ha escogido el primero por su sencillez conceptual y de programación. El algoritmo recibe un conjunto de  $N$  tríos  $\langle y_k, \mathbf{x}_k \rangle$  de datos de la función objetivo, donde  $S = \{\mathbf{x}_k = \langle x_{k1}, x_{k2} \rangle : k = 1 \dots N\}$  representa el conjunto de entradas, y ejecuta los siguientes pasos:

1.1. Escoger una bisagra inicial  $\theta$  y repartir los datos en dos conjuntos definidos según

$$\begin{aligned} S^+ &= \{\mathbf{x}_i : x_i \theta > 0, i = 1 \dots N^+\} \\ S^- &= \{\mathbf{x}_j : x_j \theta \leq 0, j = 1 \dots N^-\} \end{aligned} \quad (2.21)$$

1.2. Hallar los vectores  $\theta^+$  y  $\theta^-$  de los hiperplanos que mejor ajustan a los conjuntos  $S^+$  y  $S^-$  respectivamente según optimización por mínimos cuadrados

$$\begin{aligned} \theta^+ &= (X_+^T X_+)^{-1} X_+^T Y_+ \\ \theta^- &= (X_-^T X_-)^{-1} X_-^T Y_- \\ X_+ &= [\mathbf{x}_1 \ \dots \ \mathbf{x}_{N^+}]^T, \forall x_i \in S^+ \\ Y_+ &= [y_1 \ \dots \ y_{N^+}]^T \\ X_- &= [\mathbf{x}_1 \ \dots \ \mathbf{x}_{N^-}]^T, \forall x_j \in S^- \\ Y_- &= [y_1 \ \dots \ y_{N^-}]^T \end{aligned} \quad (2.22)$$

1.3. Actualizar  $S^+$  y  $S^-$  de acuerdo con la ecuación (2.21).

1.4. Repetir desde el paso 1.2 hasta que la suma de los errores al cuadrado no decrezca de manera significativa. Fijar una condición de salida.

**2. El algoritmo HHA (Hinging Hyperplanes Algorithm).** Este algoritmo se encarga de añadir  $k$  bisagras en distintas posiciones para aproximar las regiones de la función objetivo  $f(x)$ . También fue presentado por Breiman 1993. Consiste en:

- 2.1.  $k = 1$ , aplicar HFA con la función objetivo  $f_1(x) = f(x)$  para encontrar  $h_1(\theta_1, x)$ .
- 2.2.  $k = k + 1$ , Aplicar HFA con la función objetivo  $f_k(x) = f_{k-1}(x) - h_{k-1}(x)$  para encontrar la bisagra  $h_k(\theta_k, x)$  junto con su tipo.
- 2.3. Volver a estimar las  $k$  bisagras según el siguiente esquema:

$$\text{Estimar } h_j(x), j = 1 \cdots k, \text{ con la función objetivo } f_j(x) = f_1(x) - \sum_{i=1, i \neq j}^k h_i(x)$$

- 2.4. Repetir desde el paso 2.2 hasta que la suma de los errores  $f_1(x) - \sum_{i=1}^k h_i(x)$  al cuadrado no decrezca de manera significativa. Fijar una condición de salida.

Los algoritmos HFA y HHA presentan algunos problemas entre los que cabe destacar los siguientes [108]:

- Dependiendo de la posición inicial de la bisagra, el algoritmo puede converger a diferentes posiciones finales de la bisagra. Esto se puede entender como un problema de mínimos locales.
- En algunos casos y dependiendo también de la posición inicial, la bisagra encontrada puede llegar a estar fuera del conjunto de datos. En este caso el algoritmo no converge.
- Pueden aparecer ciclos límite, de forma que la colocación de la bisagra oscile entre un conjunto de posiciones sin llegar a converger.

Existen alternativas que garantizan la convergencia y solucionan otros problemas [108] [109].

Para interpolar las funciones de sintonización óptimas encontradas en el apartado anterior, se decidió que 8 bisagras o menos bastaban para aproximar suficientemente cada una de las funciones y se empleó el método de minimización por mínimos cuadrados con el vector de entrada

$$x^T = [ d_m \quad a_m \quad 1 ]$$

Las condiciones de salida de HFA y HHA fueron 0.001 y 0.005 respectivamente. Y, con el fin de obtener convergencia y evitar los casos en que la bisagra se salía del conjunto de datos, se posicionó aleatoriamente la bisagra inicial en  $\theta = [ 0 \ 1 \ -n ]$  con  $n$  número aleatorio entre 0.55 y 0.9 o en  $\theta = [ 1 \ 0 \ -m ]$  con  $m$  número aleatorio entre 3 y 9 alternativamente cada vez que se ejecutaba HFA.

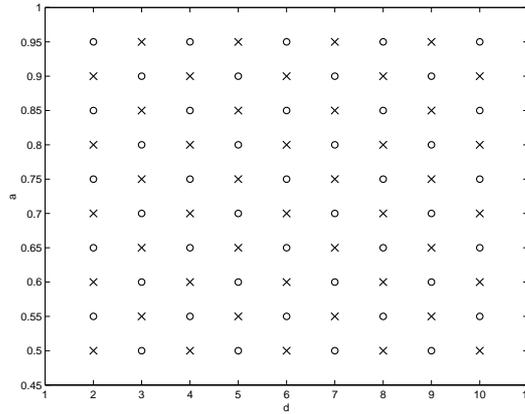
Y las aproximaciones obtenidas fueron

$$\begin{aligned}
h_1^\alpha &= \text{máx} \{ [ -0,0088 \ -0,1848 \ -0,7207 ]x, [ -0,0251 \ -0,1644 \ -0,6256 ]x \} \\
h_2^\alpha &= \text{máx} \{ [ -0,0009 \ 0,7791 \ -0,6728 ]x, [ 0,0006 \ -0,2999 \ 0,1818 ]x \} \\
h_3^\alpha &= \text{máx} \{ [ -0,0072 \ 0,7739 \ -0,6882 ]x, [ 0,0004 \ -0,0127 \ 0,0053 ]x \} \\
h_4^\alpha &= \text{mín} \{ [ 0,0011 \ -0,0209 \ 0,0108 ]x, [ -0,0052 \ 0,1067 \ -0,0207 ]x \} \\
h_5^\alpha &= \text{mín} \{ [ 0,0034 \ 0,0088 \ -0,0179 ]x, [ -0,0010 \ -0,0033 \ 0,0107 ]x \} \\
\alpha(d_m, a_m, \beta) &= \begin{cases} \beta \sum_{k=1}^5 h_k^\alpha(d_m, a_m) & , \alpha > -0.99 \\ -0.99 & , \alpha \leq -0.99 \end{cases} \quad (2.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_1^\varepsilon &= \text{mín} \{ [ 0,0217 \ -0,1468 \ 0,9218 ]x, [ 0,0364 \ -5,4444 \ 5,2687 ]x \} \\
h_2^\varepsilon &= \text{mín} \{ [ 0,0303 \ 0,0072 \ -0,1097 ]x, [ -0,0137 \ -0,0015 \ 0,1101 ]x \} \\
h_3^\varepsilon &= \text{mín} \{ [ 0,0047 \ -0,0862 \ 0,0466 ]x, [ -0,0086 \ 0,1473 \ -0,0267 ]x \} \\
h_4^\varepsilon &= \text{máx} \{ [ 0,0007 \ 0,0146 \ -0,0159 ]x, [ -0,0028 \ -0,1462 \ 0,0952 ]x \} \\
h_5^\varepsilon &= \text{máx} \{ [ -0,0615 \ 2,1990 \ -1,7745 ]x, [ 0,0038 \ -0,0789 \ 0,0264 ]x \} \\
h_6^\varepsilon &= \text{mín} \{ [ -0,0040 \ 0,0920 \ -0,0321 ]x, [ 0,0071 \ -0,1892 \ 0,1240 ]x \} \\
h_7^\varepsilon &= \text{mín} \{ [ 0,0010 \ 0,0243 \ -0,0194 ]x, [ -0,0012 \ -0,0328 \ 0,0373 ]x \} \\
h_8^\varepsilon &= \text{mín} \{ [ 0 \ -0,0054 \ 0,0029 ]x, [ -0,0007 \ -0,0285 \ 0,0300 ]x \} \\
\varepsilon(d_m, a_m, T) &= \frac{1}{T} \sum_{k=1}^8 h_k^\varepsilon(d_m, a_m) \quad (2.24)
\end{aligned}$$

#### 2.2.2.4. Sintonización mediante Redes Neuronales

Otro método de interpolación de funciones no lineales es el entrenamiento de redes neuronales. Éstas proporcionan una aproximación a la función objetivo que se describe mediante la adición de funciones base del tipo sigmoidal. El método de entrenamiento escogido fue el de Levenberg-Marquardt [110] [111], que utiliza una aproximación de la matriz Hessiana  $H$ ,  $H = J^T J$ , en función de la matriz Jacobiana  $J$ , la cual se puede calcular de forma mucho más sencilla a través de un procedimiento estándar de retropropagación.  $J$  contiene las derivadas primeras de los errores de la red con


 Figura 2.4: Patrones de entrenamiento ( $\times$ ) y de prueba (O).

respecto a los pesos y sesgos. Siendo  $e$  el vector de errores de la red, el algoritmo de Levenberg-Marquardt actualiza de forma similar al método de Newton los pesos  $x$  según

$$x_{k+1} = x_k - (J^T J + \mu I)^{-1} J^T e \quad (2.25)$$

El parámetro  $\mu$  se disminuye después de cada iteración satisfactoria, a saber, aquella que reduce la función de desempeño, de forma que, cuando  $\mu = 0$ , el método de actualización es el de Newton con  $H$  aproximada, más rápido y preciso cuando el error es pequeño. Cuando  $\mu$  es grande, el método es el de gradiente descendiente con tamaño de paso pequeño.

Se diseñó un programa en MATLAB para entrenar diversas redes de tres capas, con un número de nodos en la capa oculta  $nn$  entre 3 y 20, y dos entradas y una salida. Para programar el entrenamiento se utilizó la función *trainlm.m* del paquete de funciones “*Neural Networks Toolbox*” de MATLAB. Los patrones de entrenamiento y de prueba que se emplearon se muestran en la figura 2.4, normalizados a pares de entrada  $(x_1, x_2) \in [-1, 1]$  según

$$x_1 = -1 + 2 \frac{d_m - 2}{10 - 2} \quad (2.26)$$

$$x_2 = -1 + 2 \frac{a_m - 0.5}{0.95 - 0.5} \quad (2.27)$$

Las redes con menor error en la determinación del conjunto de patrones de prueba obtenidas proporcionan, mediante las siguientes ecuaciones de sintonización, los parámetros del controlador (2.28-2.29):

$$\begin{aligned}
\alpha(d_m, a_m, \beta) &= \left( \sum_{k=1}^{nn\alpha} W_{2k}^\alpha s_k^\alpha(d_m, a_m) + B_2^\alpha \right) \beta \\
s_k^\alpha(d_m, a_m) &= \tanh(W_{1k1}^\alpha d_m + W_{1k2}^\alpha a_m + B_{1k}^\alpha) \\
nn\alpha &= 14 \\
W_1^\alpha &= \begin{bmatrix} 0,1269 & -1,8398 & 2,0381 & -2,5098 & -2,4081 & -2,4974 & 0,1553 & \dots \\ 2,2665 & -1,0548 & -1,4369 & 1,0828 & -2,0170 & -1,1759 & 1,9004 & \dots \\ \dots & 2,4925 & 0,4527 & -0,8110 & -2,6767 & -0,5286 & 3,0268 & 2,7990 \\ \dots & -0,3675 & 2,3007 & 1,6176 & 1,0538 & -1,4668 & 0,1614 & 1,1207 \end{bmatrix}^T \\
B_1^\alpha &= [ 2,7626 \quad -0,8842 \quad -0,7790 \quad 1,0794 \quad -1,0246 \quad -1,4395 \quad 2,0023 \quad \dots \\ &\quad \dots \quad -0,3901 \quad -0,3154 \quad -2,1228 \quad 1,2020 \quad 1,3293 \quad 0,2985 \quad 0,3720 ]^T \\
W_2^\alpha &= [ 0,2792 \quad 0,4845 \quad 0,1045 \quad 0,6482 \quad -0,0296 \quad -0,2881 \quad -0,2311 \quad \dots \\ &\quad \dots \quad 0,1080 \quad -0,0418 \quad 0,2003 \quad -0,4920 \quad -0,0374 \quad -0,1383 \quad 0,1767 ] \\
B_2^\alpha &= -0,7316 \tag{2.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon(d_m, a_m, T) &= \frac{1}{T} \left( \sum_{k=1}^{nn\varepsilon} W_{2k}^\varepsilon s_k^\varepsilon(d_m, a_m) + B_2^\varepsilon \right) \\
s_k^\varepsilon(d_m, a_m) &= \tanh(W_{1k1}^\varepsilon d_m + W_{1k2}^\varepsilon a_m + B_{1k}^\varepsilon) \\
nn\varepsilon &= 4 \\
W_1^\varepsilon &= \begin{bmatrix} 3,5269 & -3,2466 & -5,0964 & 0,2774 \\ 1,0435 & 12,9049 & 4,0673 & -9,7175 \end{bmatrix}^T \\
B_1^\varepsilon &= [ 2,4702 \quad -7,4773 \quad -1,2049 \quad 7,8480 ]^T \\
W_2^\varepsilon &= [ 0,0471 \quad -0,1142 \quad -0,0377 \quad 0,2059 ] \\
B_2^\varepsilon &= 0,5989 \tag{2.29}
\end{aligned}$$

donde  $\tanh(n) = \frac{2}{1+e^{-2n}} - 1$  es la tangente hiperbólica.

### 2.2.2.5. Estudio comparativo de los métodos

En las figuras 2.5 y 2.6, se muestran las aproximaciones obtenidas mediante las ecuaciones (2.23), (2.24), (2.28), (2.29), (2.15) y (2.16), y las funciones objetivo deseadas. La suma de los cuadrados de los errores relativos a los respectivos fondos de escala calculada según

$$se = \sum_{d=2}^{10} \sum_{a=0.5}^{0.95} \frac{(f(d_m, a_m) - \hat{f}(d_m, a_m))^2}{90 * FS} \tag{2.30}$$

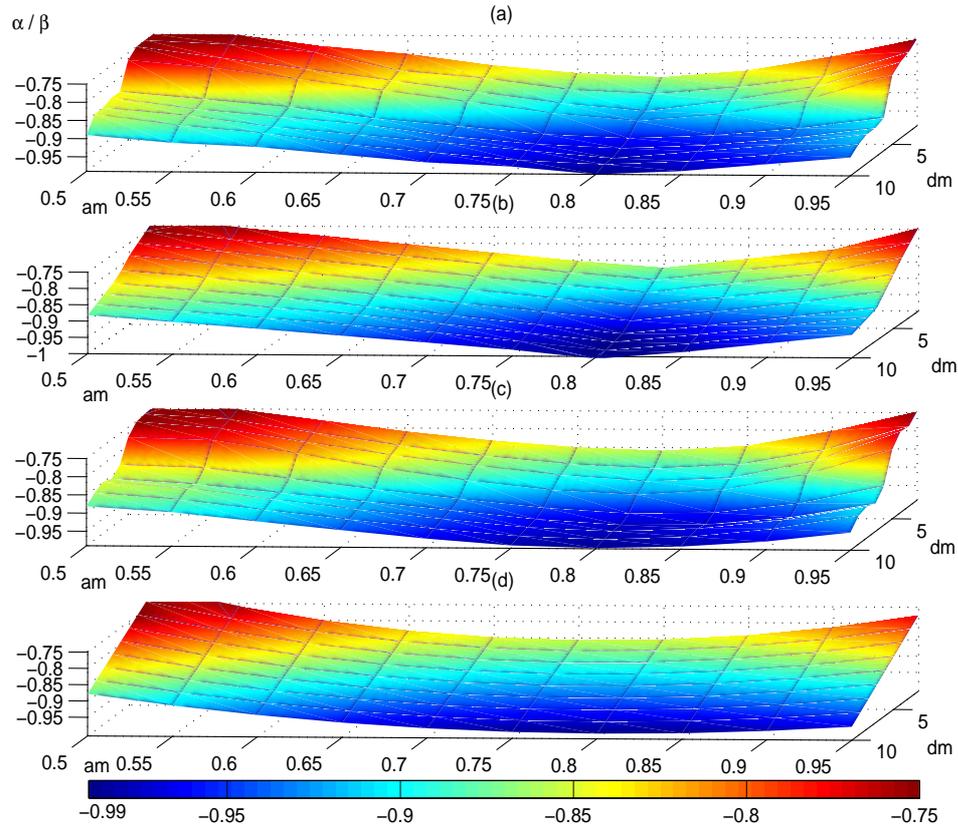


Figura 2.5: (a) Función  $\alpha/\beta$  a interpolar. (b) Aproximación mediante 5 Hiperplanos en Bisagra. (c) Aproximación mediante Red Neuronal de 14 nodos en la capa oculta. (d) Aproximación mediante funciones algebraicas.

	$\hat{f}_{fe}$	$\hat{f}_{hh}$	$\hat{f}_{rn}$
$se(f = \frac{\alpha}{\beta})$ en % de 0.99	0.043	0.014	0.005
$se(f = \varepsilon T)$ en % de 1	0.25	0.14	0.07

Tabla 2.1: Errores relativos para cada función objetivo y cada método de aproximación

donde  $f$  es la función objetivo y  $\hat{f}$  su interpolación ( $fe$  funciones elementales,  $hh$  hiperplanos en bisagra,  $rn$  redes neuronales), se muestra en la tabla 2.1 para cada función y aproximación. En esta tabla se puede observar que la aproximación por redes neuronales es más precisa. Sin embargo la aproximación por funciones elementales es la más sencilla de implementar.

En la figura 2.7 se muestran simulaciones en los casos de máximo error de interpolación con las aproximaciones, seguimiento a 0.5, perturbación a la salida del 10%. En ellas se puede observar que los errores cometidos respecto a los valores de sintonización óptima son suficientemente pequeños para garantizar comportamientos con buenas propiedades. Los parámetros de las plantas simuladas se muestran en la tabla

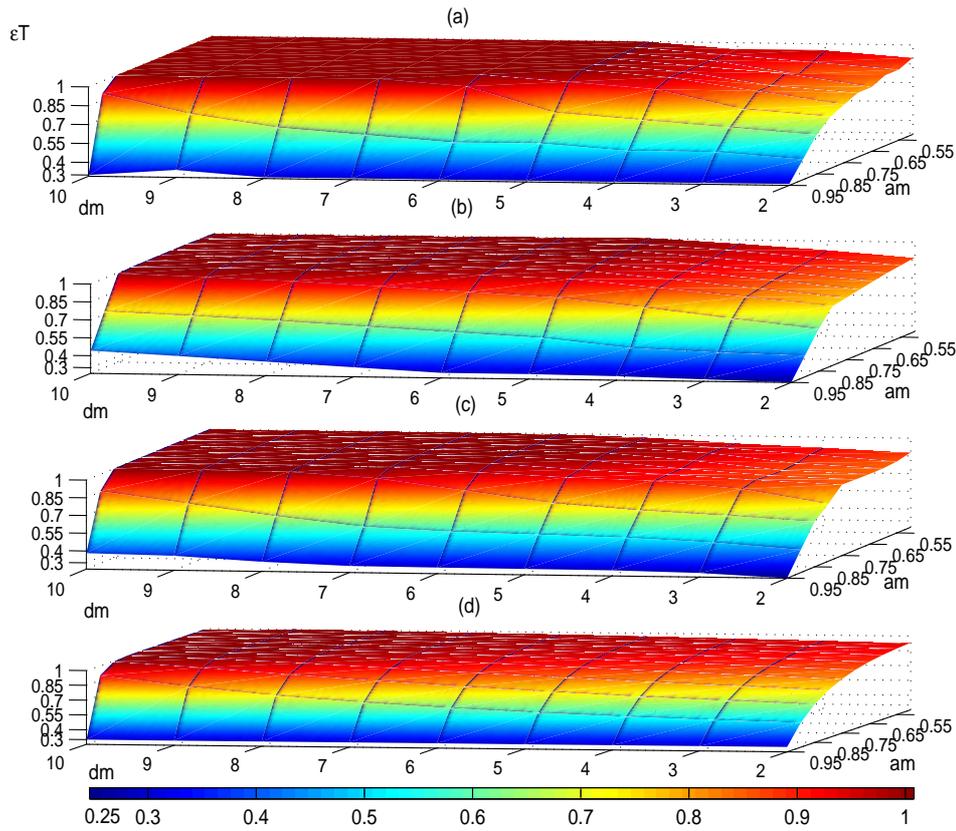


Figura 2.6: (a) Función  $\varepsilon T$  a interpolar. (b) Aproximación mediante 8 Hiperplanos en Bisagra. (c) Aproximación mediante Red Neuronal de 4 nodos en la capa oculta. (d) Aproximación mediante funciones trascendentes.

2.2. Los parámetros sintonizados por cualquiera de los métodos satisfacen las condiciones de estabilidad del bucle cerrado que se presentarán en el siguiente apartado de análisis de estabilidad.

### 2.2.3. Análisis de Estabilidad

En este apartado se analiza la estabilidad nominal del sistema controlado con PSMC1 y la región del espacio de estados para la cual se garantiza una trayectoria admisible y convergente al origen con restricciones en el estado  $\mathbf{x}$  y en la señal de control  $\mathbf{u}$ . Se considerará que no hay errores de modelado, es decir,

$$a_p = a_m = a, b_p = b_m = b \text{ y } d_p = d_m = d$$

Se ha dividido el apartado en los siguientes subapartados:

	$P_{1hb}$	$P_{2hb}$	$P_{3rn}$	$P_{4rn}$	$P_{5fe}$	$P_{6fe}$
Polo $a_m$	0.9	0.95	0.8	0.5	0.85	0.5
Retardo $d_m$	10	5	3	7	6	6
$\frac{\alpha}{\beta}$ de función objetivo	-0.96	-0.8	-0.89	-0.84	-0.95	-0.84
$\frac{\alpha}{\beta}$ de aproximación	-0.958	<b>-0.83</b>	-0.89	-0.855	-0.913	-0.791
error de aproximación en % de 0,99	-0.21	3.54	0.026	<b>1.76</b>	-3.93	<b>-5.83</b>
$\varepsilon T$ de función objetivo	0.9	0.3	0.75	1	0.95	1
$\varepsilon T$ de aproximación	<b>0.740</b>	0.293	0.847	1	0.779	0.983
error de aproximación en % de 1	<b>-19.77</b>	-2.3	<b>12.93</b>	0.2952	<b>-17.97</b>	-1.723

Tabla 2.2: Plantas P1-P6 para las que las aproximaciones proporcionan los máximos errores de sintonización

- *Representación interna del sistema de control.* Los estudios de estabilidad y admisibilidad de los sistemas de control encontrados en la bibliografía se han realizado tradicionalmente en el espacio de estados, por lo que en primer lugar se ha desarrollado la correspondiente representación del modelo CARIMA (2.1), en función de los errores en el instante actual y en el instante anterior, así como de los incrementos de la señal de control en instantes anteriores. Esta representación permitirá el establecimiento de una característica del modo de pseudodeslizamiento que se alcanza con el control PSMC1, y la expresión de la dinámica del bucle cerrado en la forma de una inclusión lineal diferencial.
- *Análisis de estabilidad nominal.* Para ello se han encontrado funciones cuadráticas de Lyapunov realimentando 90 plantas (1.20) con diferentes ajustes de los parámetros del controlador, en ausencia de restricciones en el estado o en la señal de control y sin errores de modelado. También se han analizado los máximos autovalores de las dinámicas en bucle cerrado correspondientes al pseudodeslizamiento y al alcance.
- *Análisis de admisibilidad.* El objetivo de dicho análisis es caracterizar el máximo conjunto de estados que garantiza que una trayectoria del sistema controlado con PSMC1, iniciada en dicho conjunto, evolucionará cumpliendo las restricciones en todo instante. Para ello se estudió la bibliografía publicada por diversos autores, con el fin de expresar los resultados con la apropiada notación extendida en la comunidad académica.

### 2.2.3.1. Representación interna del sistema de control

Sea el sistema lineal descrito por un modelo de Primer Orden más Tiempo Muerto POMTM (1.16) y su modelo CARIMA (2.1). Suponiendo referencia futura constante, es posible expresar el modelo en función de los errores predichos según

$$\widehat{e}_{k+d+1} = (1 + a)\widehat{e}_{k+d} - a\widehat{e}_{k+d-1} - b\mathbf{u}_k \quad (2.31)$$

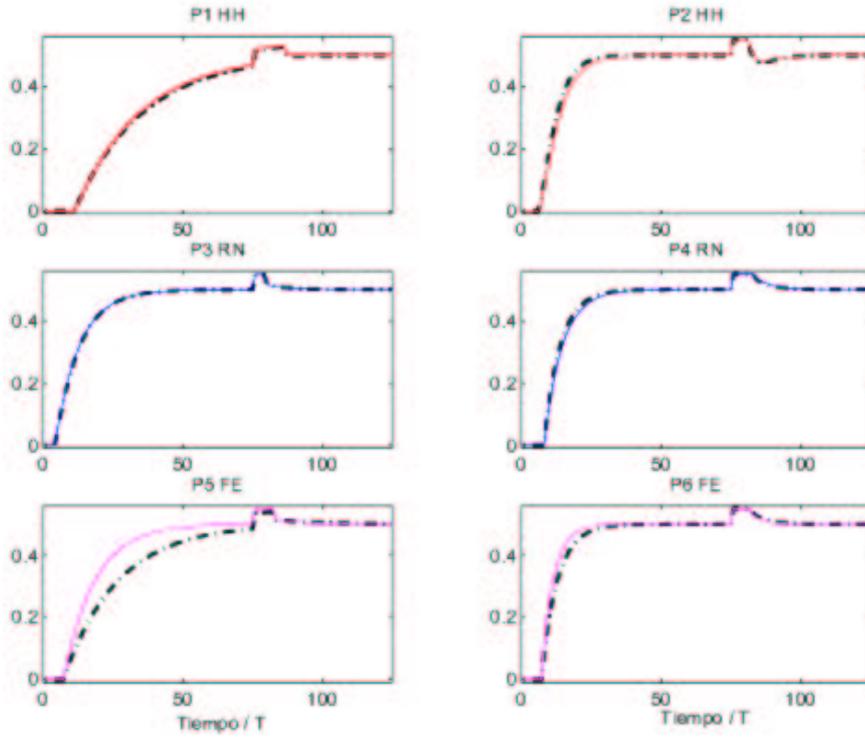


Figura 2.7: Simulaciones en casos de máximo error de interpolación (línea continua) y sin error (línea discontinua): (P1 HH)  $P_1: a_m = 0.9 d_m = 10$ ; (P2 HH)  $P_2: a_m = 0.95 d_m = 5$ ; (P3 RN)  $P_3: a_m = 0.8 d_m = 3$ ; (P4 RN)  $P_4: a_m = 0.5 d_m = 7$ ; (P5 FE)  $P_5: a_m = 0.85 d_m = 6$ ; (P6 FE)  $P_6: a_m = 0.5 d_m = 6$ .

donde

$$\mathbf{u}_k = u_k - u_{k-1} = \Delta u_k \quad (2.32)$$

Para obtener una representación interna apropiada, se eligió como espacio de estados  $X \in \mathfrak{R}^2$  al que pertenece el vector de estados en el instante de muestreo  $k$

$$\mathbf{x}_k = [ e_k \quad e_{k-1} ]^T \quad (2.33)$$

y la evolución del estado queda descrita según la ecuación

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= A\mathbf{x}_k + B\mathbf{v}_k \\ A &= \begin{bmatrix} 1+a & -a \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ B &= [ -b \quad 0 ]^T \\ \mathbf{v}_k &= \mathbf{u}_{k-d} \end{aligned} \quad (2.34)$$

donde  $(A, B)$  es controlable. Si se incluye el retardo del sistema en el estado, se aumenta éste a

$$\mathbf{z}_k = [ \mathbf{x}_k \quad \mathbf{u}_{k-d} \quad \mathbf{u}_{k-d+1} \quad \cdots \quad \mathbf{u}_{k-1} ]^T \quad (2.35)$$

y la evolución del estado queda descrita según

$$\mathbf{z}_{k+1} = A_z \mathbf{z}_k + B_z \mathbf{u}_k \quad (2.36)$$

con

$$A_z = \left[ \begin{array}{cc|ccc} A & B & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \mathbf{I}_{d-1} & \\ 0 & 0 & & & \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{array} \right] \quad (2.37)$$

$$B_z = [ 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1 ]^T$$

con dimensiones

$$\begin{aligned} \dim(A_z) &= (d+2) \times (d+2) \\ \dim(B_z) &= (d+2) \times 1 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Se realimenta con la ley de control PSMC1 presentada en la ecuación (2.7), de forma que no se considera la saturación de la señal de control. El incremento de la señal de control en función de los errores predichos queda expresado según

$$\mathbf{u}_k = \Delta u_k = -c_1(k) \hat{e}_{k+d_m} - c_2(k) \hat{e}_{k+d_m-1} \quad (2.39)$$

o en función del estado predicho en el instante  $k + d_m$  según

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{k}_{psmc1} \mathbf{x}_{k+d_m} = [ -c_1 \quad -c_2 ] \mathbf{x}_{k+d_m} \quad (2.40)$$

Los coeficientes  $c_1$  y  $c_2$  se calculan con las ecuaciones (2.8) y (2.9), y dependen del valor de  $s_{k-1}^p$  que a su vez depende del estado aumentado  $\mathbf{z}$ . En la figura 2.8 se muestra el sistema realimentado. Puesto que el estado predicho  $\mathbf{x}_{k+d_m}$  se obtiene a partir de un

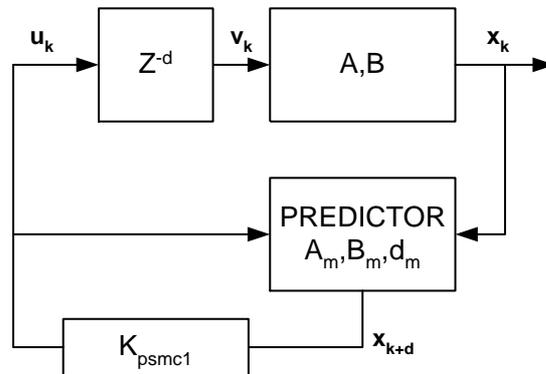


Figura 2.8: Sistema de control por realimentación con PSMC1.

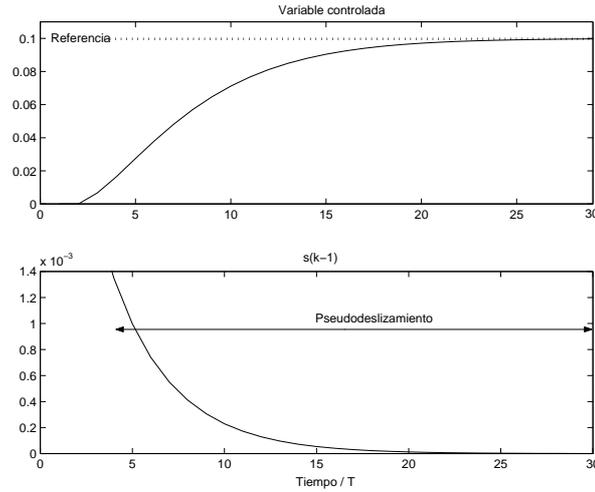


Figura 2.9: Representación temporal. Pseudodeslizamiento:  $a = 0.9$ ,  $b = 0.1$ ,  $d = 2$ ,  $\varepsilon T = 0.25$ ,  $\alpha/\beta = -0.75$ ,  $\xi^* = 0.0014$ .

modelo  $A_m, B_m, d_m$  según (2.34)

$$\mathbf{x}_{k+1} = A_m \mathbf{x}_k + B_m \mathbf{u}_{k-d_m} \quad (2.41)$$

se puede calcular la predicción en el instante  $k + d_m$  como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+d_m} &= A_m^{d_m} \mathbf{x}_k + \sum_{j=0}^{d_m-1} A_m^{d_m-1-j} B_m \mathbf{u}_{k-d_m+j} = \\ &= [ A_m^{d_m} \quad A_m^{d_m-1} B_m \quad A_m^{d_m-2} B_m \quad \cdots \quad A_m^0 B_m ] \mathbf{z}_k = E \mathbf{z}_k \end{aligned} \quad (2.42)$$

En función del estado aumentado  $\mathbf{z}$ , la ley de control es

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{k}_z \mathbf{z}_k = \mathbf{k}_{psmc1} E \mathbf{z}_k \quad (2.43)$$

Al cerrar el bucle, el comportamiento dinámico del estado aumentado se describe por

$$\mathbf{z}_{k+1} = A_z^{bc} \mathbf{z}_k = (A_z + B_z \mathbf{k}_z) \mathbf{z}_k \quad (2.44)$$

Conocida la función  $f(s_{k-1}^p)$  (2.6), el vector de control  $\mathbf{k}_{psmc1}$  puede dividirse en dos sumandos, de forma que la no linealidad quede agrupada en la función  $h(\mathbf{z}_k)$ , que sólo afecta a uno de los dos sumandos

$$\mathbf{k}_{psmc1} = \Gamma_1 + \Gamma_2 h \quad (2.45)$$

donde

$$h(\mathbf{z}_k) = (1 - \varepsilon T) \left( 1 - \frac{|s_{k-1}^p|}{|s_{k-1}^p| + \delta} \right) \quad (2.46)$$

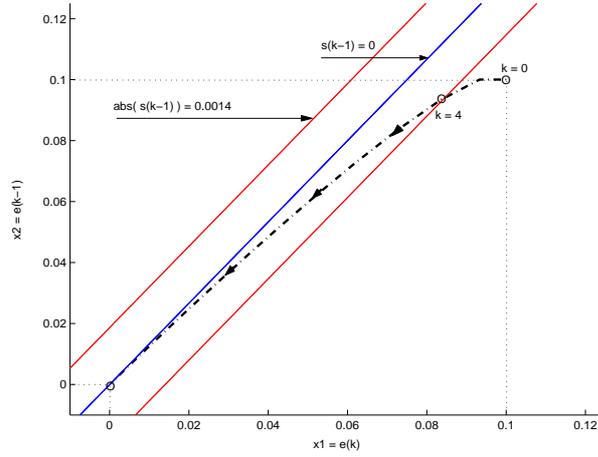


Figura 2.10: Proyección de una trayectoria en un plano definido por los estados  $e_k$  y  $e_{k-1}$ . Pseudodeslizamiento:  $a = 0.9$ ,  $b = 0.1$ ,  $d = 2$ ,  $\varepsilon T = 0.25$ ,  $\alpha/\beta = -0.75$ ,  $\xi^* = 0.0014$ .

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \frac{1+a_m+\frac{\alpha}{\beta}}{b_m} & \frac{-a_m}{b_m} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{b_m} & -\frac{\alpha}{b_m\beta} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

La superficie predicha en el instante  $k - 1$  viene descrita en el espacio de estados  $Z$  según

$$s_{k-1}^p = [\beta \quad \alpha] \mathbf{x}_{k+d_m} = \mathbf{s}^T E \mathbf{z}_k \quad (2.49)$$

donde la matriz  $E$  se calcula con la ecuación (2.42).

La ley de control (2.43) se puede expresar como la suma de una ley lineal y una ley no lineal, empleando la especificación de  $\mathbf{k}_{psmc1}$  según la ecuación (2.45), y se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k &= (\Gamma_1 + h(\mathbf{z}_k)\Gamma_2)E\mathbf{z}_k = \\ &= (\mathbf{k}_L + \mathbf{k}_{NL})\mathbf{z}_k \end{aligned} \quad (2.50)$$

con

$$\mathbf{k}_L = \Gamma_1 E \quad (2.51)$$

$$\mathbf{k}_{NL} = h(\mathbf{z}_k)\Gamma_2 E \quad (2.52)$$

Si se supone que la ley PSMC1 es estabilizante se cumple que, dada una cota  $\xi > 0$  tal que  $|s_k| \leq \xi$  (modo pseudodeslizante), entonces

$$\exists \delta_z > 0 : |\mathbf{z}_k| \leq \delta_z \quad (2.53)$$

Además, como

$$h(\mathbf{z}_k) \leq 1 - \varepsilon T \leq 1 \quad (2.54)$$

entonces

$$|\mathbf{k}_{NL}\mathbf{z}_k| \leq |\Gamma_2 E \mathbf{z}_k| \quad (2.55)$$

Por otra parte, como  $E$  (2.42) es de rango máximo y  $|\Gamma_2 E| \neq 0$

$$|\Gamma_2 E \mathbf{z}_k| \leq |\Gamma_2 E| |\mathbf{z}_k| \quad (2.56)$$

Por tanto, de (2.53), (2.55) y (2.56) se deduce que en el modo de pseudodeslizamiento la no linealidad está acotada según

$$|\mathbf{k}_{NL}\mathbf{z}_k| \leq |\Gamma_2 E| \delta_z \quad (2.57)$$

En la figuras 2.9 y 2.10 se muestra un ejemplo de comportamiento en esta zona de pseudodeslizamiento para un sistema de POMTM  $a = 0.9$   $b = 0.1$   $d = 2$ ,  $\varepsilon T = 0.25$ ,  $\alpha/\beta = -0.75$ ,  $\xi = 0.0014$ .

### 2.2.3.2. Análisis de estabilidad nominal

A continuación se realiza el análisis de la estabilidad nominal del sistema controlado con la ley no lineal PSMC1 (ecuación 2.50). El modo de alcance en PSMC1 puede darse en cualquier estado  $\mathbf{z}$ , ya que la ley se desarrolla a partir de la condición de alcanzabilidad propuesta en la ecuación (2.6) y no se están considerando restricciones ni en el estado ni en la señal de control. Puesto que la ley es no lineal, es conveniente separar la matriz que representa la dinámica de bucle cerrado  $A_z^{bc}$  en dos matrices, una afectada de la no linealidad agrupada en la función  $h(s_{k-1}^p)$  descrita en la ecuación (2.46) y otra no, según

$$A_z^{bc} = A_{z1}^{bc} + h A_{z2}^{bc} \quad (2.58)$$

donde

$$A_{z1}^{bc} = A_z + B_z \mathbf{k}_{z1} = A_z + B_z \Gamma_1 E \quad (2.59)$$

$$A_{z2}^{bc} = B_z \mathbf{k}_{z2} = B_z \Gamma_2 E \quad (2.60)$$

y la función  $h(s_{k-1}^p) = h$  cumple que  $h \in [0, 1 - \varepsilon T]$ .

Aplicando el cambio de variable

$$h^* = \frac{h}{1 - \varepsilon T} \quad (2.61)$$

la ecuación se transforma a

$$A_z^{bc} = A_{z1}^{bc} + h^* A_{z2}^{bc*} \quad (2.62)$$

donde

$$A_{z2}^{bc*} = (1 - \varepsilon T) B_z \Gamma_2 E \quad (2.63)$$

La dinámica de bucle cerrado se puede expresar como una combinación convexa de las matrices  $A_{z1}^{bc}$  y  $A_{z3}^{bc}$ , con

$$A_{z3}^{bc} = A_{z1}^{bc} + A_{z2}^{bc*} \quad (2.64)$$

de forma que

$$A_z^{bc} = (1 - h^*)A_{z1}^{bc} + h^*A_{z3}^{bc} \quad (2.65)$$

Entonces, para todo  $h^* \in [0, 1]$ , si existe una matriz  $P$  simétrica definida positiva que satisfice las siguientes desigualdades matriciales lineales (*Linear Matrix Inequalities* LMIs)

$$\begin{aligned} P - A_{z1}^{bcT} P A_{z1}^{bc} &> 0 \\ P - A_{z3}^{bcT} P A_{z3}^{bc} &> 0 \\ P &> 0 \end{aligned} \quad (2.66)$$

entonces la dinámica de bucle cerrado descrita por  $A_z^{bc}$  es estable. En este caso, existirá una función cuadrática de Lyapunov  $V(z_k)$  de la forma

$$V(z_k) = z_k^T P z_k \quad (2.67)$$

que satisfice

$$V(z_k) > V(z_{k+1}), \forall z_k \neq 0 \quad (2.68)$$

Una de las recientes herramientas empleadas para el diseño y análisis de la estabilidad de sistemas de control es la utilización de LMIs. El único texto que agrupa con cierto detalle la teoría matemática de LMIs es la monografía de Boyd y otros [112]. En el trabajo de VanAntwerp y Braatz (2000) [113] es posible encontrar una excelente guía sobre la teoría matemática y las aplicaciones al control de procesos de los LMIs.

Empleando las funciones de la librería de MATLAB para la programación y resolución de LMIs (*lmivar*, *lmiterm*, *newlmi*, *setlmi*, *getlmi*, *feasp* y *dec2mat*) se han encontrado las matrices  $P$  que satisfacen las LMIs (2.66) con la familia de plantas descritas en (1.20), sintonizando el controlador con todas las combinaciones de los siguientes valores de los parámetros

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} &= -0.9 + 0.01k \text{ con } k = 0, 1, \dots, 180 \\ \varepsilon T &= 0.1 + 0.05k \text{ con } k = 0, 1, \dots, 18 \end{aligned} \quad (2.69)$$

Además se han calculado, con la función *gevp* de MATLAB, los valores mínimos de un coeficiente  $\gamma \in [0, 1]$  que representa la contractividad de la función de Lyapunov (2.67)

$$z_k^T P z_k \leq \gamma^k z_0^T P z_0 \quad (2.70)$$

para las 90 plantas estudiadas con cada sintonización del controlador propuesta en (2.69). Un valor menor que dicho coeficiente  $\gamma_{\min}$  impide que exista una matriz  $P$  solución de las LMIs

$$\begin{aligned} \gamma P - A_{z1}^{bcT} P A_{z1}^{bc} &> 0 \\ \gamma P - A_{z3}^{bcT} P A_{z3}^{bc} &> 0 \\ P &> 0 \end{aligned} \quad (2.71)$$

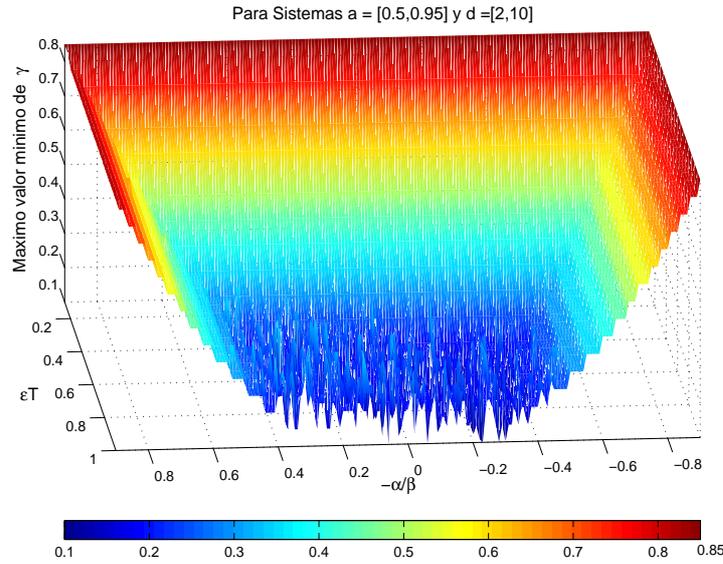


Figura 2.11: Valores máximos del mínimo coeficiente de contractividad de la función de Lyapunov  $V(z_k)$  para la familia de plantas analizadas con cada sintonización de  $\frac{\alpha}{\beta}$  y  $\varepsilon T$ .

En la figura 2.11 se han representado los máximos de los  $\gamma_{\min}$  encontrados para cada sintonización del controlador propuesta.

Por tanto, la estabilidad de los sistemas modelados con parámetros pertenecientes a los rangos  $a \in [0.5, 0.95]$  y  $d \in [2, 10]$  controlados con PSMC1 sin errores de modelado ni restricciones está garantizada sintonizando los controladores según el criterio  $IAE_3$  (2.13).

En la figura 2.12 se representa el máximo de los máximos autovalores en valor absoluto de  $A_{z1}^{bc}$  y  $A_{z3}^{bc}$  para procesos industriales que pueden ser modelados con parámetros pertenecientes a los rangos  $a \in [0.5, 0.95]$ , y  $d \in [2, 10]$

$$\sigma_{\max} = \max(\max_{\lambda} |\lambda(A_{z1}^{bc})|, \max_{\lambda} |\lambda(A_{z3}^{bc})|) < 1 \quad (2.72)$$

Esto corresponde a los casos extremos cuando  $h^* = 0$  (alcance,  $A_{z3}^{bc}$ ) y  $h^* = 1$  (deslizamiento,  $A_{z1}^{bc}$ ). Podemos observar que las siguientes ecuaciones garantizan la estabilidad del sistema en bucle cerrado

$$|\alpha/\beta| < 1 \quad (2.73)$$

$$|1 - \varepsilon T| \leq 1 \quad (2.74)$$

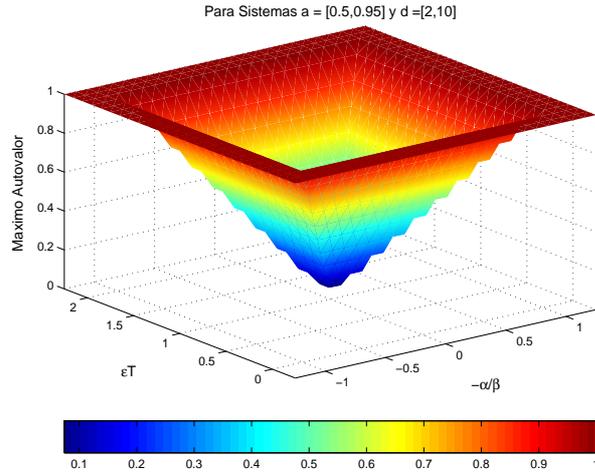


Figura 2.12: Variación del máximo autovalor de  $A_{z1}^{bc}$  y  $A_{z3}^{bc}$  cuando  $|s^T E \mathbf{z}_k| > 0$ .

### 2.2.3.3. Análisis de admisibilidad

El comportamiento en bucle cerrado que se produce realimentando el sistema con la ley PSMC1 es no lineal, por lo que el sistema evoluciona continuamente en el modo de alcance, convergente al origen, representado por el vector  $\mathbf{z}$  nulo. Dado un sistema lineal descrito por la ecuación (2.36) y la ley de control PSMC1 (2.50), el estudio de las condiciones de admisibilidad cuando  $|s_{k-1}| > 0$  se desarrolla a partir de los siguientes elementos conocidos:

- La matriz de transición de estados en bucle cerrado  $A_z^{bc}$  puede expresarse como una inclusión diferencial lineal (2.65) tal que

$$A_z^{bc} = Co(A_{z1}^{bc}, A_{z3}^{bc}) \quad (2.75)$$

definida en todo el espacio de estados  $Z = X \times U \times \dots \times U \in \mathfrak{R}^{d+2}$ .

- Las restricciones en la variable controlada limitan el conjunto  $X$ :

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^2 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T \mathbf{x} \leq [\bar{X} \quad \bar{X} \quad -\underline{X} \quad -\underline{X}]^T\} \quad (2.76)$$

- Las restricciones en la variable manipulada limitan el conjunto  $U$ :

$$U = \{\mathbf{u} \in \mathfrak{R} : [1 \quad -1]^T \mathbf{u} \leq [\bar{U} \quad -\underline{U}]^T\} \quad (2.77)$$

El concepto de *invariancia* es esencial en el análisis de sistemas con restricciones. La *teoría de conjuntos invariantes* se ha desarrollado en los últimos 30 años con los trabajos de Bertsekas (1972) [114], Kerthi y Gilbert (1987) [115] y Bitsoris (1988) [116], hasta los más recientes en la década de los 90: Gilbert & Tan (1991) [117], Blanchini (1994) [118], Kolmanovsky y Gilbert (1998) [119], Kerrigan y Maciejovsky (2000) [120] [88]. En [121], Blanchini presenta un excelente compendio de los resultados en este campo, tanto en los aspectos teóricos como en la aplicación al control de sistemas.

Un sistema no autónomo *evoluciona de forma admisible*, es decir, cumpliendo las restricciones en todo instante  $k$ , si y sólo si existe un *conjunto invariante de control* contenido en el conjunto de restricciones  $X$ . Un conjunto  $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$  se dice que es un *conjunto invariante de control* asociado a un sistema no autónomo  $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$  siendo  $x_k \in X \subset \mathfrak{R}^n$  y  $u_k \in U \subset \mathfrak{R}^m$

si  $\forall x_k \in \Omega, \exists u_k = h(x_k) \in U$  (actuación admisible) tal que  $x_{k+1} \in \Omega$

Es posible encontrar un *conjunto admisible en  $i$  pasos*  $C_i^{psmc1}(Z)$ , que es aquél que garantiza que una trayectoria de  $i$  pasos se mantendrá dentro de  $Z$ , según

$$C_i^{psmc1}(Z) = Q(C_{i-1}^{psmc1}(Z)) \cap Z \quad (2.78)$$

donde  $Q$  es el *conjunto a un paso* que se define según

$$Q(\Omega) = \{\mathbf{z}_k \in Z : \exists u_k \in U \text{ tal que } \mathbf{z}_{k+1} \in \Omega\} \quad (2.79)$$

Si  $\Omega$  es un invariante de control,  $Q(\Omega)$  también lo es. Para nuestro problema  $(A_z^{bc}, X, U)$ ,  $Q(C_{i-1}^{psmc1})$  se puede calcular como

$$Q(C_{i-1}^{psmc1}) = Q_1(C_{i-1}^{psmc1}) \cap Q_3(C_{i-1}^{psmc1}) \quad (2.80)$$

$Q_1$  y  $Q_3$  se calculan con  $A_{z1}^{bc}$  y  $A_{z3}^{bc}$  respectivamente. El algoritmo convergerá al *máximo conjunto admisible*  $C_\infty^{psmc1}$ , que al tratarse de un sistema en bucle cerrado estable al origen, coincide con un conjunto  $O_\infty^{psmc1}$  suficientemente grande *asintóticamente estabilizable al origen* contenido en  $Z$

$$O_\infty^{psmc1} = \{\mathbf{z} \in Z = X \times U \times \dots \times U \in \mathfrak{R}^{d+2} : R\mathbf{z} \leq r\} \quad (2.81)$$

Este conjunto es un invariante en el espacio de estados  $Z$ , por lo tanto todas las trayectorias que parten de  $O_\infty^{psmc1}$  quedan confinadas en  $O_\infty^{psmc1}$ , y es el máximo conjunto admisible para la inclusión diferencial propuesta. Nótese que al ser el sistema real no lineal (2.58), no corresponderá al máximo conjunto para este sistema, pero sí a un conjunto suficientemente grande. El algoritmo de cálculo de  $C_\infty^{psmc1}$  se compone de los siguientes pasos:

- o Para  $i = 0$ , el conjunto invariante de partida será  $C_o^{psmc1} = Z_K = Z_{1K} \cap Z_{3K}$ , donde

$$Z_{1K} = \{\mathbf{z} \in Z : \mathbf{x} \in X, \mathbf{u} = \Gamma_1 E\mathbf{z} \in U\} \quad (2.82)$$

$$Z_{3K} = \{\mathbf{z} \in Z : \mathbf{x} \in X, \mathbf{u} = (\Gamma_1 + (1 - \varepsilon T)\Gamma_2)E\mathbf{z} \in U\} \quad (2.83)$$

o Para  $i > 0$

1. Calcular  $C_i^{psmc1}$

$$C_i^{psmc1}(Z) = Q_1(C_{i-1}^{psmc1}) \cap Q_3(C_{i-1}^{psmc1}) \cap Z \quad (2.84)$$

2. Si  $C_{i-1}^{psmc1} \subseteq C_i^{psmc1}$ , entonces final del algoritmo.

Un conjunto de estados representativos de la dinámica general del sistema son

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_0 = P\mathbf{x}_0 &= [\mathbf{x}_0^T \ 0 \ \cdots \ 0]^T \\ \text{con } P^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.85)$$

entre los que se incluyen los estados de equilibrio estacionarios que verifican  $\mathbf{x}_{01} = \mathbf{x}_{02}$ . Del conjunto  $O_\infty^{psmc1}$ , sólo los estados de la forma  $\mathbf{z}_0$  garantizan una trayectoria acotada y admisible desde  $\mathbf{x}_0$  hasta el estado origen  $\mathbf{x} = [0 \ 0]^T$ . Se define

$$\Phi = \{\mathbf{x}_0 \in X : RP\mathbf{x}_0 \leq r\} \quad (2.86)$$

como un conjunto suficientemente grande de puntos de equilibrio a partir de los cuales se garantiza una trayectoria estable y admisible. El conjunto  $\Phi$  está incluido en la proyección de  $O_\infty^{psmc1}$  en  $X$ ,  $O_{\infty x}^{psmc1}$ , pero no coincide con ella. Nótese que no es un conjunto invariante positivo en  $X$ , porque la evolución del estado  $\mathbf{x}$  puede salir de  $\Phi$  sin salir de  $O_{\infty x}^{psmc1}$ .

En la figura 2.13 se muestra la representación del conjunto  $\Phi$  en trazo continuo y grueso, en el espacio de estados  $X$ , incluido dentro de la proyección en  $X$  de  $O_{\infty x}^{psmc1}$  en trazo discontinuo y grueso. Se han representado 6 trayectorias (-.-) simuladas imponiendo restricciones en la señal de control. Las que parten de  $\mathbf{x}_{01}$  a  $\mathbf{x}_{04}$ , estados incluidos en  $\Phi$ , quedan confinadas en  $O_{\infty x}^{psmc1}$  y alcanzan el origen sin violar las restricciones en  $X$  (Proyección de  $Z_K$  en  $X$ ).  $\mathbf{x}_{05}$  o  $\mathbf{x}_{06}$  corresponden a estados estables aunque no admisibles (no factibles) para las restricciones propuestas.  $\mathbf{x}_{07}$  o  $\mathbf{x}_{08}$  son estados estacionarios, factibles y admisibles. El ejemplo es de control de un sistema de POMTM  $a = 0.75$   $b = 0.1$   $d = 2$ , con restricciones en estado  $\pm 1$  y señal de control de  $\pm 1$ .

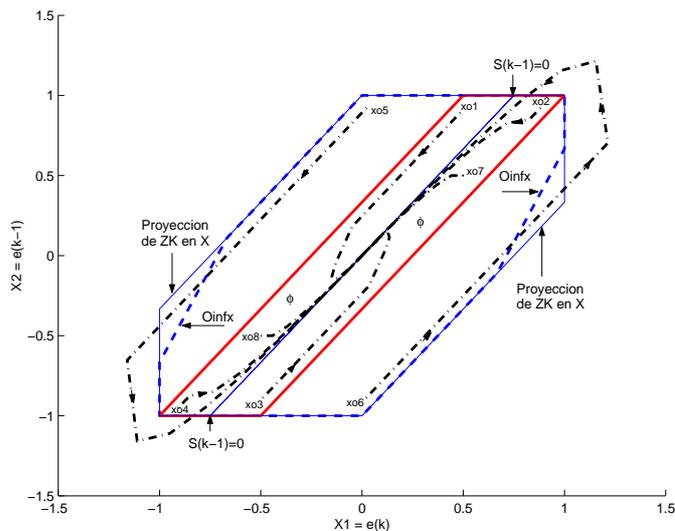


Figura 2.13: Representación de trayectorias (-.-) en  $X$  del sistema controlado con PSMC1 y modelado como de POMTM con  $a = 0.75$   $b = 0.25$   $d = 2$ , con restricciones en estado  $\pm 1$  y señal de control de  $\pm 1$ ,  $\varepsilon T = 0.4$  y  $\alpha/\beta = -0.75$ .

#### 2.2.4. Análisis de Robustez

En este apartado se analizará el grado de robustez del controlador ante incertidumbres paramétricas en el modelo del sistema, entendiendo como tal la máxima incertidumbre en los tres parámetros del modelo que garantiza la estabilidad en bucle cerrado. Se representarán los máximos autovalores en valor absoluto de las matrices componentes de la inclusión diferencial lineal que describe la dinámica del estado en bucle cerrado en cuatro casos de incertidumbres de modelado: en el polo, en la ganancia estática, en el retardo puro y en los tres parámetros a la vez. Se ha dividido el apartado en los siguientes subapartados:

- *Representación interna del sistema de control con incertidumbres.* La matriz de transición del estado en bucle cerrado se ha expresado como una adición de matrices, consiguiendo separar con ellas las incertidumbres en cada parámetro.
- *Estabilidad robusta.* Se han planteado y resuelto las desigualdades matriciales lineales necesarias para determinar un valor conservador de la máxima incertidumbre en los tres parámetros del modelo que garantiza la estabilidad en bucle cerrado. Además se han obtenido rangos de incertidumbre representados frente a los máximos autovalores que mantienen la dinámica en bucle cerrado estable para la familia de plantas indicadas en el apartado 1.3.1.
- *Admisibilidad robusta.* Se ha determinado el máximo conjunto admisible (2.81) para la dinámica en bucle cerrado con incertidumbres en el polo, en la ganancia

y en el retardo, que aumentan la complejidad del algoritmo presentado en el subapartado 2.2.3.3, y precisan de una nueva caracterización de la matriz de transición de estados en bucle cerrado mediante una nueva inclusión diferencial lineal.

### 2.2.4.1. Representación interna del sistema de control con incertidumbres

El sistema lineal con incertidumbres paramétricas de modelado se describe en el espacio de estados  $\mathbf{z}_k$  (2.35) con la siguiente representación interna

$$\mathbf{z}_{k+1} = \tilde{A}_z \mathbf{z}_k + \tilde{B}_z \mathbf{u}_k \quad (2.87)$$

donde las matrices  $\tilde{A}_z$  y  $\tilde{B}_z$ , que se habían definido en (2.34) y (2.37), se verán modificadas con las siguientes incertidumbres

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= a_m + \Delta a_m = a_m(1 \pm e_a) \\ \tilde{b} &= b_m + \Delta b_m = b_m(1 \pm e_b) \\ \tilde{d} &= [d_m + \Delta d_m] = [d_m(1 \pm e_d)] \end{aligned} \quad (2.88)$$

y  $a_m$ ,  $b_m$  y  $d_m$  corresponden a los parámetros del modelo de predicción del sistema.

El sistema es realimentado con el controlador PSMC1 (2.43) y el modelo del sistema en bucle cerrado queda expresado según

$$\mathbf{z}_{k+1} = \tilde{A}_z^{bc} \mathbf{z}_k = (\tilde{A}_z + \tilde{B}_z \tilde{\mathbf{k}}_z) \mathbf{z}_k \quad (2.89)$$

cuyas matrices se modifican en función del signo del error de modelado.

En general, la dinámica del sistema en bucle cerrado con incertidumbres puede describirse por

$$\begin{aligned} \tilde{A}_z^{bc} &= \tilde{A}_z + \tilde{B}_z \tilde{\mathbf{k}}_z + \Delta a_m \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \Delta b_m \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{A}_z^{bc} &= \tilde{A}_z + \tilde{B}_z \tilde{\mathbf{k}}_z + \Delta a_m N_a + \Delta b_m N_b \end{aligned} \quad (2.90)$$

con dimensiones

$$\begin{aligned} \dim(\tilde{A}_z) &= (d_z + 2) \times (d_z + 2) \\ \dim(\tilde{B}_z) &= (d_z + 2) \times 1 \\ \dim(N_a) &= \dim(N_b) = (d_z + 2) \times (d_z + 2) \\ d_z &= \text{máx}(d, d_m) \end{aligned} \quad (2.91)$$

En función del signo del error en la estimación del tiempo muerto, las matrices  $\tilde{A}_z$ ,  $\tilde{B}_z$  y  $\tilde{\mathbf{k}}_z$  se modifican según:

1. Retardo modelado menor que el retardo de la planta ( $d_z = d$ ).

Se añaden  $d - d_m$  ceros en cada una de las dos filas de la matriz  $E$  que relaciona  $\mathbf{x}_{k+d_m}$  con  $\mathbf{z}_k$  para calcular  $\tilde{\mathbf{k}}_z$ .

$$\mathbf{x}_{k+d_m} = [ A_m^{d_m} \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad A_m^{d_m-1}B_m \quad A_m^{d_m-2}B_m \quad \cdots \quad A_m^0B_m ] \mathbf{z}_k = \tilde{E} \mathbf{z}_k \quad (2.92)$$

$$\tilde{\mathbf{k}}_z = \mathbf{k}_{psmc1} \tilde{E} \quad (2.93)$$

$$\tilde{A}_z = A_z, \quad \tilde{B}_z = B_z \quad (2.94)$$

2. Retardo modelado mayor que el retardo de la planta ( $d_z = d_m$ ).

Se modifica  $\tilde{A}_z$  con el fin de ubicar  $\tilde{B}$  en la columna correspondiente a la variable de estado  $\mathbf{u}_{k-d}$ . Entre  $A$  y  $B$  hay dos filas con  $d_m - d$  ceros.

$$\tilde{A}_z = \left[ \begin{array}{cc|cccccc} A & 0 & 0 & \cdots & 0 & B_d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \mathbf{I}_{d_m-1} & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & \\ \hline 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{array} \right] \quad (2.95)$$

$$\tilde{B}_z = [ 0 \quad 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad 0 \quad 1 ]^T \quad (2.95)$$

$$\tilde{\mathbf{k}}_z = \mathbf{k}_z \quad (2.96)$$

### 2.2.4.2. Estabilidad robusta

Se explicó en el subapartado de análisis de estabilidad nominal (2.2.3.2), que la matriz que representa la dinámica en bucle cerrado puede expresarse como una inclusión diferencial lineal de otras dos matrices  $A_{z1}^{bc}$  y  $A_{z3}^{bc}$  (ecuación 2.65). Ahora se plantea la misma expresión con sistemas inciertos según

$$\begin{aligned} \tilde{A}_z^{bc} &= (1 - h^*) \tilde{A}_{z1}^{bc} + h^* \tilde{A}_{z3}^{bc} \quad \text{con } h^* \in [0, 1] \\ \tilde{A}_{z1}^{bc} &= \tilde{A}_z + \tilde{B}_z \Gamma_1 \tilde{E} + \Delta a_m N_a + \Delta b_m N_b \\ \tilde{A}_{z3}^{bc} &= \tilde{A}_{z1}^{bc} + (1 - \varepsilon T) \tilde{B}_z \Gamma_2 \tilde{E} \end{aligned} \quad (2.97)$$

Si existe una matriz  $P$  simétrica que satisfice las LMIs

$$\begin{aligned} P - \tilde{A}_{z1i}^{bcT} P \tilde{A}_{z1i}^{bc} &> 0 & i = 1, 2, 3, 4 \\ P - \tilde{A}_{z3i}^{bcT} P \tilde{A}_{z3i}^{bc} &> 0 & i = 1, 2, 3, 4 \\ P &> 0 \end{aligned} \quad (2.98)$$

donde cada  $\tilde{A}_{z1i}^{bc}$  y cada  $\tilde{A}_{z3i}^{bc}$  corresponden a cada uno de los 4 casos extremos de incertidumbre siguientes

$$\begin{aligned} \Delta a_m &= \overline{\Delta a_m}, & \Delta b_m &= \overline{\Delta b_m} \\ \Delta a_m &= \overline{\Delta a_m}, & \Delta b_m &= -\overline{\Delta b_m} \\ \Delta a_m &= -\overline{\Delta a_m}, & \Delta b_m &= \overline{\Delta b_m} \\ \Delta a_m &= -\overline{\Delta a_m}, & \Delta b_m &= -\overline{\Delta b_m} \end{aligned} \quad (2.99)$$

para un error de modelado en  $d_m$  constante  $\Delta d_m^* = \overline{\Delta d_m}$ , entonces el sistema incierto  $\tilde{A}_z^{bc}(\Delta a_m, \Delta b_m, \Delta d_m^*)$  es estable para cualesquiera

$$|\Delta a_m| \leq \overline{\Delta a_m}, |\Delta b_m| \leq \overline{\Delta b_m}, h^* \in [0, 1]$$

$d_m \setminus a_m$	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95
2	24	24	24	24	24	24	24	24	22	19
3	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
4	<b>21</b>	19	15	12	12	12	12	12	12	12
5	25	25	23	21	18	14	9	9	<b>9</b>	9
6	37	35	32	31	28	26	24	8	8	8
7	35	35	32	30	28	26	23	12	7	7
8	33	32	31	30	28	25	23	17	6	6
9	33	32	31	30	28	25	23	17	5	5
10	35	34	32	30	28	25	24	17	4	4

Tabla 2.3: Máximo error de modelado en los tres parámetros  $e_a=e_b=e_d$  en porcentaje

Nótese que esta condición es suficiente, pero no necesaria, por lo que los resultados obtenidos resolviendo las LMIs descritas con las inecuaciones (2.98) serán conservadores.

Empleando las funciones de la librería de MATLAB para la programación y resolución de LMIs (*lmivar*, *lmiterm*, *newlmi*, *setlmis*, *getlmis*, *feasp* y *dec2mat*) se encontró la máxima incertidumbre en los tres parámetros  $\bar{e}_a = \bar{e}_b = \bar{e}_d$  para la que se garantiza estabilidad del bucle cerrado de  $\tilde{A}_z^{bc}$ , es decir, para el cual es posible encontrar solución de las LMIs correspondientes a ese error y a cada matriz ( $\tilde{A}_{z1}^{bc}$  y  $\tilde{A}_{z3}^{bc}$ ) para todos los sistemas con error de modelado en  $d_m$  tal que  $|\Delta d_m^*| \leq \overline{\Delta d_m}$ .

Los resultados se muestran en la tabla 2.3. El controlador PSMC1 fue sintonizado con los valores obtenidos a partir de la minimización de  $IAE_3$  (2.13). Los márgenes de error permitido disminuyen considerablemente cuando se controlan plantas con valores extremos en el rango de análisis del polo y  $d_m > 5$ , debido a que los parámetros del controlador se escogieron según el criterio (2.13), que tenía en cuenta mayores errores en torno a  $a_m = 0.7$ , y a que el error en % de  $d_m$  es mucho mayor cuando  $d_m > 5$ . Además estos resultados son conservadores, y en muchos casos, la inestabilidad inicial del sistema lleva a disminuir  $|s_k^p|$  aumentando la linealidad de la ley y el margen de error permitido, ya que el sistema entra en el modo de pseudodeslizamiento. En la figura 2.14 se muestran ejemplos de este conservadurismo para dos plantas de modelos ( $a_m = 0.5, b_m = 0.5, d_m = 4$ ) y ( $a_m = 0.9, b_m = 0.1, d_m = 5$ ) y errores de modelado de  $\pm 25\%$  y  $\pm 12\%$  en todos los parámetros. Dichos errores son mayores que los de la tabla 2.3 calculados al resolver las LMIs (2.98) y aún así en estas condiciones particulares se exhiben comportamientos estables.

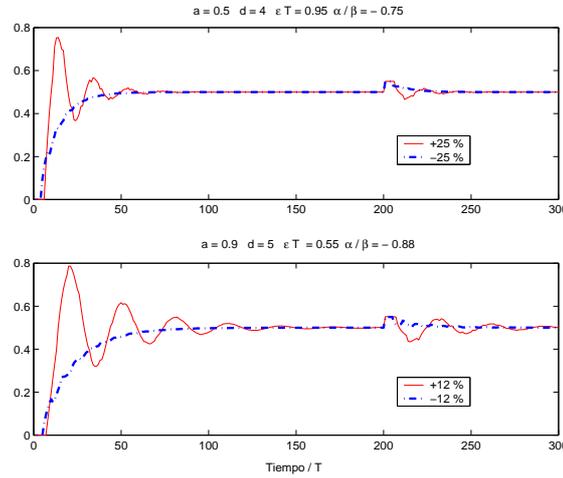


Figura 2.14: Simulaciones con errores superiores a los encontrados resolviendo las LMIs.

Con el fin de observar el efecto del error en cada parámetro en los casos extremos cuando  $h^* = 0$  (alcance,  $\tilde{A}_{z3}^{bc}$ ) y  $h^* = 1$  (deslizamiento,  $\tilde{A}_{z1}^{bc}$ ), se calculó el máximo de los máximos autovalores en valor absoluto de  $\tilde{A}_{z1}^{bc}$  y  $\tilde{A}_{z3}^{bc}$  para procesos industriales que pueden ser modelados con parámetros pertenecientes a los rangos  $a_m \in [0.5, 0.95]$ , y  $d_m \in [2, 10]$  (ecuación 2.72). Los resultados obtenidos (figuras 2.15-2.18) ilustran la variación del máximo autovalor en cinco sistemas con retardos 2, 4, 6, 8 y 10 respectivamente y, en la esquina inferior derecha de cada figura, se ha incluido el máximo autovalor para todos los  $d_m$  o  $a_m$  analizados. En primer lugar se consideraron modelos con únicamente error en el polo  $e_a \in [-0.8, 0.8]$ . Esto equivale a errores desde  $-80\%a_m$  hasta  $80\%a_m$ . La limitación mayor que presenta el sistema de control se da cuando existen errores de modelado positivos en  $a_m$ , es decir, cuando el sistema real es más lento que el modelado.

Un segundo estudio se realizó al considerar modelos con sólo error en  $b_m$ ,  $e_b \in [-0.8, 0.8]$  (errores desde  $-80\%b_m$  hasta  $80\%b_m$ ). Se puede deducir que el sistema presenta alto grado de robustez ante errores en la ganancia estática del modelo, y que disminuye cuando se controlan sistemas más lentos.

En la figura 2.17 se representa igualmente el máximo autovalor cuando se considera únicamente error en el retardo  $e_d \in [-0.8, 0.8]$  (errores desde  $-80\%d_m$  hasta  $80\%d_m$ ), calculando  $d$  como el máximo entre 1 y  $[d_m(1 \pm e_d)]$ . Se puede observar que el grado de robustez es mayor para sistemas con  $a_m \leq 0.7$  pues se escogieron los parámetros con esta consideración según el criterio (2.13).

Por último, se añadió un error de modelado en el retardo de igual magnitud que los errores en ganancia y polo  $e_a = e_b = e_d \in [-0.3, 0.3]$ . Obsérvese que los resultados, representados en la figura 2.18, se asemejan a los obtenidos resolviendo las LMIs (Tabla 2.3) y que aquéllos son conservadores como se ilustró en la figura 2.14.

Como conclusión, de las figuras (2.15-2.18) y la tabla 2.3 se puede deducir que

- Al controlar sistemas con diferentes retardos, el grado de robustez del sistema apenas disminuye, es decir, que el controlador PSMC1 presenta un grado de robustez similar para sistemas con distinta relación de controlabilidad  $RC = -d_m \ln(a_m)$ . Por ejemplo, cuando  $a_m = 0.5$  y  $d_m = 10$ ,  $RC \simeq 7$  y en la figura 2.18 se puede observar que la estabilidad se conserva controlando con errores de modelado de al menos  $\pm 30\%$  en los tres parámetros del modelo. Si el sistema fuera modelado con  $d_m = 6$  entonces  $RC \simeq 4$  y el grado conservador de robustez sería ligeramente superior.
- Que el grado de robustez es de al menos  $\pm 8\%$  de error en los tres parámetros para los sistemas analizados con  $a_p \in [0.35, 1.24]$  y  $d_p \in [1, 13]$ , y en la mayoría de las plantas de estudio es mucho mayor.
- Cuando la planta real es más rápida que el sistema modelado en términos de constante de tiempo, el grado de robustez del controlador es mayor.
- Cuando el retardo de la planta real es menor que el modelado, el grado de robustez del controlador es mayor.

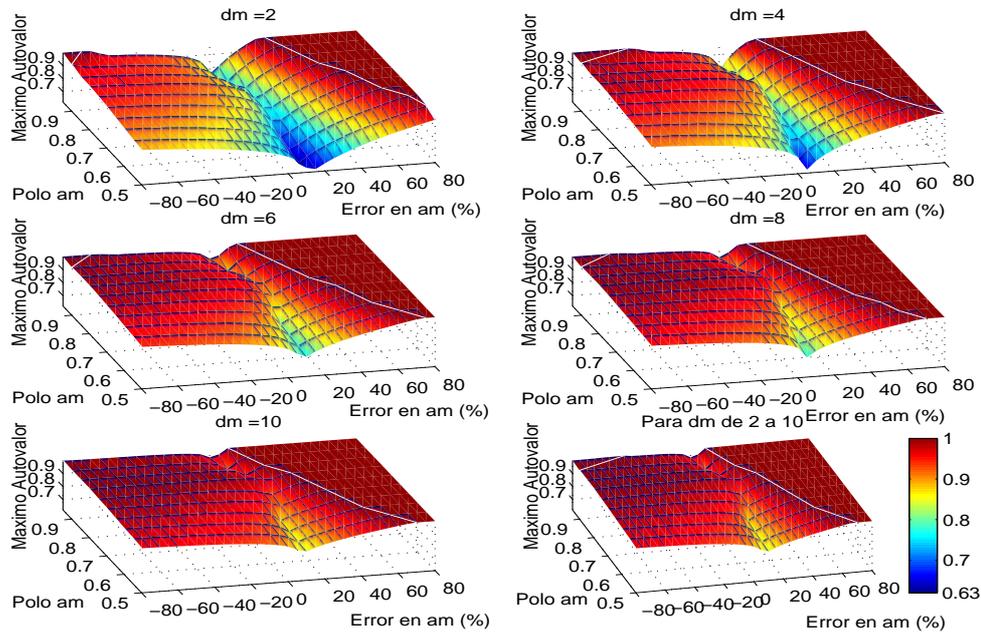


Figura 2.15: Maximo autovalor en valor absoluto de  $\tilde{A}_{z1}^{bc}$  y  $\tilde{A}_{z3}^{bc}$  para sistemas inciertos con errores en  $a_m$ .

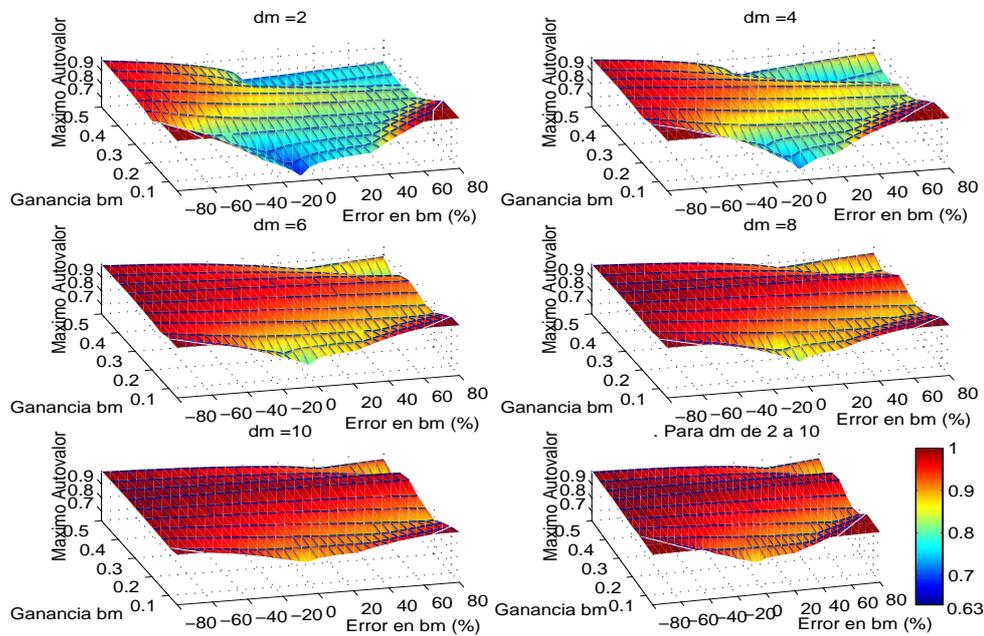


Figura 2.16: Maximo autovalor en valor absoluto de  $\tilde{A}_{z1}^{bc}$  y  $\tilde{A}_{z3}^{bc}$  para sistemas inciertos con errores en  $b_m$ .

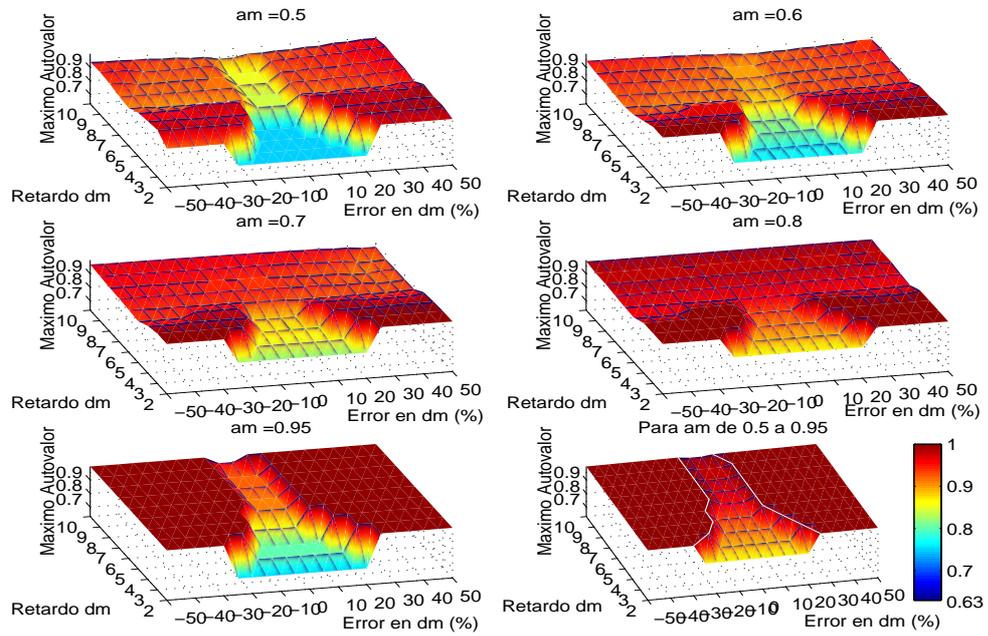


Figura 2.17: Máximo autovalor en valor absoluto de  $\tilde{A}_{z1}^{bc}$  y  $\tilde{A}_{z3}^{bc}$  para sistemas inciertos con errores en  $d_m$ .

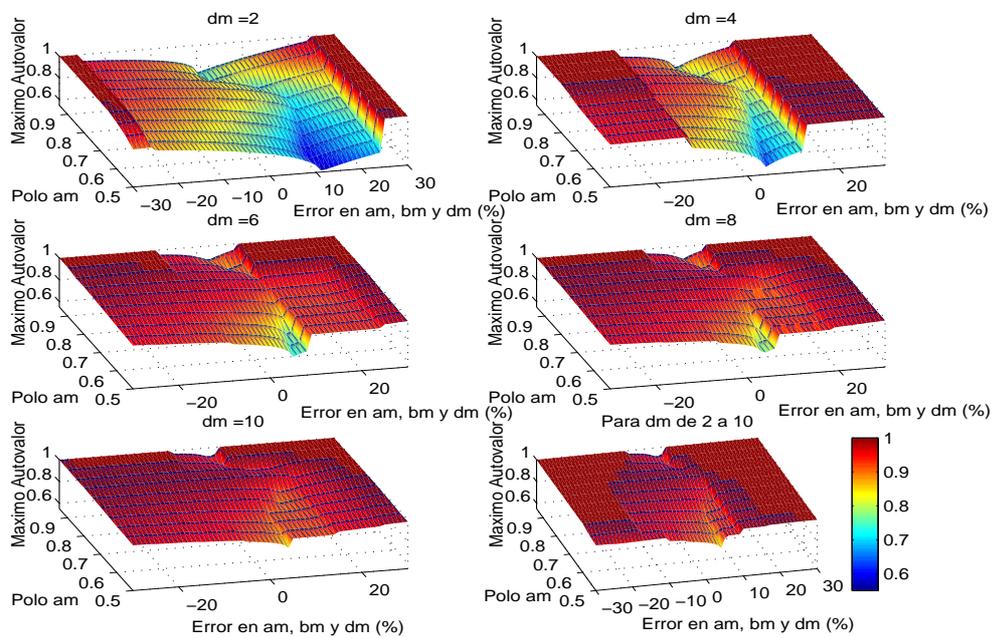


Figura 2.18: Máximo autovalor en valor absoluto de  $\tilde{A}_{z1}^{bc}$  y  $\tilde{A}_{z3}^{bc}$  para sistemas inciertos con errores iguales en  $a_m$ ,  $b_m$  y  $d_m$ .

### 2.2.4.3. Admisibilidad robusta

Sea el sistema lineal con incertidumbres paramétricas en la ganancia y en el polo descrito por las ecuaciones (2.90) y (2.91). Es posible obtener dos cotas superiores para el error de modelado  $\bar{e}_a$  y  $\bar{e}_b$  según el procedimiento indicado en el apartado anterior tales que

$$\begin{aligned}\Delta a_m &\in a_m \bar{e}_a [-1, 1] = 2a_m \bar{e}_a h_a - a_m \bar{e}_a \\ \Delta b_m &\in b_m \bar{e}_b [-1, 1] = 2b_m \bar{e}_b h_b - b_m \bar{e}_b\end{aligned}\quad (2.100)$$

donde

$$h_a, h_b \in [0, 1] \quad (2.101)$$

y expresar la matriz de la dinámica de bucle cerrado con incertidumbres (2.90) como

$$\tilde{A}_z^{bc} = h_a M_1 + h_b M_2 + (1 - h_b) M_3 \quad (2.102)$$

donde

$$\begin{aligned}M_1 &= 2a_m \bar{e}_a N_a \\ M_2 &= A_z^{bc} - a_m \bar{e}_a N_a - b_m \bar{e}_b N_b + 2b_m \bar{e}_b N_b \\ M_3 &= A_z^{bc} - a_m \bar{e}_a N_a - b_m \bar{e}_b N_b\end{aligned}\quad (2.103)$$

Según las ecuaciones (2.62) y (2.63), se separa la parte lineal de la no lineal en la matriz de bucle cerrado  $A_z^{bc}$  englobando la no linealidad en el parámetro

$$h^* = \frac{|s_{k-1}^p|}{|s_{k-1}^p| + \delta} \in [0, 1] \quad (2.104)$$

La matriz  $A_{z2}^{bc*}$  no se afecta de las incertidumbres consideradas, por lo que la ecuación (2.102) se puede expresar como una combinación convexa de cuatro sumandos

$$\tilde{A}_z^{bc} = h_a M_1 + h_b M_2 + (1 - h_b) M_3 + h^* M_4 \quad (2.105)$$

donde

$$\begin{aligned}M_1 &= 2a_m \bar{e}_a N_a \\ M_2 &= A_z + B_z \Gamma_1 E - a_m \bar{e}_a N_a - b_m \bar{e}_b N_b + 2b_m \bar{e}_b N_b \\ M_3 &= A_z + B_z \Gamma_1 E - a_m \bar{e}_a N_a - b_m \bar{e}_b N_b \\ M_4 &= (1 - \varepsilon T) B_z \Gamma_2 E\end{aligned}\quad (2.106)$$

El análisis de la admisibilidad robusta del sistema propuesto se desarrolla a partir de los siguientes elementos conocidos:

- La matriz de transición de estados en bucle cerrado expresada como una inclusión diferencial lineal tal que

$$\tilde{A}_z^{bc} = Co(M_1, M_2, M_3, M_4) \quad (2.107)$$

definida en todo el espacio de estados  $Z = X \times U \times \dots \times U \in \mathfrak{R}^{d+2}$  y dos cotas superiores para el error de modelado  $\bar{e}_a$  y  $\bar{e}_b$ .

- Las restricciones en la variable controlada:

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^2 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T \mathbf{x} \leq [\bar{X} \quad \bar{X} \quad -\underline{X} \quad -\underline{X}]^T\} \quad (2.108)$$

- Las restricciones en la variable manipulada:

$$U = \{\mathbf{u} \in \mathfrak{R} : [1 \quad -1]^T \mathbf{u} \leq [\bar{U} \quad -\underline{U}]^T\} \quad (2.109)$$

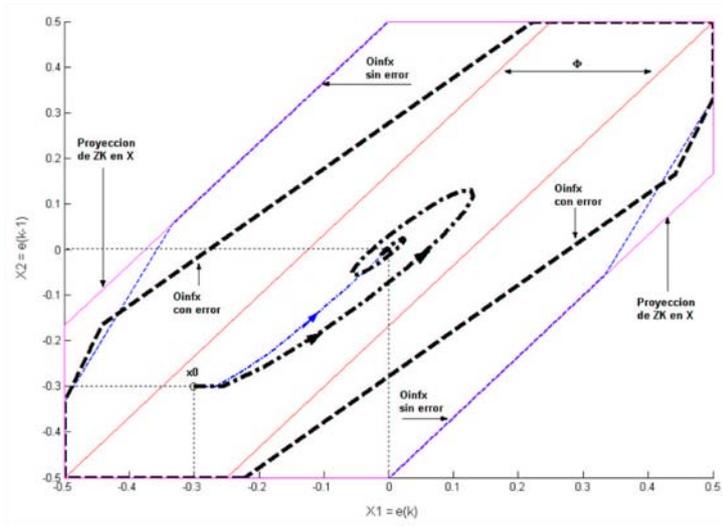


Figura 2.19: Representación de trayectorias (-.-) en  $X$  (trazo grueso caso con error, trazo fino caso sin error) para un sistema de POMTM con  $a_m = 0.75$   $b_m = 0.25$   $d_m = 2$ , restricciones en estado  $\pm 0.5$  y señal de control de  $\pm 0.5$ ,  $\varepsilon T = 0.4$  y  $\alpha/\beta = -0.75$ , y error de modelado  $a_p = 130\%a_m$ ,  $b_p = 130\%b_m$ .

Como se vio en el subapartado 2.2.3.3, es posible encontrar el máximo conjunto admisible  $C_\infty^{psmc1}$ , que al tratarse de un sistema en bucle cerrado estable al origen, coincide con un conjunto  $O_\infty^{psmc1}$  suficientemente grande asintóticamente estabilizable al origen contenido en  $Z$

$$O_\infty^{psmc1} = \{\mathbf{z} \in Z = X \times U \times \dots \times U \in \mathfrak{R}^{d+2} : R\mathbf{z} \leq r\} \quad (2.110)$$

Este conjunto invariante es el máximo conjunto admisible para la inclusión diferencial propuesta. Nótese que al ser el sistema de control no lineal, no corresponderá al máximo conjunto para este sistema, pero sí a un conjunto suficientemente grande.

En la figura 2.19 se representan dos trayectorias, con y sin error de modelado, en el espacio de estados  $X$ , de un sistema controlado con PSMC1 con restricciones en estado y señal de control.

## 2.3. Controlador predictivo por modo pseudodeslizante con supercie íntegro-diferencial PSMC2

En esta sección se presentará una estructura de control híbrida desarrollada en los años 2000-2001 y contrastada con la comunidad científica en una revista y dos congresos internacionales ([104], [103], [105]). Combina las ventajas de las estrategias de control SMC y GPC, que las han hecho tan populares y han sido expuestas en la sección introductoria de PSMC 2.1, superando algunas de las desventajas de cada controlador. Para diferenciar las siglas correspondientes a esta estrategia de las de la analizada en la sección anterior, se ha incluido al final de las mismas el número 2 en lugar del 1: Controlador Predictivo por Modo pseudoDeslizante *con superficie íntegro-diferencial* PSMC2.

A continuación se presentarán los desarrollos en tres apartados:

- *Síntesis del controlador PSMC2.*
- *Análisis de estabilidad nominal del controlador (sin errores de modelado) y sintonización de parámetros.*
- *Análisis de robustez.* Se propone una herramienta de análisis mediante exploración y simulación de la realimentación y control con PSMC2, GPC o SMC de una familia de procesos de ganancia unitaria modelados con  $\tau = \{5, 10, 20\}$  y  $\frac{t_{0m}}{\tau_m} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  para la determinación del grado de robustez de los controladores. Se han incluido incertidumbres no estructuradas y se han determinado radios mínimos de error en los tres parámetros continuos del modelo que proporcionan estabilidad garantizada. Se ha propuesto también una herramienta de análisis de la estabilidad robusta referida a cada parámetro del modelo de un proceso químico no lineal.

### 2.3.1. Síntesis del controlador PSMC2

En el artículo publicado en 2002 [104], se presentó esta ley de PSMC, que pretende introducir las ventajas de la predicción y el horizonte deslizante para optimizar el desempeño de un controlador SMC, teniendo en cuenta implícitamente el retardo del proceso.

En la literatura [12] [76] se recomienda a menudo utilizar un modelo de Primer Orden más Tiempo Muerto (POMTM) por obtenerse fácilmente a partir del método de la curva de reacción, y representar a la mayoría de los procesos industriales. Dicho modelo se describe según la función de transferencia en el dominio de Laplace

$$G(s) = \frac{K_m}{1 + \tau_m s} e^{-t_{om}s} \quad (2.111)$$

cuyos parámetros son la ganancia estática  $K_m$ , la constante de tiempo  $\tau_m$  y el tiempo muerto o retardo puro del proceso  $t_{om}$ .

Como se explicó en el capítulo introductorio, apartado 1.1.1, algunas leyes de Control por Estructura Variable se componen de dos partes: una ley continua (*ley de control equivalente*), que controla el sistema en el modo deslizante y una ley de alcanzabilidad que varía la estructura del controlador con el fin de obtener un comportamiento estable deseado en bucle cerrado en presencia de perturbaciones o cambios de referencia. El primer paso en las estrategias de Control por Modo Deslizante (SMC) es la elección de la superficie deslizante, que se establece generalmente como una función lineal de los estados del sistema. Cuando los estados son la derivada y la integral del error de seguimiento, la superficie se denomina íntegro-diferencial [1] y su expresión viene dada por

$$s(t) = \left( \frac{d}{dt} + \mu \right)^n \int_0^t e(t) dt \quad (2.112)$$

donde  $n$  es el orden del modelo del proceso y  $\mu$  engloba los parámetros de ajuste.

El desarrollo de Filippov [122] [29] denominado *dinámica equivalente* es el método utilizado en la literatura de modos deslizantes en tiempo continuo para generar la *ley de control equivalente* sobre el modo deslizante [7]. Dicho método consiste en satisfacer la siguiente condición de deslizamiento con la dinámica del sistema

$$\frac{ds(t)}{dt} = 0 \quad (2.113)$$

Cuando el sistema es modelado por la función de transferencia (2.111), utilizando una aproximación de Taylor de primer orden para el término correspondiente al tiempo muerto (mejor que la de Padé que produce un modelo de fase no mínima), la superficie

general descrita por la ecuación (2.112) se particulariza en

$$s(t) = \frac{de(t)}{dt} + \mu_1 e(t) + \mu_0 \int_0^t e(t) dt \quad (2.114)$$

que al satisfacer la condición de deslizamiento (2.113) con  $e(t) = r(t) - x(t)$ ,  $r(t)$  valor de referencia y  $x(t)$  medida de la variable de salida del proceso, proporciona

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d^2r(t)}{dt^2} + \mu_0 e(t) + \mu_1 \frac{de(t)}{dt} \quad (2.115)$$

Sustituyendo el modelo elegido en el término izquierdo de la ecuación

$$\left( K_m U_{eq}(t) - (\tau_m + t_{0m}) \frac{dx(t)}{dt} - x(t) \right) \frac{1}{t_{0m}\tau_m} = \frac{d^2r(t)}{dt^2} + \mu_0 e(t) + \mu_1 \frac{de(t)}{dt} \quad (2.116)$$

la ley de control equivalente general se describe con

$$U_{eq}(t) = \frac{t_{0m}\tau_m}{K_m} \left[ \left( \frac{t_{0m} + \tau_m}{t_{0m}\tau_m} - \mu_1 \right) \frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{t_{0m}\tau_m} x(t) + \mu_0 e(t) + \frac{d^2r(t)}{dt^2} + \mu_1 \frac{dr(t)}{dt} \right] \quad (2.117)$$

En [123] se muestra que las derivadas de la señal de referencia pueden despreciarse sin efecto en la ley de control, por lo que la expresión de la ley equivalente se simplifica a

$$U_{eq}(t) = \frac{t_{0m}\tau_m}{K_m} \left[ \left( \frac{t_{0m} + \tau_m}{t_{0m}\tau_m} - \mu_1 \right) \frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{t_{0m}\tau_m} x(t) + \mu_0 e(t) \right] \quad (2.118)$$

El siguiente paso en las estrategias de SMC es encontrar la parte de la ley de control que varía la estructura cuando el estado del sistema está fuera de la superficie deseada, es decir, en el modo de alcance. Con este fin se propone emplear un controlador GPC aplicado en forma de una ganancia predictiva óptima  $u_p$  que afecta a una función sigmoide, en lugar de la ganancia constante que propone O. Camacho en [12] (véase la ecuación(1.10)). La función sigmoide de la superficie evita el efecto de “chattering”, no tolerado normalmente por los actuadores, y permite suavizar la discontinuidad de la ley de control obteniéndose la alcanzabilidad a un computamiento aproximado de la superficie deslizante. Esto se conoce en la literatura como alcanzabilidad de un modo pseudodeslizante y evita el “chattering” en la señal de control cuando la superficie se pseudo-alcanza.

La formulación básica de GPC utilizada se ha obtenido de los capítulos 4 y 5 del libro de E. F. Camacho y C. Bordóns [25], y se aplica en el dominio de tiempo discreto. Los parámetros discretos del modelo se obtienen a partir de los parámetros continuos identificados por el método de la curva de reacción y, para el presente análisis, se ha escogido el tiempo muerto  $d_m$  como un valor entero múltiplo del tiempo de muestreo elegido. GPC trata de minimizar rápidamente el error predicho en algunos instantes de muestreo futuros.

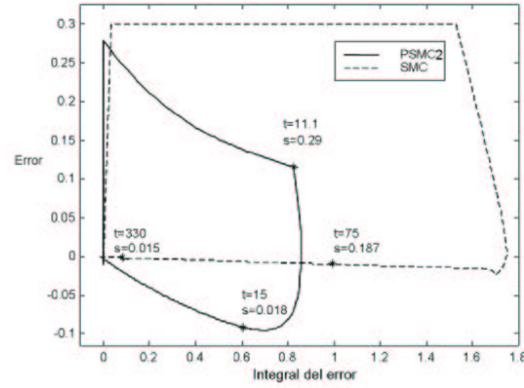


Figura 2.20: Plano de fase para comparar un ejemplo de los desempeños de PSMC2 y SMC.

La función sigmoide se hace depender también de valores predichos de la superficie  $s_p$ , y no de los valores de  $s$  en el instante actual, como en los desarrollos clásicos de SMC. La expresión discreta del valor de la superficie predicha en el instante actual es

$$s_p(k) = \frac{\hat{e}(k+d+2) - \hat{e}(k+d+1)}{T} + \mu_1 \hat{e}(k+d+1) + \mu_0 T \sum_0^k \hat{e}(k+d+1) \quad (2.119)$$

y la ley de alcanzabilidad propuesta es

$$U_{reach}(k) = |u_p| \frac{s_p(k)}{|s_p(k)| + \eta} \quad (2.120)$$

donde el parámetro  $\eta$  se ajusta para conseguir una solución de compromiso entre el grado de robustez y de desempeño de la acción de control.

Lo que se ha hecho es sustituir la ganancia constante  $K_D$  (ecuación 1.7) por una ganancia predictiva que proporciona una aproximación rápida y poco oscilatoria a la superficie deslizante predicha. Esto se puede contrastar en la figura 2.20, donde se ilustra la evolución del estado en el sistema controlado con el SMC propuesto por O. Camacho en 1996 y el PSMC2. En ella se ha simulado el control de un proceso de POMTM con ganancia estática y constante de tiempo unitaria y retardo puro 5 aplicando un escalón de referencia de 0.3 en el instante  $t = 6.1$ .

En resumen, se ha diseñado una ley de control con una parte activa en el modo de alcance  $U_{reach}$ , que impone el decrecimiento de la superficie predicha y otra parte de control nominal  $U_{eq}$  para permanecer en un entorno de la superficie deseada. Las aportaciones de la utilización de las estrategias de SMC y GPC son:

- Mejora del desempeño del controlador en el modo de alcance con la introducción de los conceptos de superficie predicha y ganancia variable predictiva, con respecto a un control SMC (O. Camacho, 1996 [12]).

- Mejora del grado de robustez del controlador, entendiendo como tal la máxima incertidumbre en los tres parámetros del modelo que garantiza la estabilidad en bucle cerrado, con respecto a la formulación básica de GPC (C. Bordóns, 1994 [100]).

Sin embargo puede no ser suficiente el anular la superficie futura para asegurar realmente la alcanzabilidad de la superficie actual. Es posible que ambas superficies sean diferentes debido a un cambio de referencia. Si se desea mantener la señal de control durante el retardo del sistema, incluso cuando esta acción es muy pequeña, se puede añadir un sencillo término que mida la diferencia entre la referencia actual y la futura supuestamente conocida. Esto puede describirse por

$$w(k + d + 1) - r(k) \quad (2.121)$$

En caso de que fuesen diferentes, esto garantizaría que la señal de control de alcanzabilidad aún actuase. Cuando son iguales (o la referencia futura es desconocida y se considera igual a la actual) este término no se incluye.

La ley de control PSMC2 se compone de la adición de las ecuaciones (2.118) y (2.120) más el término de control en estado estacionario  $\bar{U}$ :

$$U_{psmc2}(k) = \bar{U} + U_{eq}(k) + U_{reach}(k) \quad (2.122)$$

### 2.3.2. Sintonización de parámetros

El controlador PSMC2 desarrollado en el apartado anterior se compone de dos leyes de control: la ley de control de alcanzabilidad y la ley de control equivalente sobre el modo de pseudodeslizamiento. En el primer caso, el que la ley de control predictivo venga afectada por la sigmoide de la superficie hace que, incluso cuando el controlador GPC no está bien sintonizado, este término tienda a cero, pues la ley de control penaliza el error y por tanto disminuye el valor la superficie predicha (siempre que el estado inicial parta de la región factible). Por otro lado, la ley de control equivalente se calcula para satisfacer que la derivada de la superficie sea nula, y la superficie se diseña de forma que represente un comportamiento estable del tipo PID.

Es necesario ajustar cinco parámetros en el controlador PSMC2, para lo cual se dispone de algunas reglas sencillas de sintonización en función de los parámetros del modelo de POMTM. En primer lugar se exponen las correspondientes a los parámetros de la superficie deslizante. En [123] se justifica la sintonización del parámetro  $\mu_1$  se puede realizar con la ecuación

$$\mu_1 = \frac{t_{0m} + \tau_m}{t_{0m}\tau_m} \quad (2.123)$$

Para asegurar un comportamiento sobreamortiguado o críticamente amortiguado, el parámetro  $\mu_0$  debe satisfacer

$$\mu_0 \leq \frac{\mu_1^2}{4} \quad (2.124)$$

Sintonizándolo con

$$\mu_0 = \frac{1}{t_{0m}\tau_m} \quad (2.125)$$

que satisface la condición (2.124) al resultar  $(t_{0m} - \tau_m)^2 \geq 0$ , que es cierto para cualquier par  $(\tau_m, t_{0m})$ , la ley de control equivalente discretizada y simplificada se reduce a

$$U_{eq}(t) = \frac{r(t)}{K_m} \quad (2.126)$$

Se realizaron varias pruebas de optimización para verificar que esta sintonización es una de las mejores posibles. En la tabla 2.4 se muestran los índices de desempeño ISE (*Integral of Square Error*) para varios  $\mu_0$  y cuatro plantas que se describen en el dominio de Laplace en el capítulo 4 de simulaciones, sección 4.2, mediante las ecuaciones (4.1)-(4.4), con  $\tau_1 = 0$  en  $G_1(s)$ .

$\mu_0$	0.01	0.02	0.05	0.08	0.10	0.13	0.15	0.18	0.20	0.25	0.30
$G_1$	-	-	-	-	0.27	0.23	0.22	0.21	0.20	0.21	0.25
$G_2$	-	0.69	0.37	0.28	0.28	0.36	0.47	-	-	-	-
$G_3$	-	-	-	0.40	0.37	0.34	0.35	0.38	-	-	-
$G_4$	1.51	0.98	1.65	8.79	-	-	-	-	-	-	-

Tabla 2.4: Pruebas de optimización de ISE

Los parámetros de la parte predictiva, a saber, el horizonte de predicción  $N$  y la secuencia de penalización del esfuerzo de control  $\lambda$ , habitualmente escogida como constante, se ajustan teniendo en cuenta algunas limitaciones de desempeño: el coste computacional para elegir  $N$  (mayor horizonte, mayor coste) y la rapidez de la respuesta para elegir  $\lambda$  (mayor constante, respuesta más lenta). No existen reglas analíticas de ajuste, pero un primer criterio de selección que proporciona buenos resultados es escoger un horizonte superior a 3 veces la constante de tiempo modelada, e ir aumentando  $\lambda$  a partir de 0.3, hasta que se obtenga una respuesta estable en bucle cerrado con el modelo identificado.

Por último, para ajustar  $\eta$ , grado de la sigmoide, se emplea inicialmente la misma ecuación (1.8) propuesta en el capítulo 1 introductorio a SMC. Para obtener un ajuste fino, se elegirá un mayor valor de  $\eta$  si el proceso a controlar presenta mayores restricciones de *chattering*, no exigiendo una respuesta demasiado rápida ni alto grado de robustez ante errores de modelado en ganancia estática. En otro caso o cuando los errores de modelado en la ganancia estática son más críticos, el diseñador debería elegir valores cercanos a los generados mediante la ecuación (1.8) con el fin de potenciar el efecto de la ley de control de alcanzabilidad.

### 2.3.3. Análisis de Robustez

Dadas las características no lineales de la ley de alcanzabilidad en el control PSMC2, no resulta sencillo encontrar una solución analítica empleando ecuaciones de estado que proporcionen rangos de incertidumbres paramétricas para los cuales la estabilidad del sistema en bucle cerrado quede garantizada. Por lo tanto se optó por desarrollar herramientas de análisis mediante exploración y simulación de la realimentación y control de una familia de procesos. A continuación se van a comparar los resultados obtenidos con el controlador SMC propuesto por O. Camacho y GPC en su formulación básica que fueron presentados en dos congresos internacionales ([105],[103]).

#### 2.3.3.1. Volumen y radios mínimos de estabilidad

En este subapartado se van a detallar los criterios adoptados y las simulaciones realizadas para analizar la estabilidad robusta del controlador PSMC2 [105]. Se ha simulado el control de un conjunto significativo de procesos modelados con incertidumbres estructuradas. En todas las simulaciones se consideró el periodo de muestreo  $T = 1$  y la ganancia del proceso constante e igual a 1 con el fin de reducir el número de procesos controlados que aún representasen una familia significativa para el análisis. La exploración por simulación se realizó variando los siguientes parámetros:

1. La *Relación de Controlabilidad*, que se define como el cociente del retardo puro modelado y la constante de tiempo modelada:  $RC = \frac{t_{0m}}{\tau_m} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
2. La *Constante de Tiempo* modelada del proceso:  $\tau_m = \{5, 10, 20\} \rightarrow a_m = \{0.81, 0.9, 0.95\}$ .

De esta forma se analizaron 15 procesos con retardos de 5 a 100.

Las incertidumbres paramétricas consideradas corresponden a errores de modelado en la ganancia estática ( $e_{K_m}$ ), en la constante de tiempo ( $e_{\tau_m}$ ) y en el tiempo muerto ( $e_{t_{0m}}$ ) del  $\{-50, -40, -30, -20, -10, 0, 10, 20, 30, 40, 50\}$  % de los valores nominales de cada parámetro. Dichos errores han sido aplicados sistemáticamente a cada modelo nominal para simular las plantas reales. La forma general de una de las plantas controladas es

$$G(s) = \frac{K_m(1 + e_{K_m})}{1 + \tau_m(1 + e_{\tau_m})s} \exp(-t_{0m}(1 + e_{t_{0m}})s) \quad (2.127)$$

Se propone una función denominada “Volumen de Estabilidad” (*Stability Volume* SV), que proporciona información sobre el grado de robustez del controlador aplicado

a plantas identificadas con los modelos nominales propuestos. Se calcula, para cada modelo nominal  $\langle \tau_m, RC \rangle$ , como el número de simulaciones estables con todas las posibles combinaciones de errores de modelado, y se expresa en porcentaje del número total de simulaciones, es decir,  $1331 = 11 \times 11 \times 11$  simulaciones para cada modelo nominal.

Se realizaron las mismas simulaciones con SMC y GPC (con las mismas sintonizaciones escogidas para PSMC2) para poder comparar sus volúmenes de estabilidad.

La duración de cada simulación se ha escogido mayor que 20 veces la máxima constante de tiempo, la cuál proporcionará simulaciones con el máximo error de modelado, y el criterio de convergencia adoptado para las simulaciones es el siguiente:

*Un comportamiento simulado se ha considerado aceptable cuando la respuesta en estado estacionario al final de la simulación presenta un error de seguimiento menor del 10 % del valor de referencia o/y la oscilación durante un intervalo de tiempo final de la simulación  $[15\tau, 20\tau]$  es de amplitud menor del 70 % del escalón de referencia.*

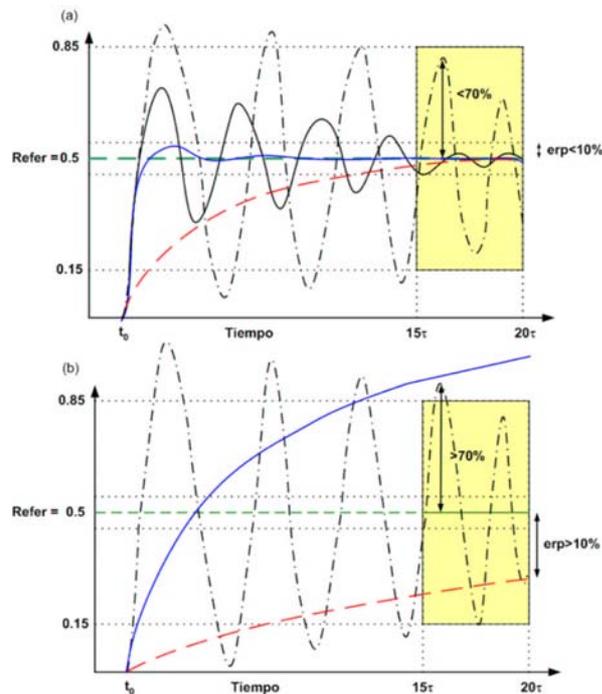


Figura 2.21: (a) Simulaciones aceptadas; (b) Simulaciones rechazadas.

En la tabla 2.5 se indican las simulaciones estables para cada controlador en porcentaje del número total de simulaciones. Corresponden a los volúmenes de estabilidad para los 15 procesos analizados y, en las figuras 2.22 y 2.23, en líneas discontinuas pueden visualizarse para los procesos con  $\tau_m = 5$  y  $RC = 4$ , respectivamente. En estas gráficas se puede observar que PSMC2 hereda la tendencia cualitativa de SMC y GPC

RC	$\tau_m = 5$			$\tau_m = 10$			$\tau_m = 20$		
	GPC	SMC	PSMC2	GPC	SMC	PSMC2	GPC	SMC	PSMC2
1	60	80	100	40	70	100	30	40	95
2	20	40	90	10	30	70	5	30	55
3	15	35	70	5	30	65	5	30	55
4	5	35	65	5	30	60	5	30	55
5	5	30	60	5	30	60	5	30	55

Tabla 2.5: Volúmenes de estabilidad con incertidumbres estructuradas

y que la inclusión de la formulación de SMC en PSMC2 aumenta el grado de robustez de ambos respecto al de GPC. PSMC2 presenta el mayor SV en la tabla 2.5 y en las figuras, porque algunos comportamientos estables con SMC no satisfacen los criterios de convergencia anteriores, en particular, la respuesta con SMC resulta demasiado lenta en muchos casos. En la figura 2.23, en líneas discontinuas, puede observarse que el volumen de estabilidad robusta de PSMC2 es mucho mayor que el de GPC para todo  $\tau_m$  y que para procesos con retardo superior a 10 las propiedades de estabilidad de los controladores son similares cuando  $RC = 4$ , ya que las funciones decrecen con poca pendiente al simular el control de procesos más lentos.

Se analizó el volumen de estabilidad incluyendo una incertidumbre no estructurada: un polo en  $-\frac{1}{\tau_1}$ , con  $\tau_1$  en  $[0,0.4,0.8,1.2]$ . La forma general de una de las plantas controladas para este análisis es

$$G(s) = \frac{K_m(1 + e_{K_m})}{1 + \tau_m(1 + e_{\tau_m})s} \frac{1}{1 + \tau_1 s} \exp(-t_{0m}(1 + e_{t_{0m}})s) \quad (2.128)$$

El número de simulaciones estables con cada una de las posibles combinaciones de errores de modelado, expresado en porcentaje del número total de simulaciones, es decir,  $5324 = 11 \times 11 \times 11 \times 4$  simulaciones para cada modelo nominal, se muestra en la tabla 2.6.

RC	$\tau_m = 5$			$\tau_m = 10$			$\tau_m = 20$		
	GPC	SMC	PSMC2	GPC	SMC	PSMC2	GPC	SMC	PSMC2
1	70	79	100	43	68	100	29	39	94
2	21	39	87	11	30	67	6	26	56
3	12	35	70	7	27	63	5	27	60
4	9	35	64	5	29	61	5	29	59
5	7	32	60	5	30	57	5	30	56

Tabla 2.6: Volúmenes de estabilidad con incertidumbres estructuradas y no estructuradas

En las figuras 2.22 y 2.23, en líneas continuas, se muestran los resultados para los procesos con  $\tau_m = 5$  y  $RC = 4$ . Son muy parecidos a los obtenidos sin considerar

error en el polo  $-\frac{1}{\tau_1}$  (líneas discontinuas), aunque se puede observar que GPC y, sobre todo, PSMC2 presentan mayor grado de robustez ante incertidumbres en dicho polo al aumentar la constante de tiempo del modelo analizado.

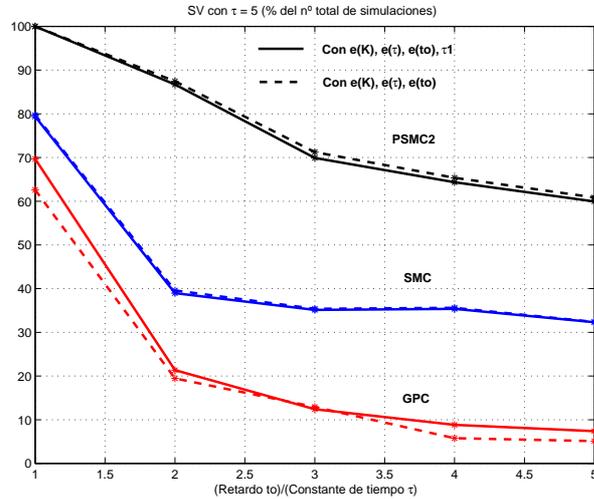


Figura 2.22: Volumen de Estabilidad frente a Relación de Controlabilidad para procesos con  $\tau_m = 5$ : con incertidumbres estructuradas (---); con incertidumbres estructuradas y no estructuradas (—).

Otro análisis realizado fue la obtención por simulación de los radios mínimos de estabilidad para cada modelo nominal. Dos artículos que presentan esta herramienta de análisis de robustez son el de Hinrichsen y Pritchard (1986 [124]) y el de Álamo y Dormido (2001 [125]). El radio mínimo de estabilidad se define desde el origen, es decir, una simulación sin errores de modelado, hasta un punto definido por el trío  $\langle e_{K_m}, e_{\tau_m}, e_{t_{0m}} \rangle$ , que corresponde a una simulación aceptada según el criterio anterior, a partir del cual las simulaciones con mayores errores de modelado en alguno de los tres ejes son inestables. Los errores de modelado se normalizaron al intervalo  $[-1, 1]$  con incrementos de 0.05 (5%). Para algunas plantas 0.05 no resultó un incremento preciso, así que se realizó un análisis más fino en torno a cero con incrementos de 0.02 (2%).

En la tabla 2.7 se muestran los radios mínimos de estabilidad calculados para cada planta y cada controlador. Se puede observar que los radios correspondientes al control con GPC son considerablemente menores que los de SMC y PSMC2, es decir, el grado de robustez es menor en cualquier caso. PSMC2 hereda la alta robustez de SMC manteniendo o incluso aumentando el radio para los sistemas de constante de tiempo más pequeña.

En la figura 2.24 puede observarse la superposición de los comportamientos temporales correspondientes a 1000 simulaciones aleatorias con errores de modelado en la ganancia ( $e_{K_m}$ ), en la constante de tiempo ( $e_{\tau_m}$ ) y en el tiempo muerto ( $e_{t_{0m}}$ ) de  $[-2, 2]$  % sobre el valor nominal de cada parámetro. Dichos errores se han aplicado al

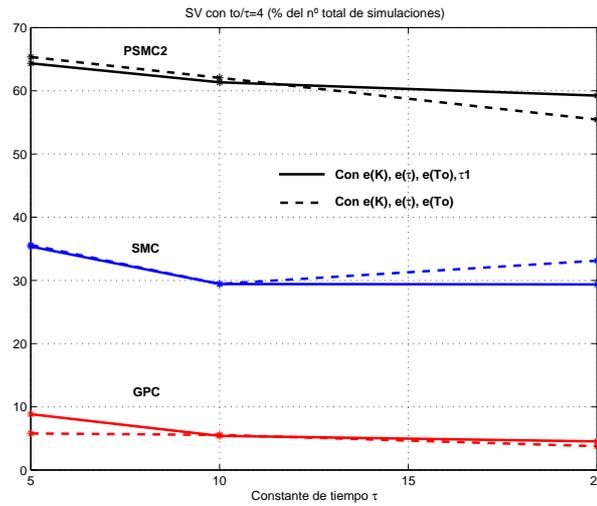


Figura 2.23: Volumen de estabilidad frente a Constante de Tiempo para procesos con  $RC = 4$ : con incertidumbres estructuradas (---); con incertidumbres estructuradas y no estructuradas (—).

modelo nominal con  $\tau_m = 10$  y  $RC = 1$ . Comparando GPC con PSMC2 en la figura 2.24, se observa que las respuestas del segundo son más suaves y menos oscilantes que las del primero. Comparando SMC con PSMC2 en la misma figura, se ilustra que SMC produce una banda más ancha de sobreoscilación y una respuesta más lenta. GPC produce respuestas inestables con errores mayores del 5% en alguno de los tres parámetros mientras que SMC y PSMC2 continúan estables.

RC	GPC	SMC	PSMC2	GPC	SMC	PSMC2	GPC	SMC	PSMC2
	$\tau_m = 5$			$\tau_m = 10$			$\tau_m = 20$		
1	0.25	0.35	<b>1</b>	0.2	0.4	<b>1</b>	0.2	0.2	<b>0.8</b>
2	0.2	0.2	<b>0.6</b>	0.08	0.2	<b>0.25</b>	0.08	0.2	<b>0.2</b>
3	0.08	0.2	<b>0.35</b>	0.08	0.2	<b>0.25</b>	0.08	0.2	<b>0.2</b>
4	0.08	0.2	<b>0.25</b>	0.08	0.2	<b>0.25</b>	0.04	0.08	<b>0.2</b>
5	0.08	0.06	<b>0.08</b>	0.04	0.08	<b>0.08</b>	0.04	0.08	<b>0.08</b>

Tabla 2.7: Radios mínimos de estabilidad

### 2.3.3.2. Área de estabilidad de cada parámetro: aplicación a un sistema no lineal

En [103] se presentaron los resultados de simulación del controlador PSMC2 aplicado a un proceso químico no lineal: un tanque de mezclado. En este caso se desarrolló un procedimiento para analizar la estabilidad robusta de PSMC2 referida a cada uno de

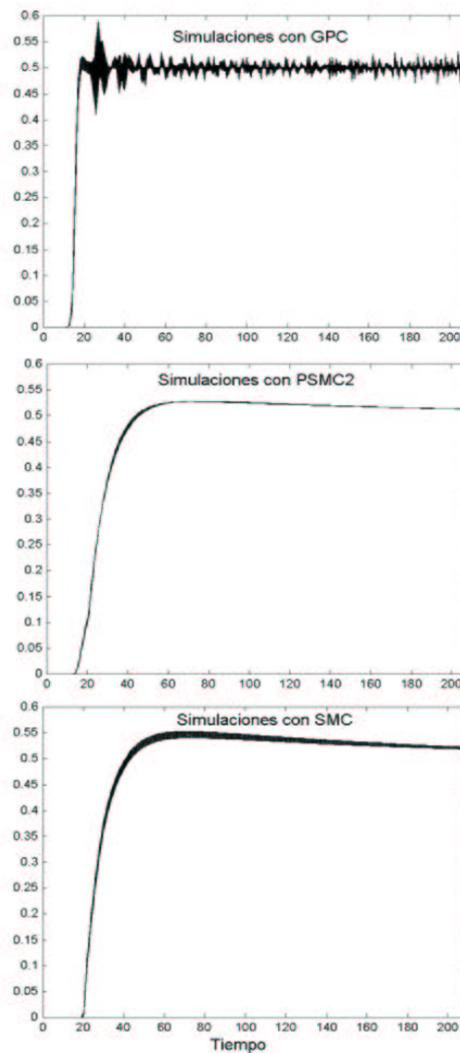


Figura 2.24: Comportamientos con errores en  $[-2, 2]$  % en  $K_m$ ,  $\tau_m$  y  $t_{0m}$  con GPC PSMC2 y SMC.

los tres parámetros del modelo. Cuando un parámetro del modelo de POMTM no está bien identificado, se propone una función denominada “Área de Estabilidad del parámetro  $P$ ” ( $AEP$ ). Dicha función proporciona un índice de estabilidad para cada valor modelado del parámetro. Para el ejemplo del tanque de mezclado, se tomaron los valores nominales identificados de los tres parámetros:  $K_n = -0.82$ ,  $\tau_n = 2.25$  y  $t_{0n} = 4.1$ . Nótese que este modelo en sí ya introduce errores de modelado. Para determinar las áreas de estabilidad de cada parámetro, se realizaron simulaciones con SIMULINK, donde la planta fue simulada con un sistema no lineal descrito en el capítulo 4, ecuación (4.7), y el controlador PSMC2 fue sintonizado con modelos diferentes descritos por los

parámetros siguientes:

$$\begin{aligned} K_i &= K_n \times (1 + i * 0,2) \\ \tau_i &= \tau_n \times (1 + i * 0,2) \\ t_{0i} &= t_{0n} \times (1 + i * 0,2) \text{ con } i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, +4 \end{aligned} \quad (2.129)$$

De modo que, por ejemplo,  $K_2 = 1.4 \times K_n$  corresponde a cerrar el bucle con un controlador PSMC2 diseñado con un error adicional de modelado de +40 % sobre la ganancia nominal.  $AEK(K_2)$  es el número de simulaciones estables encontradas cuando el controlador se sintoniza con  $K = K_2$  y cualquier par  $\langle \tau_i, t_{0i} \rangle$ . En la figura 2.25 (a) se muestran las curvas correspondientes al Área de Estabilidad de  $K$  obtenidas cuando se aplican PSMC2, GPC (con  $\lambda = 1$ ,  $N = 10$ ) y SMC (parámetros calculados con las ecuaciones (1.7-1.9)). De ellas se puede concluir que se obtienen más comportamientos estables con todos los controladores con  $K_1 = -0.98$ , es decir con un 20 % de error sobre  $K_n$ , lo que indica que  $K_1$  habría sido un mejor candidato a ganancia nominal  $K_n$ .

Además, la curva de SMC indica que para este sistema es el controlador con mayor grado de robustez respecto al parámetro  $K$ , ya que el Área de Estabilidad de  $K$  de SMC es mayor que la de los otros controladores en casi todo el rango analizado de  $K_i$ , excepto para  $K_{-3} = -0.33$ . Cuando la ganancia modelada en módulo es menor que la nominal (que corresponde a errores negativos en  $K_n$ ), el control SMC puede llegar a presentar incluso menor grado de robustez que PSMC2, como se muestra para el caso de  $K_{-3}$ . La curva de PSMC2 indica que, para este sistema, el controlador es altamente robusto en todo el rango analizado de  $K$ . GPC presenta claramente el menor grado de robustez, dejando de ser estable  $\forall K \geq K_{-2}$  en el rango de parámetros analizados. En la figura 2.25 (b) se pueden observar las áreas de estabilidad de  $\tau$  para los tres controladores. En este caso un mejor candidato para  $\tau_n$  sería  $\tau_1 = 2.7$ , puesto que el número de simulaciones estables encontradas es mayor que en  $\tau_0$  en todas las curvas. El área de estabilidad de  $\tau$  con PSMC2 nos indica que el sistema presenta mayor grado de robustez cuando la constante de tiempo modelada es mayor que la nominal, es decir, cuando el modelo es más lento.

Por último, la figura 2.25 (c) muestra que PSMC2 altamente robusto para cualquier  $t_0$  modelado. Su grado de robustez es mayor que el de SMC y considerablemente mayor que el de GPC.

Nótese que los resultados obtenidos en este subapartado son válidos teniendo en cuenta el criterio de convergencia y desempeño aceptable definido en el subapartado 2.3.3.1.

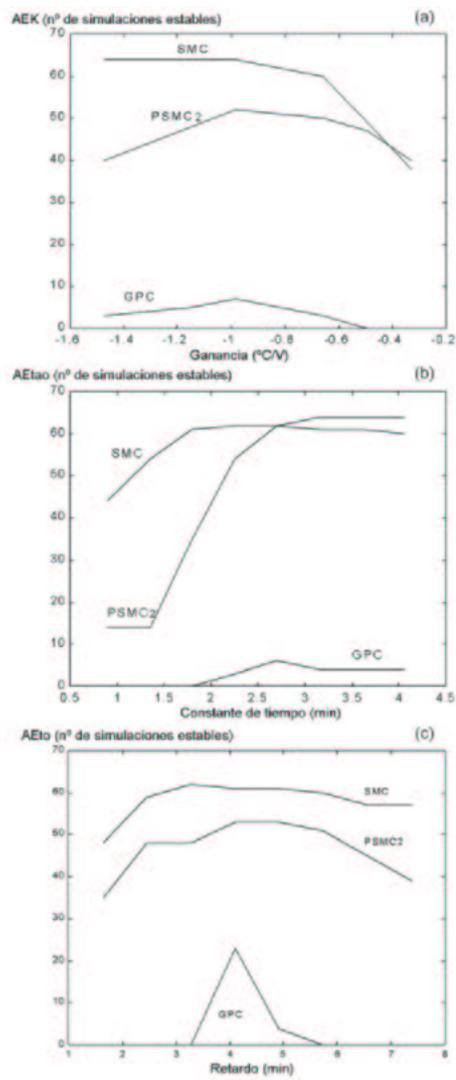


Figura 2.25: Curvas de  $AEK$ ,  $AEt$  y  $AEt_0$  para los controladores SMC, GPC y PSMC2.



# Capítulo 3

## Control por acercamiento predictivo al modo pseudodeslizante con restricciones

### 3.1. Introducción

En este capítulo se desarrolla una nueva ley de control que utiliza las ventajas de la predicción y la optimización en un horizonte deslizante para alcanzar un modo pseudodeslizante. Como en el capítulo anterior, se impone la alcanzabilidad de una superficie predicha, y se diseña para que la ley sea aplicable al control de sistemas SISO con retardo, identificados mediante el modelo de Primer Orden más Tiempo Muerto (POMTM). Además, se emplea el modelo discreto del tipo CARIMA con ruido  $\varepsilon_k$  blanco de media nula para predecir el mejor valor esperado de la salida después del tiempo muerto discreto  $d$

$$\hat{y}(k+d+1|k) = (1+a)\hat{y}(k+d|k) - a\hat{y}(k+d-1|k) + b(u_k - u_{k-1}) \quad (3.1)$$

El objetivo de control es que la salida  $y_k$  siga a la referencia  $r_k$  en presencia de perturbaciones e incertidumbres de modelado y, para conseguir este objetivo, se han seguido las dos etapas de diseño en Control por Modo Deslizante (SMC) con las particularidades que se indican a continuación:

1. *Diseño de una superficie deslizante  $s_k$ .* Esta superficie se escogió de tipo diferencial como en PSMC1. Se comprobó que introducir la complejidad adicional de los términos correspondientes a la integral del error no mejoraba las características de la respuesta en bucle cerrado. La superficie debe garantizar comportamientos

estables del sistema en bucle cerrado dentro de una región  $\Phi$  del espacio de estados, de grosor uniforme en torno a la superficie ideal, en la que se da un modo de pseudodeslizamiento

$$\Phi = \{x_k : |s_k| \leq \rho\} \quad (3.2)$$

donde  $x_k$  es el estado del sistema en el instante  $k$  y  $\rho \in \Re$  es una cota. El comportamiento óptimo en esta banda, con respecto a un índice cuadrático  $J$ , se garantiza empleando la ley GPC. Un trabajo previo a éste, considerando modelos en la función de transferencia y bandas de grosor no uniforme ha sido desarrollado en los últimos años por Furuta, Suzuki y Pan [65] [126] [127] [66] utilizando la teoría de control por mínima varianza. Como primera aportación de la ley desarrollada en este capítulo, la superficie se va a emplear para modular la ley de control predictiva de desempeño óptimo con el fin de aumentar el grado de robustez de la ley GPC en su formulación básica.

2. *Diseño de una ley de alcanzabilidad.* Como segunda aportación de la ley desarrollada, se ha introducido un término que impone la alcanzabilidad del modo pseudodeslizante. Este término consiste en imponer restricciones duras a una ley de control GPC forzando la siguiente dinámica de aproximación

$$s_k^p = (1 - \varepsilon T)s_{k-1}^p \quad (3.3)$$

donde  $\varepsilon > 0$ ,  $|1 - \varepsilon T| < 1$  y se calcula la superficie deslizante predicha  $s_k^p$  como una función del error predicho después del tiempo muerto estimado.

Como se comentó en el apartado 1.2.2, las condiciones de alcanzabilidad propuestas hasta 1995 [44] [49] [50] no proporcionaban una caracterización satisfactoria del modo deslizante en tiempo discreto, ni tampoco métodos de fácil extensión al tratamiento de sistemas multivariables como se describe en la ecuación [55]. Sin embargo, la ley de alcanzabilidad propuesta por Gao y otros [36] [55] que corresponde a (3.3) más un término discontinuo con la función  $\text{signo}(s_k)$ , satisface que el estado se moverá monótonicamente hacia la superficie de conmutación en un tiempo finito al escoger  $\varepsilon T$  tal que  $|1 - \varepsilon T| < 1$ , y su aplicación es fácilmente extensible a sistemas multivariables.

El capítulo se ha dividido en secciones de síntesis y análisis de la ley de control denominada en lo siguiente como Control Predictivo por Modo pseudoDeslizante con Restricciones (*Constrained Predictive Sliding Mode Control CPSMC*).

## 3.2. Controlador predictivo por modo pseudodeslizante con restricciones CPSMC

### 3.2.1. Síntesis del controlador CPSMC

En este apartado se propone un nuevo controlador predictivo que robustece la ley de control GPC clásica utilizando la teoría de modos deslizantes. El controlador predictivo por modo pseudodeslizante con restricciones CPSMC proporciona una secuencia de control óptima, que se denota como el vector  $\mathbf{u}$ , que minimiza un funcional  $J$  que depende del error cuadrático entre la trayectoria de referencia  $\mathbf{w}$  y la trayectoria de salida predicha  $\mathbf{y}$ , y de dicha secuencia de control  $\mathbf{u}$

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= [w_{k+d+1} \quad \dots \quad w_{k+d+N}]^T & \mathbf{y} &= [\hat{y}_{k+d+1} \quad \dots \quad \hat{y}_{k+d+N+1}]^T \\ \mathbf{u} &= [\Delta u_k \quad \dots \quad \Delta u_{k+N-1}]^T\end{aligned}\quad (3.4)$$

sujeto a restricciones de igualdad, que obligan a que la evolución de la superficie predicha elegida sea monótonamente decreciente. Estas restricciones fuerzan al controlador a satisfacer cierta dinámica de alcanzabilidad de la superficie deslizante estable escogida, la cual a su vez garantiza la estabilidad nominal del sistema para el seguimiento de la referencia.

Sin embargo, al ser restricciones que se aplican a las predicciones, se verán influenciadas por el error en el modelo de predicción. Es por esto que se propone modular la ley de control con un factor  $\mathbf{S}$ , cuya función es la de variar la agresividad de la ley en el modo de pseudodeslizamiento. Dicho factor en el instante  $k$  depende del valor de la superficie en el instante  $k-1$ , que se calcula a partir del error actual y en el instante anterior según las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \begin{cases} s_{min} + \rho & , \text{ si } |s_{k-1}| \geq \rho \\ s_{min} + |s_{k-1}| & , \text{ si } |s_{k-1}| < \rho \end{cases} \\ s_k &= \alpha e_k + \beta e_{k+1} \\ 0 &\leq \rho \leq 1 - s_{min}\end{aligned}\quad (3.5)$$

donde los parámetros de la superficie han de satisfacer

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| < 1 \quad (3.6)$$

para garantizar la estabilidad del modo pseudodeslizante. Cuando el sistema se encuentra en el modo de alcance, el controlador será más agresivo que cuando se encuentra en el modo de pseudodeslizamiento. En este último caso, si se fija el parámetro  $s_{min} \leq 0.5$ , se obtendrá una ley como mucho la mitad de agresiva que la de un controlador GPC

clásico. Por lo tanto, el controlador CPSMC presentará mayor grado de robustez, entendiendo como tal la máxima incertidumbre en los tres parámetros del modelo que garantiza la estabilidad en bucle cerrado.

Se van a utilizar la función de coste  $J$  a minimizar y las matrices  $G$  y  $F$ , empleadas para calcular las salidas predichas y formular la ley GPC en el capítulo 5 “Simple Implementation of GPC for Industrial processes” del libro de E. F. Camacho y C. Bordóns [25]. La notación referida ha sido adaptada para formular los presentes desarrollos como se indica a continuación

$$\begin{aligned}
J(\lambda, N) &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T H \mathbf{u} + b^T \mathbf{u} + f_0 \\
H_{(NxN)} &= 2(G_0^T G_0 + \lambda I_{(N)}) \\
b_{(1xN)}^T &= 2\mathbf{S}(F_0 \mathbf{y}^p - \mathbf{w})^T G_0 \\
f_0 &= (F_0 \mathbf{y}^p - \mathbf{w})^T (F_0 \mathbf{y}^p - \mathbf{w}) \mathbf{S}^2 \\
\mathbf{u} &= [\Delta u_k \quad \dots \quad \Delta u_{k+N-1}]^T \\
\mathbf{y}^p &= [y_{k+d} \quad y_{k+d-1}]^T \\
G_0 &= \begin{bmatrix} G_1 \\ \dots \\ G_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \dots & 0 \\ g_1 & g_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_N & g_{N-1} & \dots & g_0 \end{bmatrix} \quad \text{calculado con } d = 0 \\
F_0 &= \begin{bmatrix} F_1(Z^{-1}) \\ \dots \\ F_{N+1}(Z^{-1}) \end{bmatrix} \quad \text{calculado con } d = 0 \\
0 &< \varepsilon T < 1 \\
\dim(\mathbf{u}) &= N \times 1 \\
\dim(\mathbf{y}^p) &= 2 \times 1 \\
\dim(G_0) &= N \times N \\
\dim(F_0) &= N \times 2
\end{aligned} \tag{3.7}$$

El problema de programación cuadrática (QP) que se resuelve con  $N-2$  restricciones de igualdad es

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & J(\lambda, N) \\
\text{s.a} \quad & s_{k+i}^p = \alpha e_{k+i+d} + \beta e_{k+i+d+1} = (1 - \varepsilon T) s_{k+i-1}^p \quad i = 2 \dots N - 1
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Este problema QP puede convertirse en un problema sin restricciones una vez elegida la estructura de la superficie predicha  $s_k$ , para poder obtener una expresión explícita de la ley de control. El método consiste en expresar  $m = N - 2$  de las  $N$  variables de control en función de las dos restantes y sustituirlas en la función objetivo. De forma que se resuelve un problema de minimización de una función cuadrática de dos variables sin restricciones. La aplicación del método se describe en dos pasos:

### 1. Expresión de las restricciones en forma matricial.

En lo siguiente se va a suponer que la referencia futura es desconocida y se iguala a la referencia en el instante actual, es decir,

$$w_{k+d+1} = w_{k+d} = w_{k+d-1} = w_k = r_k \quad (3.9)$$

Dada la superficie predicha en el instante  $k + d + i$  descrita por

$$s_{k+i}^p = \alpha(w_k - F_i \mathbf{y}^p - G_i \mathbf{u}) + \beta(w_k - F_{i+1} \mathbf{y}^p - G_{i+1} \mathbf{u}) \quad (3.10)$$

según 3.8 ha de cumplirse que

$$s_{k+i}^p = (1 - \varepsilon T)(\alpha(w_k - F_{i-1} \mathbf{y}^p - G_{i-1} \mathbf{u}) + \beta(w_k - F_i \mathbf{y}^p - G_i \mathbf{u})) \quad (3.11)$$

Es posible agrupar los términos para expresar las restricciones en forma matricial con la ecuación matricial

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{a} \quad (3.12)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} A_2 \\ \vdots \\ A_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \dim(\mathbf{A}) = (N-2) \times N, \quad \dim(\mathbf{a}) = (N-2) \times 1 \\ A_i &= -\alpha(1 - \varepsilon T)G_{i-1} + (\alpha - \beta(1 - \varepsilon T))G_i + \beta G_{i+1} \\ \mathbf{a} &= [a_2 \quad \dots \quad a_{N-1}]^T \\ a_i &= (1 + \varepsilon T)(\alpha + \beta)w_k + (\alpha(1 - \varepsilon T)F_{i-1} + (\beta(1 - \varepsilon T) - \alpha)F_i - \beta F_{i+1})\mathbf{y}^p \end{aligned} \quad (3.13)$$

A su vez el vector columna  $\mathbf{a}$  puede expresarse en función de  $\mathbf{y}^p$  con la siguiente expresión

$$\mathbf{a} = (1 + \varepsilon T)(\alpha + \beta)w_k \mathbf{v}_{1N-2} + (\alpha(1 - \varepsilon T)F_{01} + (\beta(1 - \varepsilon T) - \alpha)F_{02} - \beta F_{03})\mathbf{y}^p \quad (3.14)$$

donde

$$\begin{aligned} F_{01} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_{N-2} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} F_0, \quad \dim(F_{01}) = (N-2) \times 2 \\ F_{02} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & I_{N-2} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} F_0, \quad \dim(F_{02}) = (N-2) \times 2 \\ F_{03} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dots & \dots & I_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} F_0, \quad \dim(F_{03}) = (N-2) \times 2 \\ \mathbf{v}_{1j} &= [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]^T, \quad \dim(\mathbf{v}_{1j}) = 1 \times j \end{aligned} \quad (3.15)$$

## 2. Inserción de las restricciones en la función objetivo y obtención de la ley de control óptima.

Para insertar las restricciones en la función objetivo se generan dos matrices,  $Y$  de dimensión  $N \times (N - 2)$  y  $Z$  de dimensión  $(N \times 2)$ , de forma que la solución óptima se puede representar como

$$\mathbf{u}^* = Y\mathbf{a} + Z\mathbf{v} \quad (3.16)$$

donde

$$\mathbf{v} = -(Z^T H Z)^{-1} Z^T (\mathbf{b} + H Y \mathbf{a}) \quad (3.17)$$

Las matrices  $Y$  y  $Z$  se pueden obtener invirtiendo una matriz cuadrada compuesta en sus primeras  $N - 2$  filas por  $A$  de rango completo y en las 2 siguientes filas por el espacio nulo transpuesto de  $A$

$$\begin{bmatrix} A \\ \text{null}(A)^T \end{bmatrix}^{-1} = [ Y \quad Z ] \quad (3.18)$$

Sustituyendo, la ley de control óptima se puede expresar como

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= Y\mathbf{a} - Z(Z^T H Z)^{-1} Z^T (\mathbf{b} + H Y \mathbf{a}) = \\ &= (I_{(N)} - Z(Z^T H Z)^{-1} Z^T H) Y \mathbf{a} - 2Z(Z^T H Z)^{-1} Z^T G_0^T (F_0 \mathbf{y}^p - \mathbf{w}) \mathbf{S} \\ \mathbf{u}^* &= \bar{K}_r \mathbf{a} + \bar{P} \mathbf{y}^p + \bar{R} \mathbf{w} \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{K}_r &= (I_{(N)} - Z(Z^T H Z)^{-1} Z^T H) Y \\ \bar{P} &= -2Z(Z^T H Z)^{-1} Z^T G_0^T F_0 \\ \bar{R} &= 2Z(Z^T H Z)^{-1} Z^T G_0^T \\ \dim(\bar{K}_r) &= N \times N - 2 \\ \dim(\bar{P}) &= N \times 2 \\ \dim(\bar{R}) &= N \times N \end{aligned} \quad (3.20)$$

Se propone afectar la ley de control por el factor  $\mathbf{S}$ , es decir, penalizar las predicciones según el valor conocido de la superficie, por lo que las matrices  $\bar{P}$  y  $\bar{R}$  se multiplican por el factor y se renombran como

$$\begin{aligned} P &= -2Z(Z^T H Z)^{-1} Z^T G_0^T F_0 \mathbf{S} \\ R &= 2Z(Z^T H Z)^{-1} Z^T G_0^T \mathbf{S} \end{aligned} \quad (3.21)$$

De este modo, cuando el estado del sistema está alejado de la superficie, la ley de control es más agresiva que cuando está en el modo de pseudodeslizamiento. Cuando existen errores de modelado y, según el modelo, se alcance la superficie predicha, aun

estando lejos de la superficie real, el factor  $\mathbf{S}$  realimentará esa información de disparidad y hará más agresiva la ley para alcanzar efectivamente la superficie real. Esto aumenta el grado de robustez de la ley predictiva.

Sea  $q_{(1xN)} = [ 1 \ 0 \ \dots \ 0 ]$ . Entonces la ley de control se puede expresar según

$$u_k^{cpsmc} = u_{k-1} + l_1 y_{k+d} + l_2 y_{k+d-1} + l_3 r_k + q\bar{K}_r [(1 + \varepsilon T)(\alpha + \beta)w_k v_{1N-2} + (\alpha(1 - \varepsilon T)F_{01} + (\beta(1 - \varepsilon T) - \alpha)F_{02} - \beta F_{03})\mathbf{y}^p] \quad (3.22)$$

donde

$$\begin{aligned} [ l_1 \ l_2 ] &= qP \\ l_3 &= \sum_{i=1}^N R_{1i} \end{aligned} \quad (3.23)$$

El término que multiplica a  $q\bar{K}_r$  es función de  $y_{k+d}$ ,  $y_{k+d-1}$  y  $r_k$ , de forma que la ley de control es

$$u_k^{cpsmc} = u_{k-1} + l_1 y_{k+d} + l_2 y_{k+d-1} + l_3 r_k \quad (3.24)$$

cuyos parámetros se sintonizan según las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} [ l_1 \ l_2 ] &= q(P + K_r) \\ K_r &= \bar{K}_r(\alpha(1 - \varepsilon T)F_{01} + (\beta(1 - \varepsilon T) - \alpha)F_{02} - \beta F_{03}) \\ l_3 &= -l_1 - l_2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

para que la ganancia estática en bucle cerrado sea 1.

Esta ley de control CPSMC (3.24) es equivalente a una ley que penaliza las predicciones del error libre con el factor  $\mathbf{S}$ , es decir, que minimiza el funcional

$$J(\lambda, N) = (G_0 \mathbf{u} + \mathbf{S}(\mathbf{f} - \mathbf{w}))^T (G_0 \mathbf{u} + \mathbf{S}(\mathbf{f} - \mathbf{w})) + \lambda \mathbf{u}^T \mathbf{u} \quad (3.26)$$

De este modo, con  $s_{min} = \rho = 0.5$ , cuando el estado del sistema está alejado de la superficie el factor  $\mathbf{S}$ , a uno, penaliza más los errores libres predichos (los que habría si se mantuviese constante la señal de control en el futuro) que cuando está en la superficie,  $\mathbf{S} = 0.5$ , y penaliza en definitiva las predicciones erróneas debido a incertidumbres en el modelo.

### 3.2.2. Sintonización de parámetros

Para este controlador se han obtenido reglas sencillas de sintonización del tipo Ziegler-Nichols, de forma que los parámetros  $\alpha$  y  $\lambda$  pueden ajustarse inicialmente en función de los parámetros del modelo de la planta a controlar. Con este fin, se ha escogido un procedimiento de sintonización basado en la minimización de un índice de

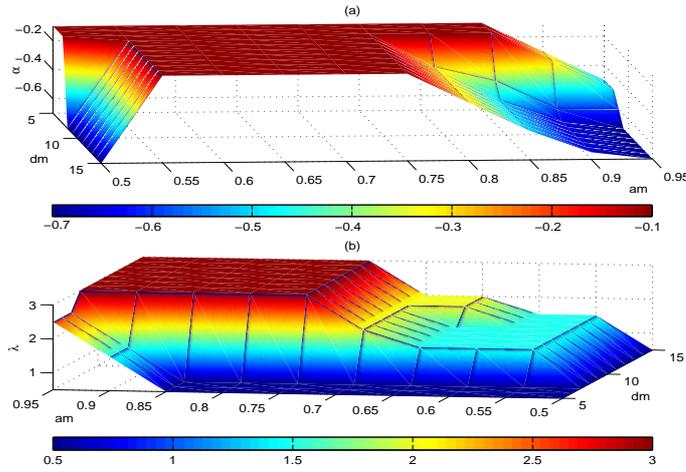


Figura 3.1: Funciones objetivo (a)  $\alpha$  y (b)  $\lambda$ .

desempeño, que ha proporcionado dos conjuntos representativos de tríos,  $\langle a_m, d_m, \alpha \rangle$   $\langle a_m, d_m, \lambda \rangle$  como funciones objetivo. Éstos se han aproximado mediante funciones elementales proporcionando las funciones de ajuste  $\alpha(a_m, d_m)$  y  $\lambda(a_m, d_m)$ . Se probaron otros métodos de interpolación de los conjuntos de patrones objetivo, a saber, interpolación con Hiperplanos en Bisagra (Hinging Hyperplanes) e interpolación con Redes Neuronales, pero los resultados no fueron más precisos que los obtenidos con funciones elementales, ya que las funciones objetivo estaban formadas por planos fácilmente identificables para el conjunto de plantas analizado.

Para escoger los parámetros apropiadamente se siguió el procedimiento de sintonización propuesto por Thomas Marlin [106], como se explicó en el apartado 2.2.2, el cual se basa en la optimización de una medida cuantitativa del desempeño del sistema de control. Se escogió una medida del rendimiento que minimiza la suma de los índices  $IAE$ , calculados sin errores de modelado y con errores de modelado de  $\pm 7\%$  en el retardo  $d_m$ , en el polo  $a_m$  y en el parámetro  $b_m$ . Se disminuyó este error respecto al escogido en el apartado 2.2.2 con el fin de obtener índices más pequeños.

$$IAE_3 = \sum_{k=1}^{250} (|0.5 - CV_{1.07abd}(k)| + |0.5 - CV_{abd}(k)| \Delta k + |0.5 - CV(k)_{0.93abd}|) \Delta k \quad (3.27)$$

La sintonización óptima propuesta de los parámetros, que propociona un control satisfactorio según los objetivos prefijados, se obtuvo por simulaciones sucesivas para la familia de procesos modelados con los parámetros indicados en el apartado 1.3.1. Los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  se escogen para garantizar la estabilidad sobre la superficie deslizante y la relación entre ellos determina la agresividad del controlador. Se fijó el parámetro  $\beta = 1$ . Por otra parte, el rango obtenido para el parámetro  $\varepsilon T$  resultó tan pequeño que se escogió constante para todos los sistemas propuestos:  $\varepsilon T = 0.45$ . Se

fijaron  $s_{min} = \rho = 0.5$ , que proporcionan un control la mitad de agresivo que GPC en el modo pseudodeslizante. Los parámetros que optimizaban  $IAE_3$  (3.27) para el control la familia de plantas indicada en el apartado 1.3.1 se escogieron dentro de los siguientes rangos

$$\begin{aligned} \lambda &\in \{ 0.5, 0.75, 1, 1.5, 2, 2.5, 3 \} \\ \alpha &= -0.7 + 0.1i \text{ con } i = 0, 1, 2, \dots, 6 \end{aligned} \quad (3.28)$$

pues fuera de ellos el controlador sintonizado resultaba poco agresivo. Se realizaron varias comprobaciones y cuando la sintonización de  $\lambda$  es inferior a 20, el controlador obtenido presenta ventajas frente al GPC clásico ante errores de modelado en el tiempo muerto. Algunos de los resultados se ilustran en la figura 3.2.

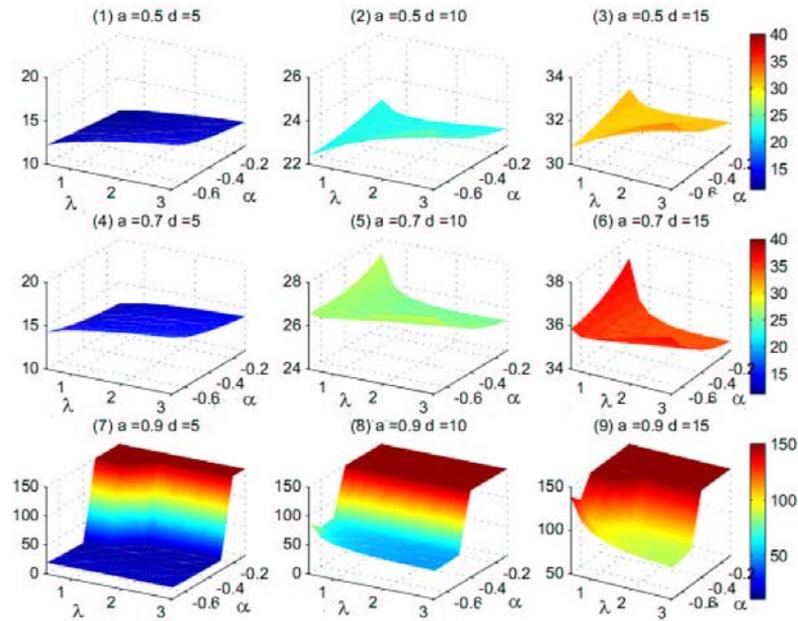


Figura 3.2: Valores de  $IAE_3$  para las plantas (1)  $a = 0,5$   $d = 5$ , (2)  $a = 0,5$   $d = 10$ , (3)  $a = 0,5$   $d = 15$ , (4)  $a = 0,7$   $d = 5$ , (5)  $a = 0,7$   $d = 10$ , (6)  $a = 0,7$   $d = 15$ , (7)  $a = 0,9$   $d = 5$  (8),  $a = 0,9$   $d = 10$  y (9)  $a = 0,9$   $d = 15$ .

En ella se muestra cómo varía  $IAE_3$  con  $\lambda$  y con  $\alpha$  en los casos (1)  $a_m = 0,5$   $d_m = 5$ , (2)  $a_m = 0,5$   $d_m = 10$ , (3)  $a_m = 0,5$   $d_m = 15$ , (4)  $a_m = 0,7$   $d_m = 5$ , (5)  $a_m = 0,7$   $d_m = 10$ , (6)  $a_m = 0,7$   $d_m = 15$ , (7)  $a_m = 0,9$   $d_m = 5$  (8),  $a_m = 0,9$   $d_m = 10$  y (9)  $a_m = 0,9$   $d_m = 15$ . Se ha representado como valor máximo 150, que indica que al menos una de las tres simulaciones necesarias para obtener  $IAE_3$  presenta una sobreoscilación mayor o igual que el 20% del valor de referencia o que es inestable. Cuando  $d_m \geq 10$ , al analizarlas en horizontal, por ejemplo (8)-(9), se observa que, la sintonización óptima no varía apenas. Al analizarlas en vertical, por ejemplo (3)-(6)-(9), se observa que el parámetro  $\lambda$  debe aumentar cuanto mayor es el polo del sistema.

Dicho parámetro afecta a la agresividad del controlador en el modo de alcance, es decir, cuando el estado está alejado de la superficie. Para aumentar el grado de robustez del sistema se puede aumentar  $\lambda$ . El parámetro  $\alpha$  determina la agresividad en el modo de pseudodeslizamiento, es decir, en regulación, siendo más agresivo cuando tiende a cero. Esto no indica que si se comete un error de modelado con la sintonización propuesta pueda inestabilizar el sistema, puesto que  $IAE_3$  ya contempla un error de modelado de  $\pm 7\%$  de  $a_m$ . Estas mismas conclusiones se pueden obtener de la figura 3.1, que muestra la variación de la sintonización óptima de  $\alpha$  y  $\lambda$  con el polo  $a_m$  y el retardo  $d_m$ . Obsérvese que los ejes tienen distinta orientación en las figuras (a) y (b) con el fin de mostrar apropiadamente los cambios en cada parámetro.

A partir de la observación de la figura 3.1 se proponen aproximaciones que empleen funciones algebraicas para aproximar  $\alpha$  y  $\lambda$ :

$$\alpha(d_m, a_m) = \begin{cases} \text{Si } 0.5 \leq a_m < 0.55 \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } 5 \leq d_m \leq 7, \text{ entonces } \alpha = -0.1 \\ \text{Si } 7 < d_m \leq 15, \text{ entonces } \alpha = 12(a_m - 0.95) - 0.7 \end{array} \right. \\ \text{Si } 0.55 \leq a_m \leq 0.75, \text{ entonces } \alpha = -0.1 \\ \text{Si } 0.75 < a_m \leq 0.95 \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } 5 \leq d_m \leq 9, \\ \text{entonces } \alpha = (k_{11} + k_{12}a_m)(d_m - 9) + k_{21} + k_{22}a_m \\ \text{Si } 9 \leq d_m \leq 15, \text{ entonces } \alpha = 4(a_m - 0.95) - 0.7 \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} k_{11} &= -0.3317 & k_{12} &= -0.5 \\ k_{21} &= 2.5867 & k_{22} &= -3.6 \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\lambda(d_m, a_m) = \begin{cases} \text{Si } 5 \leq d_m \leq 7 \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } 0.5 \leq a_m \leq 0.85, \text{ entonces } \lambda = 0.5 \\ \text{Si } 0.85 < a_m \leq 0.95, \text{ entonces } \lambda = 20(a_m - 0.85) + 0.5 \end{array} \right. \\ \text{Si } 8 \leq d_m \leq 15 \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } 0.5 \leq a_m < 0.75, \\ \text{entonces } \lambda = (k_{31} + k_{32}d_m)(a_m - 0.5) + k_{41} + k_{42}d_m \\ \text{Si } 0.75 \leq a_m \leq 0.95, \text{ entonces } \lambda = 3 \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} k_{31} &= 4.3214, k_{32} = 0.1786 \\ k_{41} &= 0.8, k_{42} = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Para el ajuste de  $K_1[a_m]$ ,  $K_2[a_m]$ ,  $K_3[d_m]$  y  $K_4[d_m]$  se empleó el procedimiento de regresión por mínimos cuadrados. En el primer caso (3.29) el vector de parámetros que identificar es

$$\Theta = [k_{12} \quad k_{11} \quad k_{22} \quad k_{21}]^T$$

Dada una matriz  $X$  de 90 filas, cada una obtenida para cada par  $\langle a_m, d_m \rangle$  de los especificados en el apartado 1.3.1, y 6 columnas, cuyos elementos se calculan a partir de  $a_m$  y  $d_m$  según

$$\text{Fila de } X = [a_m(d_m - 9) \quad d_m - 9 \quad a_m \quad 1]$$

y dado el vector  $Y$  de 90 componentes obtenidas optimizando  $IAE_3$  para cada par  $\langle a_m, d_m \rangle$  (figura 3.1), el procedimiento obtiene los coeficientes calculando

$$\Theta = (X^T X)^{-1} X^T Y \tag{3.31}$$

Para el segundo caso (3.30), el vector de parámetros es

$$\Theta = [ k_{32} \quad k_{31} \quad k_{42} \quad k_{41} ]^T$$

y la fila de la matriz de medidas es

$$\text{Fila de } X = [ d_m(a_m - 0.5) \quad a_m - 0.5 \quad d_m \quad 1 ]$$

En la tabla 3.1 se muestra para cada función y aproximación la suma de los cuadrados de los errores relativos a los respectivos fondos de escala según

$$se = \sum_{d=5}^{15} \sum_{a=0,5}^{0,95} \frac{(f(d_m, a_m) - \hat{f}(d_m, a_m))^2}{99 * FS} \tag{3.32}$$

donde  $f$  es la función objetivo y  $\hat{f}$  su interpolación ( $fe$  funciones elementales,  $hh$

	$\hat{f}_{fe}$	$\hat{f}_{hh}$	$\hat{f}_{rn}$
$se(f = \alpha)$ en % de 0.7	0.18	0.74	0.25
$se(f = \lambda)$ en % de 3	0.8	4.2	1.8

Tabla 3.1: Errores relativos para cada función objetivo y cada método de aproximación

hiperplanos en bisagra,  $rn$  redes neuronales). En esta tabla se puede observar que la aproximación obtenida por funciones elementales es la más precisa, ya que la función objetivo está formada por planos fácilmente identificables para el conjunto de plantas analizado. Sin embargo, la aproximación obtenida mediante los algoritmos generadores de los hiperplanos en bisagra no ha conseguido identificar esta solución elemental debido a que en la región de patrones con  $a_m \leq 0.7$ , existen varios cambios de convexidad. Tampoco la aproximación por redes neuronales aporta tanta precisión en este caso.

### 3.2.3. Análisis de Estabilidad

En este apartado se analizará la estabilidad nominal del sistema controlado con CPSMC y la región del espacio de estados para la cual se garantiza una trayectoria admisible y convergente al origen con restricciones en el estado  $\mathbf{x}$  y en la señal de control  $\mathbf{u}$ . Se considerará que no hay errores de modelado, es decir,  $a_p = a_m = a$ ,  $b_p = b_m = b$  y  $d_p = d_m = d$ . Los subapartados que se estudiarán a continuación son:

- Representación interna del sistema de control.
- Análisis de estabilidad nominal.
- Análisis de admisibilidad.

#### 3.2.3.1. Representación interna del sistema de control

Como se explicó en el apartado 2.2.3, se pretende controlar un sistema lineal descrito por un modelo de POMTM y su modelo CARIMA. Suponiendo que la referencia futura es constante, es posible expresar el modelo en función de los errores predichos según la ecuación (2.31), donde  $\mathbf{u}_k = \Delta u_k$  representa el incremento de la señal de control.

Para obtener una representación interna apropiada se eligió como espacio de estados  $X \in \mathfrak{R}^2$  al que pertenece el vector de estados en el instante de muestreo  $k$

$$\mathbf{x}_k = [ e_k \quad e_{k-1} ]^T \quad (3.33)$$

y la evolución del estado queda descrita según la ecuación (2.34) donde el par  $(A, B)$  es controlable. Si se incluye el retardo del sistema en el estado, se aumenta éste al vector

$$\mathbf{z}_k = [ \mathbf{x}_k \quad \mathbf{u}_{k-d} \quad \mathbf{u}_{k-d+1} \quad \cdots \quad \mathbf{u}_{k-1} ]^T \quad (3.34)$$

y la dinámica del estado se describe según

$$\mathbf{z}_{k+1} = A_z \mathbf{z}_k + B_z \mathbf{u}_k \quad (3.35)$$

con

$$A_z = \left[ \begin{array}{cc|ccc} A & B & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \mathbf{I}_{d-1} & \\ 0 & 0 & & & \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{array} \right]$$

$$B_z = [ 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1 ]^T$$

con dimensiones

$$\begin{aligned}\dim(A_z) &= (d+2) \times (d+2) \\ \dim(B_z) &= (d+2) \times 1\end{aligned}\quad (3.36)$$

Cuando se realimenta con un controlador CPSMC, descrito por la ecuación (3.24), de forma que no se considera la saturación de la señal de control, el incremento de la señal de control en función de los errores predichos es

$$\mathbf{u}_k = \Delta u_k = -l_1(k)\hat{e}_{k+d_m} - l_2(k)\hat{e}_{k+d_m-1} \quad (3.37)$$

y en función del estado  $\mathbf{x}$  es

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{k}_{cpsmc}\mathbf{x}_{k+d_m} = [-l_1 \quad -l_2] \mathbf{x}_{k+d_m} \quad (3.38)$$

Puesto que la predicción  $\mathbf{x}_{k+d_m}$  se obtiene a partir de un modelo descrito por  $A_m$ ,  $B_m$  y  $d_m$ , utilizando la ecuación (2.41), se puede calcular la predicción en el instante  $k+d_m$  como

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+d_m} &= E\mathbf{z}_k = \\ &= [A_m^{d_m} \quad A_m^{d_m-1}B_m \quad A_m^{d_m-2}B_m \quad \dots \quad A_m^0B_m] \mathbf{z}_k\end{aligned}\quad (3.39)$$

y en función del estado  $\mathbf{z}$  la ley de control es

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{k}_z\mathbf{z}_k = \mathbf{k}_{cpsmc}E\mathbf{z}_k \quad (3.40)$$

Al cerrar el bucle, el comportamiento dinámico del estado queda descrito por

$$\mathbf{z}_{k+1} = A_z^{bc}\mathbf{z}_k = (A_z + B_z\mathbf{k}_z)\mathbf{z}_k \quad (3.41)$$

Como se recuerda del apartado de síntesis del controlador 3.2.1, el factor  $\mathbf{S}$  se introduce para hacer el control más suave cuando el valor de la superficie es pequeño y así aumentar su grado de robustez. El factor  $\mathbf{S}$  es constante cuando

$$|s_{k-1}| \geq \rho \quad (3.42)$$

y, en otro caso introduce una no linealidad en la ley de control y es posible dividir  $\mathbf{k}_{cpsmc}$  en dos sumandos de forma que la no linealidad quede agrupada en  $h(\mathbf{z}_k)$ , que sólo afecta a uno de los dos sumandos:

$$\mathbf{k}_{cpsmc} = \Theta_1 + \Theta_2 h \quad (3.43)$$

donde

$$h(\mathbf{z}_k) = |s_{k-1}|, \quad 0 < h \leq \rho < 1 \quad (3.44)$$

$$\Theta_1 = -q(K_r + \bar{P} * s_{\min}) \quad (3.45)$$

$$\Theta_2 = -q\bar{P} \quad (3.46)$$

con  $q$ ,  $K_r$  y  $\bar{P}$  descritos en las ecuaciones (3.20) y (3.25).

### 3.2.3.2. Análisis de estabilidad nominal

En este subapartado se pretende encontrar los límites en la elección de los parámetros del CPSMC,  $\alpha$  y  $\lambda$ , que garantizan, si el horizonte de predicción es suficientemente grande, la estabilidad nominal en bucle cerrado, entendida como la que se consigue cuando se controla sin incertidumbres de modelado.

Cuando el estado evoluciona en el modo de alcance, pertenece a la región

$$Z_1 = \{\mathbf{z}_k : \mathbf{z}_k \in Z, \mathbf{u}_k = -q(K_r + \bar{P})E\mathbf{z}_k\} \quad (3.47)$$

con  $q$ ,  $K_r$  y  $\bar{P}$  descritos en las ecuaciones (3.20) y (3.25). El control es lineal y corresponde a un control GPC con restricciones en la superficie predicha.

Cuando el módulo del valor de la superficie es menor o igual que la cota  $\rho$ , el estado aumentado pertenece a la región

$$Z_2 = \{\mathbf{z}_k : \mathbf{z}_k \in Z, \mathbf{u}_k = (\Theta_1 + \Theta_2 h)E\mathbf{z}_k, 0 \leq h \leq \rho\} \quad (3.48)$$

A continuación se realiza el análisis de la estabilidad nominal del sistema controlado con la ley no lineal  $\mathbf{k}_{cpsmc}$ , en la cual los parámetros  $l_1$  y  $l_2$  dependen del estado aumentado  $\mathbf{z}_k$ . Puesto que la ley es no lineal, es conveniente separar la matriz que representa la dinámica de bucle cerrado  $A_z^{bc}$  en dos matrices, una afectada de la no linealidad, agrupada en  $h(\mathbf{z}_k)$  que se describió en la ecuación (3.44), y otra no, según

$$A_z^{bc} = A_{z1}^{bc} + hA_{z2}^{bc} \quad (3.49)$$

donde

$$A_{z1}^{bc} = A_z + B_z \mathbf{k}_{z1} = A_z + B_z \Theta_1 E \quad (3.50)$$

$$A_{z2}^{bc} = B_z \mathbf{k}_{z2} = B_z \Theta_2 E \quad (3.51)$$

y la función  $h$  cumple que  $h \in [0, \rho]$ . Cuando  $h = \rho$ , la dinámica corresponde a la del modo de alcance.

Aplicando el cambio de variable

$$h^* = \frac{h}{\rho} \quad (3.52)$$

la ecuación se transforma a

$$A_z^{bc} = A_{z1}^{bc} + h^* A_{z2}^{bc*} \quad (3.53)$$

donde

$$A_{z2}^{bc*} = \rho \times B_z \Theta_2 E \quad (3.54)$$

La dinámica de bucle cerrado se puede expresar como una combinación convexa de las matrices  $A_{z1}^{bc}$  y  $A_{z3}^{bc}$ , con

$$A_{z3}^{bc} = A_{z1}^{bc} + A_{z2}^{bc*} \quad (3.55)$$

de forma que

$$A_z^{bc} = (1 - h^*)A_{z1}^{bc} + h^*A_{z3}^{bc} \quad (3.56)$$

Para todo  $h^* \in [0, 1]$ , si existe una matriz  $P$  simétrica definida positiva que satisfice las siguientes desigualdades matriciales lineales (LMIs)

$$\begin{aligned} P - A_{z1}^{bcT} P A_{z1}^{bc} &> 0 \\ P - A_{z3}^{bcT} P A_{z3}^{bc} &> 0 \\ P &> 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

entonces la dinámica de bucle cerrado descrita por  $A_z^{bc}$  es estable. En este caso, existirá una función cuadrática de Lyapunov  $V(z_k)$  de la forma

$$V(z_k) = z_k^T P z_k \quad (3.58)$$

que satisface

$$V(z_k) > V(z_{k+1}), \forall z_k \neq 0 \quad (3.59)$$

Se encontraron las matrices  $P$  que satisfacen las LMIs (3.57) con la familia de plantas descritas en el apartado 1.3.1, sintonizando el controlador con todas las combinaciones de los siguientes valores de los parámetros

$$\begin{aligned} \alpha &= -0.9 + 0.01k \text{ con } k = 0, 1, \dots, 180 \\ \lambda &\in \{0.5, 1, 1.5, 1, 2.5, 3\} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Además se han calculado los valores mínimos de un coeficiente  $\gamma \in [0, 1]$  que representa la contractividad de la función de Lyapunov (3.58)

$$z_k^T P z_k \leq \gamma^k z_0^T P z_0 \quad (3.61)$$

para las 110 plantas estudiadas con cada sintonización del controlador propuesta en el apartado 1.3.1. Un valor menor que dicho coeficiente  $\gamma_{\min}$  impide que exista una matriz  $P$  solución de las LMIs

$$\begin{aligned} \gamma P - A_{z1}^{bcT} P A_{z1}^{bc} &> 0 \\ \gamma P - A_{z3}^{bcT} P A_{z3}^{bc} &> 0 \\ P &> 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

En la figura 3.3 se han representado los máximos de los  $\gamma_{\min}$  encontrados para cada sintonización del controlador propuesta, fijados  $s_{min} = \rho = 0.5$ . Se puede observar que, para la sintonización  $\lambda \leq 1.5$  y  $\frac{-\alpha}{\beta} = -0.9$ , el máximo  $\gamma_{\min}$  es mayor que 1, ya que para los sistemas con  $a = 0.95$  y  $d \geq 12$  no existe  $P$  solución de las LMIs (3.57). Corresponde a una sintonización demasiado agresiva.

En la figura 3.4 se representa el máximo de los máximos autovalores en valor absoluto de  $A_{z1}^{bc}$  y  $A_{z3}^{bc}$  para procesos industriales que pueden ser modelados con parámetros pertenecientes a los rangos  $a \in [0.5, 0.95]$ , y  $d \in [5, 15]$

$$\sigma_{\max_{NL}} = \max_{\sigma} (\max_{\sigma} |\sigma(A_{z1}^{bc})|, \max_{\sigma} |\sigma(A_{z3}^{bc})|) < 1 \quad (3.63)$$

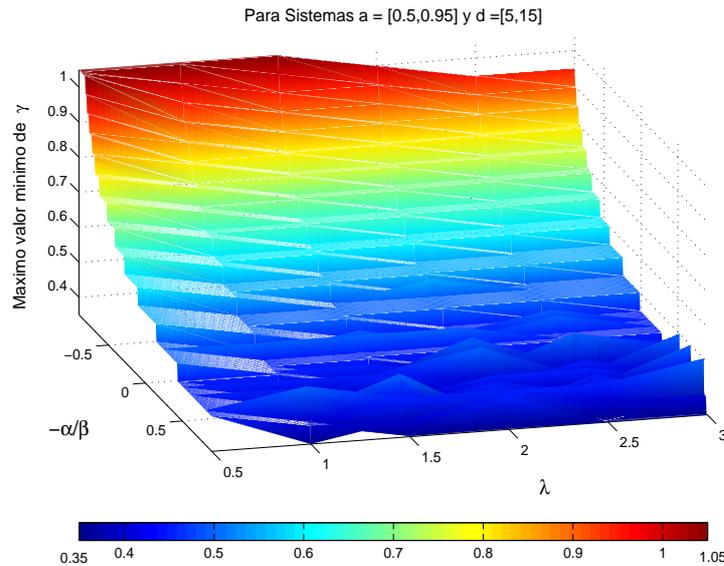


Figura 3.3: Valores máximos del mínimo coeficiente de contractividad de la función de Lyapunov  $V(z_k)$  para la familia de plantas analizadas con cada sintonización de  $\frac{\alpha}{\beta}$  y  $\varepsilon T$ .

Esto corresponde a los casos extremos cuando  $h^* = 0$  (deslizamiento,  $A_{z_3}^{bc}$ ) y  $h^* = 1$  (alcance,  $A_{z_1}^{bc}$ ). En estos casos se ilustra que se satisface la condición de estabilidad (3.63). Resultó aún más estable al aumentar  $\lambda$ , como ocurre en el control GPC clásico. Se escogieron  $\beta = 1$ , porque es la relación  $\alpha/\beta$  la que determina la agresividad de las respuestas, y  $\varepsilon T = 0.45$  ya que, en el apartado de sintonización el mejor ajuste del parámetro  $\varepsilon T$  resultó prácticamente constante para minimizar el índice  $IAE_3$  (3.27) con la familia de procesos controlados. En el caso límite cuando  $h \simeq 0$ , el control vuelve a ser prácticamente lineal y, cuando se escoge  $s_{min} = \rho = 0.5$ , corresponde al control GPC con  $\mathbf{S} = 0.5$ , es decir, un control más suave que cuando el estado está alejado de la superficie.

En resumen, la estabilidad de los sistemas modelados con parámetros pertenecientes a los rangos  $a \in [0.5, 0.95]$ , y  $d \in [5, 15]$  controlados con CPSMC sin errores de modelado está garantizada en todo el espacio de estados, cuando se sintonizan los parámetros en los intervalos  $\lambda \in [0.5, 3]$  y  $\alpha \in [-0.9, 0.9]$ , con  $\beta = 1$ ,  $s_{min} = \rho = 0.5$  y  $\varepsilon T = 0.45$ .

### 3.2.3.3. Análisis de admisibilidad

Dado un sistema lineal descrito por la ecuación (3.35) y la ley de control no lineal CPSMC (3.40), el estudio de las condiciones de admisibilidad cuando  $|s_{k-1}| \geq 0$  se desarrolla a partir de los siguientes elementos conocidos:

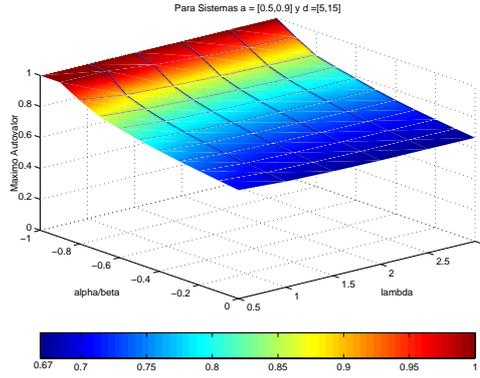


Figura 3.4: Variación del máximo autovalor de  $A_{z1}^{bc}$  y  $A_{z3}^{bc}$  cuando  $0 < |s_{k-1}| \leq \rho$

- La matriz de transición de estados en bucle cerrado  $A_z^{bc}$  puede expresarse como una combinación convexa de matrices (3.56) tal que

$$A_z^{bc} = Co(A_{z1}^{bc}, A_{z3}^{bc}) \quad (3.64)$$

definida en todo el espacio de estados  $Z = X \times U \times \dots \times U \in \mathfrak{R}^{d+2}$ .

- Las restricciones en la variable controlada:

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^2 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T \mathbf{x} \leq [\bar{X} \quad \bar{X} \quad -\underline{X} \quad -\underline{X}]^T\} \quad (3.65)$$

- Las restricciones en la variable manipulada:

$$U = \{\mathbf{u} \in \mathfrak{R} : [1 \quad -1]^T \mathbf{u} \leq [\bar{U} \quad -\underline{U}]^T\} \quad (3.66)$$

Es posible encontrar un conjunto admisible en  $i$  pasos  $C_i^{cpsmc}(Z)$ , que es aquél que garantiza que una trayectoria de  $i$  pasos se mantendrá dentro del espacio de estados  $Z$ , según se vio en el apartado 2.2.3 (ecuación 2.78). El algoritmo convergerá al máximo conjunto admisible  $C_\infty^{cpsmc}$ , que al tratarse de un sistema en bucle cerrado estable al origen, coincide con un conjunto  $O_\infty^{cpsmc}$  suficientemente grande y asintóticamente estabilizable al origen contenido en  $Z$

$$O_\infty^{cpsmc} = \{\mathbf{z} \in Z = X \times U \times \dots \times U \in \mathfrak{R}^{d+2} : R\mathbf{z} \leq r\} \quad (3.67)$$

Este conjunto es un invariante en  $Z$ , por lo tanto todas las trayectorias que parten de  $O_\infty^{cpsmc}$  quedan confinadas en  $O_\infty^{cpsmc}$ , y es el máximo conjunto admisible para la inclusión diferencial propuesta. Nótese que al ser el sistema de control real no lineal (3.49), no corresponderá al máximo conjunto para este sistema, pero sí a un conjunto suficientemente grande.

Un conjunto de estados representativos de la dinámica general del sistema son

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_0 = P\mathbf{x}_0 &= [\mathbf{x}_0^T \ 0 \ \cdots \ 0]^T \\ \text{con } P^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.68)$$

entre los que se incluyen los estados de equilibrio estacionarios que verifican la igualdad de sus componentes ( $\mathbf{x}_{01} = \mathbf{x}_{02}$ ). Del conjunto  $O_{\infty}^{cpsmc}$ , sólo los estados de la forma  $\mathbf{z}_0$  garantizan una trayectoria acotada y admisible de  $\mathbf{x}_0$  hacia el estado origen  $\mathbf{x} = [0 \ 0]^T$ . Se define

$$\Phi = \{\mathbf{x}_0 \in X : RP\mathbf{x}_0 \leq r\} \quad (3.69)$$

como el conjunto de estados en  $X$  que garantiza una trayectoria estable y admisible. El conjunto  $\Phi$  está incluido en la proyección de  $O_{\infty}^{cpsmc}$  en  $X$ ,  $O_{\infty x}^{cpsmc}$ , pero no coincide con ella. Nótese que no es un conjunto invariante positivo en  $X$ , definido en el apartado 2.2.3.3, porque la evolución de  $\mathbf{x}$  puede salir de  $\Phi$  sin salir de  $O_{\infty x}^{cpsmc}$ .

En la figura 3.5 se muestra la representación del conjunto  $\Phi$  en trazo continuo y grueso, en el espacio de estados  $X$ , incluido dentro de la proyección en  $X$  de  $O_{\infty x}^{cpsmc}$  en trazo discontinuo y grueso. Se han representado 4 trayectorias (-.-) simuladas imponiendo restricciones en la señal de control.  $\mathbf{x}_{01}$  o  $\mathbf{x}_{02}$  corresponden a estados estables aunque no admisibles (no factibles) para las restricciones propuestas. Las trayectorias que parten de  $\mathbf{x}_{03}$  o  $\mathbf{x}_{04}$ , estados incluidos en  $\Phi$ , quedan confinadas en  $O_{\infty x}^{cpsmc}$  y alcanzan el origen sin violar las restricciones en  $X$ . El ejemplo corresponde al control de un sistema modelado como de POMTM  $a = 0,9$   $b = 0,1$   $d = 2$ , con restricciones en estado  $\pm 2$  y señal de control de  $\pm 2$ . Los parámetros del controlador se escogieron:  $\varepsilon T = 0.45$ ,  $\alpha = -0.1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\lambda = 1.5$ ,  $N = 60$ . y  $s_{min} = \rho = 0.5$ .

Cuando  $\mathbf{x}$  se encuentra en el modo de alcance, como en los casos de los estados iniciales de las trayectorias de la figura 3.5,  $\mathbf{S}$  adopta un valor constante y la ley de control es inicialmente lineal (con los parámetros  $l_1$  y  $l_2$  independientes de  $k$ ) y estabilizante y el conjunto  $O_{\infty}^{cpsmc}$ , que podría calcularse resolviendo el algoritmo del apartado 2.2.3.3, sería el máximo invariante positivo asintóticamente estabilizable. Si se considerase esa ley lineal en todo el espacio de estados, el conjunto máximo obtenido es ligeramente superior al que se muestra en la figura 3.5 y que tiene en cuenta la ley no lineal.

### 3.2.4. Análisis de Robustez

En este apartado se analizará el grado de robustez del controlador ante incertidumbres paramétricas en el modelo del sistema. La representación interna del sistema de control con incertidumbres es la descrita en el apartado 2.2.4.

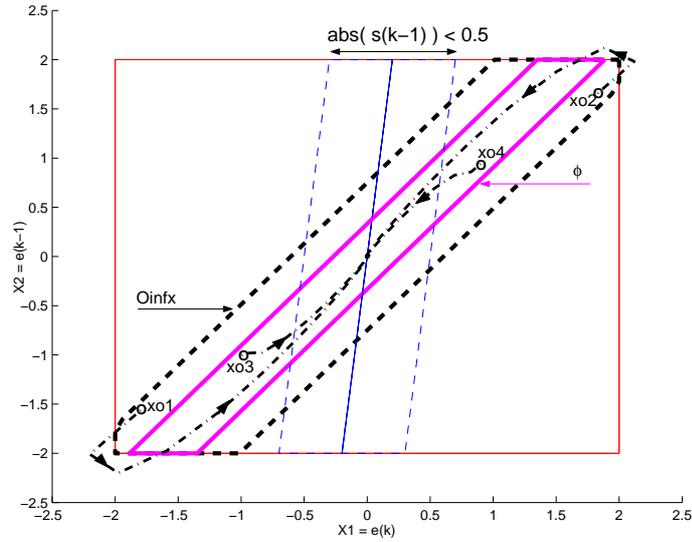


Figura 3.5: Representación de trayectorias (-.-) en  $X$  que parten de  $O_{\infty x}^{cpsmc}$  ( $\mathbf{x}_{01}$  y  $\mathbf{x}_{02}$ ) y de  $\Phi$  ( $\mathbf{x}_{03}$  y  $\mathbf{x}_{04}$ ) para un sistema de POMTM con  $a = 0.9$   $b = 0.15$   $d = 2$ , restricciones en estado  $\pm 1$  y señal de control de  $\pm 2$ ,  $\varepsilon T = 0.45$ ,  $\alpha = -0.1$ ,  $\lambda = 1.5$ ,  $N = 60$ .y  $s_{min} = \rho = 0.5$ .

### 3.2.4.1. Estabilidad robusta

Resolviendo similares LMIs a las indicadas en el subapartado 2.2.4.2, se obtuvo el valor del máximo error de modelado en los tres parámetros  $\bar{e}_a = \bar{e}_b = \bar{e}_d$  para el que se obtienen respuestas estables de una familia de plantas controladas con CPSMC, y se presenta en la tabla 3.2. El controlador fue sintonizado con los valores obtenidos a partir de la minimización de  $IAE_3$  (3.27).

$d_m \setminus a_m$	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95
5	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
6	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	6	18	18	16	16	14	12	9	7	6
9	5	16	16	15	16	14	11	9	7	6
10	4	14	14	14	14	13	11	9	7	6
11	4	13	13	13	13	13	11	9	7	6
12	4	12	12	12	12	12	11	9	7	6
13	3	11	11	11	11	11	11	9	7	6
14	3	10	10	10	10	10	10	8	6	5
15	3	9	9	9	9	9	9	8	6	5

Tabla 3.2: Máximo error de modelado en los tres parámetros  $e_a=e_b=e_d$  en porcentaje

El grado de robustez del controlador ante incertidumbres paramétricas en el modelo del sistema, entendiendo como tal la máxima incertidumbre en los tres parámetros del modelo que garantiza la estabilidad en bucle cerrado, se reduce considerablemente para plantas con valores extremos en el rango de análisis del polo. Esto se debe a que, para estos modelos, el controlador está ajustado para producir respuestas más agresivas, es decir, con menor  $\lambda$ . Esto ocurre también al controlar plantas con los retardos mayores, ya que el error en % de  $d_m$  es mayor.

Además estos resultados son conservadores, y en muchos casos, la inestabilidad inicial del sistema lleva a disminuir  $|s_{k-1}^p|$ , aumentando el margen de robustez, ya que el control GPC es menos agresivo en el modo de pseudodeslizamiento. En la figura 3.6 se muestran ejemplos de este conservadurismo para dos plantas ( $a_m=0.5, b_m=0.5, d_m=13; a_m=0.7, b_m=0.3, d_m=7$ ) modeladas con errores de modelado de  $\pm 8\%$  y  $\pm 14\%$  en todos los parámetros. Dichos errores son mayores que los de la tabla 3.2, calculados al resolver las LMIs correspondientes, descritas en las ecuaciones (2.98-??) del apartado 2.2.4.2, y aún así la dinámica se mantiene estable.

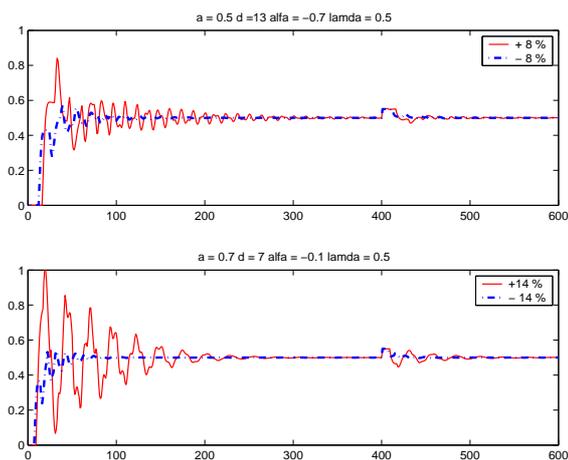


Figura 3.6: Simulaciones con errores superiores a los encontrados resolviendo el LMI.

Con el fin de observar el efecto del error en cada parámetro se calculó el máximo de los máximos autovalores en valor absoluto de  $A_{z1}^{bc}$  y  $A_{z3}^{bc}$  para procesos industriales que pueden ser modelados con parámetros pertenecientes a los rangos  $a_m \in [0.5, 0.95]$ , y  $d_m \in [5, 15]$  (3.63). Los resultados obtenidos ilustran la variación del máximo autovalor en cinco sistemas con retardos 5, 10, y 15 respectivamente y, en la esquina inferior derecha de cada figura, se ha incluido el máximo autovalor para todos los  $d_m$  o  $a_m$  analizados. En primer lugar (figura 3.7 (a)) se consideraron modelos con únicamente error en el polo  $e_a \in [-0.3, 0.3]$ . Esto equivale a errores desde  $-30\%a_m$  hasta  $30\%a_m$ . La limitación mayor que presenta el sistema de control se da cuando existen errores de modelado positivos en  $a_m$ , es decir, cuando el sistema real es más lento que el modelado.

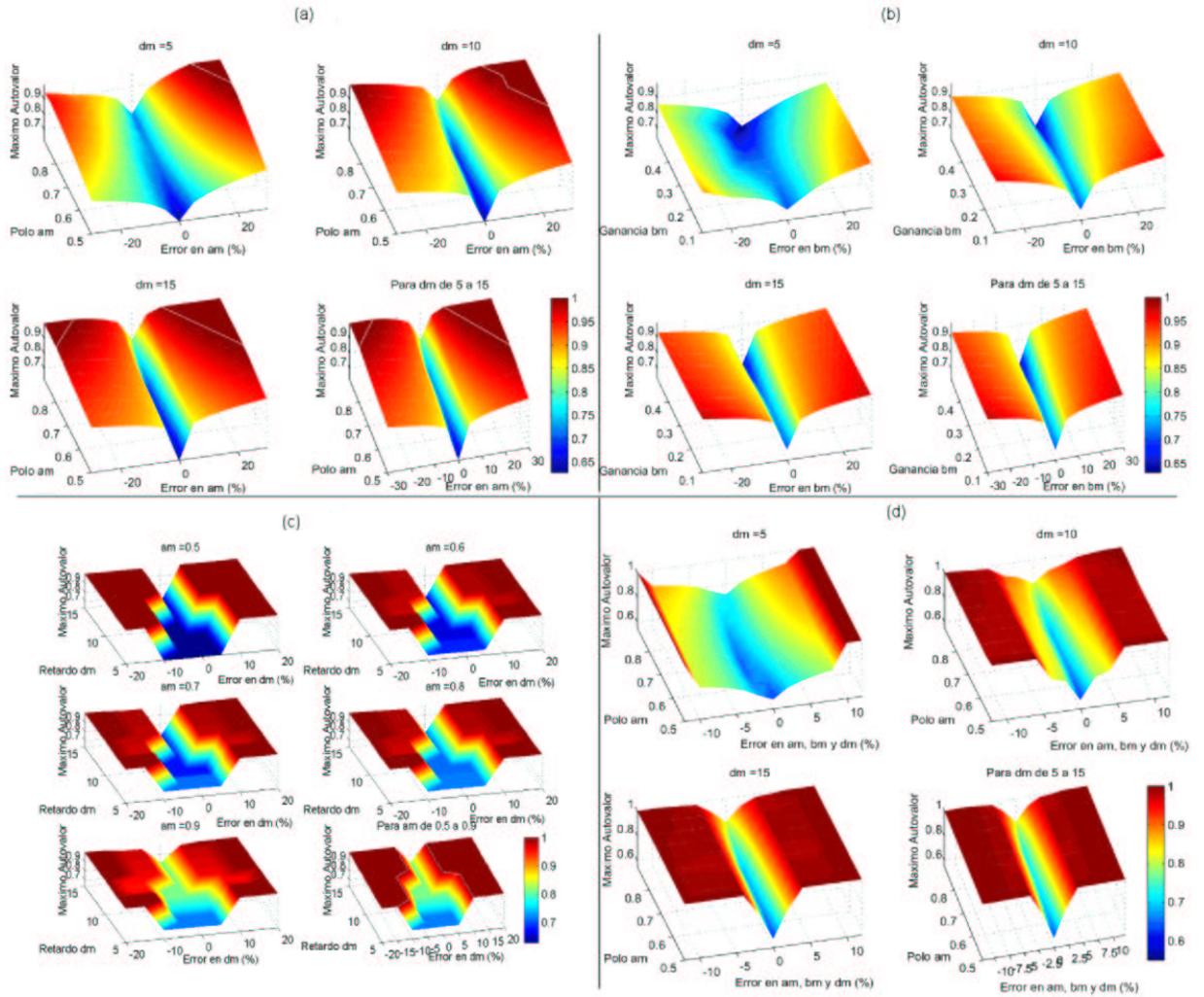


Figura 3.7: Máximo autovalor en valor absoluto de  $A_{z1}^{bc}$  y  $A_{z3}^{bc}$  para sistemas inciertos con errores (a) sólo en el polo, (b) sólo en la ganancia, (c) sólo en el retardo y (d) en los tres parámetros a la vez.

Un segundo estudio ( figura 3.7 (b)) se realizó al considerar modelos con únicamente error en la ganancia estática  $e_b \in [-0.3, 0.3]$  (errores desde  $-30\%b_m$  hasta  $30\%b_m$ ). Se puede deducir que el sistema presenta un alto grado de robustez ante errores en la ganancia del modelo, y algo menor para sistemas más lentos.

En la figura 3.7 (c) se representa igualmente el máximo autovalor cuando se considera únicamente error en el retardo  $e_d \in [-0.2, 0.2]$  (errores desde  $-20\%d_m$  hasta  $20\%d_m$ ), calculando  $d$  como  $[d_m(1 \pm e_d)]$ . Se puede observar que el grado de robustez es parecido para el rango de  $a_m$  estudiado, siendo de al menos  $\pm 5\%$ .

Por último, se añadió un error de modelado en el retardo de igual magnitud que los errores en ganancia y polo  $e_a = e_b = e_d \in [-0.12, 0.12]$ . Obsérvese que los resultados,

representados en la figura 3.7 (d), se asemejan a los obtenidos resolviendo las LMIs, los de la tabla 3.2, y que aquéllos son conservadores como se ilustró en la figura 3.6.

Como conclusión, de la figura 3.7 y la tabla 3.2 se puede deducir que

- Al controlar sistemas con diferentes retardos, el grado de robustez apenas disminuye, es decir, que el controlador CPSMC presenta una robustez similar para sistemas con distinta relación de controlabilidad  $RC = -dLn(a_m)$ . Por ejemplo, cuando  $a_m = 0,6$  y  $d_m = 10$ ,  $RC \simeq 5$  y en la figura 3.7 (d) se puede observar que la estabilidad se conserva para errores de modelado de al menos  $\pm 14\%$  en los tres parámetros del modelo. Si el sistema tuviera  $d_m = 12$  entonces  $RC \simeq 6$  y el grado conservador de robustez sería ligeramente inferior ( $\pm 12\%$ ), teniendo en cuenta que un porcentaje de 12 es mayor que un porcentaje de 10.
- Que el grado de robustez es de al menos  $\pm 8\%$  de error en los tres parámetros para los sistemas analizados con  $a_p \in [0,44, 1]$  y  $d_p \in [4, 17]$ , y en la mayoría de las plantas de estudio es mucho mayor.
- Cuando el sistema real es más rápido que el modelado, en términos de constante de tiempo, el grado de robustez es mayor que en el caso de que el modelo fuese más rápido. Para todos los sistemas analizados el grado de robustez es al menos de  $\pm 10\%$ .
- Cuando el retardo del sistema real es menor que el modelado, el grado de robustez es mayor también.

### 3.2.4.2. Admisibilidad robusta

Sea el sistema lineal con incertidumbres paramétricas en la ganancia y en el polo descrito por las ecuaciones (2.90) y (2.91). Es posible obtener dos cotas superiores para el error de modelado  $\bar{e}_a$  y  $\bar{e}_b$  según el procedimiento indicado en el apartado anterior tales que

$$\begin{aligned} \Delta a_m &\in a_m \bar{e}_a [-1, 1] = 2a_m \bar{e}_a h_a - a_m \bar{e}_a \\ \Delta b_m &\in b_m \bar{e}_b [-1, 1] = 2b_m \bar{e}_b h_b - b_m \bar{e}_b \end{aligned} \quad (3.70)$$

donde

$$h_a, h_b \in [0, 1] \quad (3.71)$$

y expresar la matriz de la dinámica de bucle cerrado con incertidumbres (2.90) como

$$\tilde{A}_z^{bc} = h_a M_1 + h_b M_2 + (1 - h_b) M_3 \quad (3.72)$$

donde

$$\begin{aligned} M_1 &= 2a_m \bar{e}_a N_a \\ M_2 &= A_z^{bc} - a_m \bar{e}_a N_a - b_m \bar{e}_b N_b + 2b_m \bar{e}_b N_b \\ M_3 &= A_z^{bc} - a_m \bar{e}_a N_a - b_m \bar{e}_b N_b \end{aligned} \quad (3.73)$$

Según las ecuaciones (3.53) y (3.54), se separa la parte lineal de la no lineal en la matriz de bucle cerrado  $A_z^{bc}$ , englobando la no linealidad en el parámetro

$$h^* = \frac{|s_{k-1}|}{\rho} \in [0, 1] \quad (3.74)$$

La matriz  $A_{z2}^{bc*}$  no se afecta de las incertidumbres consideradas, por lo que la ecuación (3.72) se puede expresar como una combinación convexa de cuatro sumandos

$$\tilde{A}_z^{bc} = h_a M_1 + h_b M_2 + (1 - h_b) M_3 + h^* M_4 \quad (3.75)$$

donde

$$\begin{aligned} M_1 &= 2a_m \bar{e}_a N_a \\ M_2 &= A_z + B_z \Gamma_1 E - a_m \bar{e}_a N_a - b_m \bar{e}_b N_b + 2b_m \bar{e}_b N_b \\ M_3 &= A_z + B_z \Gamma_1 E - a_m \bar{e}_a N_a - b_m \bar{e}_b N_b \\ M_4 &= \rho \times B_z \Gamma_2 E \end{aligned} \quad (3.76)$$

El análisis de la admisibilidad robusta del sistema propuesto se desarrolla a partir de los siguientes elementos conocidos:

- La matriz de transición de estados en bucle cerrado expresada como una inclusión diferencial lineal tal que

$$\tilde{A}_z^{bc} = Co(M_1, M_2, M_3, M_4) \quad (3.77)$$

definida en todo el espacio de estados  $Z = X \times U \times \dots \times U \in \mathfrak{R}^{d+2}$  y dos cotas superiores para el error de modelado  $\bar{e}_a$  y  $\bar{e}_b$ .

- Las restricciones en la variable controlada:

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^2 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T \mathbf{x} \leq [\bar{X} \quad \bar{X} \quad -\underline{X} \quad -\underline{X}]^T\} \quad (3.78)$$

- Las restricciones en la variable manipulada:

$$U = \{\mathbf{u} \in \mathfrak{R} : [1 \quad -1]^T \mathbf{u} \leq [\bar{U} \quad -\underline{U}]^T\} \quad (3.79)$$

Resolviendo el algoritmo del subapartado 2.2.3.3 con los elementos de las ecuaciones (3.77-3.79), es posible encontrar el máximo conjunto admisible  $C_\infty^{cpsmc}$ , que al tratarse de un sistema en bucle cerrado estable al origen, coincide con un conjunto  $O_\infty^{cpsmc}$  suficientemente grande asintóticamente estabilizable al origen contenido en  $Z$

$$O_\infty^{cpsmc} = \{\mathbf{z} \in Z = X \times U \times \dots \times U \in \mathfrak{R}^{d+2} : R\mathbf{z} \leq r\} \quad (3.80)$$

Este conjunto invariante es el máximo conjunto admisible para la inclusión diferencial propuesta. Nótese que al ser el sistema real en bucle cerrado no lineal, no corresponderá al máximo conjunto para este sistema, pero sí a un conjunto suficientemente grande.

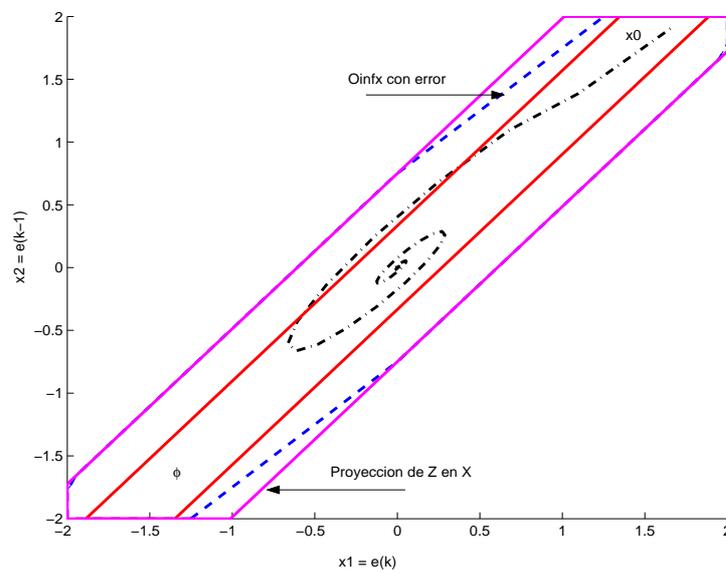


Figura 3.8: Representación de trayectorias (-.-) en  $X$  (trazo grueso caso con error, trazo fino caso sin error) para un sistema de POMTM con  $a_m = 0.9$   $b_m = 0.1$   $d_m = 2$ , restricciones en estado  $\pm 2$  y señal de control de  $\pm 2$ ,  $\varepsilon T = 0.45$  y  $\alpha = -0.1$ ,  $\lambda = 1.5$ ,  $N = 60$ ,  $s_{min} = \rho = 0.5$ . y error de modelado  $a_p = 120\%a_m$ ,  $b_p = 120\%b_m$ .

# Capítulo 4

## Estudio comparativo mediante simulación

### 4.1. Introducción

En este capítulo se van a exponer los resultados de un amplio abanico de experimentos de simulación realizados con MATLAB y SIMULINK que se han realizado con los controladores presentados en los capítulos anteriores. Se pretende cubrir los siguientes objetivos:

- Mostrar qué tipo de respuestas temporales se consiguen controlando con las leyes de control propuestas cuatro plantas con retardo: una de primer orden, una con un polo triple, una de cuarto orden y una de fase no mínima. Para ello se han ajustado los parámetros de los controladores según las reglas de sintonización aportadas en cada caso.
- Comparar estas respuestas con las obtenidas aplicando las leyes de control con sintonización en función de los parámetros del modelo de POMTM que motivaron esta tesis.
  - PSMC1 y CPSMC se han comparado con:
    - GPC (1994, [100]) porque todos emplean el modelo de predicción CARIMA y, en el caso de CPMSC, se modifica la función objetivo a optimizar de GPC para obtener respuestas con mayor grado de robustez ante incertidumbres de modelado.
    - IM-SMC (2003,[62]) porque es una reciente ley de control SMC formulada para plantas modeladas como POMTM que incorpora el concepto

de acercamiento a un modo deslizante predicho calculado en función del modelo interno.

- PSMC2 se ha comparado con GPC (1994, [100]) y con SMC (1996, [12]) porque es una variación de la ley SMC incorporando la ley GPC y el concepto de modo deslizante predicho, con el fin de mejorar el desempeño, aumentar el grado de robustez ante incertidumbres en la estimación de la ganancia estática del proceso y aumentar la aplicabilidad de SMC a sistemas con grandes retardos.
- Realizar algunas comparaciones de PSMC1 y CPSMC con otras dos leyes de control que conmutan entre ambas en función del último valor medido de la superficie, para observar si se introducen ventajas adicionales con la conmutación.

No se ha realizado una comparación de los resultados obtenidos con todos los controladores desarrollados en esta tesis mediante simulación, aunque sí es posible encontrar tal comparación en el capítulo 5, en el que son aplicados a los dos sistemas reales de prueba.

Se han realizado simulaciones de seguimiento a un valor de referencia 0.5, perturbación a la salida del 10% del valor final y errores de modelado de  $\pm 30\%$  (PSMC1 y CPSMC) o  $\pm 50\%$  (PSMC2) en ganancia, polo y retardo. Las plantas controladas se describen con las siguientes funciones de transferencia en el dominio de Laplace

$$G_1(s) = \frac{1}{(1+s)(\frac{1}{\tau_1}+s)} e^{-5s} \quad (4.1)$$

$$G_2(s) = \frac{1}{(1+s)^3} e^{-5s} \quad (4.2)$$

$$G_3(s) = \frac{1}{(1+s)(1+0,5s)(1+0,25s)(1+0,125s)} e^{-5s} \quad (4.3)$$

$$G_4(s) = \frac{-0,4(s-0,5)}{(s+1)(s+0,2)} e^{-5s} \quad (4.4)$$

Los parámetros nominales de los modelos de POMTM se obtuvieron por el método de la curva de reacción y se indican en la tabla 4.1.

	$G_1(s)$	$G_2(s)$	$G_3(s)$	$G_4(s)$
$\tau_n$	1	1.7	1	6
$t_{on}$	5	6.5	6	7.5
$a_n$	0.6065	0.6433	0.6703	0.8825
$d_n$	10	7	10	10

Tabla 4.1: Parámetros estimados de los modelos de POMTM de las plantas G1-G4

	IM-SMCr			GPCr		PSMC1r	
	$\lambda$	$K_D$	$\delta$	$N : N_u$	$\lambda$	$\alpha/\beta$	$\varepsilon T$
$G_1(s)$	0.08	20	5	60:5	375	-0.92	1
$G_2(s)$	0.03	2.5	1	60:5	240	-0.913	1
$G_3(s)$	0.07	0.65	2	60:5	770	-0.952	1
$G_4(s)$	0.04	0.12	0.93	60:5	1325	-0.974	0.97

Tabla 4.2: Parámetros de los controladores según PSMC1 con modelos POMTM

	IM-SMCr			GPCr		PSMC1r	
	$\lambda$	$K_D$	$\delta$	$N : N_u$	$\lambda$	$\alpha/\beta$	$\varepsilon T$
$G_1(s)$	0.08	20	5	60:5	0.01	-0.1	1
$G_2(s)$	0.03	4	1	60:5	2.75	-0.65	0.55
$G_3(s)$	0.07	12	2	60:5	200	-0.5	0.045
$G_4(s)$	0.04	10	1	60:5	5	-0.65	0.1

Tabla 4.3: Parámetros de los controladores para mínimo IAE

## 4.2. Simulaciones con PSMC1

En esta sección se pueden observar las respuestas del sistema  $G_1(s)$  controlado con PSMC1, sintonizado según la aproximación por redes neuronales (2.28,2.29), y del sistema controlado con GPC [100] e IM-SMC [62]. La sintonización de estos controladores se ajustó para obtener un comportamiento de similar IAE (*Integral of Absolute Error*) al obtenido con PSMC1 para los modelos nominales de los sistemas. En la tabla 4.2 pueden ser consultados.

En la figura 4.1 se observan los comportamientos cuando los parámetros modelados coinciden con los nominales de la tabla ( $a_m = a_n$ ,  $b_m = b_n$  y  $d_m = d_n$ ). La respuesta con IM-SMC es demasiado agresiva comparada con las de los otros dos controladores, pero corresponde al mínimo IAE que puede obtenerse mediante la sintonización del controlador.

Adicionalmente se realizaron otras simulaciones con los cuatro procesos con sintonizaciones que proporcionaban el desempeño óptimo (en términos de IAE) y que se

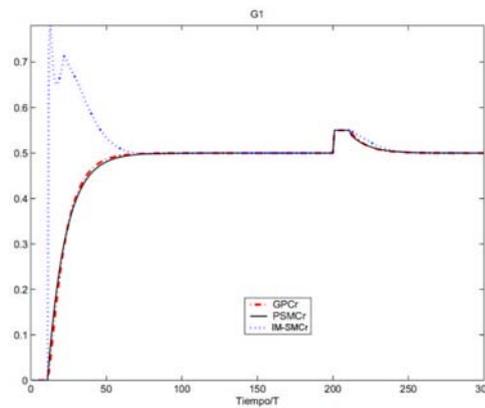


Figura 4.1: Simulaciones de control GPC, PSMC1 e IM-SMC de  $G_1(s)$  sin incertidumbres.

indican en la tabla 4.3. Los índices para cada planta con las dos sintonizaciones propuestas pueden consultarse en la tabla 4.4 y se observa que las mejoras, en cuanto a menores índices de desempeño, son manifiestas cuando la sintonización es más agresiva (tabla 4.3) que la facilitada por las ecuaciones del apartado 2.2.2 más conservadora.

PLANTA	Planta = Modelo o Sintonización		GPC	PSMC1	IM-SMC
	Planta $\neq$ Modelo	con tabla			
$G_1(s)$	=	4.2	6.1	6.1	6.2
	=	4.3	3	3	6.2
$G_2(s)$	=	4.2	7.1	7.1	7.1
	$\neq$	4.2	7.6	7.6	8.7
$G_3(s)$	$\neq$	4.3	6.2	<b>5.7</b>	8.3
	=	4.2	6.5	6.5	6.5
$G_4(s)$	$\neq$	4.2	7	<b>6.7</b>	8.6
	$\neq$	4.3	6.2	<b>5.6</b>	6.4
$G_4(s)$	=	4.2	18.8	18.8	18.8
	$\neq$	4.2	19.2	19.2	18.9
	$\neq$	4.3	7.9	<b>7.4</b>	10

Tabla 4.4: IAEs con dos sintonizaciones diferentes

En la figura 4.2 se comparan los tres controladores cuando hay un error de 30% o -30% en sólo uno de los tres parámetros sobre la planta  $G_1(s)$  con las sintonizaciones de la tabla 4.2. Los índices de estas simulaciones se recogen en la tabla 4.5. En los 9 primeros casos se consideró  $\tau_1 = 0$ . La mejora de PSMC1 se aprecia cuando se consideran errores del 30% en todos los parámetros y/o cuando se considera el polo adicional en  $\tau_1$  mayor. En la figura 4.3 (a) se han representado las envolventes de 1000 simulaciones con errores aleatorios de hasta  $\pm 31\%$  de  $a_n$ ,  $b_n$  y  $d_n$  sobre la planta  $G_1(s)$ , y en la figura 4.3 (b) se ha repetido el experimento con algo menos de error en

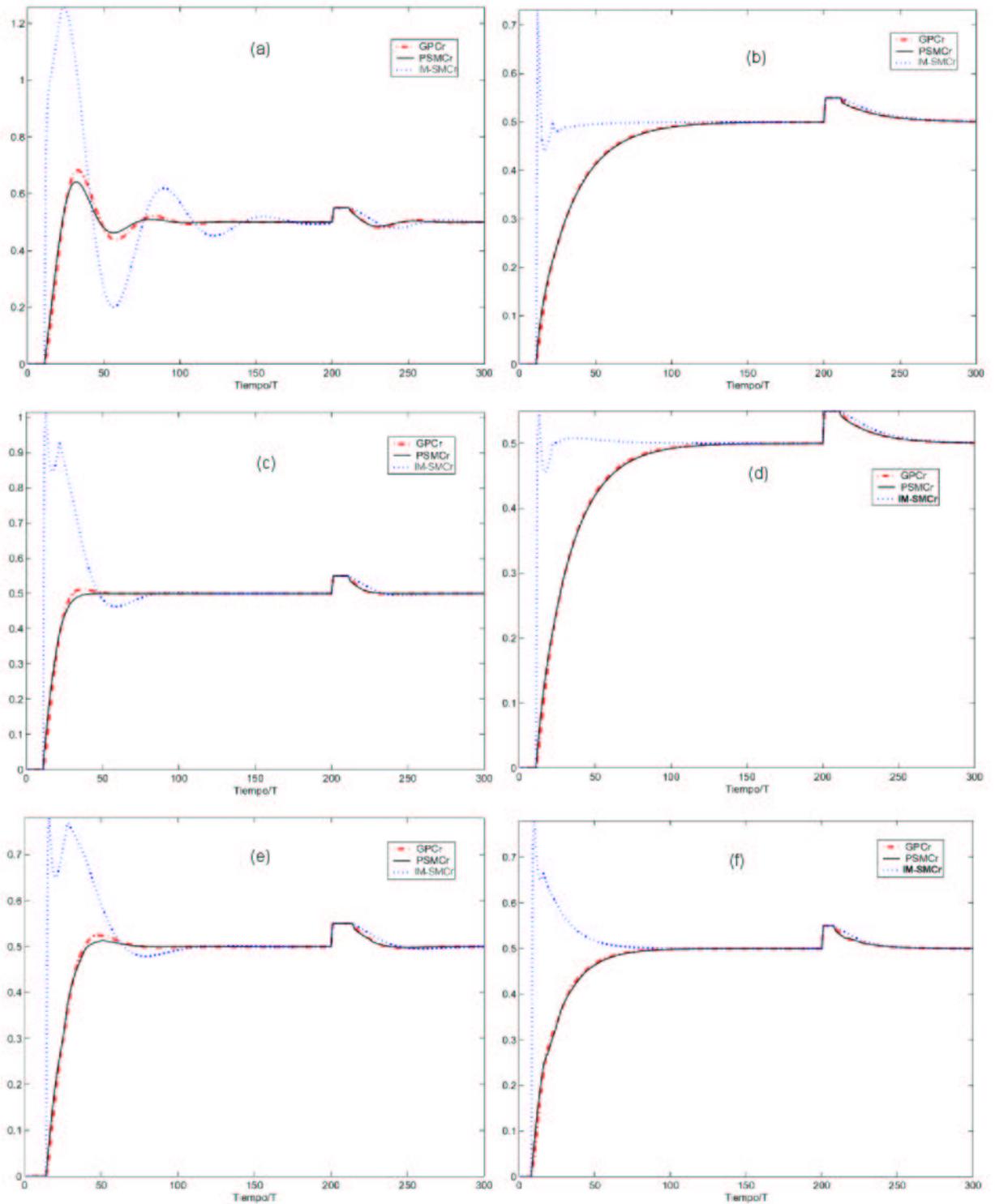


Figura 4.2: Control con GPC,PSMC1 e IM-SMC de  $G_1(s)$  e incertidumbres paramétricas: (a)  $a_p = a_m + 0.3a_m$  (b)  $a_p = a_m - 0.3a_m$  (c)  $b_p = b_m + 0.3b_m$  (d)  $b_p = b_m - 0.3b_m$  (e)  $d_p = d_m + 0.3d_m$  (f)  $d_p = d_m - 0.3d_m$ .

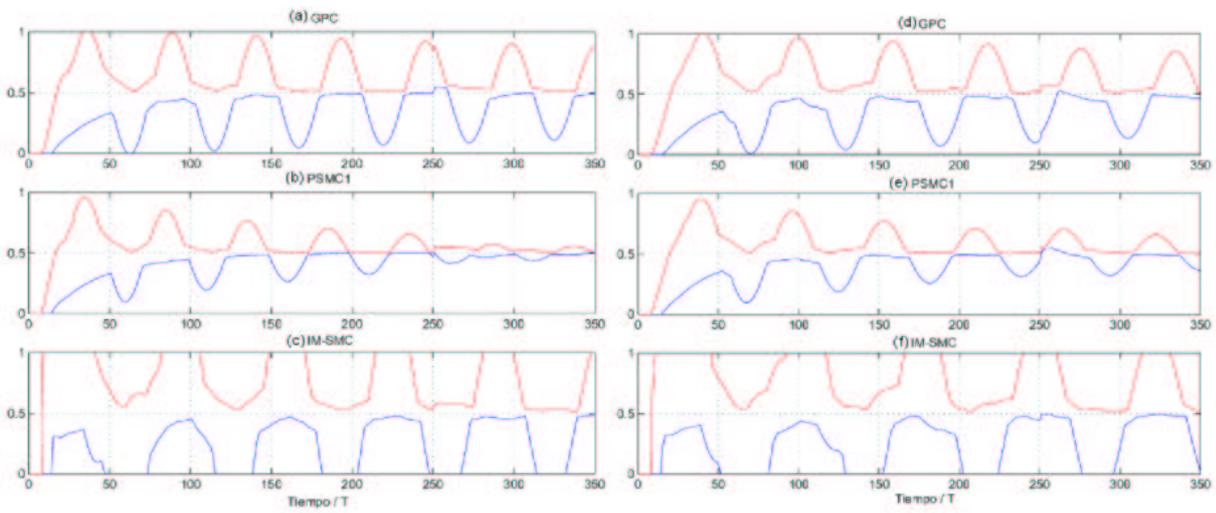


Figura 4.3: 1000 simulaciones de control de  $G_1(s)$  con errores aleatorios en: (a)(b)(c)  $[-31, 31]$  % en los tres parámetros con  $\tau_1 = 0$ ; (d)(e)(f)  $[-28, 28]$  % en los tres parámetros y error aleatorio en  $\tau_1 = [0, 1]$ .

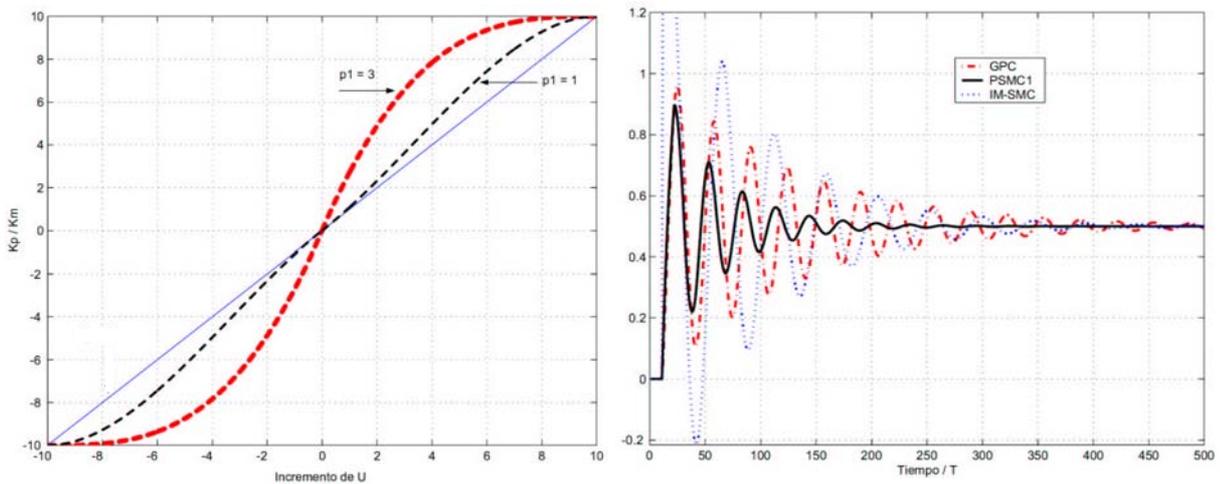


Figura 4.4: (a) Ganancia variable con el incremento de la señal de control con un incremento máximo de  $\overline{\Delta u} = 10$ . (b) Simulación de control GPC, PSMC1 e IM-SMC de  $G_1(s)$  cuando  $K_p(\Delta u)$ ,  $\overline{\Delta u} = 10$  y  $p_1 = 3$ .

IAE( $G_1$ )	GPCr	PSMCr	IM-SMCr
Sin errores	6.15	6.15	6.19
Error +30 % $b_m$	5	4.8	8.3
Error -30 % $b_m$	8.6	8.6	4
Error +30 % $a_m$	7	6	16.4
Error -30 % $a_m$	8.8	8.8	4.2
Error +30 % $d_m$	6.7	6.4	8.3
Error -30 % $d_m$	6.1	6.1	4.6
+30 % en todos	34.6	20.6	81.52
-30 % en todos	12.2	12.2	7.8
$\tau_1 = 1$	6.4	6.2	6.9
$\tau_1 = 10$	15.2	14.5	16.7
$\tau_1 = 1$ , +28 % en todos	45	31	87
$\tau_1 = 1$ , -28 % en todos	11.7	11.7	7.3

Tabla 4.5: Índice de desempeño IAE para  $G_1$  y cada controlador

los parámetros ( $\pm 28\%$ ) y error en el polo  $\tau_1 \in [0, 1]$ . Los resultados son ligeramente mejores con PSMC1 en comparación con los otros controladores, ya que la sintonización inicial del controlador elegida para la minimización de  $IAE_3$  (2.13) es muy suave. Un ajuste más agresivo marca más las diferencias en el grado de robustez y desempeño a favor de PSMC1.

Otras simulaciones se realizaron con el fin de comparar los comportamientos de los tres controladores en caso de que la planta real poseyese una ganancia variable con el incremento de la señal de control  $\Delta u$  (véase la figura 4.4 (a)) según la expresión

$$K_p(\Delta u) = K_m \overline{\Delta u} (p_3 \left( \frac{\text{sat}(\Delta u)}{\overline{\Delta u}} \right)^3 + p_2 \left( \frac{\text{sat}(\Delta u)}{\overline{\Delta u}} \right)^2 + p_1 \frac{\text{sat}(\Delta u)}{\overline{\Delta u}}) \quad (4.5)$$

donde los parámetros se escogen mediante las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} p_1 &= [1, 3] \\ p_2 &= 2p_1 - 3 \\ p_3 &= p_1 - 2 \\ \overline{\Delta u} &= \max(\Delta u) > 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

y  $\text{sat}(\Delta u)$  es la función *saturación* entre  $-\overline{\Delta u}$  y  $\overline{\Delta u}$ . Los resultados de simulación para el caso de  $p_1 = 3$  se muestran en la figura 4.4 (b) resultando PSMC1 apreciablemente mejor que los otros controladores. Los índices  $IAE$  para esta simulación fueron: 21.5 (GPC), 10.2 (PSMC1) y 31.5 (IM-SMC).

### 4.3. Simulaciones con PSMC2

En este capítulo se presentan algunos de los resultados obtenidos por simulación del control PSMC2 y publicados en 2002 [104], con el fin de ilustrar las características del controlador comparando su desempeño con GPC [100] y SMC [11]. Se han controlado las plantas descritas mediante las ecuaciones (4.1)-(4.4) y modeladas con POMTM (véase la tabla 4.1). Los parámetros del controlador PSMC2 se ajustaron mediante las ecuaciones (2.123), (2.125) y (1.8), obteniéndose buenos comportamientos dinámicos en bucle cerrado. Con el fin de comparar, se escogieron los mismos parámetros para SMC (sintonizando  $K_D$  y  $\eta$  con las ecuaciones (1.7) y (1.8) propuestas por O. Camacho ([12]) y GPC (tabla 4.6). En el caso de los parámetros de GPC se escogieron para obtener una respuesta rápida hacia error nulo, con  $N = 60$  que corresponde a un horizonte de más de 6 veces la máxima constante de tiempo. Nótese que con la elección de  $\lambda$  superior a 1, los procesos analizados podrían estabilizarse con GPC a pesar de los errores de modelado, pero la respuesta sería más lenta y PSMC2 proporciona mejores resultados cuando la respuesta es más agresiva, gracias a la robustez aportada por la ley equivalente.

En la tabla 4.7 se muestran los índices de desempeño ISE para cada experimento con dos escalones de referencia y perturbación de 5% en la señal de salida. Se muestra que el GPCr tiene el mejor comportamiento cuando el modelo es exacto (caso  $G_1(s)$ , figura 4.5 (a)), pero, si el modelo difiere sustancialmente de la planta, el bucle cerrado se vuelve inestable a no ser que  $\lambda$  se aumente considerablemente, suavizando la respuesta. SMC proporciona la respuesta más lenta, aunque más robusta. En las figuras (c)-(f) de la figura 4.5 se ilustra que el control con PSMC2 proporciona un comportamiento mejor, empleando los modelos de POMTM de la tabla 4.1. Nótese que únicamente en el caso de  $G_1(s)$  la planta es igual al modelo.

	SMCr				GPCr		PSMC2r				
	$\mu_0$	$\mu_1$	$K_D$	$\eta$	$N : N_u$	$\lambda$	$\mu_0$	$\mu_1$	$\eta$	$N : N_u$	$\lambda$
$G_1(s)$	0.20	1.2	0.15	0.7	60:5	1	0.20	1.2	0.7	60:5	1
$G_2(s)$	0.08	0.66	0.22	0.7	60:5	1	0.08	0.66	0.7	60:5	1
$G_3(s)$	0.13	0.86	0.2	0.7	60:5	1	0.13	0.86	0.7	60:5	1
$G_4(s)$	0.02	0.29	0.41	0.7	60:5	1	0.02	0.29	0.7	60:5	1

Tabla 4.6: Parámetros de los controladores con modelos POMTM

ISE	$G_1(s)$	$G_2(s)$	$G_3(s)$	$G_4(s)$
SMCr	0.48	0.60	0.55	0.89
GPCr	0.03	0.12	inestable	inestable
PSMC2r	<b>0.16</b>	<b>0.31</b>	<b>0.29</b>	<b>0.66</b>

Tabla 4.7: Índices de desempeño ISE

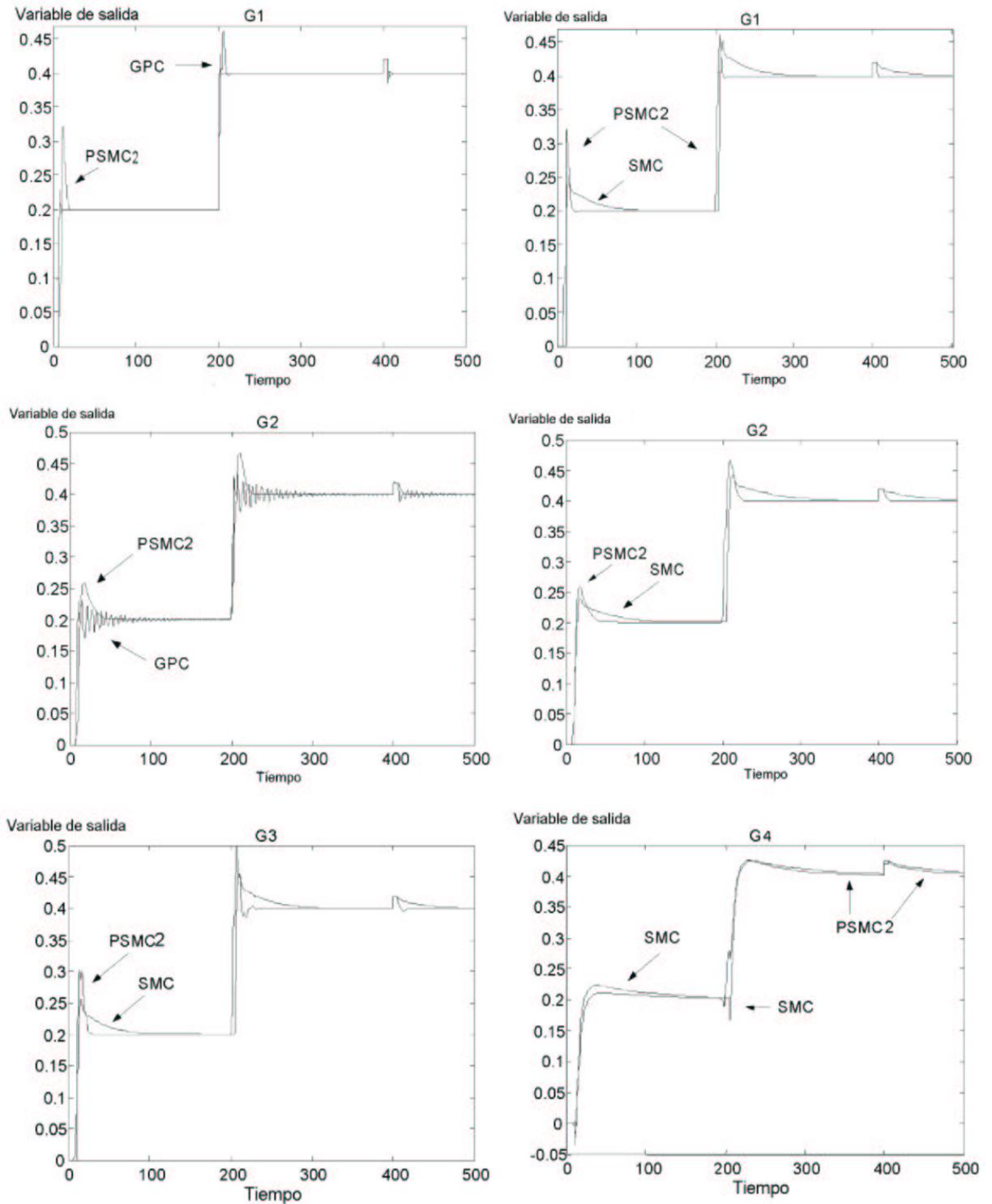


Figura 4.5: Comparaciones de: (a) GPC y PSMC2 con  $G_1(s)$ ; (b) SMC y PSMC2 con  $G_1(s)$ ; (c) GPC y PSMC2 con  $G_2(s)$ ; (d) SMC y PSMC2 con  $G_2(s)$ ; (e) SMC y PSMC2 con  $G_3(s)$ ; (f) SMC y PSMC2 con  $G_4(s)$ .

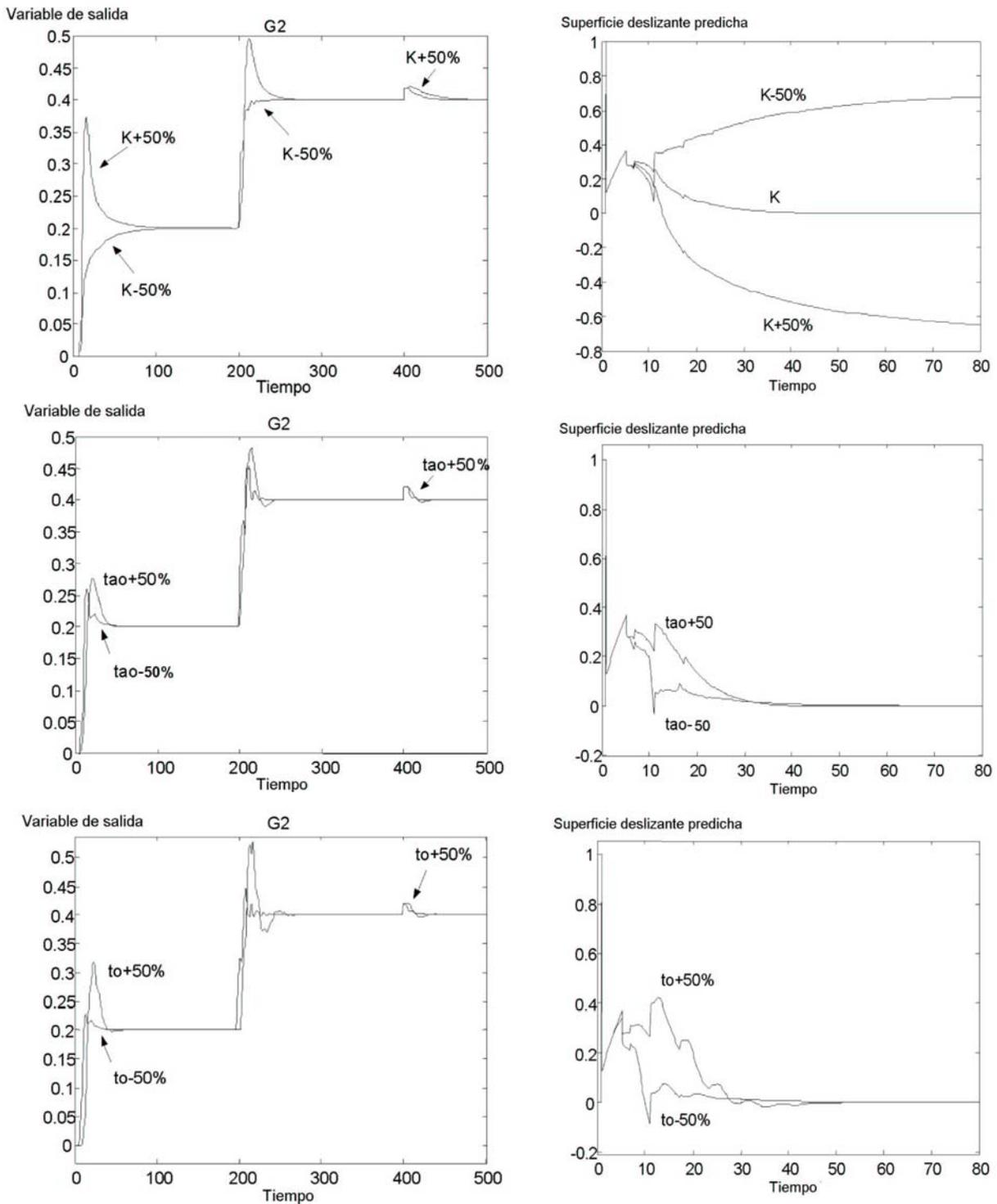


Figura 4.6: Respuesta de  $G_2(s)$  ante escalón con PSMC2 y evolución de la superficie deslizante cuando hay errores de modelado de  $\pm 50\%$  en: (a)(b) Ganancia; (c)(d) Constante de tiempo; (e)(f) Retardo puro.

En los experimentos mencionados ya se contemplaban errores de modelado excepto en  $G_1(s)$ . Sin embargo, los sistemas empleados pueden servir también para ilustrar cómo se comportan los controladores ante mayores errores en la estimación de los parámetros del modelo ( $\pm 50\%$  en  $K$ ,  $\tau$  y  $t_0$ ). Los índices de desempeño ISE obtenidos se recogen en la tabla 4.8. El controlador GPC produce un bucle cerrado inestable en la mayoría de los casos (aunque un GPC más robusto pudiera ser obtenido aumentando el factor de ponderación  $\lambda$  o escogiendo apropiadamente el polinomio  $T$  de la estructura clásica de asignación de polos [25]). El controlador SMC proporciona la respuesta más lenta, pero respuestas estables. PSMC2 hereda las ventajas de los otros controladores y reduce considerablemente sus desventajas.

La figura 4.6 muestra las respuestas con errores de modelado y la evolución de la superficie predicha cuando el sistema  $G_2(s)$  se controla con PSMC2. Se puede ver que el controlador es poco sensible a errores en  $K$ ,  $\tau$  y  $t_0$ , por tanto, presenta un alto grado de robustez. El coste computacional con PSMC2 es prácticamente el mismo que para GPC, así que es particularmente interesante para el control de procesos lentos como es el caso de los procesos químicos. Las conclusiones obtenidas de los experimentos mencionados, que coinciden con las obtenidas a partir del análisis de robustez desarrollado sobre una planta no lineal en [103] (véase el apartado 2.3.3), son:

- Respecto a la ganancia estática: Cuando  $K_m > K_p$  el seguimiento se hace más lento y la regulación más rápida. El sistema es más robusto ante incertidumbres en los otros dos parámetros que si  $K_m < K_p$ .
- Respecto a los parámetros temporales del sistema: Cuando  $\tau_m > \tau_p$  o  $t_{0m} > t_{0p}$ , el seguimiento y la regulación se hacen más suaves. El sistema es más robusto ante incertidumbres en los otros parámetros que si los tiempos modelados fueran inferiores a los de la planta.

En [103] se simularon los controladores aplicados a un proceso químico no lineal: un tanque de mezclado presentado en [11]. La ecuación del balance de energía proporciona el modelo no lineal:

$$\frac{dT_s}{dt} = \frac{1}{VC_V}(q_c C_{pc} T_c + q_e C_{pe} T_e - (q_c + q_e) C_{ps} T_s) \quad (4.7)$$

donde

$$\begin{aligned} T_s &= \text{Temperatura del fluido de salida del tanque} \\ T_e &= \text{Temperatura del fluido de entrada al tanque} \\ T_c &= \text{Temperatura del fluido caliente de entrada a la mezcla} \\ q_c &= \text{Caudal volumétrico del fluido caliente} \\ q_e &= \text{Caudal volumétrico del fluido de entrada} \\ C_V, C_{pc}, C_{pe}, C_{ps} &= \text{Constantes de Calor Específico} \\ V &= \text{Volumen del tanque constante} \end{aligned} \quad (4.8)$$

$G_2(s)$	$K$		$\tau$		$t_0$	
	+50 %	-50 %	+50 %	-50 %	+50 %	-50 %
SMCr	1.43	4.75	0.69	0.52	0.85	0.37
PSMC2r	<b>0.66</b>	<b>0.39</b>	<b>0.45</b>	<b>0.21</b>	<b>0.69</b>	<b>0.16</b>
GPCr	0.57	inestable	inestable	inestable	inestable	inestable

Tabla 4.8: Índices de desempeño ISE con errores de modelado y  $G_2(s)$

La variable manipulada o señal de control  $u$  es una señal en  $[0,1]$  que se aplica a una válvula de característica

$$\frac{dq_e}{dt} + 1000q_e = 1000u \quad (4.9)$$

La variable controlada se transmite convirtiéndose en  $STO(t) = sat(TO(t))$ , una señal saturada en  $[0,1]$  resultado de la siguiente característica:

$$TO + 0.5\frac{dT_O}{dt} = 0.01RT_s - 1 \quad (4.10)$$

donde  $RT_s$  es la medida de la temperatura de salida afectada de un retardo variable.

Los parámetros del modelo de POMTM identificados por el método de la curva de reacción fueron:  $K = -0.82$ ,  $\tau = 2.25 \text{ min}$  y  $t_0 = 4.1 \text{ min}$ . La ecuación de la ley equivalente (2.118) se desarrolló con la variable de desviación  $x(t)$ , pero para este ejemplo habrá de ser expresada en función de la variable transmitida  $STO(t)$  correspondiente a la entrada al controlador, tal que

$$x(t) = STO(t) - \overline{STO}(t) \quad (4.11)$$

donde  $\overline{STO}(t)$  es la medida transmitida en estado estacionario. En las simulaciones presentadas en la figura 4.7 se muestra el resultado de un experimento realizado con las siguientes características

GPC	$N$	$\lambda$			
	10	1			
SMC	$\mu_0$	$\mu_1$	$K_D$	$\eta$	
	0.11	0.68	0.39	0.7	
PSMC2	$\mu_0$	$\mu_1$	$\eta$	$N$	$\lambda$
	0.11	0.68	0.7	10	1

Tabla 4.9: Parámetros de los controladores con modelos POMTM

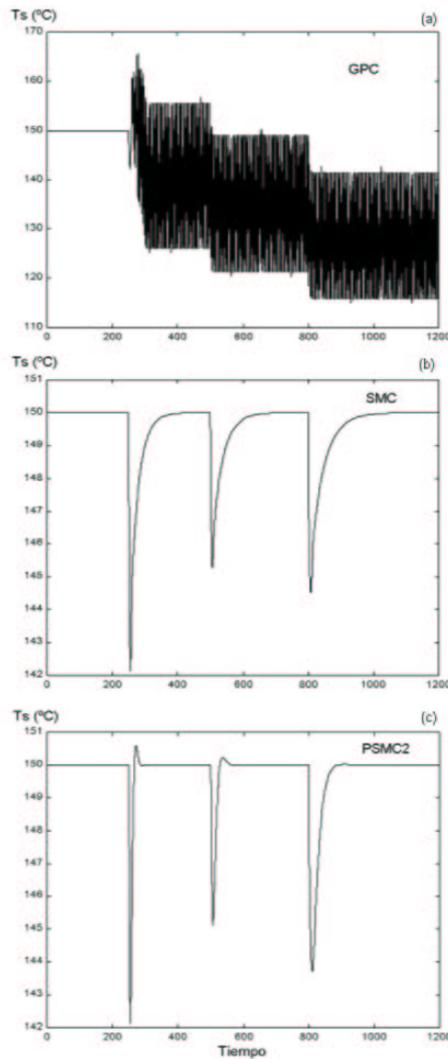


Figura 4.7: Respuesta de temperatura de salida del tanque controlado con GPC, SMC y PSMC2.

$$T_e = 50^\circ C$$

$$T_c = 250^\circ C$$

$$q_c = 250 \text{ lb/min}, 200 \text{ lb/min}, 175 \text{ lb/min}, 150 \text{ lb/min} \text{ (perturbación de -40 \% de 250)}$$

$$\overline{STO}(t) = 0,5 \text{ que corresponde a } T_s = 150^\circ C$$

y con las sintonizaciones de los controladores indicadas en la tabla 4.9. Para la sintonización de los parámetros de PSMC2 se emplearon las ecuaciones propuestas para SMC (2.123, 2.125 y 1.8), con  $N$  suficientemente largo y  $\lambda$  suficientemente pequeño para mostrar la mayor robustez de PSMC2 frente a GPC en situación de desempeño óptimo. Los índices de desempeño ISE en estas simulaciones son: 23.3 (GPC), 0.21 (SMC) y 0.13 (PSMC2). Es posible observar en la figura que los cambios de punto de operación producidos por los saltos en el caudal del fluido caliente aumentan el retardo

del sistema y GPC no puede controlar el proceso. A su vez, la respuesta con el controlador SMCr se ve mejorada por PSMC2, al resultar este último más rápido por el término predictivo añadido.

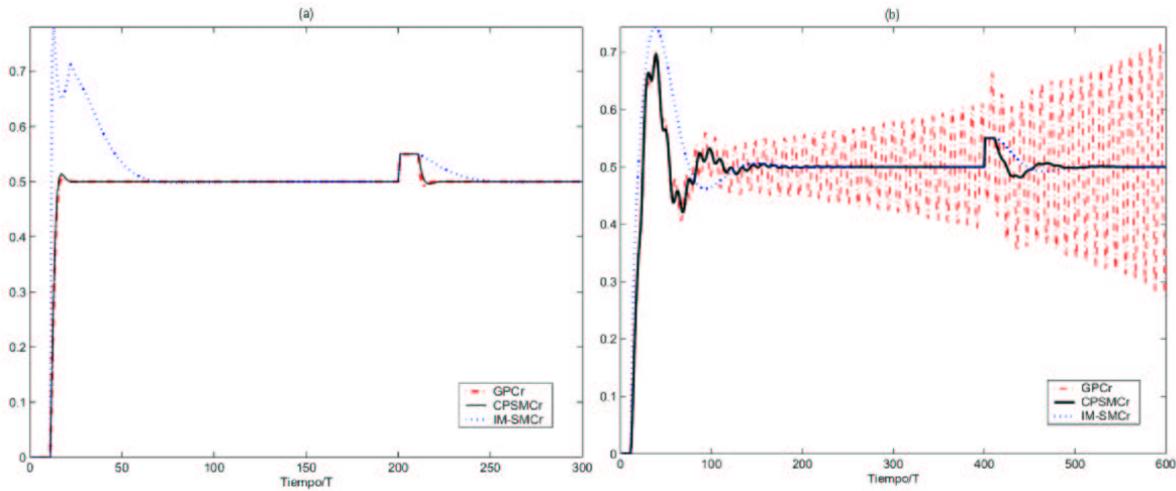


Figura 4.8: Control con GPC, CPSMC e IM-SMC de  $G_1(s)$ : (a)  $\tau_1 = 0$  (b)  $\tau_1 = 3$ .

	IM-SMCr			GPCr		CPSMCr		
	$\lambda$	$K_D$	$\delta$	$N$	$\lambda$	$N$	$\lambda$	$\alpha$
$G_1(s)$	0.08	20	5	60	0.9	60	0.5	-0.3
$G_2(s)$	0.08	20	5	60	0.02	60	0.5	-0.1
$G_3(s)$	0.1	0.7	0.1	60	3.5	60	2	-0.7
$G_4(s)$	0.05	20	2	60	1.5	60	3	-0.7

Tabla 4.10: Parámetros de los controladores ajustados según los modelos POMTM de cada sistema

IAE	$G_1(s)$	$G_{2POMTM}(s)$	$G_2(s)$	$G_{3POMTM}(s)$	$G_3(s)$	$G_{4POMTM}(s)$	$G_4(s)$
GPCr	3.4	3.4	Inestable	3.9	Inestable	6.2	Inestable
CPSMCr	3.4	3.4	6	3.9	6.7	6.2	7.6
IM-SMCr	6.2	6.2	7.7	4.8	7.7	8.7	10.2

Tabla 4.11: Índice de desempeño IAE con sintonización propuesta

## 4.4. Simulaciones con CPSMC

A continuación se presentan los resultados de simulación con CPSMC. Se escogió el parámetro  $\beta = 1$ , pues lo que determina la influencia de la superficie en la ley de control es la pendiente decreciente del error que se impone, es decir, el cociente  $\alpha/\beta$ . Se escogió  $\varepsilon T = 0.45$  ya que, una vez realizadas las simulaciones con las plantas descritas en el apartado 3.2.2, se comprobó que el valor que proporcionaba menor índice de desempeño y más alto grado de robustez variaba poco en torno a 0.45 de unas plantas a otras. Se escogieron  $s_{min} = 0.5$  y  $\rho \in [0, 0.25]$ . La sintonización propuesta de los parámetros de CPSMC en el apartado 3.2.2 es mucho más agresiva que la propuesta para PSMC1. Los controladores GPC e IM-SMC se sintonizaron de forma que los comportamientos presentasen un IAE similar, aunque el mínimo IAE que se consiguió para cada planta con IM-SMC proporcionaba una respuesta con mucha más sobreoscilación que con GPC y CPSMC como muestra el ejemplo de la figura 4.8 (a).

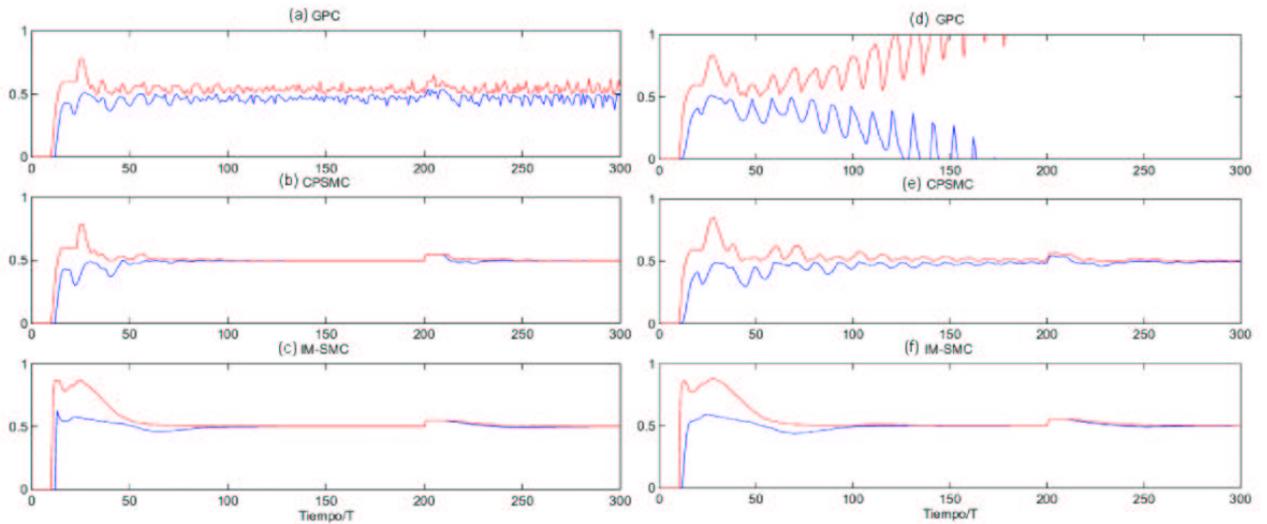


Figura 4.9: 1000 simulaciones de control de  $G_1(s)$  con errores aleatorios en  $[-7, 7]$  % en los tres parámetros: (a)(b)(c) con  $\tau_1 = 0$ ; (d)(e)(f) con error aleatorio en  $\tau_1 = [0, 1]$ .

Las ventajas de CPSMC frente a GPC son manifiestas cuando la planta presenta dinámicas no modeladas como se puede observar en la figura 4.8 (b) y en las columnas de la tabla 4.11 correspondientes al control de  $G_2(s)$  y  $G_3(s)$ . Así como cuando hay errores de modelado en la estimación del tiempo muerto del proceso, en las filas correspondientes de la tabla 4.12. En la figura 4.9 (a) se han representado las envolventes de 1000 simulaciones con errores aleatorios de hasta  $\pm 7\%$  de  $a_n$ ,  $b_n$  y  $d_n$  sobre la planta  $G_1(s)$ , y en la figura 4.9 (b) se ha repetido el experimento con error en el polo  $\tau_1 \in [0, 1]$ . Los resultados son ligeramente mejores con CPSMC en comparación con los otros controladores, aunque las respuestas de IM-SMC son mucho menos oscilantes, ya que la sintonización inicial del controlador CPSMC elegida para la minimización de  $IAE_3$  (2.13) es muy agresiva.

IAE( $G_1$ )	GPCr	CPSMCr	IM-SMCr
Sin errores	3.4	3.4	6.19
Error +30% $b_m$	4.4	4.4	8.3
Error -30% $b_m$	4.6	4.6	<b>4</b>
Error +30% $a_m$	10	10	16.4
Error -30% $a_m$	4.7	4.7	<b>4.2</b>
Error +10% $d_m$	Inestable	<b>4.4</b>	6.9
Error -10% $d_m$	Inestable	<b>3.9</b>	5.7
+14% en todos	Inestable	<b>8.5</b>	11.4
-15% en todos	Inestable	5	4
$\tau_1 = 1$	5.2	<b>5</b>	6.9
$\tau_1 = 10$	Inestable	<b>14.5</b>	16.7
$\tau_1 = 1$ , +14% en todos	Inestable	6.9	6.9
$\tau_1 = 1$ , -15% en todos	Inestable	<b>4</b>	5.6

Tabla 4.12: Índice de desempeño IAE para  $G_1$  y cada controlador

## 4.5. Simulaciones con leyes conmutadas entre PSMC1 y CPSMC

### 4.5.1. Controlador predictivo por modo pseudodeslizante PSMC1C

En este apartado se propone una ley de control por estructura variable basada en las leyes PSMC1 y CPSMC desarrolladas en las secciones 2.2 y 3.2, que se ha denominado PSMC1C. Se pretende alcanzar la región de pseudodeslizamiento empleando la ley PSMC1, que presenta alto grado de robustez ante incertidumbres estructuradas y no estructuradas y sistemas con ganancia variable. En el modo de pseudodeslizamiento la ley empleada es CPSMC, que en este caso se reduce a un control GPC con restricciones en la evolución de la superficie predicha suavizado con el parámetro  $s_{min}$ . La conmutación se produce con un parámetro positivo  $\xi$  suficientemente pequeño, ajustado por ejemplo, con la ecuación.

$$\xi = \frac{0,01b_m}{1 - \varepsilon T - 0,1b_m} > 0 \quad (4.12)$$

Los otros parámetros de la ley de control son:

- $\alpha$  que determina la superficie deslizante:

$$e_{k+1} = -10\alpha e_k \quad (4.13)$$

- $\varepsilon T < 1$  que aumenta la agresividad de la respuesta al tender a 1.

- $\lambda$  que afecta a la agresividad de la respuesta en el modo de pseudodeslizamiento.
- $s_{min} \leq 0.5$  que afecta a la robustez del controlador en el modo de pseudodeslizamiento.

La ley de control predictiva por estructura variable PSMC1C se describe con la siguiente ecuación

$$u_k^{PSMC1C} = u_k^{psmc1}(1 - h_k) + u_k^{cpsmc} h_k$$

$$h_k = \begin{cases} 0 & |s_{k-1}| \geq \xi \\ 1 & |s_{k-1}| < \xi \end{cases} \quad (4.14)$$

La conmutación entre las dos estructuras de control, proporciona estabilidad al bucle cerrado en casos de incertidumbre en los que cada estructura por separado no puede estabilizar el sistema como se comprobó en algunos resultados de simulación que se presentan a continuación.

Se han realizado simulaciones con PSMC1C, comparándolas con PSMC1, CPSMC y GPC. Los experimentos propuestos son de seguimiento a 0.5, perturbación a la salida del 10% y errores de modelado de al menos  $\pm 10\%$  en ganancia, polo y retardo. Las plantas realimentadas se describen por las funciones de Laplace de las ecuaciones (4.1-4.4). Los parámetros nominales de los modelos de POMTM se obtuvieron por el método de la curva de reacción (tabla 4.1). Se escogió  $s_{min} = 0.3$ .

En la última fila de la tabla 4.14 en los casos del control de las plantas  $G_3(s)$  y  $G_4(s)$  se han conseguido respuestas estables, frente a las respuestas altamente oscilantes o inestables de los otros controladores. En la figura 4.10 se muestra un ejemplo de simulación del control de  $G_1(s)$  con incertidumbres paramétricas. La sintonización agresiva de PSMC1 hace que su respuesta sea oscilante, sin embargo la conmutación con CPSMC proporciona la respuesta menos oscilante de todas.

	PSMC1C				CPSMC			PSMC1		GPC	
	$N$	$\lambda$	$\alpha$	$\varepsilon T$	$N$	$\lambda$	$\alpha$	$\alpha$	$\varepsilon T$	$N$	$\lambda$
$G_1(s)$	60	0.5	-0.055	0.9	60	0.5	-0.6	-0.065	0.9	60	1.85
$G_2(s)$	60	0.5	-0.065	0.9	60	0.7	-0.76	-0.073	0.9	60	1.5
$G_3(s)$	60	0.5	-0.065	0.9	60	0.7	-0.76	-0.073	0.9	60	1.5
$G_4(s)$	60	5	-0.083	0.95	60	1	-0.65	-0.082	0.95	60	0.7

Tabla 4.13: Parámetros de los controladores según CPSMC1

IAE	$G_1(s)$	$G_{2POMTM}(s)$	$G_2(s)$	$G_{3POMTM}(s)$	$G_3(s)$	$G_{4POMTM}(s)$	$G_4(s)$
GPC	3.52	4.04	6.5	2.84	Inestable	5.90	Inestable
PSMC1	3.52	4.01	5.6	2.80	Inestable	5.97	Inestable
CPSMC	3.52	4.01	6.0	2.83	Inestable	5.93	8.74
PSMC1C	3.52	4.03	5.6	2.83	6	5.93	7.2

Tabla 4.14: Índice de desempeño IAE con sintonización propuesta

IAE( $G_1$ )	GPC	PSMC1	CPSMC	PSMC1C
Sin errores	3.52	3.52	3.52	3.52
Error +30% $b_m$	4.4	4.1	4.5	4.5
Error -30% $b_m$	4.8	4.8	4.8	4.8
Error +30% $a_m$	9.8	8.5	10.7	10.4
Error -30% $a_m$	4.9	4.9	4.9	4.9
Error +20% $d_m$	Inestable	Inestable	7.1	<b>4.9</b>
Error -20% $d_m$	Inestable	Inestable	5.3	<b>3.6</b>
+20% en todos	Inestable	Inestable	Inestable	<b>16.9</b>
-20% en todos	Inestable	Inestable	6.5	<b>5.6</b>
$\tau_1 = 1$	4.9	4.8	4.9	<b>4.6</b>
$\tau_1 = 10$	14.2	13.9	14.4	14.5
$\tau_1 = 1$ , +5% en todos	Inestable	Inestable	7.4	<b>6.4</b>
$\tau_1 = 1$ , -5% en todos	4.8	4.7	4.7	4.4

Tabla 4.15: Índice de desempeño IAE para  $G_1$  y cada controlador

### 4.5.2. Controlador predictivo por modo pseudodeslizante CPSMC1.

Otro planteamiento posible correspondería a conmutar desde la ley CPSMC que optimiza el modo de alcanzabilidad a PSMC1 (con alto grado de robustez) en el modo de pseudodeslizamiento, que se ha denominado CPSMC1. La conmutación se puede producir con un parámetro positivo  $\xi$  ajustado, por ejemplo, con la ecuación (4.12). Los otros parámetros de la ley de control pueden ser sintonizados como en el híbrido PSMC1C anterior.

La ley de control predictiva por estructura variable CPSMC1 se describe con la siguiente ecuación

$$u_k^{CPSMC1} = u_k^{psmc1}(1 - h_k) + u_k^{cpsmc}h_k$$

$$h_k = \begin{cases} 1 & |s_{k-1}| \geq \xi \\ 0 & |s_{k-1}| < \xi \end{cases} \quad (4.15)$$

La conmutación entre las dos estructuras de control puede producir respuestas menos oscilatorias en casos de incertidumbre que las obtenidas con cada estructura por separado. En el apartado 5.1 se ha aplicado esta ley conmutada a un sistema no lineal obteniéndose resultados prometedores.

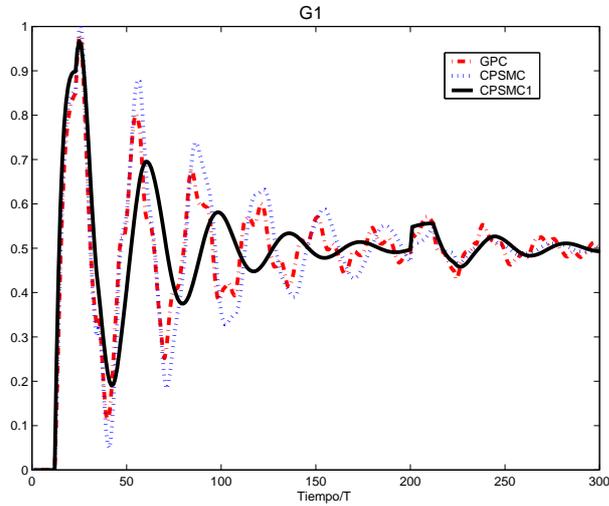


Figura 4.10: Control con GPC, CPSMC y CPSMC1 de  $G_1(s)$  con 20% de error en  $a_m$  y  $b_m$  y 14% de error en  $d_m$ . PSMC1 es inestable.



# Capítulo 5

## Aplicaciones

Este capítulo se va a presentar el trabajo realizado para validar las leyes de control propuestas mediante su aplicación a dos sistemas no lineales modelados con incertidumbres y afectados de perturbaciones. En el primero de ellos se pretende controlar la temperatura del agua a la salida de un intercambiador de calor. Para ello se desarrollaron una aplicación de supervisión y control del sistema, una base de datos y varios programas para cada controlador aplicado en el entorno de SCADA (*Supervisory Control and Data Acquisition*) disponible en el laboratorio del Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática. Se han aplicado 8 controladores al proceso, entre ellos PID, GPC y SMC, se han realizado 10 experimentos de seguimiento con diversas incertidumbres paramétricas y se han comparado los resultados. En el segundo sistema se pretende controlar la temperatura del aceite de salida del campo de colectores de radiación solar distribuidos situados en la plataforma solar del Centro de Investigaciones Energéticas, Medioambientales y Tecnológicas en Tabernas (Almería). Se han programado las funciones para aplicar los controladores en lenguaje C y realizado varias simulaciones previas con archivos de datos experimentales. Se han realizado varios experimentos de seguimiento y rechazo de perturbaciones en la radiación solar y en la temperatura del aceite de entrada al campo con varias sintonizaciones de los controladores, obteniéndose buenos resultados con los tres controladores propuestos.

## 5.1. Control en un sistema de recirculación de agua con intercambiador de calor

### 5.1.1. Descripción del sistema

El intercambiador de calor empleado se encuentra en la planta piloto del Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Escuela Superior de Ingenieros de Sevilla, utilizada hasta nuestros días para la validación de diversas técnicas de control avanzado (GPC [100], Control  $H_\infty$  [128]). En la figura 5.3 se muestra el diagrama correspondiente a la conexión del intercambiador a un tanque de agua desde donde se recircula el líquido mediante una bomba, y en la figura 5.1, una vista de la planta piloto. Este sistema puede modelarse por una función de transferencia del tipo POMTM. Los parámetros identificados por el método de la curva de reacción fueron:

$$K_m = 0,18, \tau_m = 9 \text{ s y } t_{0m} = 12 \text{ s} \quad (5.1)$$

Las variables se muestrearon con un período de  $T = 1$  y el punto de operación de la planta se estableció a una temperatura de  $30^\circ\text{C}$ .

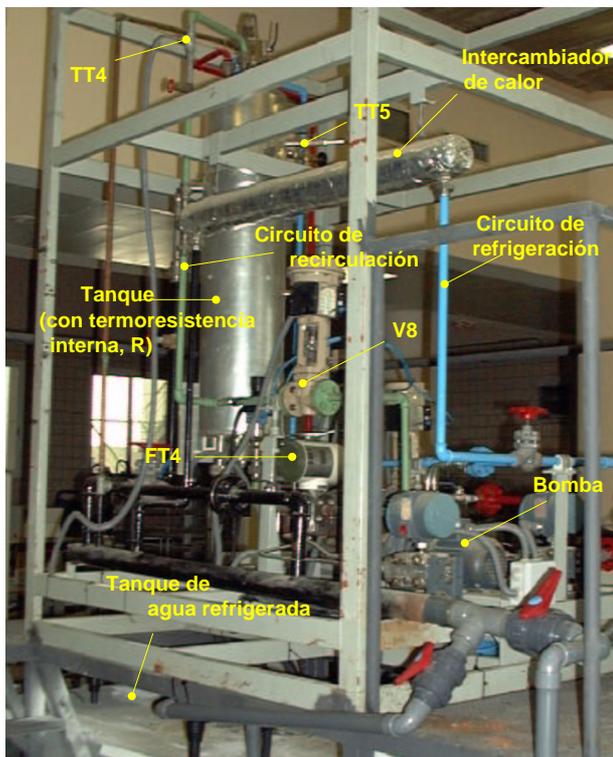


Figura 5.1: Planta Piloto del Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Universidad de Sevilla.

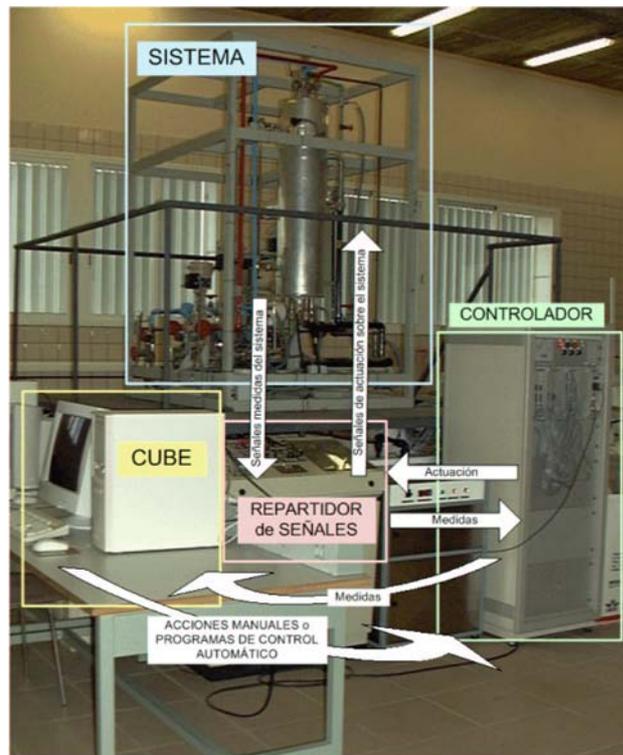


Figura 5.2: Equipos del laboratorio empleados para el control de la temperatura del agua de salida de un intercambiador de calor.

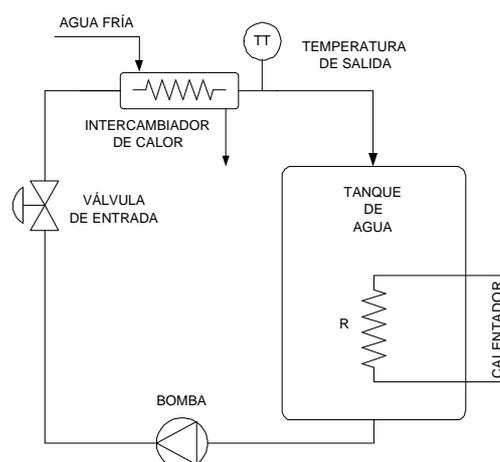


Figura 5.3: Diagrama del sistema intercambiador en circuito de recirculación de agua.

La variable controlada escogida fue la temperatura de salida del intercambiador, que se regula variando el caudal de agua con una válvula neumática de entrada. Para realizar el control se empleó un entorno de SCADA (CUBE de ORSI), que permite observar en el monitor el estado de las variables deseadas del proceso controlado, así como actuar manualmente sobre el sistema o cargar un programa de control automático en un armario de control como se muestra en la figura 5.2.

### 5.1.2. Descripción del entorno de programación

El control del sistema de recirculación de agua con intercambiador de calor se llevó a cabo en CUBE 2.03.03 de ORSI. CUBE es un entorno para el desarrollo y ejecución de diferentes tipos de aplicaciones como control de procesos, control del progreso de la producción, integración con sistemas de procesamiento de datos, etc. Las funciones fundamentales que posee son:

1. *Definición del entorno de trabajo* mediante la creación de los siguientes elementos: a) Planta PLANT; b) Unidad UNIT (objeto a nivel lógico); c) Zona de supervisión ZONE. CUBE está organizado según estructuras de directorios llamadas PLANTS dentro de las cuales se encuentran los ficheros correspondientes a los programas que se ejecutan en CUBE. La primera ventana que aparece al iniciar CUBE es “*Plant Management*” que permite crear, borrar, leer o salvar en disco las plantas. Las plantas se organizan a partir de las carpetas correspondientes a los ordenadores conectados a la red ORSI. Seleccionando con el ratón la planta en el ordenador elegido se abre la ventana “*Integral System Manager*” (ISM), que presenta el menú principal de CUBE. Una unidad UNIT representa un objeto lógico asociado a un nombre de ordenador en la red (objeto físico) y los módulos programados de la estación CUBE (de supervisión, almacenamiento de históricos, gestión de alarmas, programación, etc) se refieren a ella, en vez de a su equivalente físico.
2. *Programación* mediante la creación de los siguientes elementos: a) un proyecto PROJECT, que se desarrolla en un entorno de programación orientado a controladores PMC denominado “*Project Development Environment*” (PDE); b) fuentes con tres tipos de lenguajes (*Iter II* (para tratamiento más sofisticado de los datos mediante procedimientos), *lenguaje de contactos* (para problemas típicos en lo PLCs de secuencias de control) y *diagramas de bloques* (para problemas de control continuo como simulaciones o lazos de regulación); c) Enlaces de compilación y transmisión. Un proyecto (PROJECT) es una estructura de directorios que CUBE utiliza para leer y escribir sus ficheros de programas. La definición de todas las variables (*points*) que manejarán las aplicaciones de CUBE se ha de realizar en la subaplicación “*Database Editor*”. Una variable se describe por los siguientes parámetros: REAL NAME, nombre del registro asociado a la variable

por la UNIT correspondiente (ejemplo: PI202); SYMBOLIC NAME, identificador simbólico para la variable (ejemplo: T); CODE, puede ser Tipo A, E o I; DIM, dimensión de la variable; SL, indica el nivel de acceso del GMS a la variable (de 1 a 30); DEF VAL, valor inicial.

3. *Depuración*, utilizando la aplicación “*Operation Debugging Support*” (ODS).
4. *Supervisión* mediante la creación de un diagrama esquemático y la utilización de un entorno para trabajar con variables calculadas para supervisión. Para diseñar una pantalla de interacción entre el operador y la planta se utiliza el entorno “*Graphic Monitoring System (GSM) Development*”. Para insertar un cuadro que visualice una variable, se inserta un texto, por ejemplo “44.44” (dos dígitos enteros y dos decimales, y se asocia a la variable deseada. Una vez diseñada se salva y compila. La conexión con la planta se realiza activando la aplicación “*GSM Run-Time*” desde el entorno “*GSM Development*”. El diagrama esquemático diseñado para la supervisión de los experimentos realizados se ilustra en la figura 5.4.
5. *Obtención de historiales* mediante la definición una Base de Procesamiento de Datos y habilitando un cliente con la aplicación “*Process Data Display*” (PDD), que sirve para obtener gráficamente la evolución de las variables deseadas desde los datos almacenados por una aplicación servidor “*Process Data Base*” (PDB). Para adquirir datos durante la conexión con la planta (*Run-Time*) y para archivar las variables del proceso se emplea dicha aplicación que se activa desde *ISM – Server – PDB* y puede archivar hasta 5000 variables con una tasa mínima de muestreo de 1 segundo. Para definir los atributos de las variables a archivar se ejecuta *ISM – Configuration – PDB – Configuration*. Ha de estar arrancado el servidor PDB, y entonces es posible establecer la conexión con *Connect* a la base de datos que configurar. Las variables que se archivan han de estar marcadas en el editor PDB, es decir, la pestaña correspondiente al PDB en el campo *modify point* debe estar habilitada y correctamente rellena. El parámetro  $\delta$  indica la compresión del almacenamiento (ej. 0.01). Pulsando el icono con un semáforo se inicia o se detiene el archivado. Para hacer esto debe estar cerrado el editor PDB. Para almacenar los datos se empleó un fichero de Microsoft Excel que recoge los datos deseados entre todos los archivados por CUBE. Antes de ejecutar la lectura de datos desde la macro, hay que lanzar la aplicación “*DDE Interface*”.

Los programas para el control y supervisión de nuestro proceso se desarrollaron en ITER II, un lenguaje de alto nivel similar a PASCAL. Un programa en ITER II consiste en una serie de secuencias (SEQUENCE) y subrutinas que contienen los cálculos y las operaciones de regulación y control que se deben ejecutar. Las secuencias y subrutinas que constituyen un programa de aplicación en ITER II se organizan en numerosos archivos fuente de extensión SRC que representan los módulos del programa. Cada archivo en ITER II, escrito con PDE, comienza con la sentencia STARTPROG y termina con ENDPROG. Los comentarios comienzan con ; o con // y la interrupción de una sentencia que comienza en una línea y ha de continuar en la siguiente línea se

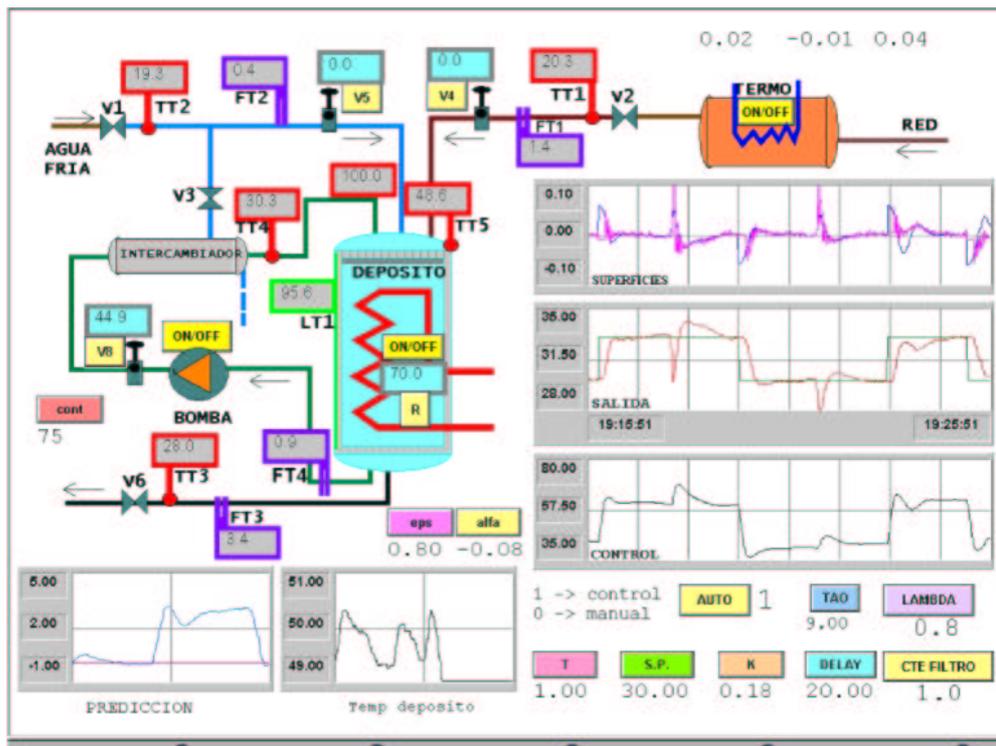


Figura 5.4: Diagrama esquemático del sistema intercambiador de calor. Aplicación *GSM Run-Time*.

PID	$K_p = 5$	$T_i = 24$	$T_d = 6$
GPC	$N = 15$		$\lambda = 1$
PSMC2	$N = 15$	$\lambda = 1$	$\delta = 0.69$
	$\mu_0 = 0.11$		$\mu_1 = 0.19$
SMC	$K_D = 2.28$		$\delta = 0.69$
	$\mu_0 = 0.11$		$\mu_1 = 0.19$
PSMC1	$\alpha = -0.085$		$\epsilon T = 0.4$
CPSMC	$N = 15$	$\lambda = 1$	$\alpha = -0.4$
	$\rho = 0.4$		$S_{min} = 0.1$
PSMC1C	$N = 15$	$\lambda = 5$	$\xi = 0.01$
	$\alpha = -0.085$	$\epsilon T = 0.4$	$\rho = 0.4$
CPSMC1	$N = 15$	$\lambda = 5$	$\xi = 0.05$
	$\alpha = -0.085$	$\epsilon T = 0.4$	$\rho = 0.4$
			$S_{min} = 0.1$

Figura 5.5: Sintonización de los controladores probados.

hace con  $\&$ . Una secuencia (o tarea) es un elemento independiente del programa de control y se caracteriza por un número y una periodicidad de ejecución. Una secuencia es un conjunto cerrado de instrucciones que pueden escribirse en cualquiera de los tres lenguajes de programación disponibles. El programador le asocia un número de identificación y cada cuanto tiempo el sistema operativo tiene que ejecutarla en múltiplos de pulso (*tick*) del sistema.

En el apéndice 7.1 se incluye un ejemplo de programación en ITER II de un archivo fuente SRC para el control con PSMC2.

### 5.1.3. Experimentos en la planta

En una primera fase se realizaron experimentos aplicando varios controladores para el seguimiento de dos escalones de referencia y la regulación de dos perturbaciones introducidas mediante paradas forzadas de la bomba durante 10 periodos de muestreo. La temperatura del agua “fría” osciló durante las simulaciones entre 18 y 21 °C, y la temperatura del agua del depósito osciló entre 47 y 51 °C. Posteriormente se probó el control con errores de modelado adicionales a los cometidos con el modelo nominal identificado por el método de la curva de reacción (5.1). En este apartado se presentan y comentan las respuestas obtenidas en los siguientes casos de error:  $-66\%$  en  $t_{0m}$ ,  $-50\%$  en  $t_{0m}$ ,  $+66\%$  en  $t_{0m}$ ,  $+92\%$  en  $t_{0m}$ ,  $-55\%$  en  $K_m$ ,  $-22\%$  en  $K_m$ ,  $+22\%$  en  $K_m$ ,  $-55\%$  en  $\tau_m$ ,  $+55\%$  en  $\tau_m$  y un caso con error en los tres parámetros, a saber,  $-35\%$  en  $K_m$ ,  $+35\%$  en  $\tau_m$  y  $-35\%$  en  $t_{0m}$ . Dada la dificultad de reproducción de las mismas condiciones de operación con cada experimento, las respuestas no se han podido representar superpuestas. No obstante es posible realizar algunas comparaciones entre los resultados obtenidos para cada controlador. En un primer estudio se controló el sistema con PID [129] [130] [131] [132], GPC, SMC y PSMC2 (sección 2.3), presentando algunos de estos resultados en [105]. Más adelante se realizaron pruebas con los controladores PSMC1 (sección 2.2), CPSMC (sección 3.2), PSMC1C (apartado 4.5.1) y CPSMC1 (apartado 4.5.2).

El objetivo de estos experimentos era mostrar que efectivamente las leyes de control propuestas podían controlar este sistema no lineal y se sintonizaron para obtener comportamientos similares, dentro de lo posible, tanto en seguimiento de referencias como en rechazo de perturbaciones con el modelo nominal (5.1). Esto no fue posible en todos los casos, aunque, como se puede ver en las respuestas de la figura 5.6, los comportamientos nominales son muy parecidos. Se sintonizó el PID con las ecuaciones de Ziegler-Nichols en bucle abierto

$$G_{PID}(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right), \quad K_p = \frac{1.2\tau_m}{K_m t_{0m}}, \quad T_i = 2t_{0m}, \quad T_d = 0.5t_{0m} \quad (5.2)$$

y se obtuvo una constante de tiempo en bucle cerrado de aproximadamente 10 segundos. Los controladores GPC, PSMC1, CPSMC, PSMC1C y CPSMC1 se sintonizaron para

obtener una constante de tiempo similar a la del PID. El SMC se sintonizó con las ecuaciones obtenidas por O. Camacho (1996) [12]. El PSMC2 a partir de las sintonizaciones de GPC y SMC. Los parámetros escogidos se indican en la figura 5.5.

Los comportamientos de la variable controlada se muestran en la figura 5.6. Es posible observar que la respuesta con PSMC2 alcanza más rápidamente la referencia con menor sobreoscilación y las perturbaciones son mejor rechazadas que con PID, GPC y SMC. Con SMC se produce la regulación más lenta. El PSMC1 consigue menor sobreoscilación que PID y GPC. Nótese que PSMC1C y CPSMC1 están sintonizados con los parámetros de PSMC1 con el fin de obtener similar constante de tiempo, y que, al establecer una superficie de dinámica más suave que la de CPSMC, proporcionará una respuesta menos oscilatoria.

En una segunda fase de experimentación, cuyo objetivo era comparar el grado de robustez de los controladores ante circunstancias similares, se obtuvieron respuestas ilustradas en las siguientes figuras de seguimiento cuando se producen errores de modelado adicionales en la ganancia estática  $K_m$ , en la constante de tiempo  $\tau_m$  y en el tiempo muerto  $t_{0m}$  del sistema. Los errores de modelado afectan a la sintonización de PID, SMC, GPC, PSMC2, CPSMC, PSMC1C (apartado y CPSMC1, así como a los predictores de GPC, PSMC1, PSMC2, CPSMC, PSMC1C y CPSMC1. Las diferencias de robustez con errores en la constante de tiempo no son tan significativas como las que se obtienen con errores en los otros dos parámetros.

#### Errores en la estimación del retardo $t_{0m}$ .

La figura 5.7 (a) muestra que el control PID es inestable con un error de 8 s por debajo en la estimación del tiempo muerto ( $-66\%$  de error). Las figuras (b) y (d) muestran las respuestas estables obtenidas controlando con GPC y con PSMC2: GPC proporciona un comportamiento altamente oscilatorio, mientras que PSMC2 hereda la alta robustez de SMC (figura (c)) y es capaz de estabilizar el sistema más rápidamente que el GPC.

Las respuestas con los controladores (e)-(h) de la figura 5.7 son parecidas a la registrada con el control GPC, pero la oscilación es menor con los controladores propuestos en esta tesis. Como se puede apreciar, el GPC y el CPSMC proporcionan las respuestas estables con más sobreoscilación, sin embargo con el CPSMC es algo menos oscilante.

En la figura 5.8 se muestran las respuestas con 6 s por debajo de error ( $-50\%$  de error). La mejor respuesta la proporciona el control PSMC2.

Si el error es de 8 s por arriba en la estimación del tiempo muerto ( $+66\%$  de error), el PID proporciona una respuesta muy lenta, mientras que SMC y PSMC2 son más rápidos en seguimiento, aunque lentos en alcanzar el error en régimen permanente nulo.

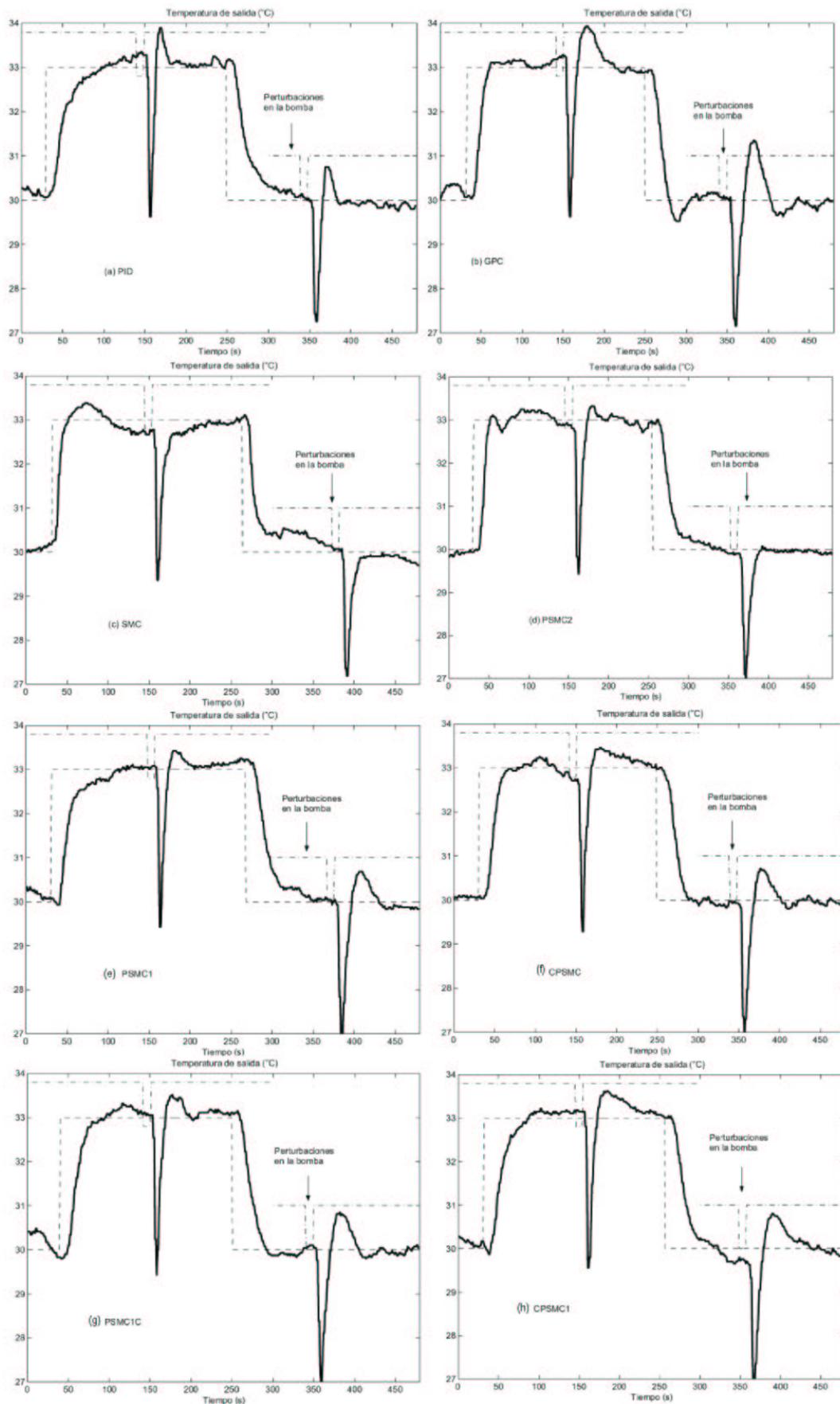


Figura 5.6: Control de la temperatura de salida: (a) PID, (b) GPC, (c) SMC, (d) PSMC2, (e) PSMC1, (f) CPSMC, (g) PSMC1C, (h) CPSMC1.

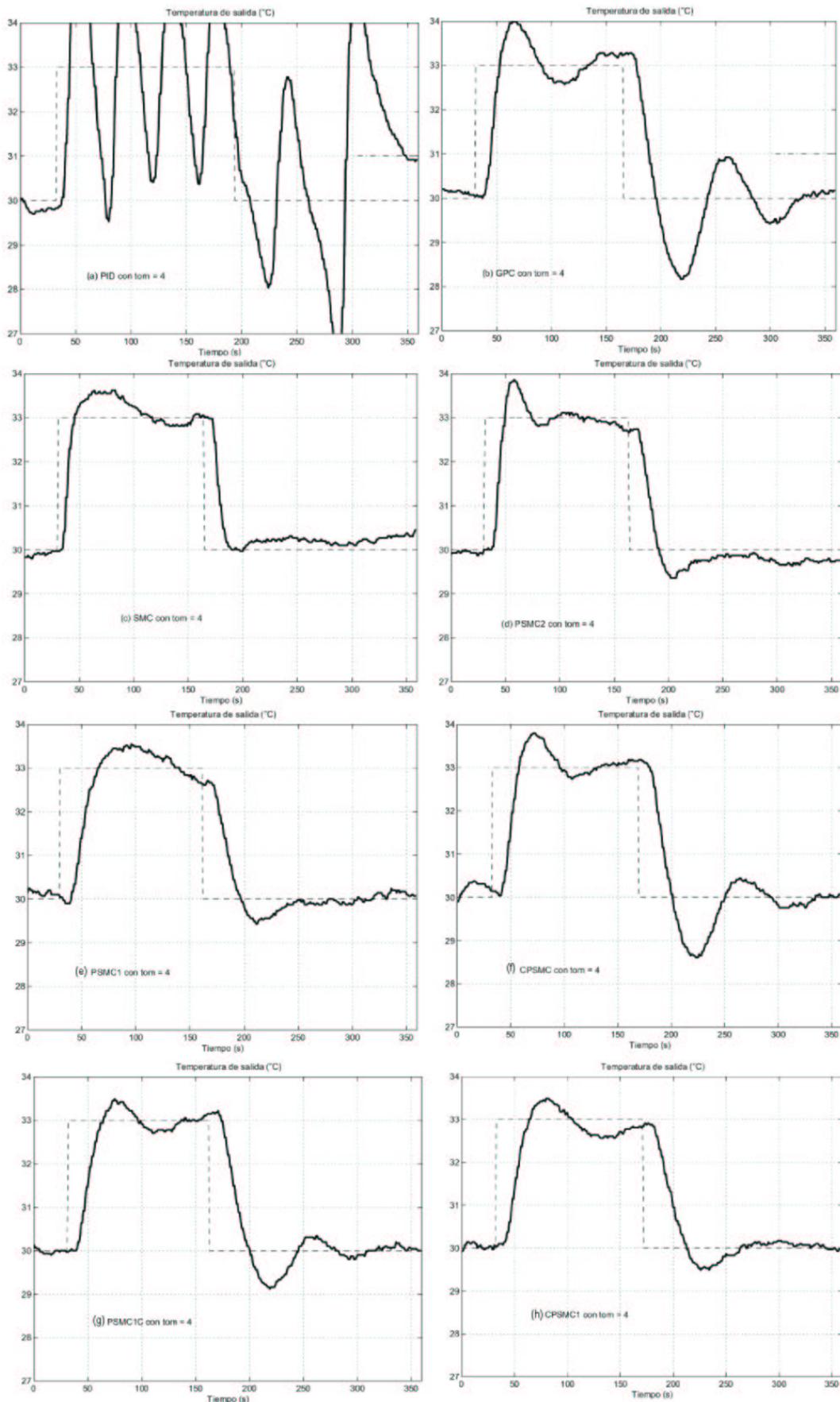


Figura 5.7: Control de la temperatura de salida con errores de modelado negativos en  $t_{0m} (-66\%)$ : (a) PID, (b) GPC, (c) SMC, (d) PSMC2, (e) PSMC1, (f) CPSMC, (g) PSMC1C, (h) CPSMC1.

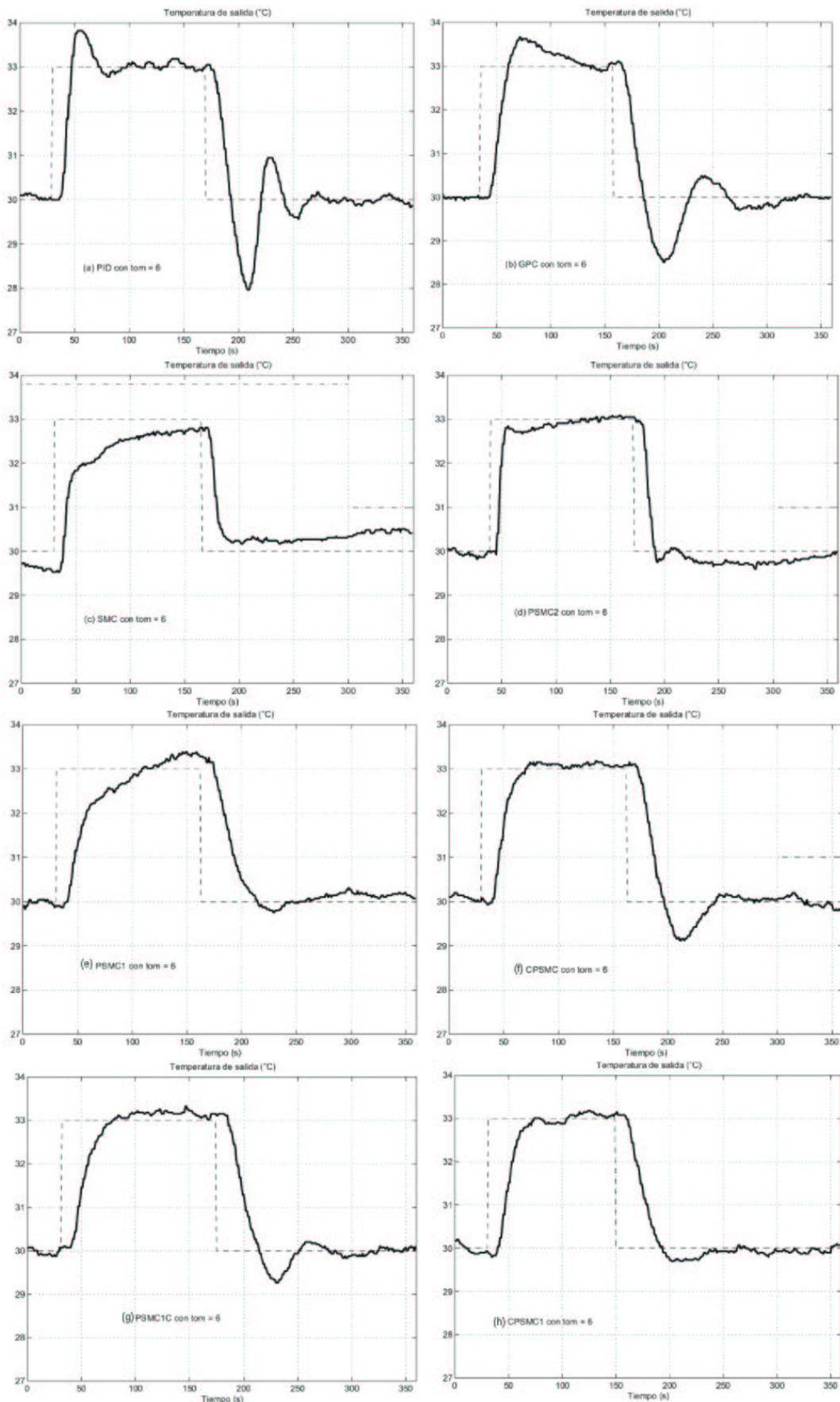


Figura 5.8: Control de la temperatura de salida con errores de modelado negativos en  $t_{0m}(-50\%)$ : (a) PID, (b) GPC, (c) SMC, (d) PSMC2, (e) PSMC1, (f) CPSMC, (g) PSMC1C, (h) CPSMC1C.

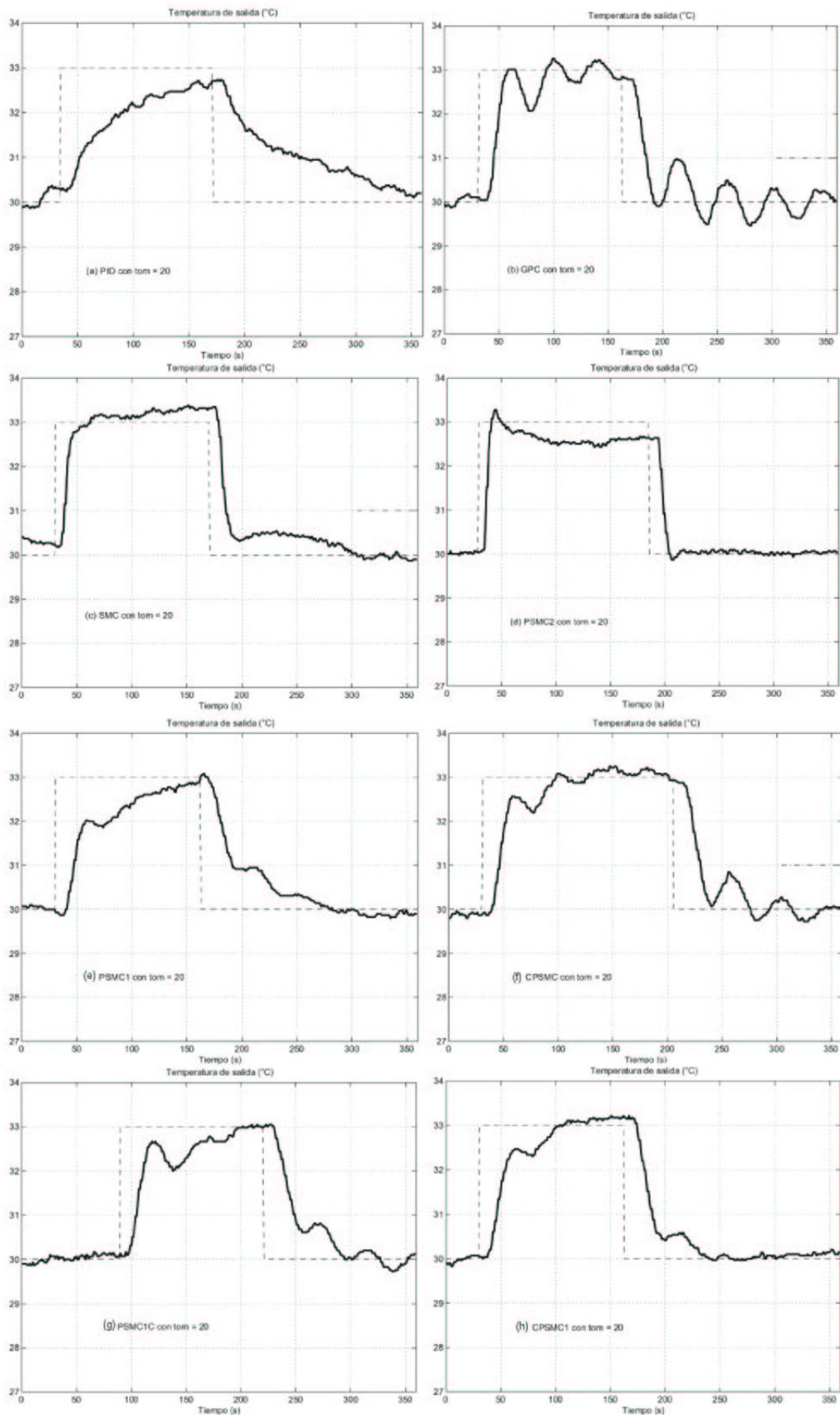


Figura 5.9: Control de la temperatura de salida con errores de modelado positivos en  $t_{0m} (+66\%)$ : (a) PID, (b) GPC, (c) SMC, (d) PSMC2, (e) PSMC1, (f) CPSMC, (g) PSMC1C, (h) CPSMC1.

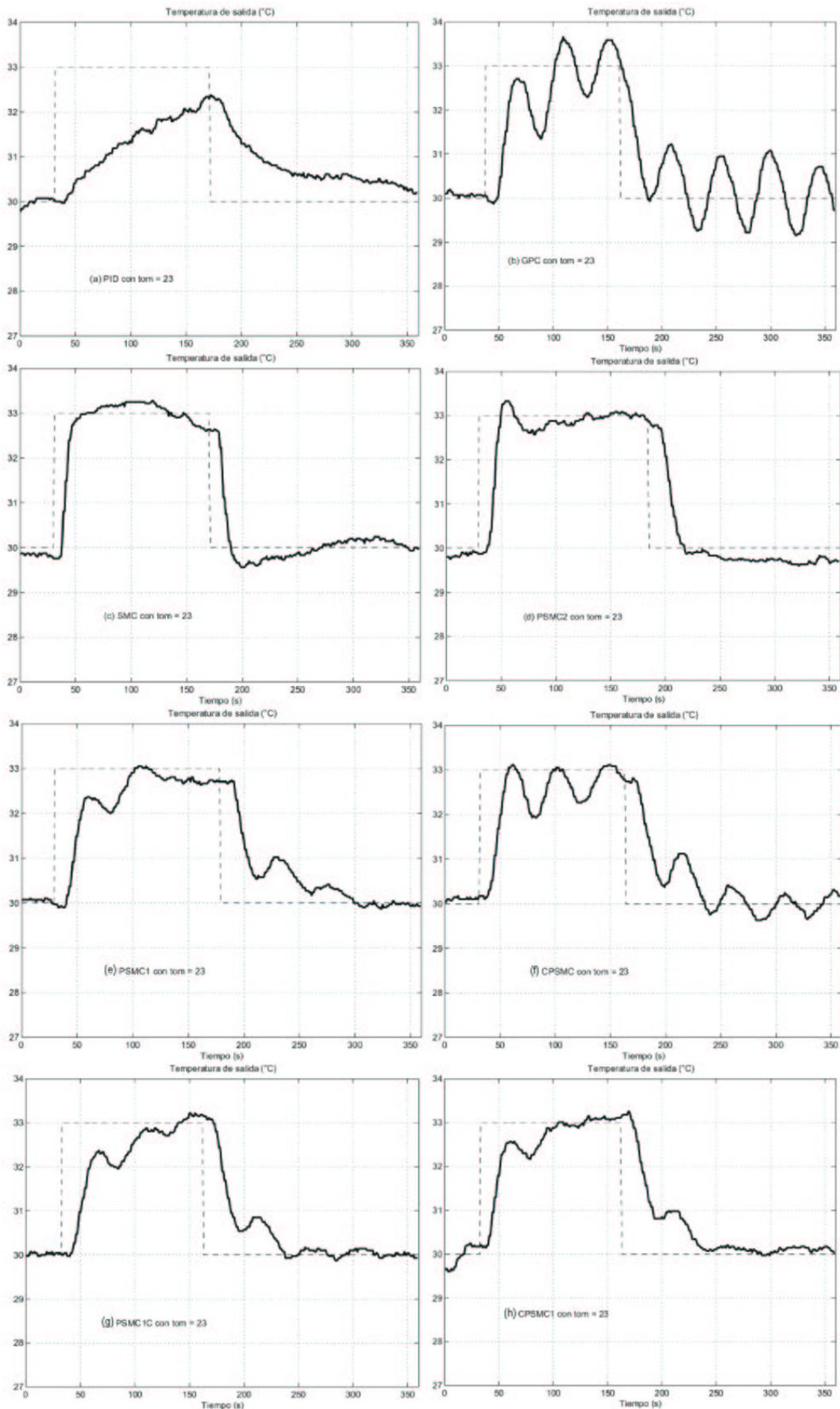


Figura 5.10: Control de la temperatura de salida con errores de modelado positivos en  $t_{0m}$  (+92 %): (a) PID, (b) GPC, (c) SMC, (d) PSMC2, (e) PSMC1, (f) CPSMC, (g) PSMC1C, (h) CPSMC1.

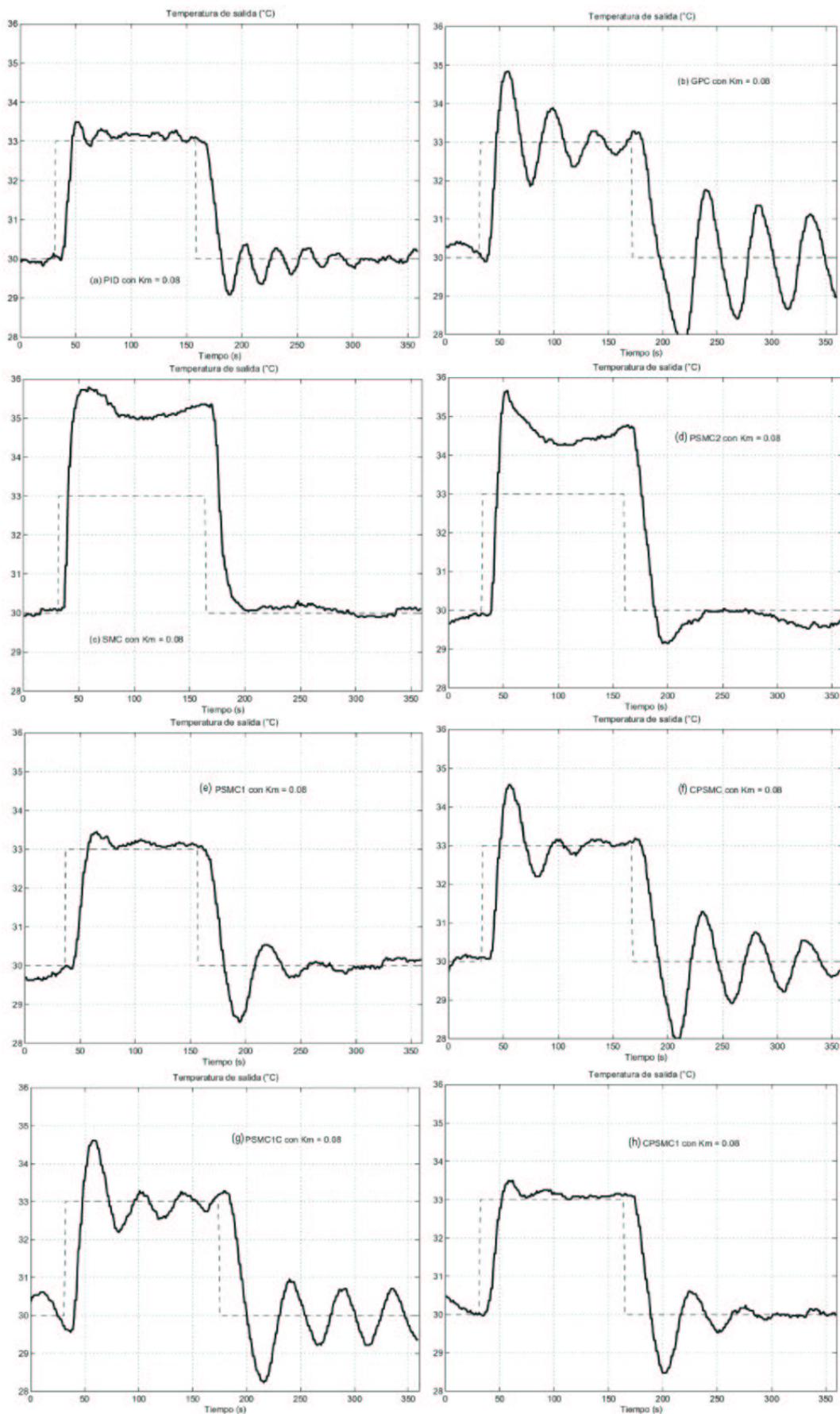


Figura 5.11: Control de la temperatura de salida con errores de modelado negativos en  $K_m$  ( $-55\%$ ): (a) PID, (b) GPC, (c) SMC, (d) PSMC2, (e) PSMC1, (f) CPSMC, (g) PSMC1C, (h) CPSMC1.

Por su parte, GPC presenta un comportamiento altamente oscilatorio.

Los controladores (e)-(h) de la figura 5.9 generan respuestas más rápidas que la del PID y menos oscilatorias que la del GPC. En este caso PSMC1C no introduce ninguna mejora respecto a PSMC1 y CPSMC, pero si el control es con CPSMC1 (figura (d)), la respuesta es menos oscilante que con CPSMC y más rápida que con PSMC1.

En la figura 5.10 se ha llevado al límite de estabilidad al control con GPC para observar que los otros controladores son más robustos ante errores positivos en  $t_{0m}$ . SMC y PSMC2 proporcionan muy buenas respuestas incluso con un +92 % de error en la estimación del retardo.

### Errores en la estimación de la ganancia estática $K_m$ .

En la figura 5.11 se ha introducido un considerable error negativo en la estimación de la ganancia del sistema. Uno de los puntos débiles de SMC es que el error de seguimiento es muy sensible a estos errores. Esto se refleja en la figura (c) de la figura 5.11, en la que un error negativo en ganancia más del 55 % produce un error de seguimiento de cerca del 80 % con SMC y de cerca del 50 % con PSMC2. La respuesta con menor oscilación y menor error en régimen permanente se consigue con PSMC1 figura (e), no aportando ninguna mejora adicional combinado con CPSMC (figuras (g) y (h)).

En la figura 5.13 se puede observar que las mejores respuestas ante error positivo en ganancia estática se obtienen con los controladores CPSMC1 (g), GPC (b) o CPSMC (f).

### Errores en la estimación de la constante de tiempo $\tau_m$ .

Con error negativo en la estimación de la constante de tiempo (figura 5.14), los resultados con CPSMC (f) son algo mejores que con GPC (b), mientras que los de SMC (c) y PSMC2 (d) son similares y más rápidos que los obtenidos con PID (a), PSMC1 (e) y PSMC1C (h), siendo en PID el más lento de todos. Sin embargo, si los errores son positivos (figura 5.15), son PID (a), SMC (c) y PSMC2 (d) los que proporcionan las mejores respuestas con menor sobreoscilación y menor tiempo de subida.

En la figura 5.16 se han obtenido las respuestas cuando el modelo empleado presenta errores de -35 %  $K_m$ , +35 %  $\tau_m$  y -35 %  $t_{0m}$  sobre el modelo nominal. En este caso es PSMC1 (e) el controlador que proporciona el seguimiento y la regulación más rápida y menos oscilante. La respuesta con PSMC2 (d) es la mejor si se permite cierto error en régimen permanente.

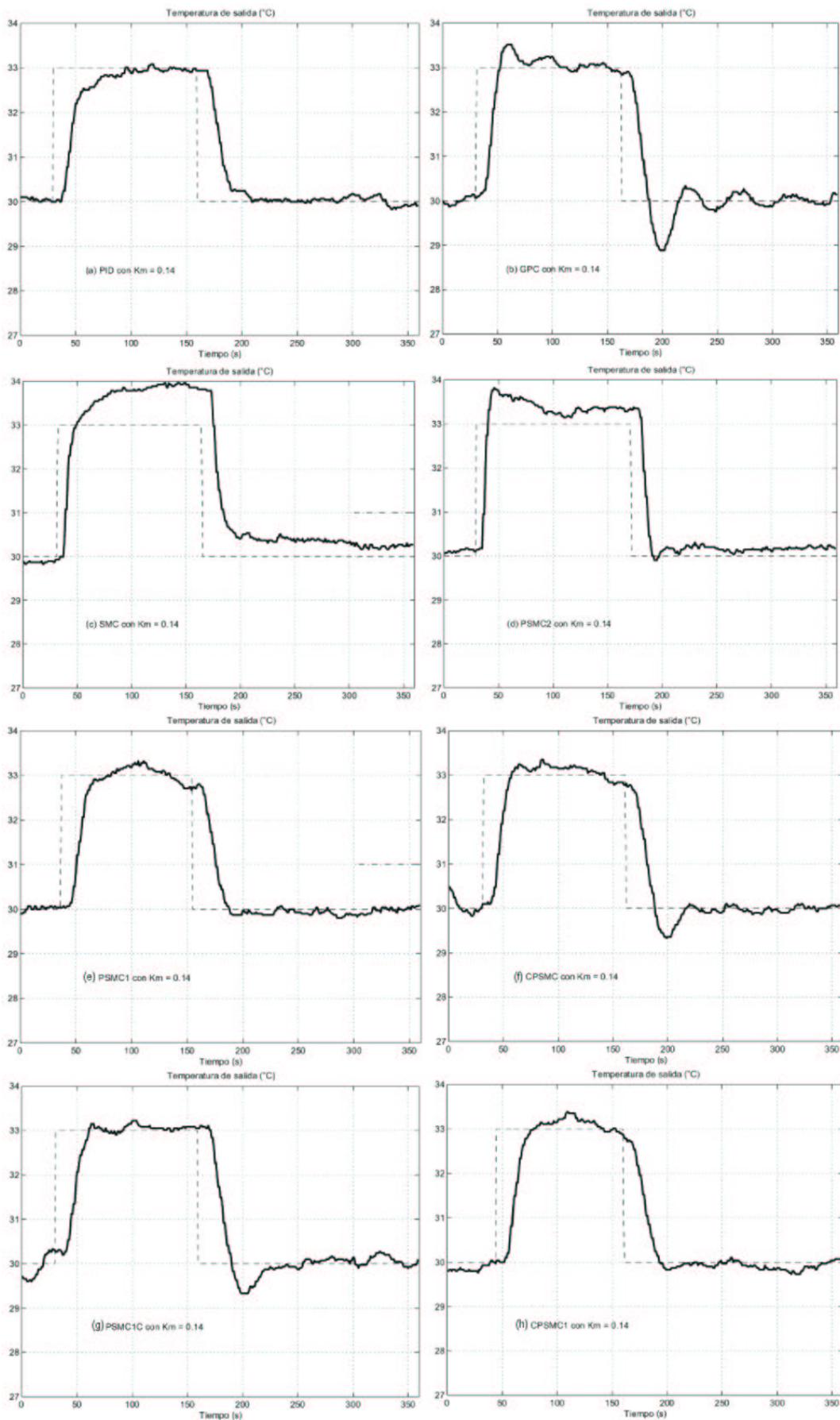


Figura 5.12: Control de la temperatura de salida con errores de modelado negativos en  $K_m$  (-22%): (a) PID, (b) GPC, (c) SMC, (d) PSMC2, (e) PSMC1, (f) CPSMC, (g) PSMC1C, (h) CPSMC1.

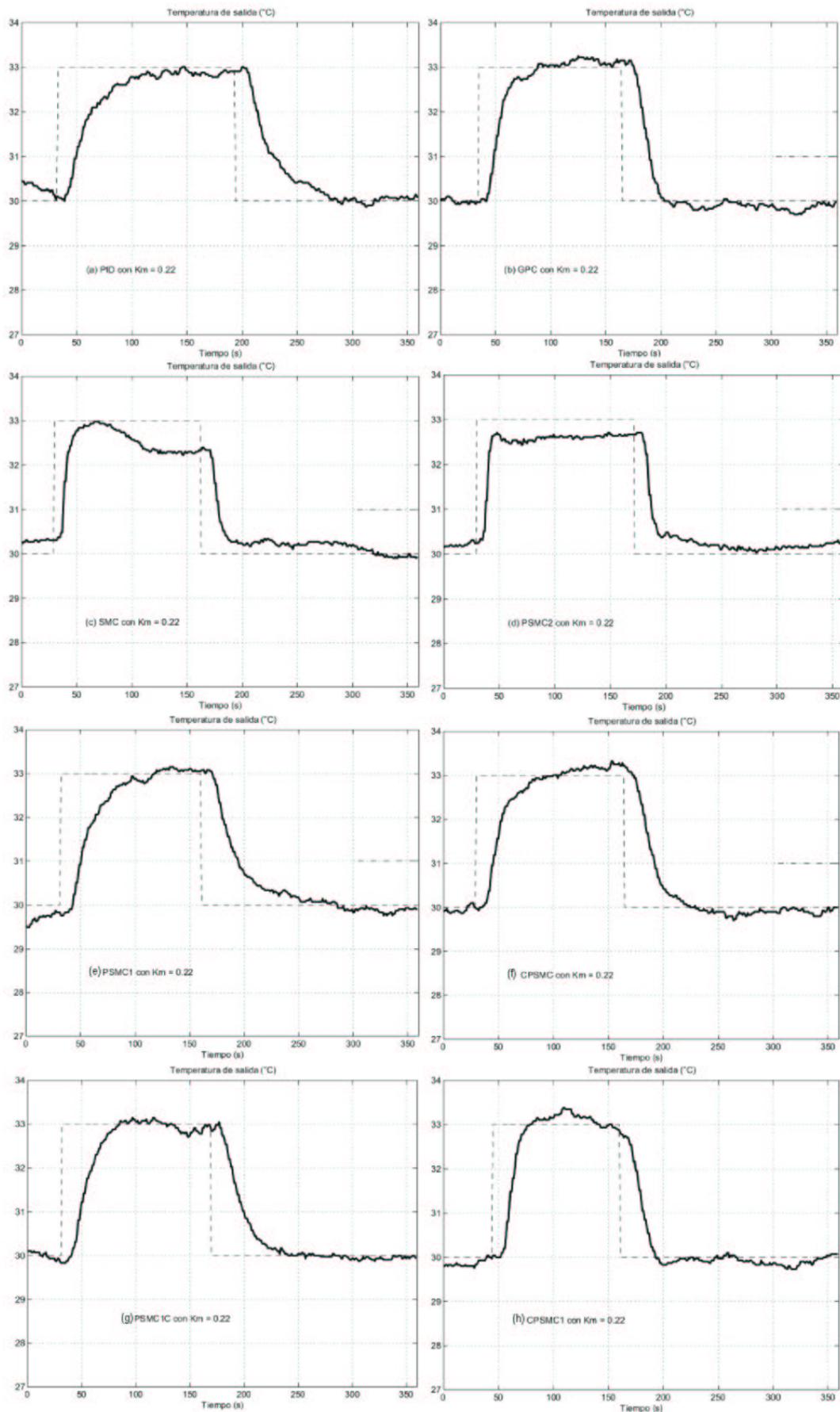


Figura 5.13: Control de la temperatura de salida con errores de modelado positivos en  $K_m (+22\%)$ : (a) PID, (b) GPC, (c) SMC, (d) PSMC2, (e) PSMC1, (f) CPSMC, (g) PSMC1C, (h) CPSMC1.

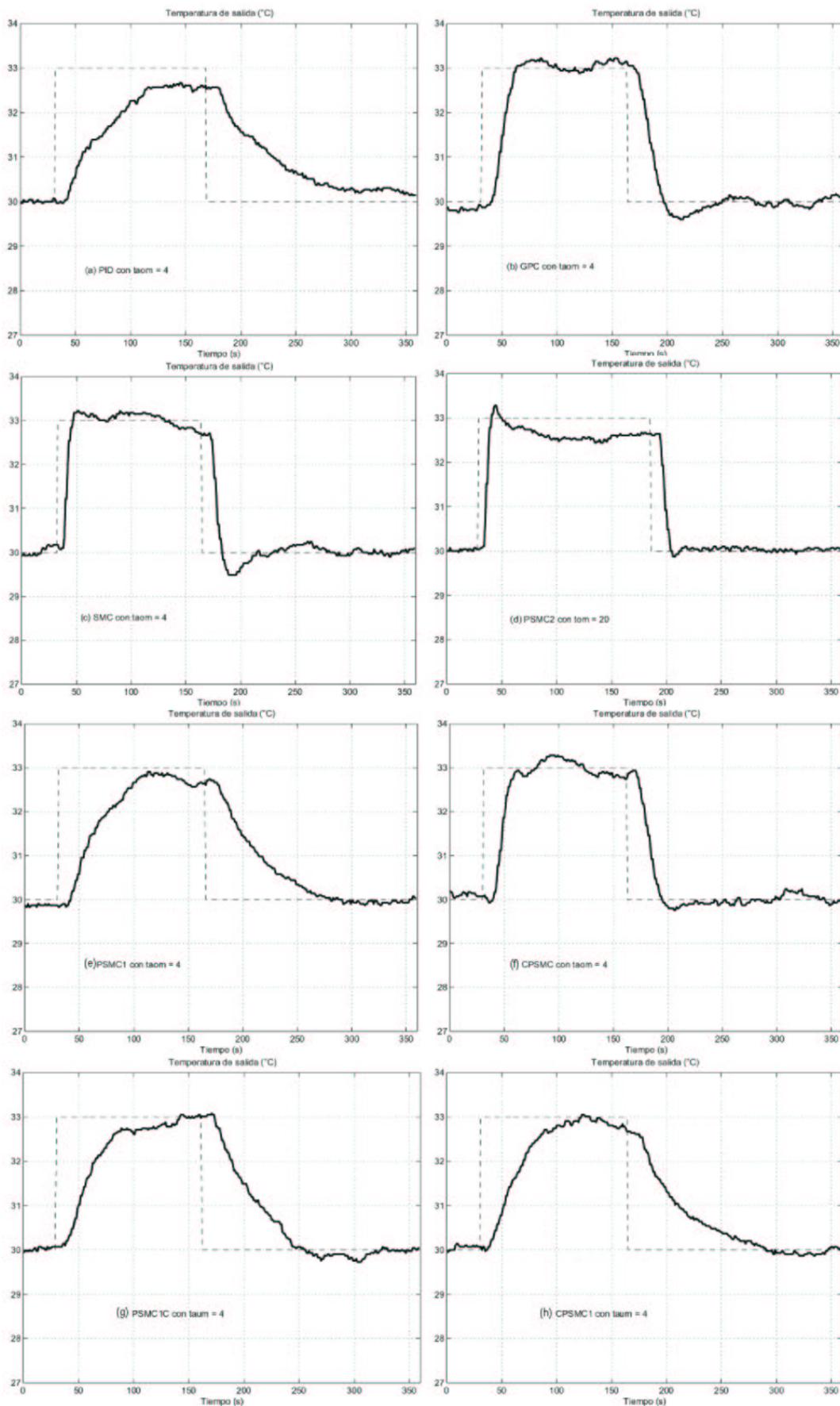


Figura 5.14: Control de la temperatura de salida con errores de modelado negativos en  $\tau_m (-55\%)$ : (a) PID, (b) GPC, (c) SMC, (d) PSMC2, (e) PSMC1, (f) CPSMC, (g) PSMC1C, (h) CPSMC1.

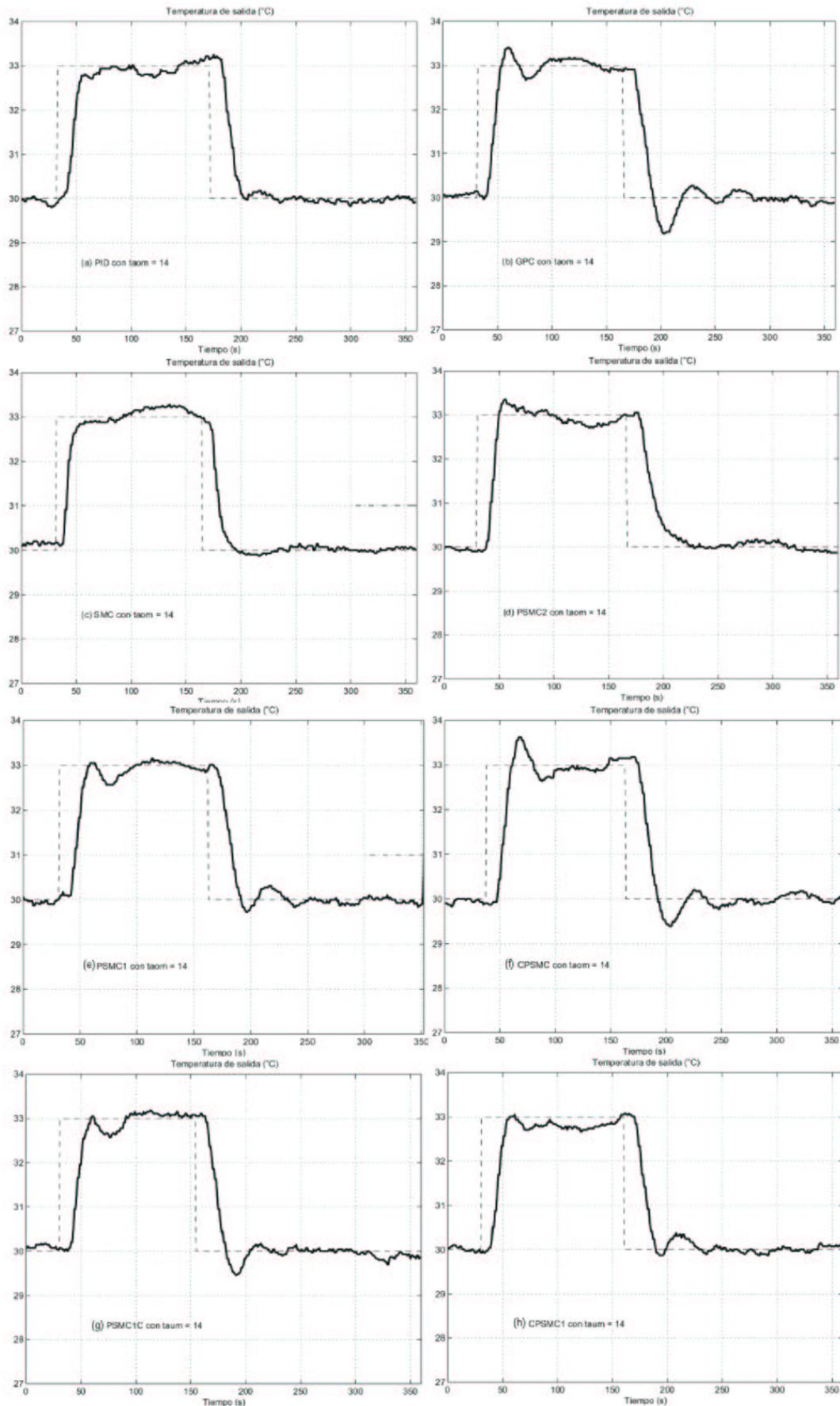


Figura 5.15: Control de la temperatura de salida con errores de modelado positivos en  $\tau_m(+55\%)$ : (a) PID, (b) GPC, (c) SMC, (d) PSMC2, (e) PSMC1, (f) CPSMC, (g) PSMC1C, (h) CPSMC1.

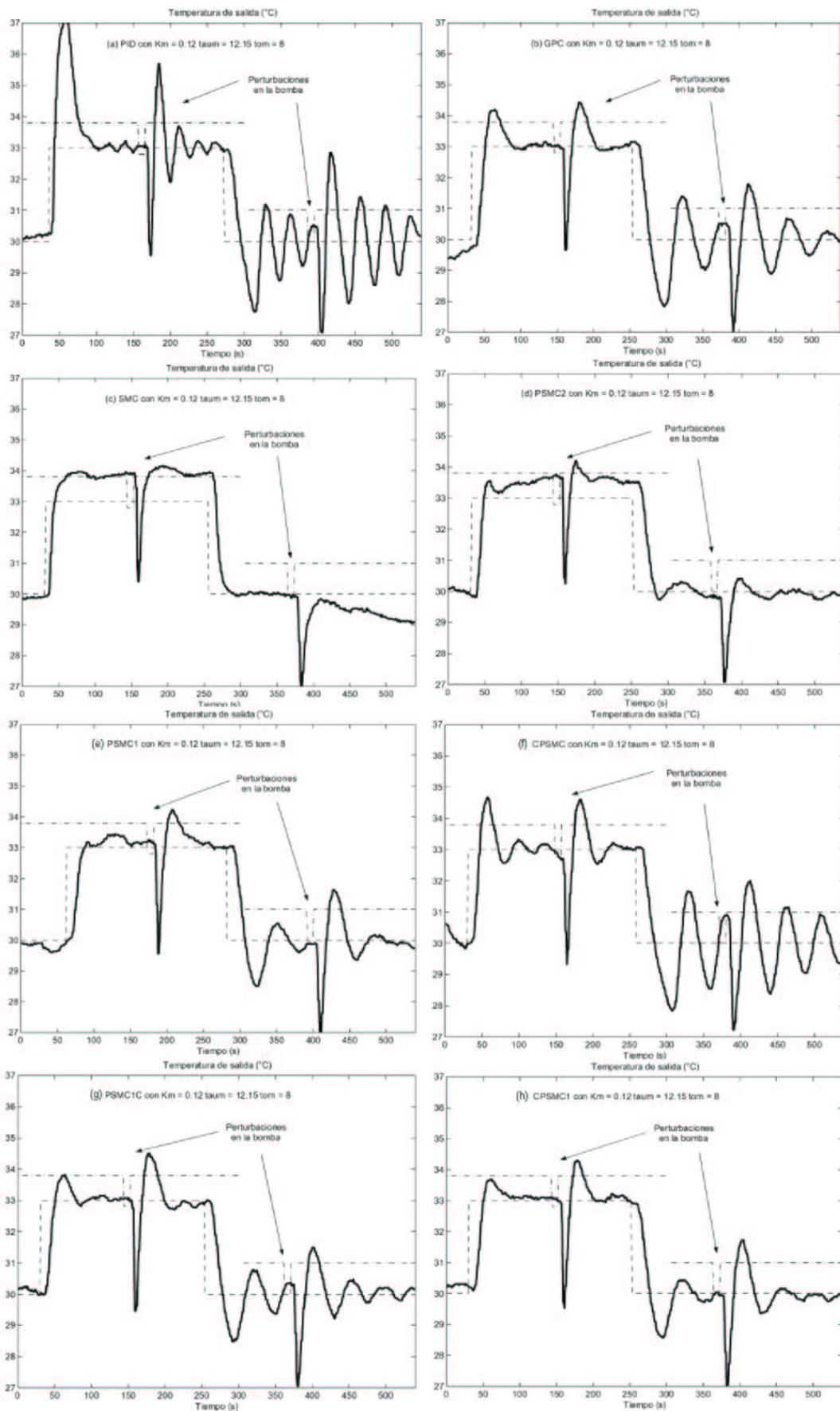


Figura 5.16: Control de la temperatura de salida con errores de modelado de  $-35\%K_m$ ,  $+35\%\tau_{my}$   $-35\%t_{0m}$ .

En resumen, en condiciones de sintonización que proporcionan respuestas similares con el modelo nominal, los controladores que proporcionan las respuestas menos oscilatorias y más rápidas ante errores de modelado

- negativos en el retardo son: PSMC1 o CPSMC1.
- positivos en el retardo son: PSMC2 o CPSMC1.
- negativos en la ganancia son: PSMC1 o CPSMC1.
- positivos en la ganancia son: CPSMC1 y GPC.
- negativos o positivos en la constante de tiempo son: PSMC1 y SMC.

Los controladores que proporcionan las peores respuestas ante errores de modelado

- negativos en el retardo son: PID o GPC (muy oscilantes).
- positivos en el retardo son: GPC (el más oscilante) o PID (el más lento).
- negativos en la ganancia son: GPC (el más oscilante) o SMC (mayor error en régimen permanente).
- positivos en la ganancia son: SMC o PSMC2 (mayor error en régimen permanente).
- negativos en la constante de tiempo es: PID (el más lento).
- positivos en la constante de tiempo es: GPC (el más oscilante).

Si se comparan los resultados obtenidos para este sistema no lineal con los análisis de robustez realizados en los capítulos anteriores (2.2.4, 2.3.3 y 3.2.4), en que se consideraba el sistema lineal descrito por los parámetros discretos  $a_m$ ,  $b_m$  y  $d_m$  que se relacionan con los continuos  $K_m$ ,  $\tau_m$  y  $t_{0m}$  según las ecuaciones (1.19), es posible obtener ciertas semejanzas. En este caso el modelo nominal propuesto corresponde a los parámetros  $a_m = 0.9$ ,  $b_m = 0.018$  y  $d_m = 12$ .

Cuando el control es PSMC1, el análisis realizado fue como máximo para  $d_m = 10$ , pero en este caso, en la esquina inferior izquierda de las figuras 2.15, 2.16 y 2.17, se puede ver que el sistema en bucle cerrado permanecería estable

- con un error positivo de modelado de +5 % en la estimación del polo y con mucho más error negativo. En las figuras (e) de las figuras 5.14 y 5.15, que corresponden a los experimentos con error en  $a_m$  del -13 % y +3 % respectivamente, se obtienen comportamientos estables, siendo la primera mucho más suave que la segunda, y coincidiendo esto con lo que se esperaría si el sistema fuera lineal.

- con errores de modelado en ganancia mucho mayores de  $\pm 22\%$ , que corresponde a los experimentos de las figuras (e) de las figuras 5.12 y 5.13.
- con un error positivo de modelado de  $-66\%$  en la estimación del retardo y con mucho más error positivo ( $+92\%$ ). En las figuras (e) de las figuras 5.7 y 5.10, que corresponden a los experimentos con error en  $d_m$  del  $-66\%$  y  $+92\%$  respectivamente, se obtienen respuestas estables, siendo la primera menos oscilante que la segunda pues el error en valor absoluto es un  $26\%$  mayor. Aunque en la figura 2.17 no se representa el caso  $a_m = 0.9$ , se puede observar que los casos de polo menor, cuando  $d_m = 10$ , la estabilidad se consigue con un alto grado de error positivo o negativo.

Cuando el control es PSMC2, los análisis para  $\tau_m = 9$  y relación de controlabilidad  $RC = 1.3$ , se pueden extrapolar de los volúmenes de estabilidad con incertidumbres estructuradas de  $\pm 50\%$  en los tres parámetros presentados en la tabla 2.5 para  $\tau_m = 10$  y  $RC = 1$ . En dicha tabla se obtienen resultados altamente estables para PSMC2 y bastante menos para GPC. Esto coincide con los resultados obtenidos en las figuras (b) y (d) de las figuras presentados en este capítulo.

Cuando el control es CPSMC, el análisis realizado en el apartado 3.2.4 fue con una sintonización más agresiva del controlador que la propuesta en este apartado para el intercambiador de calor, por lo que los límites de estabilidad allí analizados son conservadores. Además los resultados se ilustraron para  $d_m = 10$ . En este caso, en la esquina superior derecha de las figuras agrupadas en la figura 3.7, se puede ver que

- el sistema en bucle cerrado permanecería estable con un error de modelado de al menos  $\pm 20\%$  en la estimación del polo. En las figuras (f) de las figuras 5.14 y 5.15, que corresponden a las respuestas con error en  $a_m$  del  $-13\%$  y  $+3\%$  respectivamente, se obtienen también comportamientos estables.
- el sistema en bucle cerrado permanecería estable con errores de modelado en ganancia mucho mayores de  $\pm 22\%$ , que corresponde a los experimentos de las figuras (f) de las figuras 5.12 y 5.13.

Sin embargo el bucle cerrado no permanecería estable con un error positivo de modelado de  $-66\%$  en la estimación del retardo y con mucho más error positivo ( $+92\%$ ), según la sintonización agresiva del apartado 3.2.4. En las figuras (f) de las figuras 5.7 y 5.10 (experimentos con error en  $d_m$  del  $-66\%$  y  $+92\%$  respectivamente) se obtienen resultados estables, siendo la primera menos oscilante que la segunda pues el error en valor absoluto es un  $26\%$  mayor, pues la sintonización del controlador ha sido mucho más suave.

Como conclusión de este apartado, podemos decir que PSMC1, PSMC2, CPSMC y las leyes conmutadas PSMC1 y CPSMC1 satisfacen los objetivos deseados: controlan

efectivamente este sistema no lineal modelado como de POMTM, tanto en seguimiento como en regulación, y presentan alto grado de robustez ante incertidumbres paramétricas. En general, PSMC1 y PSMC2 presentan el mayor grado de robustez y las respuestas más rápidas y menos oscilantes.

## 5.2. Control en el sistema de colectores de la planta solar de Tabernas

El desarrollo de este capítulo se ha dividido en los siguientes apartados:

- Descripción del sistema.
- Descripción de los programas para la simulación.
- Resultados de simulación.
- Experimentos en la planta.

### 5.2.1. Descripción del sistema

El campo colector distribuido (Acurex) de la planta de energía solar de Tabernas (Almería - España) se compone de un conjunto de espejos parabólicos que reflejan la radiación solar en una tubería calentando el aceite que circula por ella. Ha sido utilizado desde los años 90 para probar estrategias de control avanzado desarrolladas por varias compañías y universidades europeas [133] [134]. Puede proporcionar 1.2 MWt de potencia térmica pico con radiación solar de 900 W/m<sup>2</sup>. La energía térmica diaria producida es de cerca de 6.5 MWht [135]. El campo se compone de 480 colectores solares distribuidos en 20 filas que forman 10 bucles en paralelo (cada bucle de 172 metros de longitud, 142 metros de parte activa). El campo dispone además de un sistema de seguimiento del sol que tarda cerca de 5 minutos en llevar los espejos a la posición de seguimiento. La tubería receptora de la radiación está situada en el punto focal de los espejos parabólicos. El fluido transmisor del calor, aceite, se bombea a través de la tubería receptora y recoge el calor transferido a través de las paredes de la tubería. Es extraído del fondo de un tanque de almacenamiento térmico, bombeado a través del campo de colectores y devuelto a la parte superior del tanque. Este aceite de la parte superior del tanque puede mantenerse a alta temperatura durante varios días. El sistema dispone de una válvula de tres vías que permite al aceite ser recirculado hacia el campo hasta que la temperatura de salida del mismo es la deseada para entrar al tanque de almacenamiento. El aceite caliente se emplea para producir vapor para una

turbina de 7 etapas conectada a un generador de energía eléctrica, y al enfriarse pasa al fondo del tanque. También se emplea para alimentar el evaporador de baja presión de una planta de desalinización que produce agua potable a partir del agua de mar en un proceso de 14 etapas. Un diagrama simplificado del campo de colectores se muestra en la figura 5.18.

El objetivo del sistema de control es mantener la temperatura del aceite de salida de un bucle (o la máxima temperatura alcanzada por uno de los colectores) a un nivel deseado a pesar de las perturbaciones como cambios en el nivel de radiación solar (causados por nubes), en la reflectividad de los espejos o en la temperatura del aceite de entrada al campo. Dada la complejidad del sistema y la existencia de no linealidades se desarrolló un modelo numérico para simular el comportamiento del mismo, basado en el trabajo de Carmona [136]. En el bucle de control se incluye un controlador por prealimentación en serie con el sistema, calculado a partir de las relaciones en estado estacionario, que ajusta el caudal de aceite de entrada con el fin de eliminar los cambios en la temperatura de salida provocados por las variaciones en la radiación solar y en la temperatura del aceite de entrada. Aunque la eliminación obviamente no puede ser exacta, este controlador soluciona los problemas fundamentales inherentes a un modelo de entrada única (SISO) y permite una mejor estimación de los parámetros del sistema. La variable manipulada será el caudal de aceite que se demanda a la bomba. La referencia proporcionada a este controlador es la temperatura deseada del aceite de salida. Como la compensación que proporciona el control prealimentado no es exacta, se incluye en el bucle de control un controlador que será diseñado con las estrategias desarrolladas en esta tesis. En la figura 5.19 se muestra el bucle de control en diagrama de bloques.



Figura 5.17: Campo de colectores distribuidos ACUREX y su entorno.

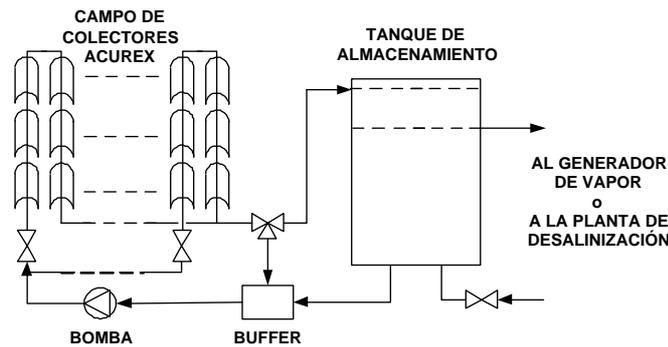


Figura 5.18: Diagrama esquemático del campo de colectores ACUREX.

Para la sintonización de los controladores se ha partido de la identificación del modelo POMTM aplicando el método de la curva de reacción descrito en 1.17. A partir de la identificación del sistema en torno a un valor medio de referencia en el rango de operación se obtuvieron los parámetros del modelo del conjunto “control prealimentado + campo de colectores”.

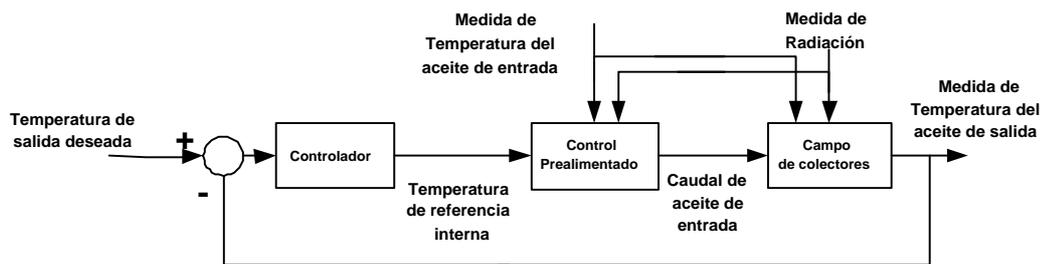


Figura 5.19: Diagrama de bloques del sistema de control.

## 5.2.2. Descripción de los programas para la simulación

Para simular el control del campo de colectores se emplearon los ficheros disponibles en el paquete de programación para la simulación del campo ACUREX desarrollados por los doctores del Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Universidad de Sevilla, Dr Manuel Berenguel, Dr Eduardo F. Camacho y Dr Francisco R. Rubio, en 1996. Dichos ficheros se encuentran escritos en el lenguaje de programación C y se listan a continuación:

- ACU1.C: contiene las funciones para simular el comportamiento del campo de colectores solar.
- ACUREX.H: contiene las variables y declaración de funciones.

- ACUREX.C: contiene las funciones definidas por el usuario, por ejemplos las de control, y el programa principal, función de iniciación de variables y bucles de control.
- TASAS.TXT: contiene las constantes del campo.
- VNIV.TXT: contiene el perfil de temperatura inicial de las tuberías.

En el apéndice 7.2 se ha indicado la forma de iniciar las variables globales del sistema, los parámetros del modelo de POMTM y la sintonización apropiada de cada controlador. Así mismo se incluyen las funciones programadas para cada controlador y las modificaciones necesarias de los ficheros básicos descritos en el párrafo anterior.

### 5.2.3. Resultados de simulación

Antes de aplicar las leyes de control desarrolladas en esta tesis a la planta real, fue preciso realizar algunos experimentos de simulación con datos obtenidos en varios meses del año y con diferentes puntos de operación. En este documento se van a mostrar los resultados obtenidos empleando 3 archivos de datos procedentes del campo de colectores de Tabernas, con 9 lazos de espejos operativos con una reflectividad de 0.97.

El primero corresponde a los datos recogidos el 16 de septiembre de 1991. El rango de referencias empleadas sin saturación de la señal de control es de 170°C a 270°C. El modelo del sistema “control prealimentado + campo de colectores” se obtuvo a partir de la identificación en torno a 230°C, con las siguientes constantes de funcionamiento que caracterizan el punto de operación:

- Temperatura del aceite de entrada = 100 °C
- Temperatura ambiente = 15 °C
- Radiación = 800 W/m<sup>2</sup>

Los parámetros identificados fueron:

$$K_m = 0.63, \tau_m = 5T, t_{0m} = 9T, T = 39 \text{ s}, a_m = 0.8, b_m = 0.11, d_m = 9 \quad (5.3)$$

El segundo archivo de datos corresponde a los recogidos el 17 de marzo de 1993. El rango de referencias empleadas sin saturación de la señal de control es de 150°C a 250°C, y el modelo del sistema “control prealimentado + campo de colectores” se obtuvo a partir de la identificación del sistema en torno a 205°C. Los parámetros constantes de funcionamiento que caracterizan el punto de operación para la identificación fueron:

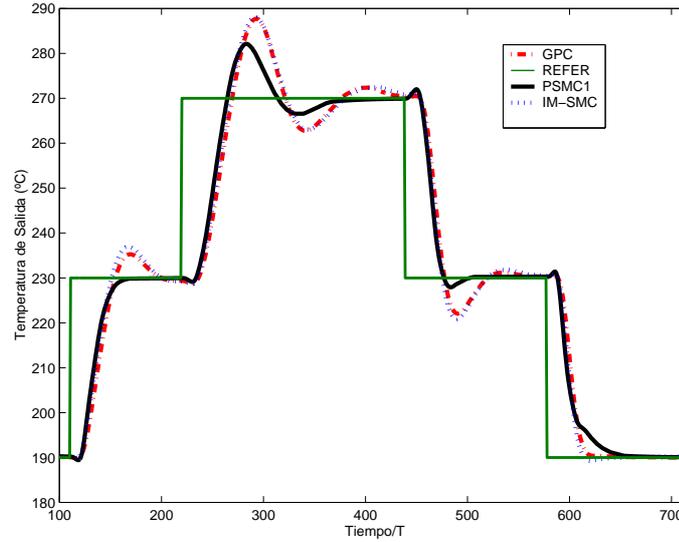


Figura 5.20: Seguimiento en bucle cerrado sin perturbaciones. GPC, PSMC1 e IM-SMC.  $K_m = 0.63$ ,  $\tau_m = 5T$ ,  $t_{0m} = 9T$ ,  $T_{in} = 100^\circ C$ ,  $T_{amb} = 15^\circ C$ ,  $I_{rr} = 800 W/m^2$ .

- Temperatura del aceite de entrada =  $150^\circ C$
- Temperatura ambiente =  $18^\circ C$
- Radiación =  $700 W/m^2$

y el modelo identificado quedó definido con

$$K_m = 0.66, \tau_m = 3T, t_{0m} = 6T, T = 39 s, a_m = 0.7, b_m = 0.19, d_m = 6 \quad (5.4)$$

Por último, el archivo de datos recogidos con fecha 18 de junio de 2003. El rango de referencias sin saturación de la señal de control es de  $210^\circ C$  a  $280^\circ C$ . El modelo del sistema “control prealimentado + campo de colectores” se obtuvo a partir de la identificación del sistema en torno a  $230^\circ C$ , y los parámetros constantes de funcionamiento que caracterizan el punto de operación para la identificación eran:

- Temperatura del aceite de entrada =  $130^\circ C$
- Temperatura ambiente =  $28.5^\circ C$
- Radiación =  $900 W/m^2$

Los parámetros identificados fueron:

$$K_m = 0.69, \tau_m = 4T, t_{0m} = 9T, T = 39 s, a_m = 0.8, b_m = 0.15, d_m = 9 \quad (5.5)$$

A continuación se incluyen en los siguientes apartados algunos de los resultados obtenidos por simulación con las estrategias de control desarrolladas en esta tesis.

## ACUREX con PSMC1

### Seguimiento con perturbaciones correspondiente a experimentación en Septiembre de 1991

La sintonización de los parámetros óptimos sin errores de modelado proporcionada por las ecuaciones de PSMC1 es  $\alpha = -0.098$  y  $\varepsilon T = 0.35$ . Con estos parámetros la respuesta en bucle cerrado es muy conservadora y por tanto muy similar a la que se obtiene con GPC con una  $\lambda$  que proporcione similar constante de tiempo en bucle cerrado. Por lo que no es posible apreciar la mejora. Se escogieron entonces parámetros más agresivos del controlador PSMC1, acercando  $\alpha$  a cero y aumentando la robustez en torno a la superficie disminuyendo  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}\alpha &= -0.095 \\ \varepsilon T &= 0.1\end{aligned}\tag{5.6}$$

Para que la constante de tiempo en bucle cerrado fuese parecida para cada controlador en el rango de estudio de  $190^\circ$  a  $270^\circ$ , se escogió para el control GPC  $\lambda = 15$  y un horizonte mayor al triple de la constante de tiempo  $N = 40$ . Para IM-SMC se sintonizaron los siguientes parámetros:  $\lambda = 0.05$ ,  $K_D = 0.1$  y  $\delta = 1$ . En la tabla 5.1 se indican las constantes de tiempo en bucle cerrado para el punto de operación especificado en párrafos anteriores en el rango de referencias de  $190^\circ$  a  $270^\circ$ . En la figura 5.20 se muestra la temperatura del aceite de salida ante cambios escalón en la referencia en el punto de operación especificado sin perturbaciones. La señal de control que se genera como referencia para el controlador feedforward está saturada entre  $100^\circ\text{C}$  y  $350^\circ\text{C}$ .

$\tau_{bc}$	De $190^\circ$ a $230^\circ$	De $230^\circ$ a $270^\circ$	De $270^\circ$ a $230^\circ$	De $230^\circ$ a $190^\circ$
GPCr	14.5	14.5	9	9
PSMC1r	13.5	13.5	9	10.5
IM-SMCr	13.5	15	9	9

Tabla 5.1: Constantes de tiempo en bucle cerrado. Simulaciones con PSMC1. Septiembre 1991.

Se utilizaron los datos aportados por el fichero SA910916.LST para simular el seguimiento ante perturbaciones en la radiación y en la temperatura del aceite de entrada. En la figura 5.21 (a) se muestra la variación de la radiación y de la temperatura del

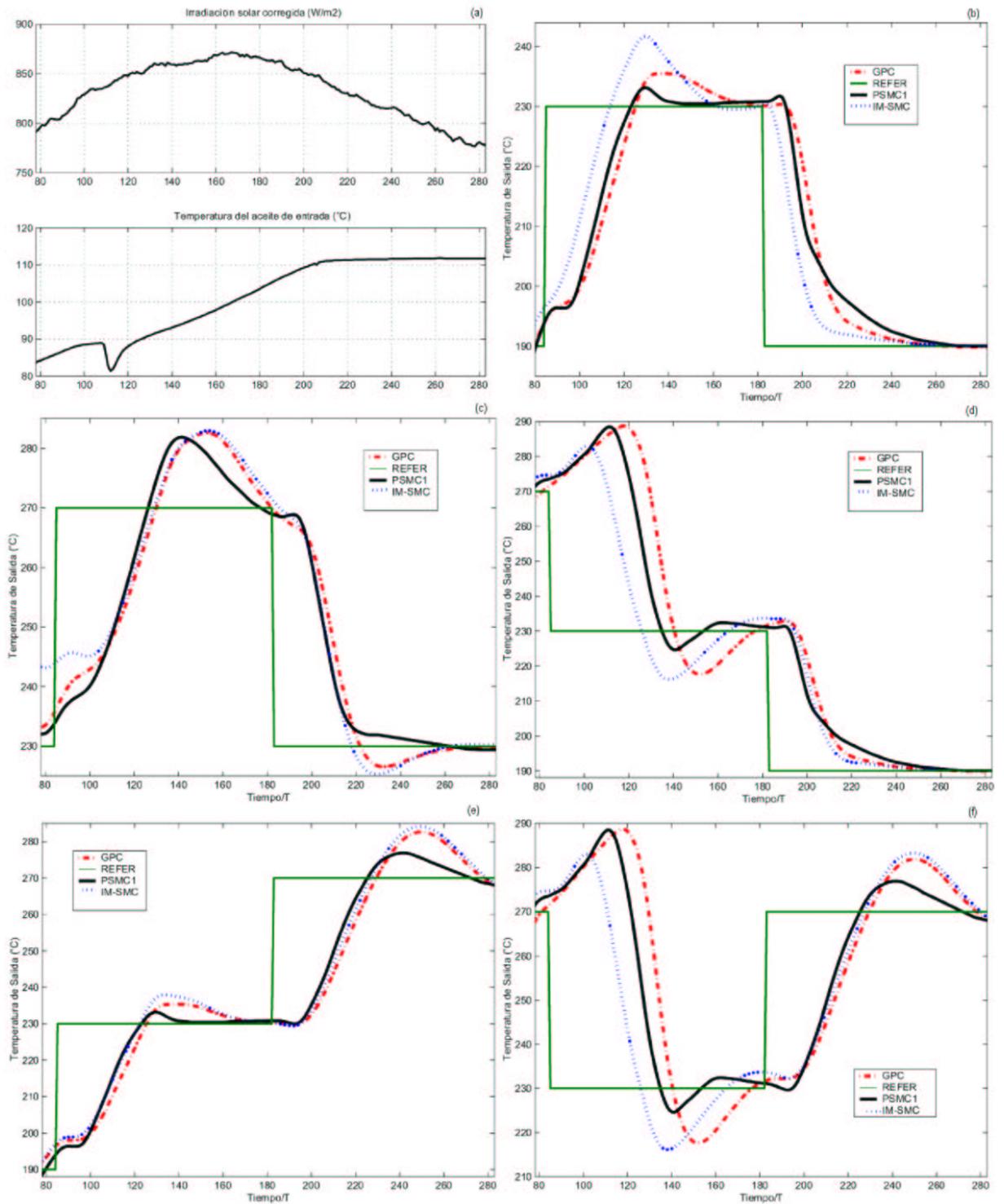


Figura 5.21: Seguimiento con perturbaciones con datos de Septiembre de 1991: (a) Radiación corregida y temperatura de entrada; (b) Escalón a 230 °C; (c) Escalón a 270 °C; (d) Escalones de bajada; (e) Escalones de subida; (f) Escalón de 230 °C a 270 °C.

aceite de entrada desde las 9:38:25 hasta las 11:50:20. En las figuras (b)-(f) se pueden ver las respuestas ante varios escalones de seguimiento simulados durante ese mismo periodo de tiempo. La tabla 5.2 permite comparar los índices IAE para las simulaciones mostradas en las figuras 5.20 y 5.21.

<i>IAE</i>	Fig 5.20	Fig 5.21 (b)	Fig 5.21 (c)	Fig 5.21 (d)	Fig 5.21 (e)	Fig 5.21 (f)
GPCr	5924	2102	2464	3843	2738	4347
PSMC1r	<b>4847</b>	<b>1927</b>	<b>2286</b>	<b>3263</b>	<b>2199</b>	<b>3555</b>
IM-SMCr	5810	2014	2403	2907	2707	3505

Tabla 5.2: IAEs de las simulaciones de comparación con PMC1. Septiembre 1991.

### Seguimiento con perturbaciones correspondiente a experimentación en Marzo de 1993

La sintonización de los parámetros óptimos sin errores de modelado de PSMC1 obtenidos con las ecuaciones es  $\alpha = -0.093$  y  $\varepsilon T = 1$ . Los parámetros elegidos mediante ajuste fino para aumentar el grado de robustez fueron:

$$\begin{aligned}\alpha &= -0.092 \\ \varepsilon T &= 0.1\end{aligned}\tag{5.7}$$

Los parámetros de GPC ajustados para obtener similares constantes de tiempo en bucle cerrado (tabla 5.3) en el rango de estudio 150°C-250°C fueron  $\lambda = 2.5$  y  $N = 40$ . Los parámetros de IM-SMCr sintonizados,  $\lambda = 0.1$ ,  $K_D = 0.1$  y  $\delta = 0.68$ .

$\tau_{bc}$	De 200° a 225°	De 225° a 250°	De 250° a 225°	De 225° a 200°
GPCr	9	9	6	5
PSMC1r	9	9	6	6
IM-SMCr	9	10.5	6	6

Tabla 5.3: Constantes de tiempo en bucle cerrado. Simulaciones con PSMC1. Marzo 1993.

En la figura 5.22 es posible apreciar que el seguimiento con PSMC1 es más preciso que con los otros controladores, en el punto de operación especificado y sin perturbaciones. En la figura 5.23 (a) se muestra la variación de la radiación y de la temperatura del aceite de entrada desde las 10:12:28 hasta las 13:27:14 correspondiente a los datos proporcionados por el archivo SA930317.LST. En la figura 5.23 se muestra la respuesta ante varios escalones de seguimiento simulados durante ese periodo de tiempo. La tabla 5.4 permite comparar los índices IAE para las simulaciones mostradas en las figuras 5.22 y 5.23.

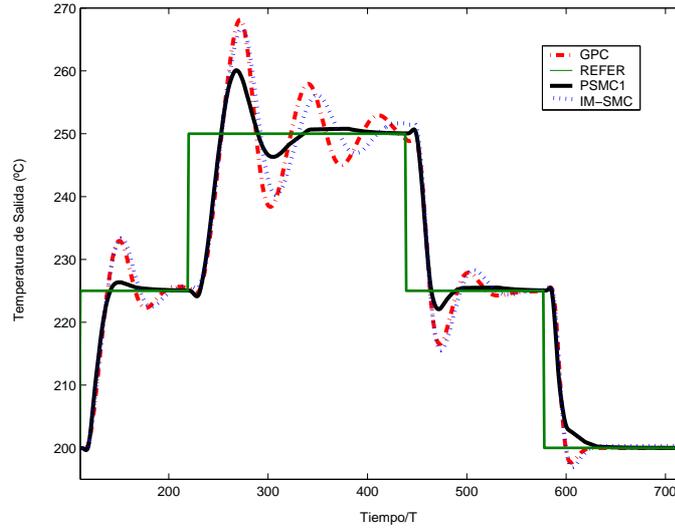


Figura 5.22: Seguimiento en bucle cerrado sin perturbaciones. GPC, PSMC1 e IM-SMC.  $K_m = 0.66$ ,  $\tau_m = 3T$ ,  $t_{0m} = 6T$ ,  $T_{in} = 150^\circ C$ ,  $T_{amb} = 18^\circ C$ ,  $I_{rr} = 700W/m^2$ .

$IAE$	Fig 5.22	Fig 5.23
GPCr	3370	2472
PSMC1r	<b>2416</b>	<b>2314</b>
IM-SMCr	3400	2324

Tabla 5.4: IAEs de las simulaciones de comparación con PSMC1. Marzo 1993.

### Seguimiento con perturbaciones correspondiente a experimentación en Junio de 2003

Los parámetros óptimos de PSMC1 sin errores de modelado obtenidos con las ecuaciones son:  $\alpha = -0.098$  y  $\varepsilon T = 0.35$ . Los parámetros elegidos mediante ajuste fino para aumentar el grado de robustez fueron:

$$\begin{aligned} \alpha &= -0.092 \\ \varepsilon T &= 0.1 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Los parámetros de GPC ajustados para obtener similares constantes de tiempo en bucle cerrado (tabla 5.5) en el rango de estudio  $210^\circ C - 280^\circ C$  y no saturar la señal de control:  $\lambda = 5$  y  $N = 40$ . Para IM-SMC se sintonizaron los siguientes parámetros:  $\lambda = 0.07$ ,  $K_D = 0.1$  y  $\delta = 0.68$ .

En la figura 5.24 se muestra la temperatura del aceite de salida ante cambios escalón en la referencia en el punto de operación especificado sin perturbaciones.

Nuevamente PSMC1 presenta la respuesta más precisa. En la figura 5.25 (a) se muestra la variación de la radiación y de la temperatura del aceite de entrada desde las

$\tau_{bc}$	De 210° a 250°	De 250° a 280°	De 280° a 250°	De 250° a 210°
GPCr	10.5	10.5	7.5	6
PSMC1r	10.5	10.5	7.5	7.5
IM-SMCr	10.5	10.5	7.5	6

Tabla 5.5: Constantes de tiempo en bucle cerrado. Simulaciones con PSMC1. Junio 2003.

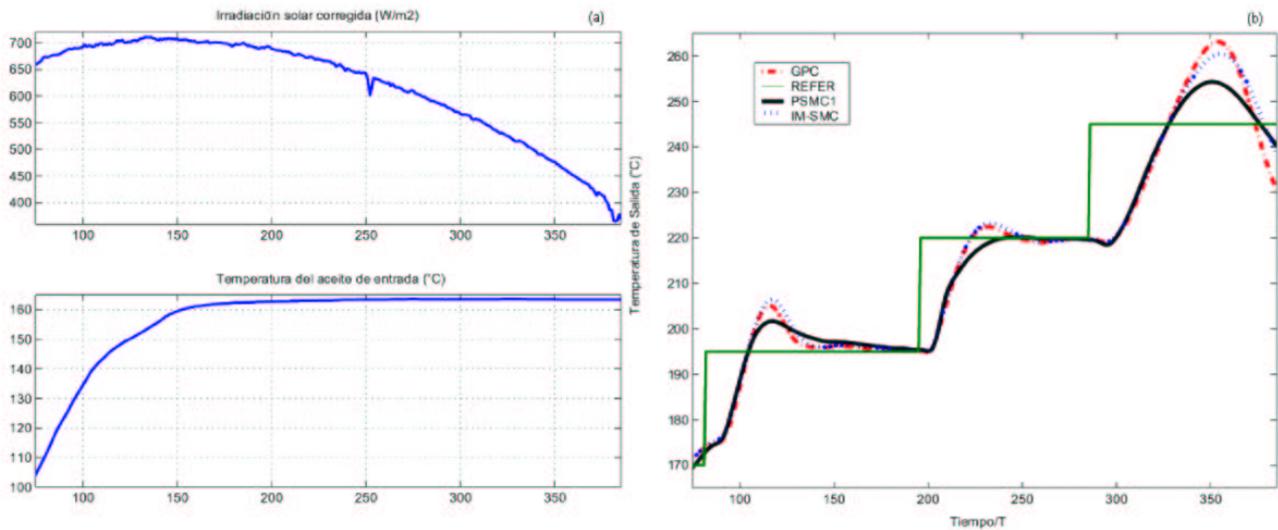


Figura 5.23: (a) Radiación corregida y temperatura de entrada (datos de Marzo de 1993); (b) Seguimiento en bucle cerrado con perturbaciones.

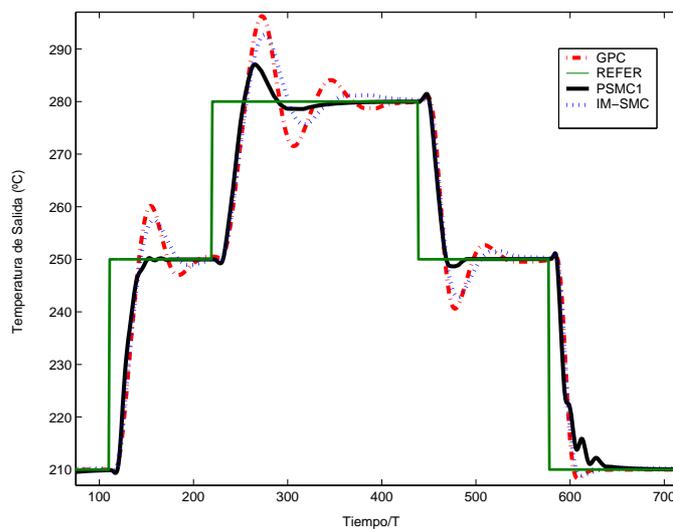


Figura 5.24: Seguimiento en bucle cerrado sin perturbaciones. GPC, PSMC1 e IM-SMC.  $K_m = 0.69$ ,  $\tau_m = 4T$ ,  $t_{0m} = 9T$ ,  $T_{in} = 130$  °C,  $T_{amb} = 28.5$ °C,  $Irr = 900$   $W/m^2$ .

<i>IAE</i>	Fig 5.24	Fig 5.25
GPCr	4184	2336
PSMC1r	<b>3127</b>	<b>1664</b>
IM-SMCr	3947	2248

Tabla 5.6: IAEs de las simulaciones de comparación con PSMC1. Junio 2003.

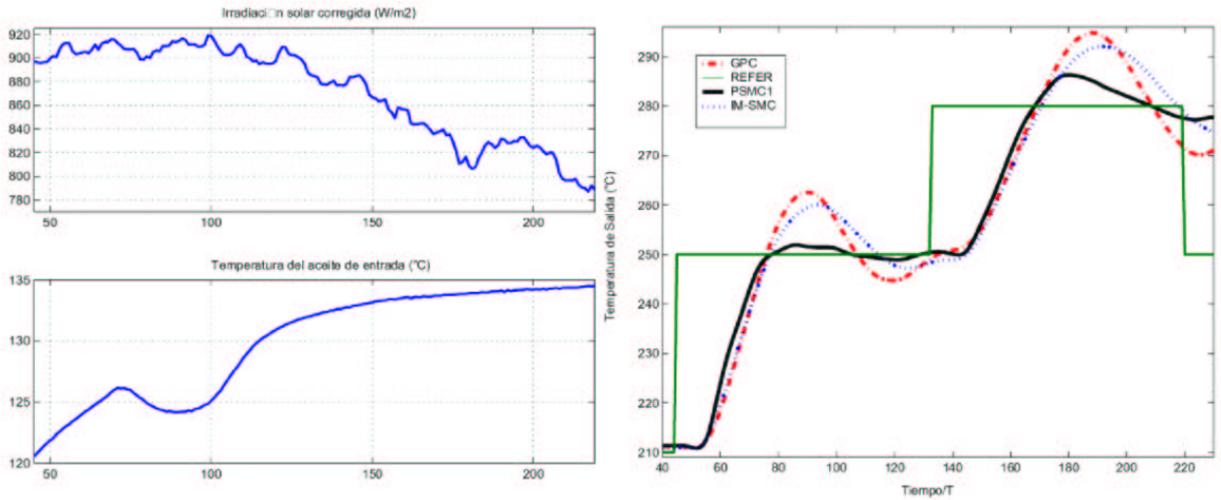


Figura 5.25: (a) Radiación corregida y temperatura de entrada (datos de Junio de 2003); (b) Seguimiento en bucle cerrado con perturbaciones.

11:38:54 hasta las 12:22:24 correspondiente a los datos proporcionados por el archivo TEST0618.DAT. En la figura 5.25 se puede ver la respuesta ante varios escalones de seguimiento simulados durante ese periodo de tiempo. La tabla 5.6 presenta los índices IAE para las simulaciones mostradas en las figuras 5.24 y 5.25.

## ACUREX con PSMC2

### Seguimiento con perturbaciones correspondiente a experimentación en Septiembre de 1991

El controlador PSMC2 es más apropiado para situaciones que requieran un control más agresivo en presencia de errores de modelado y perturbaciones. Así, para el caso del ejemplo del apartado anterior y el modelo propuesto, se ajustaron los parámetros, para obtener similares constantes de tiempo en bucle cerrado, a:  $\lambda = 3$ ,  $N = 40$  (GPC);  $\mu_0 = 1.6 \times 10^{-5}$ ,  $\mu_1 = 8 \times 10^{-3}$ ,  $\lambda = 3$ ,  $N = 40$  y  $\delta = 1$  (PSMC2);  $\lambda = 0.085$ ,  $K_D = 0,1$  y  $\delta = 1$  (IM-SMC). Se escogió  $\lambda = 3$  porque para un  $\lambda$  menor el comportamiento de GPC es aún peor mientras que PSMC2 sigue controlando. En la tabla 5.7 se indican las

constantes de tiempo en bucle cerrado. En la figura 5.26 se puede observar que GPC y IM-SMC no pueden controlar en torno a 270 debido a la saturación de la señal de control a 350 mientras PSMC2 sí lo consigue.

$\tau_{bc}$	De 190° a 230°	De 230° a 270°	De 270° a 230°	De 230° a 190°
GPCr	10.5	9	4.5	4.5
IM-SMCr	9	9	4.5	4.5
PSMC2r	7.5	7.5	4.5	3

Tabla 5.7: Constantes de tiempo en bucle cerrado. Simulaciones con PSMC2. Septiembre 1991.

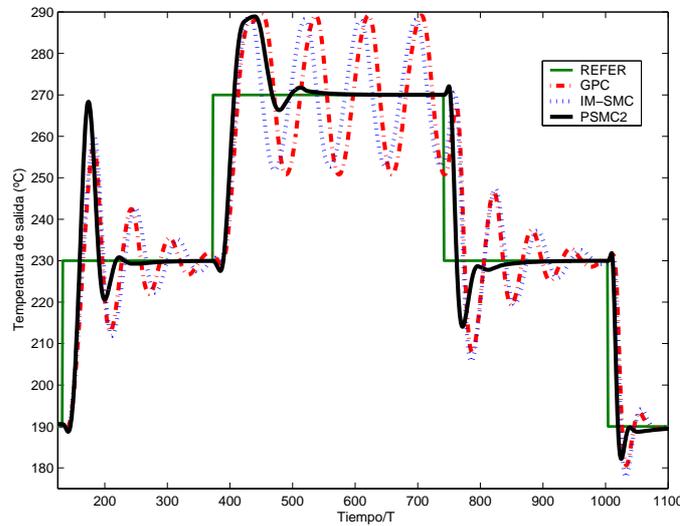


Figura 5.26: Seguimiento en bucle cerrado sin perturbaciones. GPC, IM-SMC y PSMC2.  $K_m = 0.63$ ,  $\tau_m = 5T$ ,  $t_{0m} = 9T$ ,  $T_{in} = 100^\circ C$ ,  $T_{amb} = 15^\circ C$ ,  $Irr = 800W/m^2$ .

En la figura 5.27 se pueden ver las respuestas ante varios escalones de seguimiento simulados durante ese mismo periodo de tiempo correspondiente al indicado en 5.2.3. La tabla 5.8 permite comparar los índices IAE para las simulaciones mostradas en la figura 5.27.

IAE	Fig 5.26	Fig 5.27 (a)	Fig 5.27 (b)
GPCr	10857	2583	3831
IM-SMCr	10729	2541	3541
PSMC2r	<b>5473</b>	<b>2153</b>	<b>3312</b>

Tabla 5.8: IAEs de las simulaciones de comparación con PSMC2. Septiembre 1991.

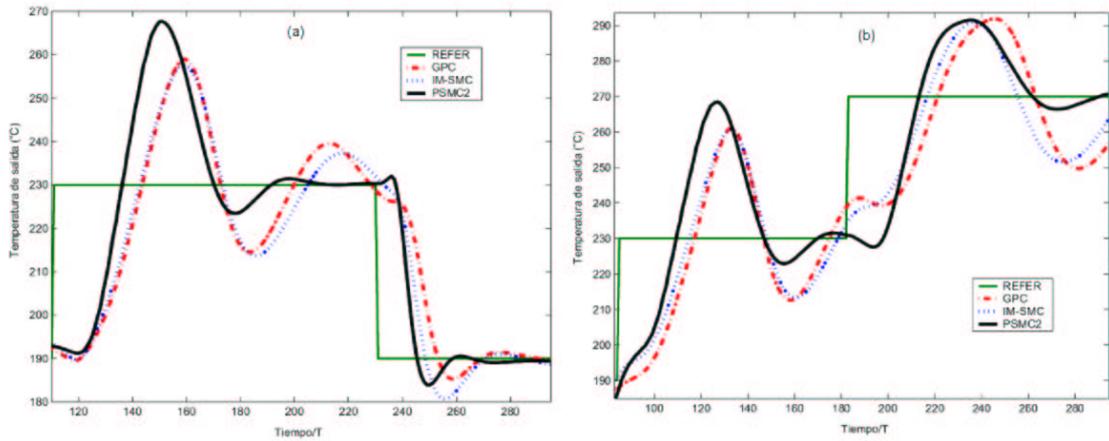


Figura 5.27: Seguimiento con perturbaciones (datos de Septiembre de 1991): (a) Escalón a 230 °C; (b) Escalones de subida.

### Seguimiento con perturbaciones correspondiente a experimentación en Marzo de 1993

El modelo empleado para estas simulaciones fue  $K_m = 0.63$ ,  $\tau_m = 5T$  y  $t_{0m} = 9T$ . Se ajustaron los parámetros, para obtener similares constantes de tiempo en bucle cerrado, a:  $\lambda = 2$ ,  $N = 40$  (GPC);  $\mu_0 = 1.6 \times 10^{-5}$ ,  $\mu_1 = 8 \times 10^{-3}$ ,  $\lambda = 3$ ,  $N = 40$  y  $\delta = 1$  (PSMC2);  $\lambda = 0,085$ ,  $K_D = 0,1$  y  $\delta = 1$  (IM-SMC). Se escogió  $\lambda = 2$  porque para un  $\lambda$  menor el comportamiento de GPC es aún peor debido al efecto de la saturación mientras que PSMC2 sigue controlando incluso con una constante de bucle cerrado inferior a la de GPC. En la tabla 5.9 se indican las constantes de tiempo en bucle cerrado. En la figura 5.28 se puede observar que GPC tiene peor comportamiento que PSMC2 en torno a 250 debido a la saturación de la señal de control. En esta simulación los coeficientes IAE correspondientes son: 3545 (GPC), 3006 (IM-SMC) y 1985 (PSMC2). Se utilizaron los datos procedentes del campo de colectores de Tabernas con fecha 17 de marzo de 1993, y en la figura 5.29 se ilustra como PSMC2 es más robusto ante saturación de la señal de control que los otros controladores. En esta simulación se produjeron las perturbaciones en la radiación mostradas en la figura 5.29 (a), mientras la temperatura del aceite de entrada era prácticamente constante a 163°C. Los coeficientes IAE correspondientes son: 3835 (GPC), 3536 (IM-SMC) y 1949 (PSMC2).

$\tau_{bc}$	De 200° a 225°	De 225° a 250°	De 250° a 225°	De 225° a 200°
GPCr	7.5	9	4.5	4.5
IM-SMCr	7.5	9	4.5	4.5
PSMC2r	4.5	6	4.5	3

Tabla 5.9: Constantes de tiempo en bucle cerrado. Simulaciones con PSMC2. Marzo 1993.

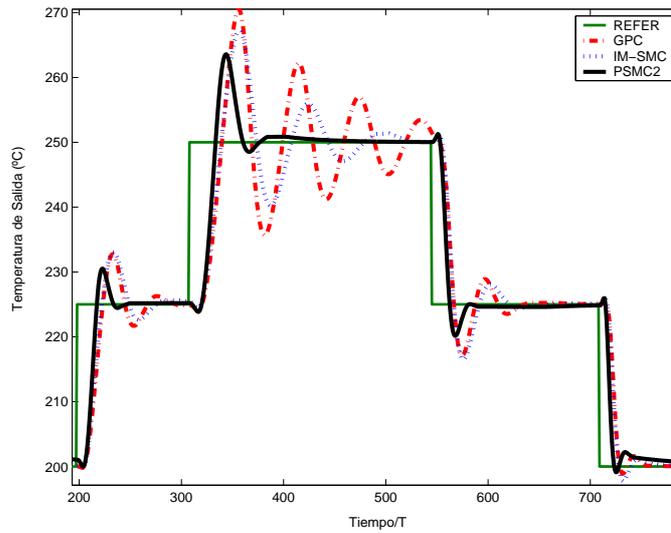


Figura 5.28: Seguimiento en bucle cerrado sin perturbaciones. GPC, IM-SMC y PSMC2.  $K_m = 0.66$ ,  $\tau_m = 3T$ ,  $t_{0m} = 6T$ ,  $T_{in} = 150^\circ C$ ,  $T_{amb} = 18^\circ C$ ,  $Irr = 700W/m^2$ .

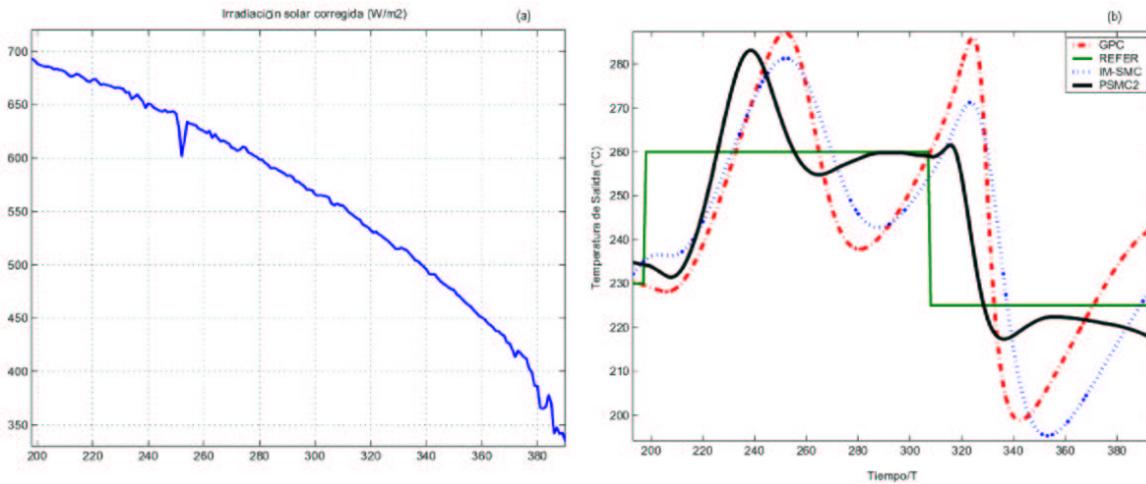


Figura 5.29: (a) Radiación corregida y temperatura de entrada (datos de Marzo de 1993); (b) Seguimiento en bucle cerrado con perturbaciones.

$\tau_{bc}$	De $210^\circ$ a $250^\circ$	De $250^\circ$ a $280^\circ$	De $280^\circ$ a $250^\circ$	De $250^\circ$ a $210^\circ$
GPCr	8	7	5.5	4
IM-SMCr	7.5	7	6.5	3.5
PSMC2r	6	6	4.5	3

Tabla 5.10: Constantes de tiempo en bucle cerrado. Simulaciones con PSMC2. Junio 2003.

### Seguimiento con perturbaciones correspondiente a experimentación en Junio de 2003

El modelo empleado para estas simulaciones fue  $K_m = 0.69$ ,  $\tau_m = 4T$  y  $t_{0m} = 9T$ . Se ajustaron los parámetros, para obtener similares constantes de tiempo en bucle cerrado, a:  $\lambda = 2$ ,  $N = 40$  (GPC);  $\mu_0 = 2.14 \times 10^{-5}$ ,  $\mu_1 = 9.3 \times 10^{-3}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $N = 40$  y  $\delta =$  (PSMC2);  $\lambda = 0.11$ ,  $K_D = 0.1$  y  $\delta = 1$  (IM-SMC). Se escogió  $\lambda = 2$  porque para un  $\lambda$  menor el comportamiento de GPC es aún peor mientras que PSMC2 sigue controlando incluso con una constante de bucle cerrado inferior a la de GPC. En la tabla 5.10 se indican las constantes de tiempo en bucle cerrado y en la figura 5.30 se muestran los comportamientos. En esta simulación los coeficientes IAE correspondientes son: 5517 (GPC), 5761 (IM-SMC) y 3508 (PSMC2). Se utilizaron los datos procedentes del campo de colectores de Tabernas con fecha 18 de junio de 2003, y en la figura 5.31 es posible observar que PSMC2 es más robusto que los otros controladores. En esta simulación se produjeron las perturbaciones en la radiación y temperatura del aceite de entrada mostradas en la figura 5.31 (a). Los coeficientes IAE correspondientes son: 2121 (GPC), 2150 (IM-SMC) y 1812 (PSMC2).

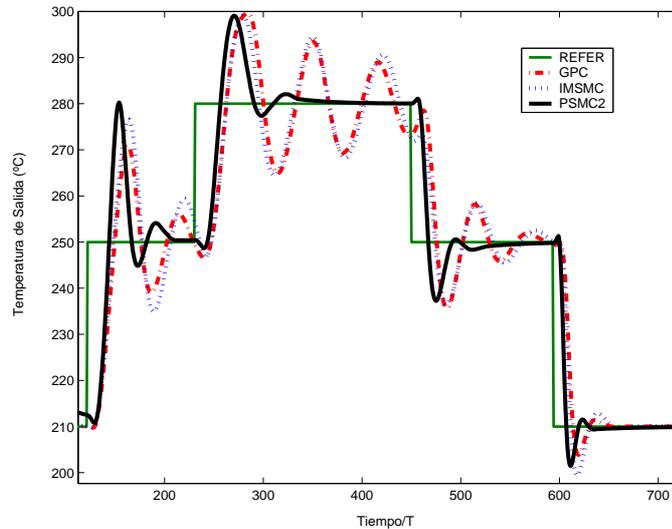


Figura 5.30: Seguimiento en bucle cerrado sin perturbaciones. GPC, IM-SMC y PSMC2.  $K_m = 0.69$ ,  $\tau_m = 4T$ ,  $t_{0m} = 9T$ ,  $T_{in} = 130^\circ C$ ,  $T_{amb} = 28,5^\circ C$ ,  $Irr = 900W/m^2$ .

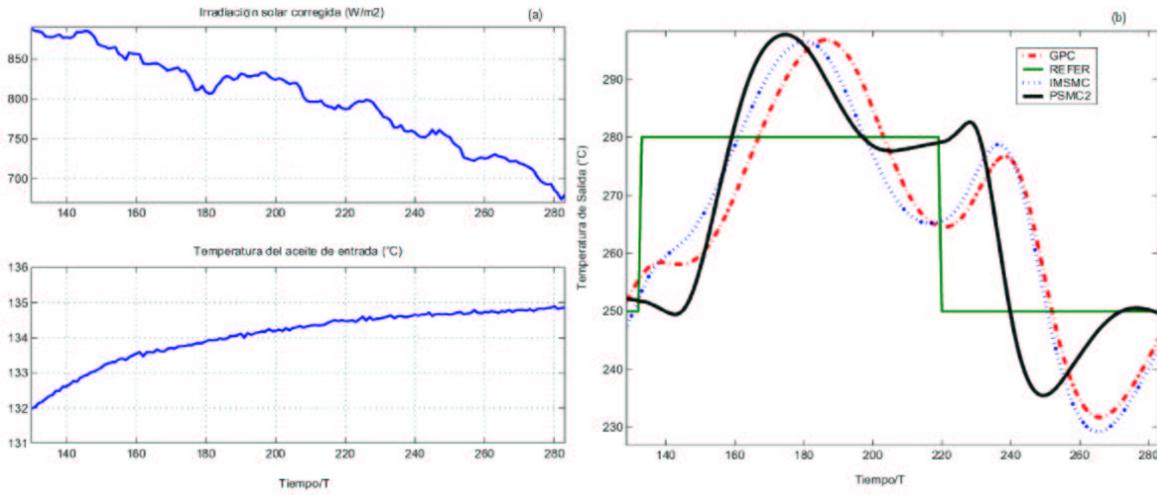


Figura 5.31: (a) Radiación corregida y temperatura de entrada (datos de Junio de 2003); (b) Seguimiento en bucle cerrado con perturbaciones.

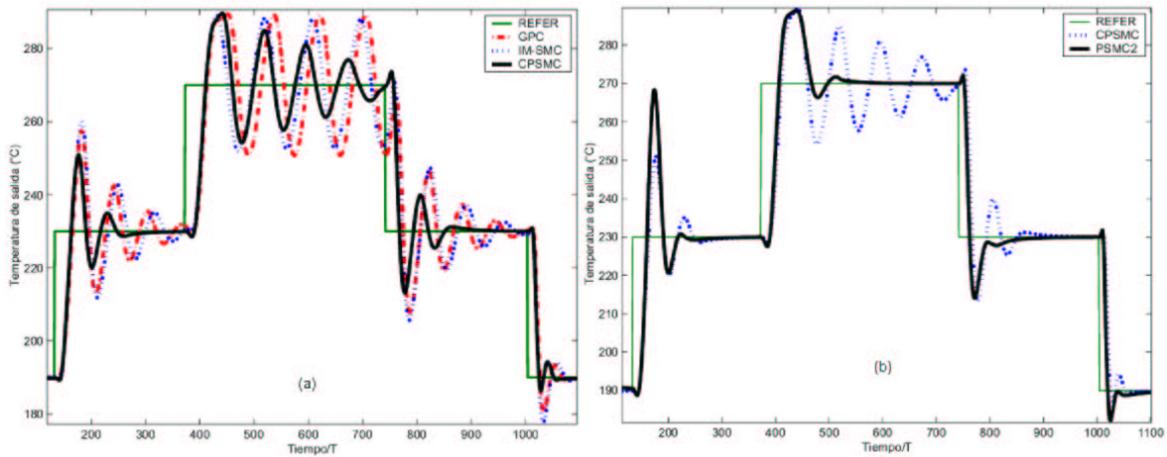


Figura 5.32: Seguimiento en bucle cerrado sin perturbaciones. Septiembre 1991.  $K_m = 0.63$ ,  $\tau_m = 5T$ ,  $t_{0m} = 9T$ ,  $T_{in} = 100^\circ C$ ,  $T_{amb} = 15^\circ C$ ,  $Irr = 800W/m^2$ . (a) GPC, CPSMC y IM-SMC; (b) CPSMC y PSMC2.

## ACUREX con CPSMC

### Seguimiento con perturbaciones correspondiente a experimentación en Septiembre de 1991

El modelo empleado es el propuesto en el apartado 5.2.3. El controlador CPSMC, al igual que PSMC2, es más apropiado para situaciones que requieran un control más agresivo en presencia de errores de modelado y perturbaciones. Para el modelo propuesto del sistema se ajustaron los parámetros a  $\lambda = 10$ ,  $N = 40$ ,  $s_{min} = 0.1$ ,  $\rho = 0.9$  y  $\alpha = -0.9$ . Se ajustaron los parámetros, para obtener similares constantes de tiempo en bucle cerrado, a:  $\lambda = 3$ ,  $N = 40$  (GPC) y  $\mu_0 = 1.6 \times 10^{-5}$ ,  $\mu_1 = 8 \times 10^{-3}$ ,  $\lambda = 3$ ,  $N = 40$  y  $\delta = 1$  (PSMC2). En la tabla 5.11 se indican las constantes de tiempo en bucle cerrado. En la figura 5.32 (a) se compara con IM-SMC, ajustado con  $\lambda = 0,085$ ,  $K_D = 0,1$  y  $\delta = 0,68$ . Se puede observar que ni GPC ni IMSMC pueden estabilizar el sistema en torno a 270 debido a la saturación de la señal de control mientras que PSMC2 sí puede. En la figura 5.32 (b) se compara con PSMC2 obteniendo éste el mejor resultado de todos los controladores ensayados. En la figura 5.33 se pueden ver las respuestas ante varios escalones de seguimiento simulados durante ese mismo periodo de tiempo correspondiente al indicado en 5.2.3. La tabla 5.12 permite comparar los índices IAE para las simulaciones mostradas en la figura 5.33. .

$\tau_{bc}$	De 190° a 230°	De 230° a 270°	De 270° a 230°	De 230° a 190°
GPCr	10.5	9	4.5	4.5
CPSMCr	9	9	4.5	4.5
IM-SMCr	9	9	4.5	4.5

Tabla 5.11: Constantes de tiempo en bucle cerrado. Simulaciones con CPSMC. Septiembre 1991.

$IAE$	Fig 5.32	Fig 5.33 (a)	Fig 5.33 (b)	Fig 5.33 (c)
GPCr	10857	2583	2712	3831
CPSMCr	<b>7433</b>	<b>2112</b>	<b>2084</b>	<b>3323</b>
IM-SMCr	10729	2541	2631	3541
PSMC2r	<b>5473</b>	<b>2153</b>	<b>1914</b>	<b>3312</b>

Tabla 5.12: IAEs de las simulaciones de comparación con CPSMC. Septiembre 1991.

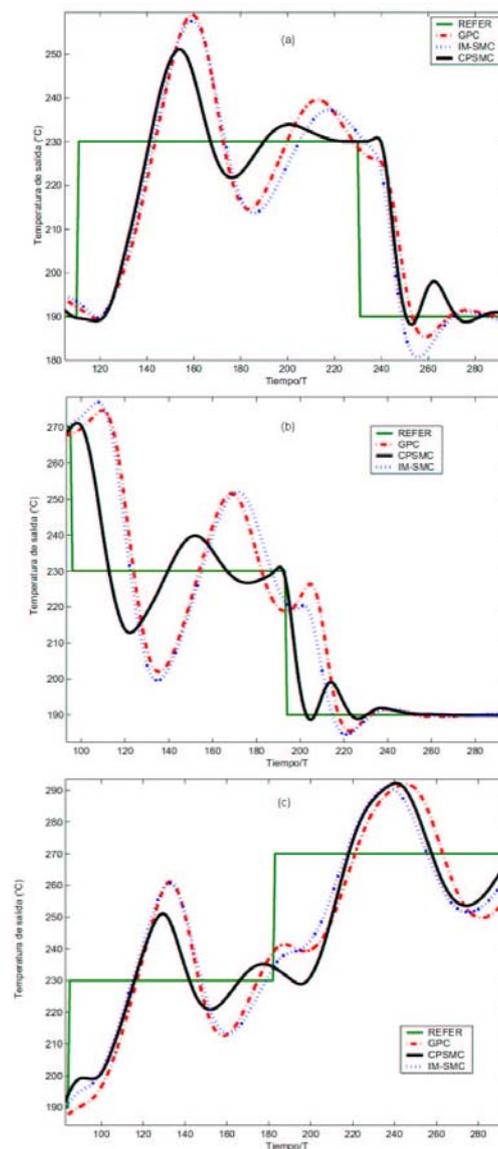


Figura 5.33: Seguimiento en bucle cerrado con perturbaciones (datos de Septiembre de 1991): (a) Escalón a 230 °C; (b) Escalones de bajada; (c) Escalones de subida.

### Seguimiento con perturbaciones correspondiente a experimentación en Marzo de 1993

El modelo empleado es el propuesto en el apartado 5.2.3. Para el modelo propuesto del sistema se ajustaron los parámetros a  $\lambda = 10$ ,  $N = 40$ ,  $s_{min} = 0.5$ ,  $\rho = 0.25$  y  $\alpha = -0.8$ . Se ajustaron los parámetros, para obtener similares constantes de tiempo en bucle cerrado, a:  $\lambda = 2$ ,  $N = 40$  (GPC);  $\lambda = 0,1$ ,  $K_D = 0,1$  y  $\delta = 0,68$ . (IM-SMC). En la tabla 5.13 se indican las constantes de tiempo en bucle cerrado. En la figura ?? se compara CPSMC con GPC y IM-SMC. En esta simulación los coeficientes IAE correspondientes

son: 3240 (GPC), 3474 (IM-SMC) y 2863 (CPSMC). En la figura 5.34 se pueden ver las respuestas ante varios escalones de seguimiento simulados durante ese mismo periodo de tiempo correspondiente al indicado en 5.2.3. En esta simulación los coeficientes IAE correspondientes son: 3933 (GPC), 4019 (IM-SMC) y 3181 (CPSMC)

$\tau_{bc}$	De 200° a 225°	De 225° a 250°	De 250° a 225°	De 225° a 200°
GPCr	10	10.5	6	5
CPSMCr	10.5	10.5	6	6
IM-SMCr	10.5	10.5	5	6

Tabla 5.13: Constantes de tiempo en bucle cerrado. Simulaciones con CPSMC. Marzo 1993.

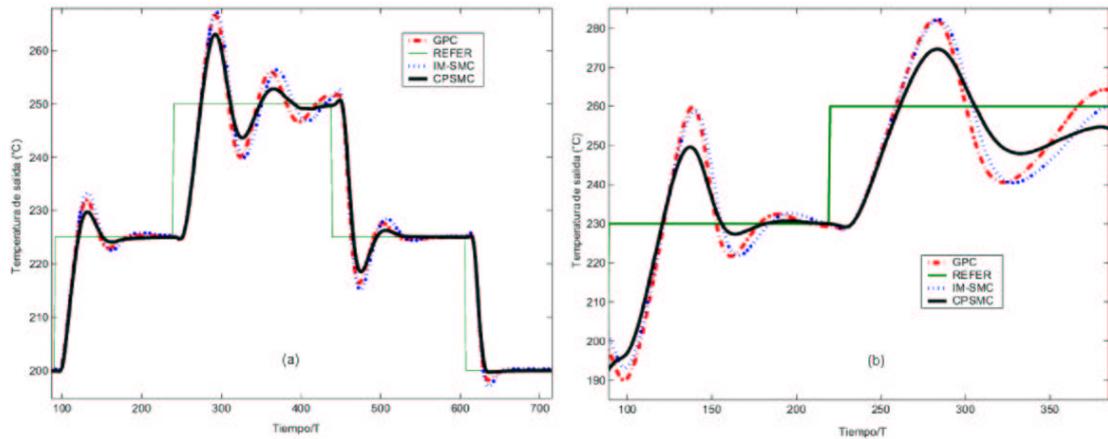


Figura 5.34: (a) Seguimiento en bucle cerrado sin perturbaciones. GPC, CPSMC e IM-SMC.  $K_m = 0.66$ ,  $\tau_m = 3T$ ,  $t_{0m} = 6T$ ,  $T_{in} = 150^\circ C$ ,  $T_{amb} = 18^\circ C$ ,  $Irr = 700W/m^2$ . (b) Con perturbaciones (Marzo de 1993).

### Seguimiento con perturbaciones correspondiente a experimentación en Junio de 2003

El modelo empleado es el propuesto en el apartado 5.2.3. Para el modelo propuesto del sistema se ajustaron los parámetros a  $\lambda = 100$ ,  $N = 40$ ,  $s_{min} = 0.5$ ,  $\rho = 0.25$  y  $\alpha = -0.85$ . Se ajustaron los parámetros, para obtener similares constantes de tiempo en bucle cerrado, a:  $\lambda = 3$ ,  $N = 40$  (GPC);  $\lambda = 0,1$ ,  $K_D = 0,1$  y  $\delta = 0,68$ . (IM-SMC);. En la tabla 5.5 se indican las constantes de tiempo en bucle cerrado. En la figura 5.35 (a) se compara CPSMC con GPC y IM-SMC con coeficientes IAE correspondientes son: 4760 (GPC), 5140 (IM-SMC) y 3453 (CPSMC). En la figura 5.35 (b) se pueden ver las respuestas ante varios escalones de seguimiento simulados durante ese mismo periodo de tiempo correspondiente al indicado en 5.2.3. En esta simulación los coeficientes IAE correspondientes son: 2898 (GPC), 2943 (IM-SMC) y 2386 (CPSMC).

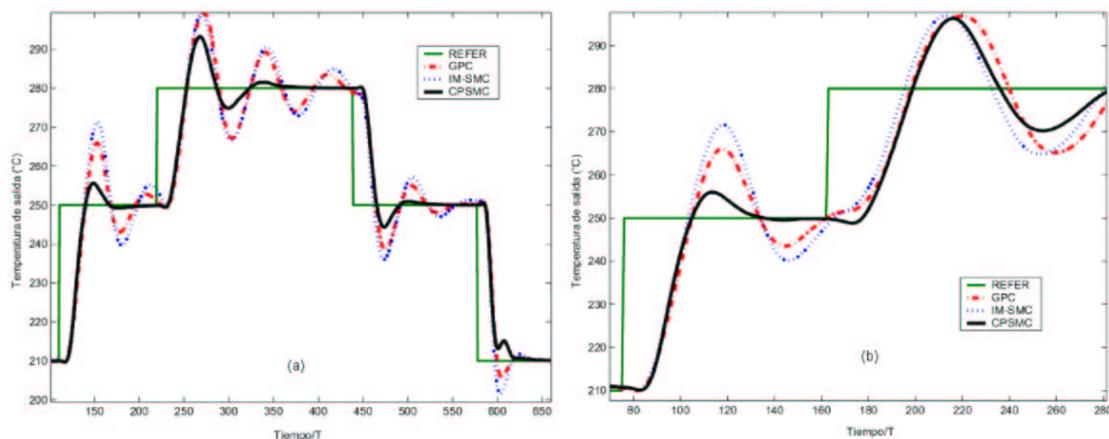


Figura 5.35: (a) Seguimiento en bucle cerrado sin perturbaciones. GPC, CPSMC e IM-SMC.  $K_m = 0.66$ ,  $\tau_m = 3T$ ,  $t_{0m} = 6T$ ,  $T_{in} = 150^\circ C$ ,  $T_{amb} = 18^\circ C$ ,  $Irr = 700W/m^2$ . (b) Con perturbaciones (Junio de 2003).

#### 5.2.4. Experimentos en la planta

Se realizaron varios experimentos en la planta solar cuyos resultados se ilustran en las siguientes figuras. En el primero, figura 5.37 (a), se ajustaron los siguientes parámetros para realizar el control con PSMC1:

- Reflectividad de los espejos : 0.82
- Número de lazos activos : 7
- Tiempo de muestreo  $T$  : 39 s
- Parámetro  $\alpha$  : - 0.075 en el primer escalón de referencia y - 0.095 en el segundo
- Parámetro  $\varepsilon T$  : 0.1

En la figura es posible observar un comportamiento estable para una sintonización más agresiva o más suave del controlador.

En el segundo experimento se realizó el seguimiento de escalones con control PSMC2 y los siguientes parámetros:

- Reflectividad de los espejos : 0.82
- Número de lazos activos : 8

- Tiempo de muestreo  $T$  : 39 s
- Modelo de predicción empleado:  $K_m = 0.66$ ,  $\tau_m = 3T$  y  $t_{0m} = 2T$
- Parámetros de optimización  $\lambda = 1$  y  $N = 40$

Si se compara el resultado con el controlador anterior para un tiempo de subida similar (primer escalón de la figura 5.37 (b)), la diferencia radica en que, una vez alcanzada la referencia por primera vez, el PSMC2 impone un acercamiento suave a dicha referencia, mientras que el PSMC1 se aproxima oscilando en torno a ella. La estimación de la ganancia fue suficientemente buena para no provocar errores en régimen permanente, y por tanto, el control PSMC2 proporciona una respuesta rápida, precisa y poco oscilante, aunque con un pico de sobreoscilación mayor.

Un tercer experimento muestra el seguimiento con control CPSMC en presencia de perturbaciones en la radiación. Los parámetros fueron:

- Reflectividad de los espejos : 0.82
- Número de lazos activos : 8
- Tiempo de muestreo  $T$  : 39 s
- Parámetros  $\alpha = -0.8$ ,  $s_{min} = 0.5$ ,  $\rho = 0.25$ .
- Modelo de predicción empleado:  $K_m = 0.69$ ,  $\tau_m = 4T$  y  $t_{0m} = 2T$
- Parámetros de optimización  $\lambda = 10$  y  $N = 40$

En la figura 5.37 (c) se ilustra en primer lugar el seguimiento en presencia de perturbaciones en la radiación. El CPSMC consigue una respuesta con un tiempo de asentamiento similar al del experimento con PSMC2, pero más suave y sin sobreoscilación. Además se logra el rechazo de perturbaciones, incluso de grandes picos como se muestra en el último escalón de la figura. Otro experimento en las mismas condiciones que el anterior excepto con 9 lazos activos y  $s_{min} = 0.1$ ,  $\rho = 0.4$  (sintonización más robusta) se muestra en la figura 5.38 (a) en el que se consigue el seguimiento con similar tiempo de subida y el rechazo de mayores perturbaciones en la radiación.

En el experimento de la figura 5.38 (b) se puede observar que al reducir el parámetro  $\alpha$  a -0.7 ha disminuido el tiempo de subida en el escalón de las 13.8 horas. Otra perturbación que se introdujo fue cambiar el aceite de entrada al campo obteniéndolo del fondo del tanque (aceite más frío) que de la superficie. En la referencia de 250°C, CPSMC logra rechazar esta perturbación y regular la temperatura de salida, aunque de forma oscilante.

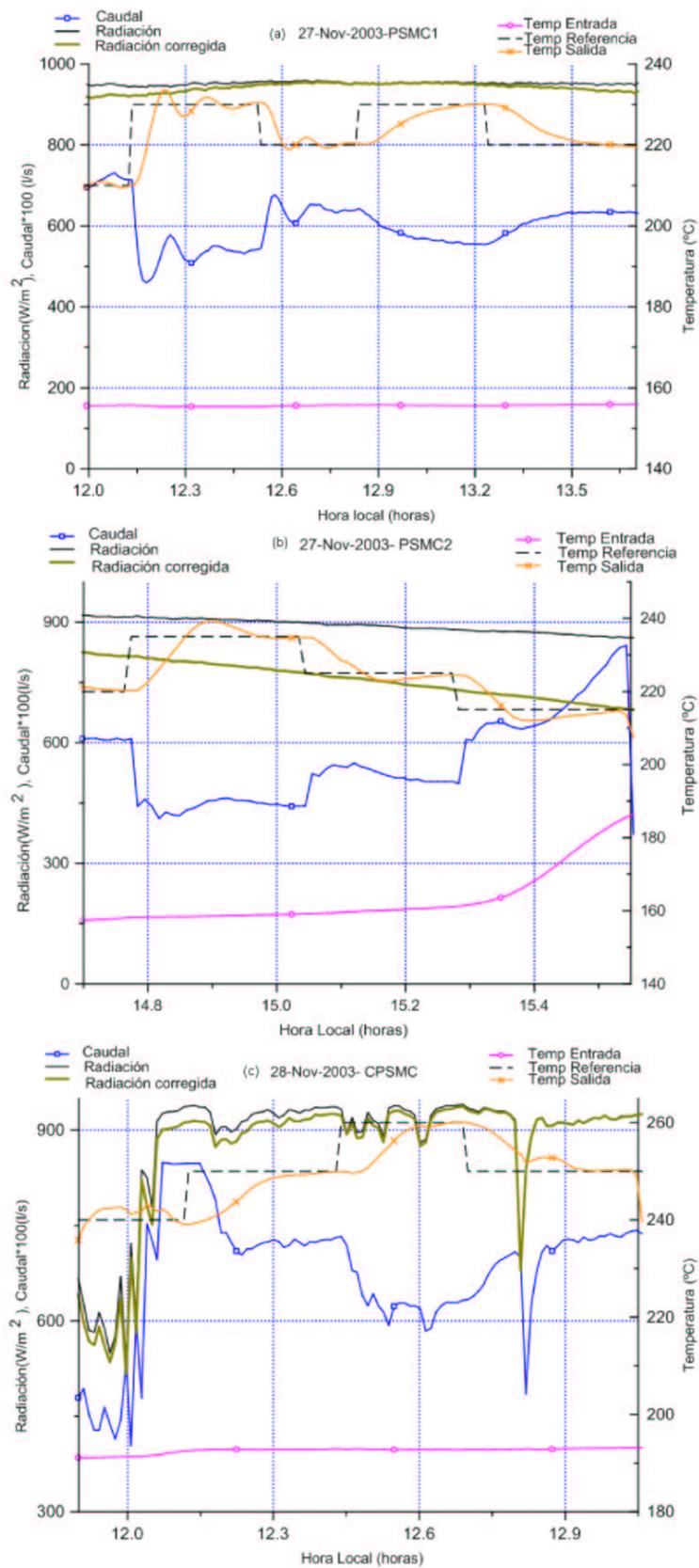


Figura 5.36: Experimentos de seguimiento en la planta solar de Tabernas: (a) PSMC1; (b) PSM2; (c) CPSMC y  $\alpha = -0.8$ .

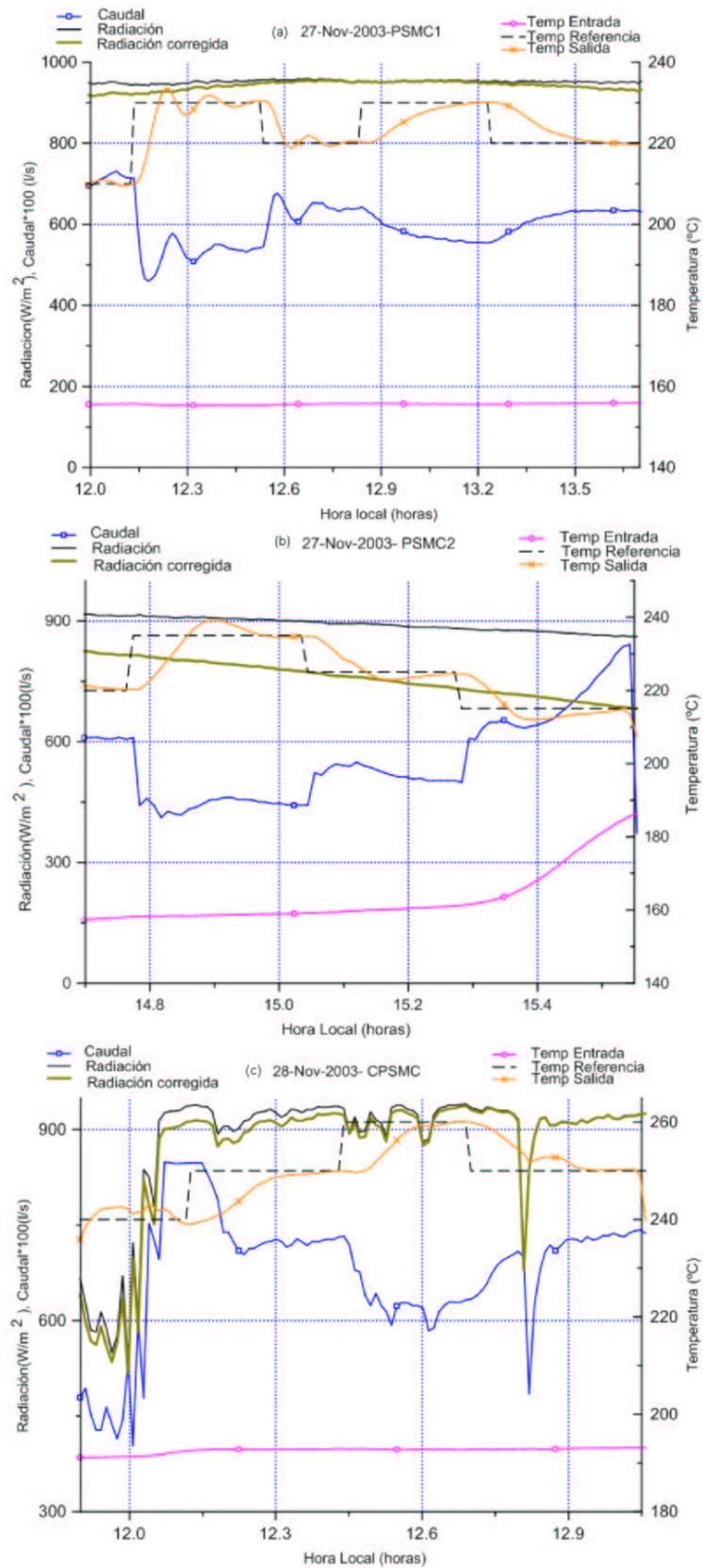


Figura 5.37: Experimentos de seguimiento en la planta solar de Tabernas: (a) PSMC1; (b) PSM2; (c) CPSMC y  $\alpha = -0.8$ .

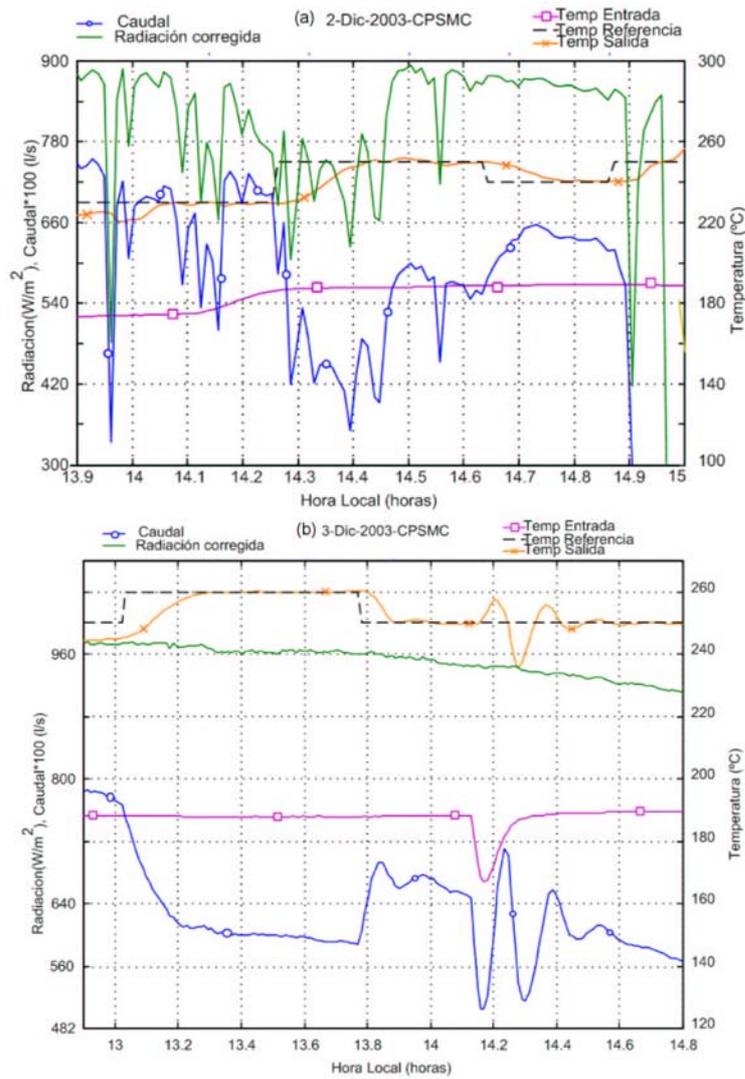


Figura 5.38: Experimentos de seguimiento con CPSMC en la planta solar de Tabernas: (a)  $\alpha = -0.8$ ; (b)  $\alpha = -0.7$ .

# Capítulo 6

## Aportaciones y desarrollos futuros

En este capítulo se van a exponer, a modo de conclusión, las aportaciones originales de esta tesis y se indicarán algunas líneas de investigación abiertas para continuar los desarrollos de hibridación de los conceptos de predicción y modos deslizantes.

En esta tesis:

1. Se han diseñado tres leyes de control a partir de leyes de Control por Modo Deslizante y de control predictivo generalizado con representación externa. Dos de ellas se han desarrollado en el dominio del tiempo discreto para sistemas con retardo y superficie predicha pseudodeslizante del tipo diferencial. Se ha conseguido forzar un modo pseudodeslizante imponiendo una ley de alcanzabilidad contractiva en función de una superficie predicha. La tercera ley se ha diseñado mediante la discretización de una ley equivalente continua y la adición de la ley GPC afectando a una función no lineal de una superficie predicha pseudodeslizante del tipo íntegro-diferencial. La ganancia de la función sigmoide en la ley de alcanzabilidad se calcula con la ley de control GPC, de forma que optimiza el comportamiento en el modo de alcance de la superficie deslizante, conservando el alto grado de robustez de la ley SMC.
2. Se han propuesto reglas sencillas de sintonización del tipo Ziegler-Nichols para los parámetros de los controladores diseñados. Para ello, se ha empleado la minimización de un índice de desempeño, que a su vez garantiza cierto grado de robustez, y se han probado varias técnicas de interpolación de funciones y comprobado su validez.
3. Se ha estudiado la estabilidad nominal de una familia de sistemas lineales realimentados con las leyes de control propuestas, desarrollando las correspondientes representaciones internas de los sistemas de control. La estabilidad de los sistemas en bucle cerrado sin incertidumbres de modelado ni restricciones está garantizada

cuando se sintonizan los parámetros de forma que satisfagan ciertas inecuaciones aportadas. Se han realizado análisis de las condiciones de admisibilidad de los sistemas sin incertidumbres de modelado, determinando la región del espacio de estados que garantiza trayectorias admisibles y convergentes al origen con restricciones en el estado y en la señal de control. Además, se ha estudiado la estabilidad robusta, es decir, con incertidumbres de modelado estructuradas. Se han empleado la representación y la teoría matemática asociada a las desigualdades matriciales lineales para determinar el máximo error de modelado en los tres parámetros discretos del sistema con el que se garantiza estabilidad en bucle cerrado. Para uno de los controladores, se han propuesto dos herramientas de análisis mediante exploración y simulación de la realimentación y control de la familia de procesos modelados con incertidumbres estructuradas y no estructuradas, para determinar radios mínimos de error en los tres parámetros continuos del modelo que proporcionan estabilidad garantizada.

4. Se han simulado los controladores con cuatro plantas: un sistema de POMTM con o sin un polo adicional como incertidumbre no estructurada; un sistema de tercer orden y retardo puro; un sistema de cuarto orden y retardo puro; un sistema de fase no mínima. Los resultados de los controladores diseñados en esta tesis son iguales o mejores que los obtenidos con GPC y SMC o IM-SMC en términos de IAE, con modelos nominales y con incertidumbres paramétricas en el modelado.
5. Se han aplicado los controladores para el seguimiento y regulación de temperatura del agua de salida de un intercambiador de calor perteneciente a una planta piloto situada en el Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Escuela Superior de Ingenieros de Sevilla. Se ha diseñado la pantalla de explotación en el entorno de programación CUBE que permite al usuario interactuar con las variables del proceso en tiempo real. Se han programado las secuencias y la base de datos para aplicar 8 controladores al proceso, entre ellos PID, GPC y SMC. Se ha ejecutado el control para seguimiento y rechazo de perturbaciones con los 8 controladores y se han realizado 10 experimentos de seguimiento con diversas incertidumbres paramétricas. Se han comparado los resultados y extraído conclusiones favorables a los controladores propuestos en esta tesis.
6. Se han aplicado los controladores para el seguimiento y regulación de temperatura del aceite de salida del campo de colectores de radiación solar de la planta de Tabernas en Almería. Se han programado las funciones para aplicar los controladores en lenguaje C y realizado varias simulaciones con varios modelos de POMTM empleando 3 archivos de datos experimentales de radiación, temperatura del aceite de entrada al campo y temperatura ambiente. Se han realizado varios experimentos de seguimiento y rechazo de perturbaciones en la radiación y en la temperatura del aceite de entrada al campo con varias sintonizaciones de los controladores obteniéndose buenos resultados con los tres controladores propuestos.

Como futuros desarrollos en la línea de investigación abierta de la hibridación del control predictivo y el Control por Modo Deslizante y aspectos que completen el trabajo presentado en esta tesis se proponen las siguientes ideas. En primer lugar se plantea la extensión de los análisis realizados a la aplicación a sistemas multivariables. Otro campo que queda sin explorar es el desarrollo para la aplicación a sistemas con integradores (depósitos). Y otra línea abierta es la formulación y síntesis de leyes de control en el espacio de estados que garanticen la alcanzabilidad óptima de conjuntos objetivo que pertenezcan a una superficie deslizante, a partir de los estudios de Bertsekas [137], Keerthi y Gilbert [138].



# Capítulo 7

## Apéndices

### 7.1. Programa para el control en CUBE

En este apéndice se incluye, a modo de ejemplo, un archivo fuente de extensión SRC en lenguaje ITER II para aplicar el control PSMC2 en el entorno de desarrollo, control y supervisión CUBE 2.03.03 de ORSI.

```
STARTPROG
```

```
extern computel() ;Función que calcula los parámetros del GPC
```

```
LON_MAX_VEC EQU 100
```

```
RETARDO_MAX EQU 30
```

```
SEQ(23,1,)
```

```
LOCAL INTEGER I
```

```
LOCAL FLOAT ugpc
```

```
LOCAL INTEGER h
```

```
TEMPORIZADOR=TEMPORIZADOR +1
```

```
IF (TEMPORIZADOR=FTOI(T*10.)) THEN

    TEMPORIZADOR=0

; Introduccion de una perturbación en la bomba

    FOR I=1 TO 19

        e[I]=e[I-1]

    ENDFOR

    e[0]=R-tt4_pvt

    IF (ABSF(e[19]-e[0])<0.40) THEN

        cont=cont+1

        acume=0.

    ENDIF

    IF (cont=225) THEN

        bomba=0B

        cont=0

    ENDIF

    cont2=cont2+1

    IF (cont2=10) THEN

        bomba=1B

        cont2=0

    ENDIF

; Actualizacion de Parametros del controlador PSMC
```

$$KD = (0.51 * (T0/L0)^{0.76}) / ABSF(Kp)$$

$$\mu1 = (L0 + T0) / (L0 * T0)$$

$$\mu0 = \text{SQR}((L0 + T0) / (L0 * T0)) / 4.$$

$$\text{delta} = 0.68 + 0.12 * ABSF(Kp) * \mu1 * KD$$

$$A = \text{EXP}(-T/T0)$$

$$B0 = Kp * (1. - A)$$

$$D = \text{FTOI}(L0/T)$$

$$G = B0 / (1.0 - A)$$

computel()

;Predictor

; -pv es process variable

YP2[0]=tt4\_pvt ; tt4\_pvt es con filtrado de la señal para quitar ruidos

YP2[0]=YP2[0]-top

YP2[1]=(1.0+A)\*YP2[0]-A\*Y12+B0\*(U2[D]-U2[D+1])

FOR I=2 TO D

YP2[I]=(1.0+A)\*YP2[I-1]-A\*YP2[I-2]+B0\*(U2[D-I+1]-U2[D-I+2])

ENDFOR

; solo con la respuesta libre se calculan dos predicciones mas

yp2[D+1]=(1.+A)\*yp2[D] - A\*yp2[D-1]

yp2[D+2]=(1.+A)\*yp2[D+1] - A\*yp2[D]

;Filtrado del vector predictor YP[I]

```

    YP2_pv[0]=YP2[0]

FOR I=1 TO D+2

    YP2_pv[I]=LOWPASS(YP2[I],ctes_filtrop,YP2_pv[I])

ENDFOR

;Determinación de U del GPC

;Si hago el filtrado anterior, tengo que cambiar YP por YP_pv

IF (D=0) THEN

    Ugpc=U2[1]+(L1*YP2_pv[D]+L2*Y12+L3*(R-top))/G

ELSE

    Ugpc=U2[1]+(L1*YP2_pv[D]+L2*YP2_pv[D-1]+L3*(R-top))/G

ENDIF

; ley de control PSMC

ueq =yp2_pv[0]*(1.-mu0*L0*T0)/Kp + mu0*L0*T0*(R-top)/Kp ; como smc

acume=acume+R-top-yp2_pv[D+1]

; Cálculo de Sp(k) = Lan0*int(e)+Lan*e(k+d+1)+(e(k+d+2)-e(k+d+1))/T

; predicha en k+d+1

sp = mu0*acume*T + mu1*(R-top-yp2_pv[D+1])+( R-top-yp2_pv[D+2]-R+top+yp2_pv[D+1]
)/T;

IF (ra<>r) THEN

    aux=ra

    cont=0

    cont2=0

```

```

        cont3=cont3+1

ENDIF

IF (cont3<>0) THEN

        cont3=cont3+1

        us =ABSF(ugpc)*( sp/(ABSF(sp)+delta)+ ABSF(aux-r)*0.05 );/ABSF(aux)
)

IF (cont3=D)THEN

        cont3=0

        cont=0

        cont2=0

ENDIF

ELSE

        us =ABSF(ugpc)*(sp/(ABSF(sp)+delta)) ;las r futuras se suponen iguales a
las presentes

ENDIF

IF (AUTO=1) THEN ; Control automático de la planta

        v8_int= ueq + us + vop ; V8_int se convierte a V8 en la secuencia 10, vop es el
control en el punto de operación

ELSE ; if auto=0 Control manual

        acume=0.

        sp=0.

ENDIF ; if auto=1 ENDIF

; Actualización de variables

```

```

y12=yp2-pv[0]

ra=r

FOR I=0 TO LON_MAX_VEC-2

    U2[LON_MAX_VEC-1-I]=U2[LON_MAX_VEC-1-I-1]

ENDFOR

U2[0]=V8_int-vop

ENDIF ; solo calculos cada T

ENDSEQ

ENDPROG

```

## 7.2. Programas para la simulación del control del campo ACUREX

En la función INICSOLAR (del fichero ACU1.C), que inicia las variables globales del sistema, en nuestro caso hay que incluir el vector de señales de control pasadas  $ur$  y los parámetros del modelo POMTM  $K$ ,  $tao$ ,  $to$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $T$ :

```

ur[0]=tff;

for (i=1; i<=14; i++) /* supuesto un retardo máximo de la planta de 15 */

    ur[i]=0.;

yant = 0.;

K = 0.63;

tao = 5*39;

to = 9*39;

```

```
T = 39;
```

```
a = exp(-T/tao);
```

```
b = K*(1-a);
```

```
d = round( to/T);
```

Se añadieron secciones pasivas al final del modelo del sistema con el fin de aumentar el retardo del sistema a controlar e incorporar mayores incertidumbres de modelado. Para ello se modificó el fichero ACU1.C que contiene el cuerpo de las funciones empleadas para la simulación. Se estableció en la función NVL11, que simula el comportamiento del campo de colectores, la variable que almacena el n<sup>o</sup> de metros de longitud de la última sección pasiva a 120 metros (variable datos2). El n<sup>o</sup> de trozos en que se divide la última sección pasiva para el balance energético se estableció en 40 (variable datos1) en lugar de 10. La variable *paso* que representa la suma de trozos de secciones pasa a valer 123. Y la variable para controlar que representa la medida de temperatura del aceite es vniv[141] en lugar de vniv[111].

A continuación se incluyen en esta memoria de tesis las funciones escritas en lenguaje C que generan las señales de control correspondientes a cada una de las estrategias ensayadas.

### Función PSMC1

Las variables globales que se han de incluir para la simulación son:

```
float tref, trff, trfff, y, yant, ur[15], d, a, b, T;
```

```
/* Se supuso que la planta va a tener un retardo menor o igual a 15 para la reserva de memoria */
```

A continuación se muestra el cuerpo de la función empleada:

```
void psmc1(void)
```

```
{
```

```
float c1,c2,c3,yd[15], ypd, ypdm1, skm1,sig,f, eps, alfa, beta, delta,y;
```

```
int i,j;
```

```
/* PARAMETROS DEL CONTROLADOR */

beta = 0.1;

alfa = -0.95*beta;

eps =.1/T;

delta = 0.1;

y=vniv[141]; /* medida de temperatura */

/* PREDICTOR */

yd[0]=(1+a)*y - a*yant + b*(ur[d-1]-ur[d]);

yd[1]=(1+a)*yd[0] - a*y + b*(ur[d-2]-ur[d-1]);

for (i=2; i<=d-1; i++)

    yd[i]=(1+a)*yd[i-1] - a*yd[i-2] + b*(ur[d-i]-ur[d-i+1]);

ypd = yd[d-1];

ypdm1 = yd[d-2];

/* LEY DE CONTROL */

skm1 = beta*(tref-ypd)+alfa*(tref-ypdm1);
```

```
sig = fabs(skm1)/(fabs(skm1)+delta);

f = (1.-eps*T)*(1.-sig);

c1 = (f-alfa/beta -1. -a)/b;

c2 = (a + alfa*f/beta)/b;

c3 = -c1 -c2;

/* referencia prefiltrada, temperatura para el controlador prealimentado */

trfff = trfff + c1*ypd + c2*ypdm1 + c3*tref;

/* SATURACION Y FILTRO DE tff */

tff = 0.5*trfff + 0.5*tff;

if(tff>350)    tff=350.;

if(tff<100)   tff=100.;

/* ACTUALIZACION DE VARIABLES */

yant = y;

for (j=d; j>=1; j-)

    ur[j]=ur[j-1];

    ur[0]= tff;

}
```

Los parámetros del controlador se ajustan en la función PSMC1: con  $\text{eps}=[0.1,1]/T$ , proporcionando 0.1 mayor robustez; con  $\text{alfa}=-[0.5,0.99]^{\text{beta}}$ , proporcionando 0.5 el comportamiento más agresivo.

## Función PSMC2

En la función INICSOLAR (del fichero ACU1.C), hay que incluir además del modelo POMTM los parámetros de PSMC2.  $\delta$  se escoge en  $[0.7,3]$  y  $\lambda$  en  $[1,30]$ , proporcionando  $\delta = 3$  y  $\lambda = 30$  los resultados más robustos y más suaves. Las matrices para el cálculo de la ley GPC a saber, KGPC, F y GP, se calcularon fuera de línea con MATLAB y fueron almacenadas en tres ficheros de texto.

```

/* PARÁMETROS DE PSMC2 */

mu1 = (to+tao)/(to*tao);

mu0 = pow(mu1,2)/4;

delta = 1.;

acume =0.;

LAN=3;

N = 40; // menor que 50

pd=fopen("kgpc.txt","rt");

for (i=0;i<N;i++)

    for (j=0;j<N;j++)

        {
            fscanf(pd," %f",&auxi);

            KGPC[i][j]=auxi;

        }

fclose(pd);

pd=fopen("f.txt","rt");

```

```

for (i=0;i<N;i++)

    for (j=0;j<2;j++)

        {
            fscanf(pd," %f",&auxi);

            F[i][j]=auxi;

        }

fclose(pd);

pd=fopen("gp.txt","rt");

for (i=0;i<N;i++)

    for (j=0;j<2;j++)

        {
            fscanf(pd," %f",&auxi);

            gp[i][j]=auxi;

        }

fclose(pd);

```

Las variables globales que se han de incluir para la simulación son:

```

float skp, tref, trff, trfff, y, yant, ur[15], a, b, d, K, to, tao, T, KD, mu0, mu1, delta, N,
KGPC[50][50], gp[50][15], F[50][2], LAN, acume;

```

A continuación se incluye el cuerpo de la función empleada:

```

void psmc2(void)

{

    float sig,y, ugpc, ueq, suma, inc[20], f[100], incu;

    int i,j;

```

```

y=vniv[141];

/* LEY DE CONTROL */

for (j=0;j<d;j++)

    inc[j]=ur[j]-ur[j+1];

suma=0.;

for (i=0;i<N;i++)

{   for (j=0; j<d;j++)

        {   suma=suma+gp[i][j]*inc[j];   }

        f[i] = F[i][0]*y + F[i][1]*yant + suma;

}

ueq = y*(1. - mu0*to*tao)/K + mu0*to*tao*tref/K;

acume = acume + tref-f[0];

skp = mu0*acume*T + mu1*(tref-f[0]) + (tref-f[1]-tref+f[0])/T;

sig = skp/(fabs(skp)+delta);

incu = 0.;

for (i=0;i<N;i++)

    incu = incu - KGPC[1][i]*(f[i]-tref);

ugpc = trfff + incu;

trfff = ueq + fabs(ugpc)*sig;

/* SATURACION Y FILTRO DE tff */

```

```

tff = 0.5*trfff + 0.5*tff;

if(tff>350)    tff=350.;

if(tff<100)   tff=100.;

/* ACTUALIZACION DE VARIABLES */

yant = y;

for (j=d; j>=1; j-)

ur[j]=ur[j-1];

ur[0]= tff;

}

```

### Función CPSMC

En la función INICSOLAR (del fichero ACU1.C), hay que incluir además del modelo POMTM los parámetros de CPSMC.  $s_{min}$  se escoge en  $[0.1,0.5]$ ,  $\alpha$  en  $[-0.99,-0.5]$  y  $\lambda$  en  $[0.8, \infty]$ , proporcionando  $s_{min} = 0.1$ ,  $\alpha = -0.99$  y  $\lambda \rightarrow \infty$  las simulaciones más robustas. Las matrices Psins y Krm se calcularon fuera de línea con MATLAB y fueron almacenadas en dos ficheros de texto.

```

/* PARÁMETROS DE CPSMC */

smin =0.1;

cota = 1. - smin;

beta = 1.;

eps = 0.45/T;

alfa = -0.9;

```

```

LAN = 10.;

N = 40; // menor que 50

/* Parámetros calculados fuera de linea */

pd=fopen("psins.txt","rt");

for (i=0;i<N;i++)

for (j=0;j<2;j++)

{
    fscanf(pd,"%f",&auxi);

    Psins[i][j]=auxi;

}

fclose(pd);

pd=fopen("krm.txt","rt");

for (i=0;i<N;i++)

for (j=0;j<2;j++)

{
    fscanf(pd,"%f",&auxi);

    Krm[i][j]=auxi;

}

fclose(pd);

```

Las variables globales que se han de incluir para la simulación son:

```

float smin, cota, beta, eps, alfa,sm, super,tref, trff, trfff, y, yant, ur[15], a, b, d, K, to,
tao, T, N, Psins[50][2], Krm[50][2], LAN; /* Se supone que la planta va a tener un retardo
menor o igual a 15 para la reserva de memoria */

```

A continuación se incluye el cuerpo de la función empleada:

```
void cpsmc(void)

{   float y,yd[15],ypd,ypdm1, mins, aux, l1, l2, l3, suma[50][2], inc[20], f[100], incu;

    int i,j;

    y=vniv[141];

    /* PREDICTOR */

    yd[0]=(1+a)*y - a*yant + b*(ur[d-1]-ur[d]);

    yd[1]=(1+a)*yd[0] - a*y + b*(ur[d-2]-ur[d-1]);

    for (i=2; i<=d-1; i++)

        yd[i]=(1+a)*yd[i-1] - a*yd[i-2] + b*(ur[d-i]-ur[d-i+1]);

    ypd = yd[d-1];

    ypdm1 = yd[d-2];

    /* LEY DE CONTROL */

    super = alfa*(tref-yant) + beta*(tref-y);

    if(fabs(super)<=cota)

        aux=fabs(super);

    else

        aux=cota;

    sm = smin+aux;

    for(i=0;i<N;i++)
```

```
for(j=0;j<=1; j++)

    suma[i][j] = Psins[i][j]*sm + Krm[i][j];

l1 = suma[0][0];

l2 = suma[0][1];

l3=-l1-l2;

trfff = trfff + l1*ypd + l2*ypdm1 + l3*tref;

/* SATURACION Y FILTRO DE tff */

tff = 0.5*trfff + 0.5*tff;

if(tff>350)    tff=350.;

if(tff<100)   tff=100.;

/* ACTUALIZACION DE VARIABLES */

yant = y;

for (j=d; j>=1; j-)

ur[j]=ur[j-1];

ur[0]= tff;

}
```

# Bibliografía

- [1] J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*. New Jersey: Prentice-Hall, 1991.
- [2] V. Itkis, *Control Systems of Variable Structure*. New York: Wiley, 1976.
- [3] V. I. Utkin, “Variable structure systems with sliding mode,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22, pp. 212–222, 1977.
- [4] J. E. Slotine, “Sliding controller design for non-linear systems,” *International Journal of Control*, vol. 40, pp. 421–434, 1984.
- [5] C. Edwards and S. K. Spurgeon, *Sliding Mode Control. Theory and Applications*. Taylor and Francis, London, 1998.
- [6] J. Y. Hung, W. Gao, and J. C. Hung, “Variable structure control: A survey,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 40, no. 1, pp. 2–21, 1993.
- [7] V. I. Utkin, “Equations of sliding mode in discontinuous systems,” *Automation and Remote Control*, vol. I y II, pp. (2) 211–219 (12) 1897–1907, 1972.
- [8] ———, “Variable structure systems: Present and future,” *Automation and Remote Control*, vol. 44, pp. 1105–1120, 1984.
- [9] ———, *Sliding Mode Control and Optimization*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1992.
- [10] J. E. Slotine and S. S. Sastry, “Tracking control of non-linear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators,” *International Journal of Control*, vol. 38, no. 2, pp. 465–492, 1983.
- [11] O. Camacho and C. Smith, “Sliding mode control: An approach to regulate non-linear chemical processes,” *ISA Transactions*, vol. 39, pp. 205–218, 2000.
- [12] O. E. Camacho, “A new approach to design and tune sliding mode controllers for chemical processes.” Ph.D. dissertation, University of South Florida, Tampa, Florida., 1996.

- [13] A. I. Propoi, "Use of linear programming methods for synthesising sampled-data automatic systems," *Automation and Remote Control*, vol. 24, pp. 837–844, 1963.
- [14] S. J. Quin and T. A. Badgwell, "An overview of industrial model predictive control technology," in *Proceedings of the Conference on Chemical Process Control, Tahoe City, USA*, 1996.
- [15] H. Takatsu and T. Itoh, "Future needs for control theory in industry - report of the control technology survey in japanese industry," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 7, no. 3, pp. 298–305, 1999.
- [16] J. E. Normey-Rico and E. F. Camacho, "Robustness effects of a prefilter in a smith predictor-based generalized predictive controller," *IEE Proceedings on Control Theory Applications*, vol. 146, no. 2, pp. 179–185, 1999.
- [17] J. Gómez-Ortega and E. F. Camacho, "Neural network GPC for mobile robots path tracking," *Robotics and Computer Integrated Manufacturing*, vol. 11, no. 4, pp. 271–278, 1994.
- [18] D. R. Ramírez, D. Limón-Marruedo, J. Gómez-Ortega, and E. F. Camacho, "Genetic algorithm approach for nonlinear multivariable MBPC mobile robot navigation," *Proceedings of the 1st NICONET Workshop on Numerical Software in Control Engineering*, 1998.
- [19] J. Gómez-Ortega, D. R. Ramírez, D. Limón-Marruedo, and E. F. Camacho, "Genetic algorithms based predictive control for mobile robot navigation in changing environments," in *Proceedings of the European Control Conference*, 2001.
- [20] J. E. Normey-Rico, "Predicción para control," Ph.D. dissertation, Universidad de Sevilla, España, 1999.
- [21] D. R. Ramírez, "Control predictivo MIN-MAX: Análisis, caracterización y técnicas de implementación," Ph.D. dissertation, Universidad de Sevilla, España, 2002.
- [22] D. L. Marruedo, "Control predictivo de sistemas no lineales con restricciones: Estabilidad y robustez," Ph.D. dissertation, Universidad de Sevilla, España., 2002.
- [23] D. W. Clarke, C. Mohtadi, and P. S. Tuffs, "Generalized predictive control. part i. the basic algorithm." *Automatica*, vol. 23, no. 2, pp. 137–148, 1987.
- [24] ———, "Generalized predictive control. part II. the basic algorithm." *Automatica*, vol. 23, no. 2, pp. 137–148, 1987.
- [25] E. F. Camacho and C. Bordóns, *Model Predictive Control*. London: Springer-Verlag, 1999.
- [26] S. V. Emelyanov, *Variable Structure Control Systems*. Moscow, Nauka (in Russian) and Oldenburg Verlag Munchen-Wien (in German)., 1967.

- [27] E. A. Barbashin and E. I. Gerashchenko, "Forced sliding regimes in automatic control systems," *Differential equations*, vol. 1, no. 1, pp. 16–20, 1965.
- [28] E. A. Barbashin, *Introduction to the Theory of Stability*. Moscow, Nauka (in Russian 1967) and Wolters-Noordhoff Publishing, The Netherlands (in English 1970).
- [29] A. F. Filippov, "Differential equations with discontinuous right-hand side," *Amer. Math. Soc. Translations*, 42, pp. 199–231, 1964.
- [30] B. Drazenovic, "The invariance conditions in variable structure systems," *Automatica*, vol. 5, no. 3, pp. 287–295, 1969.
- [31] H. Sira-Ramírez, "Structure control of nonlinear systems," *International Journal of Systems Sciences*, vol. 18, pp. 1673–1689, 1989.
- [32] G. E. Young and S. Rao, "Robust sliding-mode control of nonlinear process with uncertainty and delay," *Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control*, vol. 109, pp. 202–208, 1987.
- [33] R. A. DeCarlo, S. H. Zak, and G. P. Matthews, "Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial," *Proceedings of IEEE*, vol. 76, pp. 4–24, 1988.
- [34] A. I. Bhatti, S. K. Spurgeon, and X. Y. Lu, "A nonlinear sliding mode control design approach based on neural network modelling," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 9, pp. 397–423, 1999.
- [35] B. Yoo and W. Ham, "Adaptive fuzzy sliding mode control of nonlinear system," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 6, no. 2, pp. 315–321, 1998.
- [36] W. Gao and J. C. Hung, "Variable structure control of nonlinear systems: A new approach," *IEEE Transactions on industrial electronics*, vol. 40, no. 1, pp. 45–55, 1993.
- [37] R. J. Mantz, H. D. Battista, and P. Puleston, "A new approach to reaching mode of VSS using trajectory planning," *Automatica*, vol. 37, pp. 763–767, 2001.
- [38] R. Zhang, Y. Chen, Z. Sun, F. Sun, and H. Xu, "Path control of a surface ship in restricted waters using sliding mode," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 8, no. 4, pp. 722–731, 2000.
- [39] J. R. Zhang, S. J. Xu, and A. Rachid, "Sliding mode controller for automatic path tracking of vehicles," in *Proceedings of the American Control Conference*, May 2002.
- [40] J.-P. Richard, F. Gouaisbaut, and W. Perruquetti, "Sliding mode control in the presence of delay," *Kybernetika, special issue on Time Delay systems*, vol. 43, pp. 277–294, 2001.

- [41] J. Richard, "Time-delay systems: An overview of some recent advances and open problems," *Automatica*, vol. 39, no. 10, pp. 1667–1694, 2003.
- [42] W. Perruquetti and J. P. Barbot, *Sliding Mode Control in Engineering*. Marcel Dekker, Inc, New York, 2002.
- [43] K. D. Young, V. I. Utkin, and Ü. Özgüner, "A control engineer's guide to sliding mode control," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 7, no. 3, pp. 328–342, 1999.
- [44] C. Milosavljevic, "General conditions for the existence of a quasisliding mode on the switching hyperplane in discrete variable structure systems," *Automation and Remote Control*, vol. 46, pp. 307–314, 1985.
- [45] H. P. Opitz, "Robustness properties of discrete-variable structure controllers," *International Journal of Control*, vol. 43, no. 3, pp. 1003–1014, 1986.
- [46] M. E. Magaña and S. H. Zak, "Robust state feedback stabilization of discrete-time uncertain dynamical systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 33, pp. 887–891, 1988.
- [47] V. M. Popov, *Hyperstability of Control Systems*. Springer, Berlin, 1973.
- [48] I. Landau, *Adaptive Control - The Model Reference Approach*. Marcel Dekker, 1979.
- [49] S. Z. Sarpturk, Y. Istefanopulos, and O. Kaynak, "On the stability of discrete-time sliding mode control systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 32, no. 10, pp. 930–932, 1987.
- [50] K. Furuta, "Sliding mode control of a discrete system," *Systems and Control Letters*, vol. 14, pp. 145–152, 1990.
- [51] H. Sira-Ramírez, "Nonlinear discrete variable structure systems in quasi-sliding mode," *International Journal of Control*, vol. 54, pp. 1171–1187, 1991.
- [52] C. Chan, "Servo-systems with discrete variable structure control," *Systems and Control Letters*, vol. 17, pp. 321–325, 1991.
- [53] C. Y. Chan, "Robust discrete quasi-sliding mode tracking controller," *Automatica*, vol. 31, no. 10, pp. 1509–1511, 1995.
- [54] X. Yu and R. B. Potts, "Analysis of discrete variable structure systems with pseudo sliding modes," *International Journal of Systems Sciences*, vol. 23, pp. 503–516, 1992.
- [55] W. Gao, Y. Wang, and A. Homaifa, "Discrete-time variable structure control systems," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 42, no. 2, pp. 117–122, 1995.

- [56] J. K. Pieper, "A discrete time adaptive sliding mode controller," *In proceedings of the 13th Triennial World Congress IFAC, San Francisco USA*, 1996.
- [57] T. Chern, C. Chuang, and R. Jiang, "Design of discrete integral variable structure control systems and application to a brushless DC motor control," *Automatica*, vol. 32, no. 5, pp. 773–779, 1996.
- [58] F.Ñaranjo, "Control de sistemas lineales por modos deslizantes en tiempo discreto: Estado del arte," *II Congreso Colombiano de Automática, Bucaramanga, Colombia, April*, 1997.
- [59] J. H. Park and Y. M. Kim, "Time-delay sliding mode control for a servo," *Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control*, vol. 121, pp. 143–148, 1999.
- [60] E. A. Misawa, "Observer-based discrete-time sliding mode control with computational time delay: The linear case," in *Proceedings of the American Control Conference*, Washington, Washington, June 1995.
- [61] C. Xie, Q. Zeng, and S. Xu, "The design of discrete fuzzy slide-mode controller for AC servo system," in *Proceedings of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automation*, 2002.
- [62] O. Camacho, C. Smith, and W. Moreno, "Development of an internal model sliding mode controller," *Industrial and Engineering Chemistry Research*, vol. 42, pp. 568–573, 2003.
- [63] J. Guo and X. Zhang, "Advance in discrete-time sliding mode variable structure control theory," *In Proceedings of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automation*, vol. 2, pp. 878–882, 2002.
- [64] E. A. Misawa, "Discrete-time sliding mode control: The linear case," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control*, vol. 119, no. 4, pp. 819–821, 1997.
- [65] K. Furuta, "VSS type self-tuning control," *IEEE Transactions on industrial electronics*, vol. 40, no. 1, pp. 37–44, 1993.
- [66] —, "Variable structure control with sliding sector," *Automatica*, vol. 36, pp. 211–228, 2000.
- [67] A. S. I. Zinober, *Variable Structure and Lyapunov Control*. London: Springer-Verlag, 1994, ch. Digital Variable structure control with pseudo-sliding modes, X. Yu, pp. 133–155.
- [68] X. Yu and S. Yu, "Invariant sliding sectors for discrete sliding mode control," *Proceedings of the 39th Conference on Decision and Control, Sidney, Australia*, pp. 2605–2606, December 2000.

- [69] ———, “Discrete sliding mode control design with invariant sliding sectors,” *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control, Special Issue on variable Structure Control*, vol. 122, pp. 776–782, December 2000.
- [70] J. Richalet, A. Rault, J. L. Testud, and J. Papon, “Algorithmic control of industrial processes,” *4th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation, URSS*, 1976.
- [71] ———, “Model predictive heuristic control: Application to industrial processes,” *Automatica*, vol. 14, no. 2, 1978.
- [72] C. R. Cutler and B. C. Ramaker, “Model predictive heuristic control: Application to industrial processes,” *Automatic Control Conference, San Francisco*, 1980.
- [73] D. W. Clarke and C. Mohtadi, “Properties of generalized predictive control,” *Automatica*, vol. 25, no. 6, 1989.
- [74] E. F. Camacho and C. Bordóns, “Implementation of self tuning generalized predictive controllers for the process industry,” *International Journal of Adaptive Control signal Processing*, vol. 7, pp. 63–73, 1993.
- [75] ———, *Model Predictive Control in the Process Industry*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1995.
- [76] C. Bordóns and E. F. Camacho, “A generalized predictive controller for a wide class of industrial processes,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 6, no. 3, 1998.
- [77] J. Picó, P. Albertos, and M. Martínez, *Control Engineering Solutions: An Experimental Approach*. Institution of Electrical Engineers, 1996, ch. Chapter 1, Process Model Identification.
- [78] N. Mata, T. Alvarez, and C. de Prada, “State space constrained multivariable predictive control of a milk of lime blending tank,” *Computers and Chemical Engineering, Supplement*, vol. 22, no. 1, pp. 835–838, 1998.
- [79] F. Rodríguez, M. Berenguel, and M. Arahál, “A hierarchical control system for maximizing profit in greenhouse crop production,” in *Proceedings of the European Control Conference*, 2003.
- [80] M. Berenguel, F. Rodríguez, F. Ación, and J. García, “Model predictive control of ph in tubular photobioreactors,” *Journal of Process Control*, vol. 14, no. 4, pp. 377–387, 2004.
- [81] E. F. Camacho, “Constrained generalized predictive control,” *IEEE Transactions On Automatic Control*, vol. 38, no. 2, pp. 327–332, 1993.
- [82] J. Gossner, B. Kouvaritakis, and J. A. Rossiter, “Stable generalized predictive control with constraints and bounded disturbances,” *Automatica*, vol. 33, pp. 551–568, 1997.

- [83] M. Kothare, V. Balakrishnan, and M. Morari, “Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities,” *Automatica*, vol. 32, no. 10, pp. 1361–1379, 1996.
- [84] M. V. Kothare, “Control of systems subject to constraints,” Ph.D. dissertation, California Institute of Technology, California, USA, 1997.
- [85] T. Alvarez, F. Tadeo, and C. D. Prada, “Constrained predictive control of multivariable robotic systems,” *Proceedings of the IEEE Conference on Control Applications, (Septiembre, 1998)*.
- [86] D. Q. Mayne, C. V. R. J. B. Rawlings, and P. O. M. Scokaert, “Constrained model predictive control: Stability and optimality,” *Automatica*, vol. 36, pp. 789–814, 2000.
- [87] D. Q. Mayne, “Control of constrained dynamic systems,” *European Journal of Control*, vol. 7, pp. 87–99, 2001.
- [88] E. C. Kerrigan, “Robust constraint satisfaction: Invariant sets and predictive control.” Ph.D. dissertation, University of Cambridge, UK., 2000.
- [89] J. E. Normey-Rico and E. F. Camacho, “Robust design of GPC for processes with time delay,” *International journal of Robust and Nonlinear Control*, pp. 1105–1127, 2000.
- [90] D. Megías, J. Serrano, and C. de Prada, “Minmax constrained quasi-infinite horizon model predictive control using linear programming,” *Journal of Process Control*, vol. 12, no. 4, pp. 495–505, 2002.
- [91] D. Ramírez, E. Camacho, and M. Arahál, “Implementation of min-max mpc using hinging hyperplanes. application to a heat exchanger,” *Control Engineering Practice*, vol. 12, no. 7, pp. 700–709, 2004.
- [92] S. Dormido, M. Berenguel, S. Dormido-Canto, and F. Rodríguez, “Interactive learning of constrained generalised predictive control,” *6th IFAC Symposium on Advances in Control Education, Finlandia*, 2003.
- [93] J. Quevedo and J. Reus, “Reguladores digitales,” *Regulación y Mando Automático*, vol. 147, pp. 117–131, 1985.
- [94] J. Quevedo, “Selección del periodo de muestreo en control digital,” *Automática e Instrumentación*, vol. 203, pp. 153–156, 1990.
- [95] M. Corradini and G. Orlando, “A VSC algorithm based on generalized predictive control,” *Automatica*, vol. 33, no. 5, pp. 927–932, 1997.
- [96] W. García-Gabín and E. F. Camacho, “Control predictivo generalizado por modo deslizante aplicado a un brazo manipulador,” in *Proceedings of the XX I Jornadas de Automática, Sevilla, España*, 2000.

- [97] ———, “Control predictivo generalizado por modo deslizante para sistemas de fase no mínima,” in *Proceedings of the XXII Jornadas de Automática, Barcelona, España*, 2001.
- [98] C. Y. Tang and E. A. Misawa, “Sliding surface design for discrete VSS using LQR technique with a preset real eigenvalue,” *Systems and Control Letters*, vol. 45, pp. 1–7, 2002.
- [99] J.-S. Zhou, Z.-Y. Liu, and R. Pei, “A new nonlinear model predictive control scheme for discrete-time system based on sliding mode control,” *Proceedings of the American Control Conference, Arlington, VA*, pp. 3079–3084, 2001.
- [100] C. Bordóns, “Control predictivo generalizado de procesos industriales: Formulas aproximadas,” Ph.D. dissertation, Universidad de Sevilla, España., 1994.
- [101] X. Liu, W. Ge, and Y. Chui, “Variable structure predictor controller with quasi-sliding mode for systems with delay,” In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, pp. 211–214, 1992.
- [102] E. A. Misawa and G. E. Young, “Observer-based discrete-time sliding mode control with computational time delay,” *Dynamic Systems and Control*, vol. 55-1, 1994, aSME, New York.
- [103] M. P. de la Parte, O. Camacho, and E. F. Camacho, “A GPC-based sliding mode controller for nonlinear chemical processes,” *Proceedings of the European Control Conference, Oporto, Portugal (Septiembre, 2001)*.
- [104] ———, “Development of a GPC-based sliding mode controller,” *ISA Transactions*, vol. 41, pp. 19–30, 2002.
- [105] M. P. de la Parte and E. F. Camacho, “Application of a predictive sliding mode controller to a heat exchanger,” *Proceedings of the IEEE Conference on Control Applications, Glasgow, UK (Septiembre, 2002)*.
- [106] T. E. Marlin, *Process Control. Designing Processes and Control Systems for Dynamic Performance*. McGraw-Hill Inc, 1995.
- [107] L. Breiman, “Hinging hyperplanes for regression, classification and function approximation.” *IEEE Transactions on Information Theory*, 1993.
- [108] P. Pucar and J. Sjöberg, “On the hinge finding algorithm for hinging hyperplanes,” *Transactions on Information theory*, 1996.
- [109] D. Docampo and S. R. Baldomir, “An efficient algorithm for function approximation with hinging hyperplanes.” In *Proceedings NSIP’97 Michigan*, 1997.
- [110] K. Levenberg, “A method for the solution of certain nonlinear problems in least squares,” *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 2, pp. 164–168, 1944.

- [111] D. Marquardt, "An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters," *Journal of the society of industrial and applied mathematics*, vol. 11, pp. 431–441, 1963.
- [112] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. Studies in Applied Mathematics Vol.15, Philadelphia, 1994.
- [113] J. G. VanAntwerp and R. D. Braatz, "A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities," *Journal of Process Control*, vol. 10, pp. 363–385, 2000.
- [114] D. P. Bertsekas, "Infinite-time reachability of state-space regions by using feedback control," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 17, pp. 604–612, 1972.
- [115] S. S. Keerthi and E. G. Gilbert, "Optimal infinite-horizon feedback laws for a general class of constrained discrete-time systems: Stability and moving-horizon approximations," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 37, pp. 265–293, 1988.
- [116] G. Bitsoris, "On the positive invariance of polyhedral sets for discrete-time systems." *Systems and Control Letters*, vol. 11, pp. 243–248, 1988.
- [117] E. G. Gilbert and K. Tan, "Linear systems with state and control constraints: The theory and application of maximal output admissible sets." *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36, pp. 1008–1020, 1991.
- [118] F. Blanchini, "Ultimate boundedness control for discrete-time uncertain system via set-induced lyapunov functions," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, pp. 428–433, 1994.
- [119] I. Kolmanovsky and E. G. Gilbert, "Theory and computation of disturbance invariant sets for discrete-time linear systems," *Mathematical Problems in Engineering: Theory, Methods and Applications*, vol. 4, pp. 317–367, 1998.
- [120] E. C. Kerrigan and J. M. Maciejowski, "Invariant sets for constrained discrete-time systems with application to feasibility in model predictive control," *Proceedings of Conference on Decision and Control*, 2000.
- [121] F. Blanchini, "Set invariance in control." *Automatica*, vol. 35, pp. 1747–1767, 1999.
- [122] A. F. Filippov, "Application of the theory of differential equations with discontinuous right-hand sides to non-linear problems of automatic control," *Proceedings of the 1st IFAC Congress, Butterworths, London*, pp. 923–927, 1961.
- [123] O. Camacho, R. Rojas, and W. García, "Variable structure control applied to chemical processes with inverse response," *ISA Transactions*, vol. 38, pp. 55–72, 1999.

- [124] D. Hinrichsen and A. J. Pritchard, "Stability radii of linear systems," *Systems and Control Letters*, vol. 8, pp. 1–10, 1986.
- [125] T. Alamo and S. Dormido, "Robust stability and structured uncertainty bounded by the euclidean norm," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 11, pp. 749–770, 2001.
- [126] T. Suzuki and K. Furuta, "Discrete-time VSS represented by input-output relation," *IEEE Workshop on Variable Structure Systems*, pp. 122–126, 1996.
- [127] K. Furuta and Y. Pan, *Lecture Notes in Control and Information Sciences 247. Variable Structure Systems, Sliding Mode and Nonlinear Control*. Eds. K. D. Young and Ü. Özgüner, Springer, London, 1999, ch. Sliding Sector for Variable Structure System, pp. 1–25.
- [128] M. G. Ortega and F. R. Rubio, "Systematic design of weighting matrices for the  $h_\infty$  mixed sensitivity problem," *Journal of Process Control*, vol. 14, pp. 89–98, 2004.
- [129] J. G. Ziegler and N. B. Nichols, "Optimum setting for automatic controllers," *ASME Transactions*, vol. 64, pp. 759–768, 1942.
- [130] F. Morilla, "Contribución a los métodos de autosintonía de reguladores pid," Ph.D. dissertation, Universidad Nacional de Educación a Distancia, España, 1987.
- [131] ———, "Controladores pid: algoritmos y estructuras," *Automtica e Instrumentacin*, vol. 204, pp. 131–136, 1990.
- [132] J. Quevedo, "Fundamentos del pid," *Automtica e Instrumentacin*, vol. 204, pp. 97–101, 1990.
- [133] E. F. Camacho, M. Berenguel, and F. R. Rubio, *Advanced Control of Solar Plants*. London: Springer-Verlag, 1997.
- [134] M. B. Soria, "Contribuciones al control de colectores solares distribuidos," Ph.D. dissertation, Universidad de Sevilla, España., 1996.
- [135] E. Zarza, *Solar Thermal Desalination Project Phase II. Results and Final Project Report*. Colección Documentos Ciemat, 1995.
- [136] R. Carmona, "Análisis, modelado y control de un campo de colectores solares distribuidos con sistema de seguimiento en un eje." Ph.D. dissertation, Universidad de Sevilla., 1985.
- [137] D. P. Bertsekas and I. B. Rhodes, "On the minmax reachability of target sets and target tubes," *Automatica*, vol. 7, pp. 233–247, 1971.
- [138] S. S. Keerthi and E. G. Gilbert, "Computation of minimum-time feedback control laws for discrete-time systems with state-control constraints," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 32-5, pp. 432–435, 1987.