EL CÁLCULO INTEGRAL EN LAS ACADEMIAS MILITARES EN ESPAÑA EN EL SIGLO XIX

Mª. ÁNGELES VELAMAZÁN, ELVIRA CUESTA
Universidad de Zaragoza

El análisis matemático[1] tal y como hoy lo conocemos se inició cuando Cauchy (1789-1857) utilizó los límites como base de su teoría. Cauchy definió la derivada de una función *f(x)* como el límite de una serie de cocientes diferenciales, y la integral como el límite de una serie de aproximaciones de áreas de rectángulos formados entre *f(x)* y el eje *x*. También utilizó la teoría de los límites para definir la continuidad de *f(x)* y la convergencia de series infinitas. Cauchy logró realizar una buena fundamentación del cálculo. Diversos aspectos, como la no comprensión de sus lecciones por parte de los estudiantes[2], su adhesión a la monarquía Borbónica y su fanático catolicismo, propiciaron el rechazo hacia Cauchy y sus métodos de enseñanza.

Tras la revolución de julio de 1830 y el exilio de Cauchy con la familia real, sus sucesores enseñaron versiones suavizadas de sus teorías: Coriolis, Navier, (hasta 1836), Duhamel (hasta 1839) y Sturm -de todos ellos, el más fiel a las enseñanzas de Cauchy- hasta su muerte en 1855. Ello no dificultó que se continuaran publicando los textos de Lacroix (1765-1843), Euler (1734-1800) y Lagrange (1736-1813).

Fue en Alemania, con Riemann (1826-1866), Weierstrass[3] (1815-1897) y sus discípulos, cuando las teorías de Cauchy fueron renovadas magistralmente y potenciadas en Europa, llegando al máximo rigor científico del análisis matemático en la segunda mitad del siglo XIX.

En España, siguiendo los modelos europeos, la introducción del cálculo integral basado en los límites fue un proceso lento, los profesores de la escuela de Artilleros y más tarde la de Ingenieros Militares, siguieron claramente las tendencias de los profesores de la Escuela Politécnica de París; al igual que ellos, el reconocimiento a Cauchy vino a través de la escuela alemana en la segunda mitad del siglo. Mientras tanto el ambiente social en España en el siglo XIX estaba propiciando el desarrollo

[1] Según GRATTAN- GUINNESS [2002 p. 25], los métodos de prueba de Cauchy eran de síntesis y no de análisis en el sentido tradicional griego de la palabra análisis.
[2] GRATTAN- GUINNESS [2002 p. 26] afirma que Cauchy presentó su análisis en la Escuela Politécnica desde mediados de 1810, y que en abril de 1821 los estudiantes llegaron a salirse de sus clases.
[3] Uno de los refinamientos introducidos por Weierstrass fue distinguir el máximo y el mínimo de los extremos superiores e inferiores.

de la cultura científica. AUSEJO y HORMIGÓN [2002, pp. 48-51] señalan que ingenieros civiles y militares, artilleros y oficiales navales, profesores de enseñanza secundaria y universitaria formaron gradualmente una comunidad matemática en torno a sus diferentes cuerpos funcionariales civiles y militares. Entre los militares, destaca la actividad de los ingenieros, artilleros y marinos que incorporaron sus respectivas academias y observatorios en la actividad matemática española.

Respecto a los Ingenieros civiles, la primera Escuela Técnica de Ingeniería Civil de Caminos y Canales se creó en 1802, por Agustín de Betancourt (1758-1824), pero se cerró a causa de la guerra contra Napoleón y no se reabrió hasta la muerte de Fernando VII. Luego vendrían las Escuelas de Minas (1835), de Montes (1848), la de Industriales (1851), y la de Agrónomos (1855). En todas ellas se siguieron modelos franceses y tuvieron un importante papel en el desarrollo de las matemáticas y un poder significativo en el desarrollo de la cultura científica española. Por primera vez, las matemáticas y la ciencia eran relevantes para conseguir profesiones de prestigio social, para que se formaran asociaciones y grupos de investigación, uno de cuyos fines era divulgar las matemáticas. La primera revista matemática española, *El Progreso matemático,* data de 1891 y en esas fechas los matemáticos españoles empezaron a participar en Congresos Internacionales de Matemáticas.

Tras el trabajo de VELAMAZÁN y AUSEJO [1993] sobre el desarrollo del cálculo diferencial en las Academias militares españolas en el siglo XIX, y teniendo en cuenta el significativo papel de los militares en el desarrollo de las matemáticas, veremos cómo evolucionó el cálculo integral en las Escuelas militares de Artilleros y de Ingenieros.

CUESTA DUTARI [p. 120] atribuye la publicación del primer texto en español de cálculo diferencial e integral al ingeniero militar Pedro Padilla. En el siglo XIX, el primer libro de texto de cálculo diferencial e integral escrito por un ingeniero militar fue el de Fernando García San Pedro[4] (1796-1854), de 1828. En este texto, García San Pedro se planteaba el que se consideraba uno de los problemas fundamentales del cálculo en la época: la falta de rigor y de una buena fundamentación. En él, tras analizar cómo se halla la situación de la fundamentación del cálculo, propone una solución, que puso de manifiesto un elevado conocimiento de las matemáticas, de su estructura, y de su problemática. Su trabajo se basó en Lagrange, y al igual que éste no consiguió un desarrollo correcto.

Velamazán y Ausejo describen el método que García San Pedro propuso para fundamentar el cálculo: *el método de los incrementos ideales*, y cómo los sucesivos profesores de la Academia de Ingenieros continuaron utilizando este método durante casi todo el siglo XIX, posición que revela una fuerte componente corporati-

[4] Sobre la vida de García San Pedro, ver VELAMAZÁN [1990].

vista. Por eso mismo, las Academias de Ingenieros y Artilleros no tuvieron ninguna relación, y en los libros de texto sobre cálculo diferencial e integral, cada Academia tuvo sus propios manuales, escritos por sus profesores.

A principios del siglo XIX los artilleros utilizaban el texto de P. Giannini, cuya primera edición corresponde al año 1795. Posteriormente, los textos recomendados fueron los de S.F. Lacroix (1824), José Odriozola (1829), Francisco Sanchiz y Castillo -que publicó en 1851 un texto de Cálculo diferencial y en 1863 el Cálculo integral- Navier (1865), Dámaso Bueno (1876) y Diego Ollero y T. Pérez Griñón (1889).

Los ingenieros, a principios del siglo XIX, utilizaban el texto de Pedro Padilla (1756). Posteriormente los textos recomendados fueron los de S.F. Lacroix (1824), Fernando García San Pedro (1828), Manuel Díez Prado, Antonio Torner Carbó -que redactó en 1864 una *Memoria de Elementos del Cálculo integral* que posteriormente se declaró libro de texto-, Alejandro Belón -con el *Cálculo diferencial* en el año 1876- Antonio Vidal y Rúa -con las *Aplicaciones del Cálculo diferencial a la teoría de líneas y superficies* en 1880 y las *Aplicaciones geométricas del Cálculo integral a la rectificación de líneas, cuadratura de superficies y cubatura de sólidos* en 1882- y José de Toro y Sánchez -con el texto de *Cálculo diferencial y sus aplicaciones analíticas* en 1894-.

En estas condiciones, en el siglo XIX el primer libro de texto sobre cálculo diferencial e integral escrito por un profesor militar fue el de Fernando García San Pedro. Éste afirma en el prólogo de su libro que se había propuesto enlazar los diversos métodos hasta entonces existentes para presentar el cálculo, tales eran el infinitesimal (Leibniz), el de las funciones derivadas (Lagrange), el de los límites o últimas razones (Newton), etc., haciendo que fuesen una sola teoría algebraica.

El texto de García San Pedro está escrito siguiendo el método de pizarras[5] -es decir, separando las ecuaciones y fórmulas de la teoría correspondiente-. Su obra consta de dos partes, divididas en capítulos, en ellos la teoría está señalada por párrafos numerados, y las ecuaciones indicadas por un número encerrado entre paréntesis precedido de una *E* de ecuación, o bien solamente con el número, cuya búsqueda debe realizarse al final de los capítulos correspondientes. Esto unido a que en su libro no hay ni una sola figura, hacen este texto de una dureza más que notable.

La primera parte comprende ocho capítulos: los cuatro primeros son de cálculo diferencial de funciones explícitas e implícitas de una y varias variables. Los tres capítulos siguientes tratan de cálculo integral. El capítulo ocho lo titula funciones

[5]Véase VELAMAZÁN [2000, p. 236].

indefinidas. La segunda parte del libro realiza una aplicación de la teoría establecida en los capítulos anteriores. Esta segunda parte consta de tres capítulos titulados, respectivamente: Desarrollo de las funciones en series, Máximos y mínimos de las funciones y Teoría de las líneas y superficies.

Para García San Pedro el cálculo integral es un procedimiento inverso de la derivación, que titula: *Procedimientos inversos para retroceder de los coeficientes diferenciales al conocimiento de sus funciones primitivas.* Posteriormente trata la rectificación de la líneas, la cuadratura de las superficies y la cubatura de los volúmenes como aplicaciones de la teoría anteriormente expuesta.

García San Pedro define el cálculo integral de la siguiente forma:

"(128) Los procedimientos inversos por los cuales se pasa de las funciones llamadas coeficientes diferenciales sucesivos á sus primitivas correspondientes, son conocidos en la ciencia con el nombre de *integracion* de las funciones, ó *cálculo integral*. Nosotros lo vamos á dar á conocer (...) con arreglo á la segunda ley[6] , que se trata de pasar de los incrementos ideales de las funciones al conocimiento de éstas, deshaciendo los procedimientos algebraicos que nos condujeron en el capítulo segundo á la formación de dichos incrementos ideales, cuando nos eran dadas tales funciones. Y así como allí dijimos, que por los mismos medios con que se pasaba de la función z= f(x) á la df(x), se podría pasar de la df(x) á la $d^2f(x)$, &c. así también deberemos decir aquí, que los procedimientos algebráicos que nos sirvan para pasar en todos los casos de la función df(x) á la f(x), aplicados convenientemente á la $d^2f(x)$, darán la df(x); y así sucesivamente." [p. 113].

Y continúa:

"(131) Convengamos en señalar bajo el símbolo $\int_{\bullet} df(x)$, la integracion de la función df(x). La letra $\int_{\bullet}$, según este convenio, indicará que los procedimientos integrales deben aplicarse á la función df(x), y que su resultado está representado bajo dicho símbolo $\int_{\bullet} df(x)$." [p. 114].

Adviértase que García San Pedro utiliza el signo de integración $\int$ siempre unido a $\bullet$: $\int_{\bullet}$.

[6]García San Pedro en su libro (pp.26-39) denomina segunda ley al razonamiento utilizado para obtener la derivada, como el cociente entre el incremento ideal de la función y de la variable.

Llama a *f(x)* = $\int_{\bullet} df(x)+C$ *integral completa,* indicando que al sumar C abarca todos los casos posibles de solución, puesto que las constantes sumadas han desaparecido en el proceso de derivación. Denominaba *límites* de la integral a los dos valores de la variable que hacen desaparecer la indeterminación de ésta. El menor de dichos límites es el *principio* de la integral el mayor el *fin.*

A continuación veamos cómo García San Pedro realiza la exposición de las aplicaciones del cálculo integral a la rectificación de la líneas, la cuadratura de las superficies y la cubatura de los volúmenes:

"(377) Los incrementos ideales de las líneas en general, los hemos encontrado en el párrafo (359), representados por la espresión (128), la cual debe suponerse igual á una diferencial de primer orden dL, (E. 187). Integrando esta ecuación (187), lo que se conseguirá en cada caso particular, eliminando de ellas dos cualesquiera de las diferenciales dx, dy, dz, por medio de las dos ecuaciones de la línea que se considere, la función primitiva L que se encuentre de este modo, dará el valor de dicha línea en funciones de sus coordenadas x, y, z, estando comprendido dicho valor entre los límites de la referida integración, que corresponderán siempre á los estremos de la porcion de línea de que se trate.

(...) La operación que acaba de indicarse, que tiene por objeto determinar el valor de una porción cualquiera de línea en funciones de las coordenadas de sus estremos , se llama *rectificación de las líneas*". [pp. 309-310]

(128) $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ (187) $dL=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$

De manera análoga a la rectificación de las líneas, García San Pedro trataba los casos de cuadratura de superficies y cubatura de volúmenes.

En el caso de la cuadratura de las superficies, partía de la ecuación *ideal* o diferencial:

(189) $d^2S = dx.dy.\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}}$

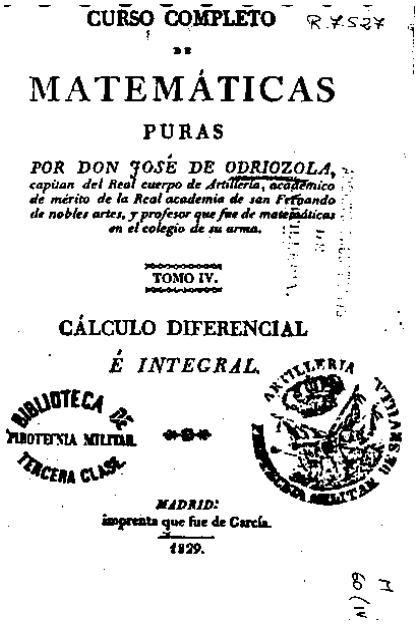
y afirmaba que eliminando de esta ecuación una cualquiera de las *diferenciales dx, dy,* e integrando dos veces seguidas, de forma sucesiva y separada, teniendo en cuenta los límites de la integración, se obtendría la superficie S.

Cuando la superficie que se quiere medir es plana, debe hacerse *dz=0* y si se integra entre los límites *y=0, y=y*, las ecuaciones para la diferencial de una superficie plana son respectivamente :

(190) $d^2S=dx.dy$ (191) $dS=ydx$

Para la cubatura de los volúmenes, parte de la expresión del incremento ideal de un volumen cualquiera:

$$(193)\ d^3V = dX.dY.dZ$$


CURSO COMPLETO

MATEMÁTICAS

PURAS

POR DON JOSÉ DE ODRIOZOLA, capitan del Real cuerpo de Artillería, académico de mérito de la Real academia de san Fernando de nobles artes, y profesor que fue de matemáticas en el colegio de su arma.

TOMO IV.

CÁLCULO DIFERENCIAL

É INTEGRAL.

BIBLIOTECA DE PIROTECNIA MILITAR TERCERA CLASE

MADRID: imprenta que fue de García. 1829.

y obtiene el volumen integrando tres veces de forma sucesiva y separada.

Paralelamente al texto del ingeniero García San Pedro, en 1829 publicó Odriozola[7] (1785-1864) para los artilleros el cálculo diferencial e integral, en el tomo cuarto de su "*Curso completo de matemáticas puras*". En esta obra Odriozola se inspira también en Lagrange, utiliza el desarrollo de Taylor para justificar la integral y no hace ninguna mención a los incrementos ideales. La lectura de su libro resulta más ligera que la de García San Pedro, por la introducción de pequeños desarrollos analíticos y por poseer algunas figuras al final del texto, concretamente 37 para 342 páginas.

Odriozola divide su libro de análisis en dos partes: una para cálculo diferencial y otra para cálculo integral. El índice en ambos casos es análogo al expuesto por García San Pedro. No hay variación tampoco en cuanto al objetivo del cálculo integral, que trata de hallar las funciones primitivas de las diferenciales de todas clases, la integración es la operación inversa de la diferenciación; por lo tanto, sus reglas están basadas en los principios del cálculo diferencial.

Es curioso que al escribir la *Integral completa* introduce el *dx* dentro del paréntesis que engloba a *x* y no utiliza paréntesis al escribir la función de una sola variable, *Fx,* que llama *primitiva general.* Conociendo una *primitiva particular* (valor donde se anula la integral) puede eliminar *C*

$$\int \varphi(x,dx) = Fx - Fa$$

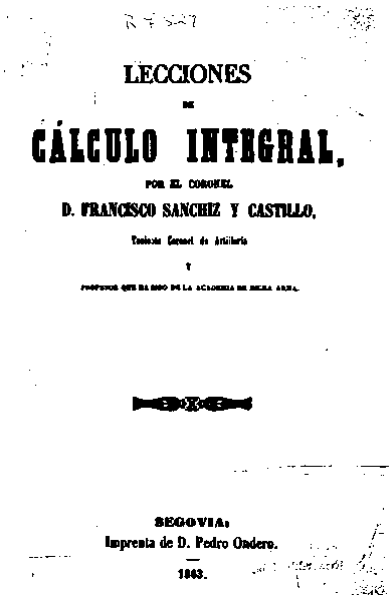
$$\int \varphi(x,dx) = Fx + C \ \text{ con } \ Fa + C = 0$$

[7] Odriozola en 1847 intervino en la fundación de la Academia de Ciencias Exactas de Madrid.

Para calcular la integral definida, afirma que como ya conoce por cálculo diferencial las expresiones de s elemento de arco, S elemento de superficie, U elemento de volumen, aplica las reglas de integración a las expresiones

$$dU = \pi v^2\, dx \qquad ds = vdx \qquad dS = 2\pi v\sqrt{dx^2 + dv^2}$$

y sustituye en los extremos para calcular el valor de la constante. Está utilizando el teorema fundamental de cálculo, aunque no hace ningún razonamiento aclaratorio sobre él. Como aplicaciones usa la parábola, la elipse y el círculo.


LECCIONES
DE
CÁLCULO INTEGRAL,
POR EL CORONEL
D. FRANCISCO SANCHEZ Y CASTILLO,
Teniente Coronel de Artillería
Y
PROFESOR QUE HA SIDO DE LA ACADEMIA DE DICHA ARMA.
SEGOVIA:
Imprenta de D. Pedro Ondero.
1863.

Con el avance del siglo XIX, se fueron incorporando las nuevas aportaciones del cálculo que se estaban produciendo, debido a científicos fundamentalmente franceses, y claramente a Cauchy. Así, por ejemplo, una de las aportaciones importantes introducidas fue la notación sobre la integral definida de la forma $\int_a^b$. Según Carlos Álvarez[8] [p. 293] se debe a J. Fourier, apareció en su *Teoría sobre la Conducción del Calor* de 1812, posteriormente la adoptó Cauchy por considerarla más simple y se ha seguido utilizando hasta ahora.

Tras la publicación de Odriozola, el siguiente texto militar español sobre cálculo integral apareció treinta y tres años después. En líneas generales, los libros que a continuación se detallan presentan un índice similar en cuanto a los conceptos generales básicos. Las primeras lecciones son para definir la integración, dar sus reglas elementales y los métodos para integrar las funciones racionales, irracionales, binomias, trascendentes y cálculo de integrales por aproximación. Después estudian la integración de ecuaciones diferenciales explícitas e implícitas de una o más variables, clasificadas en primer orden y orden superior. En todos los casos, se completa con el cálculo de variaciones –aquí hay que indicar que existe de nuevo una diferencia entre ingenieros y artilleros, ya que los ingenieros a este cálculo lo denominaban teoría de las funciones indefinidas, nombre que, según TORNER [p. 338], Fernando García San Pedro dio al llamado cálculo de las variaciones

[8]CAUCHY, A.L. (1994).

Las expresiones de *rectificación de* arco para determinar la longitud de un arco de curva, *cuadratura* para designar el área plana y *cubatura* para el volumen se siguieron utilizando durante todo el siglo.

En el año 1863 el artillero Francisco Sanchiz y Castillo[9] (1827-1901) publicó sus "*Lecciones de cálculo integral*". En esta obra hubo un salto importante tanto en los conceptos como en la forma de presentarlos, empezaba a notarse la influencia de Cauchy a través de los profesores de la Escuela Politécnica. Sanchiz y Castillo sigue manteniendo el orden tradicional de introducir primero la integral indefinida para dar paso después a la definida, al igual que definir la integración como proceso inverso de la diferenciación:

"Asi, pues, teniendo una diferencial F´(x)dx, si queremos espresar su integración, ó sea la funcion primitiva F(x) que diferenciada la haya producido, le antepondremos el signo $\int$: [p. 5] $\int F'(x)\,dx = F(x) + C$"

"La integral que tiene limitados sus dos estremos se llama definida, y la que solo tiene uno de ellos indefinida". [p. 64]. $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$"

Como ejemplo, veamos como expone el significado analítico y geométrico de la integral definida. Divide el intervalo de la variable en n intervalos de longitud Δx : $x,\quad x+\Delta x, \ldots\ldots\ldots\ldots,\quad x+n\Delta x$, y toma los valores de la función en esos intervalos $f(x), f(x+\Delta x), \ldots\ldots f(x+n\Delta x)$.

Los incrementos de la función de acuerdo con lo visto en cálculo diferencial son:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\Delta x$$

.....

$$f(x+n\Delta x) - f(x+(n-1)\Delta x) = \frac{\Delta f(x+(n-1)\Delta x)}{\Delta x}\Delta x$$

Sumando: $f(x+n\Delta x) - f(x) = (\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\Delta f(x+(n-1)\Delta x)}{\Delta x})\Delta x$

Llamando $h=n\,\Delta x$ y haciendo Δx infinitamente pequeño, o sea *dx*, la ecuación anterior se convierte en:

$$f(x+h) - f(x) = dx(\frac{df(x)}{dx} + \ldots\ldots\ldots + \frac{df(x+(n-1)dx)}{dx})$$

[9] Sanchiz y Castillo llegó a General de División. En 1893 fue nombrado jefe de estudios de Alfonso XIII.

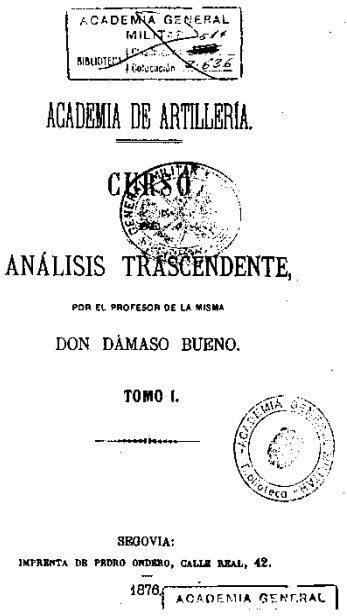
Representando a continuación por *a* un valor particular de *x* y por *b* otro valor *x+h:*

$$f(a)-f(b)=[f'(a)+f'(a+dx)+...+f'(a+(n-1)dx)]dx$$

Luego:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b)-f(a)=[f'(a)+f'(a+dx)+...+f'(a+(n-1)dx)]dx$$

"La integral definida entre dos límites a y b (...) representa también y equivale á la suma del infinito número de valores que recibe la diferencial dada, con los incrementos diferenciales de la variable desde el límite inferior al superior. " [p. 67].


ACADEMIA GENERAL MILITAR
BIBLIOTECA
ACADEMIA DE ARTILLERÍA.
CURSO
ANÁLISIS TRASCENDENTE,
POR EL PROFESOR DE LA MISMA
DON DÁMASO BUENO.
TOMO I.
SEGOVIA:
IMPRENTA DE PEDRO ONDERO, CALLE REAL, 42.
1876.
ACADEMIA GENERAL

En esto fundamentaba el uso del símbolo $\int$ como suma.

"Sabemos (cálculo diferencial) que la diferencial del área plana en el sistema rectangular es $dS = vdx$, *y por lo* tanto la ordenada es su derivada. Efectuando la multiplicación del último miembro de la ecuación anterior, cada uno de los términos $f'(a)dx$, $f'(a+dx)dx$, *.....etc* ; representan la diferencial del área correspondiente a las abscisas, a, $a+dx$, *.....etc* y la suma de todos ellos ó sea la de los rectángulos diferenciales comprendidos entre los límites de la integral definida, será la integral de dicha área comprendida entre ellos". [pp. 67-68]

A los dos años de la obra de Sanchiz y Castillo, en 1865, el texto recomendado en la enseñanza de los artilleros era el de Navier[10] –profesor de la Escuela Politécnica- traducido por Eugenio de la Cámara como "*Resumen de las lecciones de Análisis dadas en la Escuela Politécnica de París"*, con notas de Liouville. Al traducir esta obra, Eugenio de la Cámara introduce sus propias notas y aclaraciones. Según su autor [p. v-vi] este texto desplazó en Francia a otros más elementales. Y también en España, pues se recomendó en la Escuela de Caminos, Canales y Puertos, y en nu-

[10] Que los artilleros se interesaban por el cálculo que se daba en la Escuela Politécnica de París, lo demuestra el hecho de elegir el texto de Navier, ya que Cauchy fue profesor de las clases de análisis en la Escuela Politécnica desde 1815 hasta 1829, Navier fue también profesor de estas clases de 1831 a 1832, y posteriormente el encargado de ellas fue Liouville desde 1839 a 1850.

merosos centros públicos y privados. Curiosamente, en él aparece la notación utilizada por García San Pedro para la integral indeterminada: $\int_{\bullet}$. Luego ya no se volvería a utilizar.

En 1876 el artillero Dámaso Bueno publicó "*Análisis trascendente"*. Su trabajo estuvo influenciado por la corriente positivista que existía a finales de siglo, puede notarse por la referencia a Augusto Compte. Cabe destacar en la obra de Dámaso Bueno, en su primer tomo, un extenso prólogo de 105 páginas sobre los trabajos de Leibniz, Newton y Lagrange, donde considera que se debe seguir trabajando con ellos.

Para Dámaso Bueno, el cálculo integral tenía por objeto conocer el valor del límite al que tiende la suma $f(x)\Delta x + f(x_1)\Delta x_1 + ... + f(x_n)\Delta x_n$. Presenta primero la integral definida y la interpreta como límite de la suma de los rectángulos diferenciales comprendidos entre la curva el eje *x* y las ordenadas prefijadas, así escribe:

"Demostrada ya la existencia del límite finito de la suma, (...) se representa, por la inicial $\int$ (...)

$$\lim. \sum f(x)\Delta x = \int_x^{x_n} f(x)\Delta x$$

Esta suma límite se llama *Integral* (de la palabra latina *íntegra*), porque se considera como el *entero* de que f(x) Δx es una parte infinitamente pequeña..[p. 26].

En este texto de Dámaso Bueno se puede observar claramente la influencia de los profesores franceses que dieron clase en la Escuela Politécnica, y concretamente fue Cauchy quien primero invirtió el orden usual utilizado en el cálculo integral, comenzando por definir la integral definida y después la indefinida. Concretamente, según ÁLVAREZ [p. 315], Cauchy en su *Nota sobre la naturaleza de los problemas que se presentan en el cálculo integral*, aclara que:

"se tenía la costumbre, en los tratados del cálculo integral, de remitir la determinación de las constantes y de las funciones (que entran en la solución de las ecuaciones diferenciales) a la búsqueda de las integrales generales [...] en mis Lecciones he tenido que invertir este orden y de poner en primer término la búsqueda, no de las integrales generales sino de las integrales particulares, de tal manera que la determinación de las constantes o de las funciones arbitrarias no se considerara separada de la búsqueda de las integrales"

En estas condiciones en el texto de Dámaso Bueno [Tomo II, p. 32] puede interpretarse este hecho:

"El cálculo integral se nos presenta pues, como recíproco del cálculo diferencial. Es un resultado bien notable y que no podía entreverse desde el principio, porque no es evidente, *á priori*, que el límite de una suma de términos de la forma f(x)dx esté espresado por una diferencia de valores de la funcion que tiene á f(x) por derivada"

En el año 1879 el ingeniero Antonio Torner y Carbó[11] (1825-1883) publicó el libro: *Elementos de Cálculo Integral*. En él, las doce figuras geométricas que utiliza siguen separadas del texto y colocadas al final. En la primera página de su libro, Torner define el cálculo integral de la siguiente manera:

"2. La cuestión del cálculo integral está cifrada en obtener la función primitiva correspondiente á un coeficiente diferencial ó diferencial dado, y se resuelve por los procedimientos de la integración, cuando estos coeficientes diferenciales ó diferenciales, tienen la forma de las expresiones que se saben integrar¨".

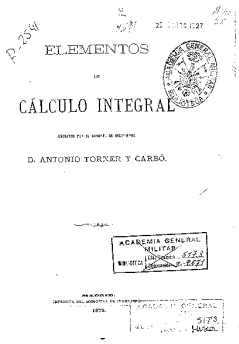
Antonio Torner denomina a la expresión

$\int Xdx = f(x)+c$ *integral completa o primitiva completa.*

Este resultado tiene dos indeterminaciones: la constante c y la variable x. Las cuales desaparecerán dando dos valores a la variable, a y b, llamados límites de la integral así, A = f(a) +c, B = f(b) +c. Cuando se den las dos condiciones, el valor de la integral estará representado por el de la ecuación:

$$B\text{-}A = f(b)\text{-}f(a) = \int_a^b X\,dx$$

denominándose entonces *integral determinada o definida.*


ELEMENTOS
DE
CÁLCULO INTEGRAL
D. ANTONIO TORNER Y CARBÓ.

En el ingeniero Torner se vuelve a observar la huella de su predecesor García San Pedro, y aunque ciertamente él cita a Cauchy, parece que los artilleros habían optado por una vía más segura y fundamentada que los ingenieros.

En 1889 los artilleros Diego Ollero[12] (1839-1907) y Tomás Pérez Griñón publicaron otro libro de texto con una

1 General de Ingenieros. Escribió una memoria titulada *Adelantos e historia de la matemática en lo que se refiere a sus aplicaciones,* (Guadalajara, 1850). Fue académico fundador de la Real Academia Gaditana de Ciencias y Letras. Perteneció a numerosas sociedades científicas españolas y extranjeras. Para más datos sobre su vida, ver VELAMAZÁN [1990].

[12] Diego Ollero ascendió en 1880 a Teniente Coronel por la publicación de su obra *Cálculo de probabilidades*. Llegó al empleo de General de División. En 1898, ingresó en la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid.

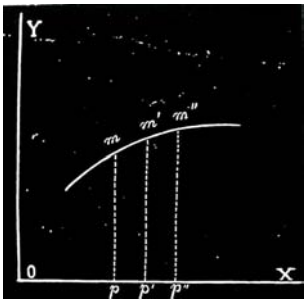
doble finalidad, según indican en su prólogo. Por un lado, la idea de simplificar el cálculo en sus dos facetas diferencial e integral, por otro lado, acoplar los modelos matemáticos a los cambios que surgen debido al desarrollo de otras ramas de la ciencia. Esto último obligaba a prescindir de cuestiones, que aun siendo interesantes o ingeniosas en términos matemáticos, debían omitirse por ser innecesarias, reduciendo por tanto ciertos contenidos especulativos en favor de un mayor número de aplicaciones, como las referentes a mecánica que señalaba en el capítulo XII, dando, por ejemplo, aplicaciones importantes sobre centros de gravedad, o momentos de inercia para diversas superficies.

CURSO
DE
CÁLCULO INFINITESIMAL
POR
D. OLLERO,
Coronel de Artillería,
Profesor que ha sido de la Academia de dicha arma
Y
T. PEREZ GRIÑON,
Capitán Profesor de la misma Academia.

TOMO SEGUNDO.
CÁLCULO INTEGRAL.

SEGOVIA
IMPRENTA DE GONZALO,
Juan Bravo, 40 y 42.
1899

Este texto de Ollero, con un contenido matemático similar a los anteriores artilleros, es más didáctico, explica algunos conceptos básicos de manera precisa, y por vez primera los recursos gráficos están intercalados entre el texto. Ollero comienza definiendo primero la integral definida para pasar después a la indefinida. Como ejemplo del aspecto más pedagógico en esta obra presentamos los siguientes razonamientos: el área entre una curva y el eje *x*, y, el área limitada por una curva cerrada.

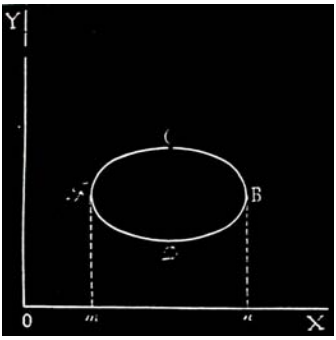


Ollero [Tomo II, p. 4] parte de una función $y = f(x)$ real y continua para todos los valores de x comprendidos entre los límites x_0, x_1, y demuestra geométricamente que existe una función *F(x)* cuya diferencial es *f(x) dx*.

Así, considerando la figura, calcula el área a partir de una ordenada m p elegida arbitrariamente y limitada por la curva, el eje X y otra ordenada m' p' arbitraría, de esta manera el área varía con la abscisa de esta segunda ordenada, y por lo tanto puede escribirse la siguiente función: $A = F(x)$

En su libro de cálculo diferencial, había demostrado que la diferencial de este área plana tenía por expresión: *dA=ydx.y* obtiene *dF(x)=f(x)dx.* Concluyendo que existe *F(x)*, porque existe el área.

Después añade que si en vez de elegir $m'p'$ se eligiese $m''p''$, el área variaría en una constante, pero la diferencial sería la misma. Existe por lo tanto una infinidad de funciones, pero además sólo ellas y no otras difieren en una constante.



Para el área limitada por una curva cerrada [Tomo II, p.164]:

"Concibamos en el plano *xy* una serie de rectas paralelas al eje de las *y* con intervalos iguales á *dx* y otra serie de rectas paralelas al eje de las x con intervalos iguales á *dy*.

De este modo habrá quedado descompuesta el área en elementos interiores que cada uno tendrá por valor *dxdy* y una corona de los segmentos adyacentes á la curva que estarán formados por partes de los elementos antes indicados. Podemos observar que si se consideran los elementos de la corona situados en la parte FCB, la suma de sus bases, considerando como tales las paralelas al eje de las *x*, tendrán por límite *mn* y como sus alturas no exceden a *dy*, la suma de ellos será menor que *mn.dy*, cuyo límite es cero y por lo tanto también será cero el límite de la suma de los elementos situados en la parte superior de la corona. (...). Se deduce por lo tanto que el área pedida puede considerarse como límite de la suma de los elementos interiores (...)

$$\sum_{y_1}^{y} dx.dy$$

(...) que puede reemplazarse en el límite por la integral

$$\int_{y_1}^{y} dx\,dy = (y - y_1)dx$$

teniendo en cuenta que y é y_1 son funciones de x deducidas de la ecuación de la curva correspondiente y á la parte superior é y_1 á la inferior.

El área total será la suma de las diversas zonas comprendidas entre cada dos paralelas a eje de las y, y tendrá la expresión: $\sum_{x_0}^{x} (y - y_1)dx$ cuyo límite será $\int_{x_0}^{x} (y - y_1)dx$. Dicha área total podrá también representarse por

$$A = \int_{x_0}^{X} \int_{y_1}^{y} dx\,dy\text{"}$$

Con el examen de este texto termina la breve exposición de la enseñanza del cálculo integral en las Academias de Ingenieros y Artilleros españolas del siglo XIX. De nuevo se pone de manifiesto la influencia francesa en la elaboración de los textos españoles, y la vía más segura y fundamentada que siguieron los artilleros en contraposición de la influencia que marcó en los ingenieros la exposición de Fernando García San Pedro. También, a medida que avanza el siglo, se observa que la enseñaza es más pedagógica, se emplean más las figuras y la presentación del cálculo ayudada por la geometría consigue una mayor comprensión intuitiva.

Bibliografía

AUSEJO, E & HORMIGÓN, M. (2002) "Spanish Initiatives to Bring Mathematics in Spain into the International Mainstream". En: K. Hunger Parshall y A. C. Rice (eds), *Mathematics Unbound: The Evolution of an International Mathematical Research Community, 1800-1945*. The American Mathematical Society, 45-58.

BELHOSTE, B (1985) *Cauchy (1789-1857). Un mathématicien légitimiste au XIXe siècle*. Colección "Un savant, une epoque". Paris, Belin.

BELÓN Y TORRES, A. (1876) *Lecciones de Cálculo Diferencial.* Madrid, Imprenta del Memorial de Ingenieros.

BUENO, D. (1876) *Análisis Trascendente*. Segovia, Imprenta de Pedro Ondero, 2 vols.

CAUCHY, A.L. (1994) *Curso de Análisis*. "Colección Mathema". México, Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM. Selección, traducción directa del francés y notas de Carlos Álvarez Jiménez. Introducción Jean Dhombres.

CUESTA DUTARI, N. (1985) *Historia de la invención del análisis infinitesimal y de su intruducción en España*. Salamanca, Ediciones Universidad de Salamanca.

DUGAC, P. (1982) *Sur les fondementes de l'analyse a la fin du XVIIIème siècle d'après le traité de S.F. Lacroix.* Paris. Université Pierre et Marie Curie.

GARCÍA SAN PEDRO, F. (1828) *Teoría algebraica elemental de las cantidades que varían por incrementos positivos o negativos de sus variables componentes, o sea Cálculo diferencial e integral.* Madrid, Imprenta que fue de García.

GRATTAN-GUINNES, I. (2002) "The End of Dominance: The Diffusion of French Mathematics Elsewhere, 1820-1870". En: K. Hunger Parshall y A. C. Rice (eds), *Mathematics Unbound: The Evolution of an International Mathematical Research Community, 1800-1945*. The American Mathematical Society, 17-39.

NAVIER (1851) *Resumen de las lecciones de Análisis dadas en la Escuela Politécnica de París, con las notas de Mr Liouville.* Traducido, anotado y precedido de una introducción por Eugenio de la Cámara.

ODRIOZOLA, J. (1829) *Curso completo de Matemáticas puras.* Madrid, Imp. García. Tomo IV: Cálculo diferencial e integral.

OLLERO, D. & PÉREZ GRIÑÓN, T. (1889) *Curso de Cálculo infinitesimal.* Segovia, Imprenta de Ondero, 2 vols.

SANCHIZ Y CASTILLO, F. (1863) *Lecciones de cálculo integral*. Segovia, Imprenta de Ondero.

TORNER Y CARBÓ, A. (1879) *Elementos de Cálculo Integral.* Madrid, Imprenta del Memorial de Ingenieros.

VELAMAZÁN, Mª, A. (1990) *La Enseñanza de las Matemáticas en la Academia de Ingenieros del Ejército en España en el siglo XIX*. Zaragoza, Universidad de Zaragoza.

VELAMAZÁN, Mª. A. & AUSEJO, E. (1993) "De Lagrange a Cauchy: el Cálculo Diferencial en las Academias Militares en España en el siglo XIX". *Llull*, 16(30), 327-370.

VELAMAZÁN, Mª. A. (1994) *La Enseñanza de las Matemáticas en las Academias Militares en España en el siglo XIX*. Zaragoza, Cuadernos de Historia de la Ciencia, 7. SHCTAR-Universidad de Zaragoza, 380 pp.

VELAMAZÁN, Mª. A. (2000) "Le sillage de Lagrange: García San Pedro el la méthode des accroissements idéaux". *Sciences et Techniques en Perspective*, IIe série, vol 4, fascicule 2, 235-243.