

# PROYECTO DE EDICIÓN CRÍTICA DE LA OBRA DE JULIO REY PASTOR *TEORÍA DE LOS ALGORITMOS LINEALES DE CONVERGENCIA Y DE SUMACIÓN*

L. ESPAÑOL<sup>\*</sup>, E. FERNÁNDEZ<sup>\*\*</sup>, M<sup>a</sup>.C. MÍNGUEZ<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup>Universidad de La Rioja, <sup>\*\*</sup>I.E.S. «Sagasta», Logroño

## 1. Introducción

Presentamos un proyecto, recientemente iniciado<sup>1</sup>, cuyo objetivo es la edición crítica de una de las piezas más emblemáticas de la obra matemática de Julio Rey Pastor. Este autor escribió libros para todos los niveles educativos, desde el bachillerato a los cursos superiores de universidad y el doctorado. La obra que nos ocupa pertenece al nivel de doctorado, es una monografía con rasgos de originalidad y dirigida a iniciar en la investigación.

Sabido es que las versiones originales de las obras clásicas de la cultura escrita se conservan como tesoros del patrimonio cultural, estando restringido su uso a los investigadores especializados. Para ponerlas al alcance de un público culto más amplio se recurre a ediciones modernas de diversos tipos. Los facsímiles reproducen al máximo las características del original, al que se adjunta alguna introducción general a la obra; en los casos de mayor pureza facsimilar, estos textos complementarios se imprimen aparte. Los facsímiles se editan generalmente en tiradas limitadas y numeradas, estando destinados a las bibliotecas públicas y a las privadas de los bibliófilos, donde a veces son contemplados más que estudiados. Cuando el motivo de la reedición de un clásico es promover su estudio se persigue una materialización más manejable, por lo que el original aparece reescrito, tal vez con otro formato, traducido si es el caso, a veces con presentación bilingüe y, en el caso de ediciones críticas, acompañado de un repertorio de notas, comentarios y estudios adicionales que explican la obra y la sitúan en los contextos pertinentes.

El proyecto que presentamos se inscribe en este segundo tipo, el de las ediciones críticas. Utilizamos alguna de las nuevas tecnologías informáticas, pero buscando finalmente que la obra se difunda en el formato impreso habitual. Sin olvidar que hemos entrado en el mundo de la modernísima edición digital, en la que el original, ya sea fotografiado o reescrito, se difunde en soporte electrónico a través de Internet.

<sup>1</sup> Los dos primeros autores cuentan con una ayuda a la investigación del Instituto de Estudios Riojanos (Gobierno de La Rioja) para la realización de este proyecto.

La reedición de clásicos matemáticos en nuestro país ha perseguido disponer, en nuestra lengua común castellana o en alguna de las otras lenguas españolas, de traducciones, en edición bilingüe o no y más o menos anotadas, de algunos de los textos más famosos de la historia. Desde el área de la lógica y filosofía se han traducido y comentado numerosos clásicos que también los son matemáticos. También se han reeditado algunas traducciones que en su día fueron de actualidad para la enseñanza o la investigación y en años recientes han tenido nuevas ediciones por razones de cultura histórica. Un hermoso ejemplo es *Geometría descriptiva* de G. Monge<sup>2</sup>. La Real Sociedad Matemática Española, con motivo del Año Mundial de las Matemáticas 2000, ha puesto en marcha un programa de facsímiles con traducciones anotadas de obras notables de la matemática clásica. Se ha empezado con el primer volumen de *Introducción al Análisis de los infinitos* de Euler<sup>3</sup> y se trabaja en otras obras. Pero no es este el primero ni el único caso, citemos por ejemplo la colección «Clásicos de las Ciencias» de la Universidad Autónoma de Barcelona. A pesar de todas las iniciativas habidas, la tarea de reedición crítica en España de textos clásicos de la matemática universal tiene todavía un largo camino que recorrer, incluso si consideramos lo que se ha hecho y se hace en los países de América con los que compartimos idioma.

Debido a que la matemática española no tuvo un papel relevante en la historia de la ciencia universal, entre este tipo de obras no las hay de autores españoles. Pero en tiempos recientes, con el auge de los estudios históricos de la ciencia en nuestro país, se han incrementado las reediciones de obras matemáticas de interés para la historia de la ciencia nacional. También en este campo daremos un solo botón de muestra, citando como ejemplo las reediciones de autores extremeños llevadas a cabo en esa región, donde, se ha iniciado una colección de nombre «Recuperación del Patrimonio Matemático Español»<sup>4</sup>. No obstante, también en el campo de los autores españoles hay muchas tareas pendientes.

En este trabajo presentamos un intento en esta dirección, bajo el protagonismo de Julio Rey Pastor. Primero, en la sección 2, haremos un rápido repaso a las reediciones ya realizadas de nuestro autor, para dedicar después la sección 3 a exponer nuestro proyecto. En la sección final describiremos algunas dificultades que plantea esta edición crítica. En la bibliografía final incluimos biografías generales de Rey Pastor que sirven para contextualizar este trabajo y las referencias específicas para

<sup>2</sup> Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid, 1996. Edición facsimilar de la traducción realizada en 1803 para la preparación de los técnicos de caminos de entonces. Con dos estudios, uno de A. del Campo y otro de J.M. Gentil y E. Rabassa.

<sup>3</sup> Original de 1748. Facsímil: Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales» y Real Sociedad Matemática Española, Sevilla, 2001. Trad. J.L. Arántegui. Notas A. Durán.

<sup>4</sup> Promovida por la Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes y Prósper», con el apoyo nacional de la FESEM.

el tema central que nos ocupa. No obstante, al hilo de la exposición se citan otras referencias en notas a pie de página.

## 2. Reediciones de Julio Rey Pastor

Desde ahora nos centraremos en Julio Rey Pastor, al que podemos considerar un clásico de la matemática española y argentina, en general de los países de habla hispana, si bien es un clásico reciente, fallecido en 1962. Algunas de sus obras todavía se pueden adquirir en el circuito comercial, por ejemplo, la *Historia de la Matemática* de Rey Pastor y J. Babini<sup>5</sup>. Por otra parte, libros de texto universitarios editados múltiples veces por el propio autor y sus herederos, como *Elementos de Análisis algebraico*, *Teoría de funciones*, *Cálculo infinitesimal*, o *Lecciones de Álgebra*, se vendían hasta hace bien pocos años y quizás todavía se pueden adquirir, al igual que los tres volúmenes del *Análisis Matemático*, escrito con sus discípulos P. Pi Calleja y C. Trejo<sup>6</sup>. Pero al pensar en reediciones críticas con valor histórico de textos universitarios parece más oportuno fijarse en otros cursos superiores, algunos de ellos sólo autografiados y difundidos en Buenos Aires en el ambiente universitario, dentro de la colección «Cursos de Matemáticas Superiores de Julio Rey Pastor». Citemos dos de ellos reeditados en los años ochenta. En Logroño, en 1983, con motivo del «I Simposio sobre Julio Rey Pastor», el Colegio Universitario de La Rioja produjo una modesta edición interna de *Apuntes de Topología*<sup>7</sup>. Como resultado del empuje que dicho simposio dio a los estudios sobre el matemático riojano, unos años después se hizo un arreglo similar con un curso de *Teoría general de funciones*<sup>8</sup>. En 1988, con ocasión del centenario del nacimiento de Rey Pastor, apareció el facsímil de *Los problemas lineales de la Física*, uno de los últimos cursos avanzados del gran matemático hispano, dado esta vez en la orilla española<sup>9</sup>.

Pero más oportuno es todavía fijar la atención ya sea en las memorias geométricas que Rey Pastor escribió como fruto de los estudios realizados en Alemania, en la vanguardia de la matemática, durante la segunda década del siglo XX, o bien en sus primeras monografías de análisis. Primero, porque significan, junto a los artículos publicados en las revistas que frecuentó, el punto más alto de su nivel matemático, con un rango internacional no despreciable, y también porque hace más años que terminaron su vigencia como actualidad y pertenecen de lleno a las obras

<sup>5</sup> Primera edición: Espasa Calpe, Buenos Aires, 1951. Nueva edición, modificada por Babini: Gedisa, Barcelona, 1985. Reeditada en 2000. Ver la reseña de L. Español publicada simultáneamente en *Saber y Tiempo* 12 (2001) 221-229, y en *Suma* 37 (2001) 129-133.

<sup>6</sup> Primera edición: Kapelus, Buenos Aires, 1952. Ha tenido numerosas reediciones.

<sup>7</sup> Original: Buenos Aires, 1952. Reedición: transcripción mecanografiada a cargo de E. Domínguez, prólogo de E. Ortiz.

<sup>8</sup> Original: Buenos Aires, 1935. Reedición: transcripción mecanografiada a cargo de E. Domínguez, con prólogo de E. Ortiz, Universidad de Zaragoza, 1987.

<sup>9</sup> Primera edición: INTA, Madrid, 1955. Facsímil: CSIC, Madrid, 1988, con un breve prólogo de F. Sales referido al autor y no a la obra reproducida.

de valor histórico; en este apartado estamos hablando de obras anteriores a la guerra civil española, con antigüedad de más de setenta años. También ahora hay que hablar de Logroño como foco iniciador de las reediciones. En 1983, se publicó una edición facsímil de *Introducción a la matemática superior*, las famosas conferencias de alta divulgación dadas en el Ateneo de Madrid en 1915<sup>10</sup>. Con ocasión del centenario del autor, celebrado en 1988, se tomaron varias iniciativas notables, además de la ya reseñada. Muy acertada fue la reproducción facsimilar del manuscrito de la tesis doctoral de Rey Pastor<sup>11</sup>. Por otra parte, los discípulos S. Ríos, L.A. Santaló y E. García Camarero prepararon una *Selecta*<sup>12</sup>, que reproducía artículos diversos de su maestro y trabajos más extensos, completos o fragmentados. Entre las memorias de estudios avanzados e investigación, incluimos también las siguientes:

*Fundamentos de Geometría proyectiva superior*, Madrid, 1917.

*Teoría geométrica de la polaridad*, Madrid, 1926.

Junto con la tesis doctoral ya citada, son lo fundamental de la investigación del joven geómetra, realizada entre la terminación de la licenciatura, 1908, y la Primera Guerra Mundial, 1914. Las fechas de los libros indican que tardaron algo en editarse: el primero, memoria premiada por la Academia de Ciencias en 1913, cuatro años, y el segundo, que fue elaborado antes, una barbaridad. Esta geometría sintética de la vieja escuela de von Staudt, en versión española de Torroja, es hoy de difícil asimilación, lo que dificulta las ediciones críticas de dichas obras, que serían bien interesantes.

### 3. Proyecto de edición crítica

Nuestra pretensión es añadir una obra más al repertorio de reediciones de Rey Pastor, pero queremos profundizar, respecto a los antecedentes mencionados, en el carácter crítico de la edición, tal como comentaremos más adelante.

La obra seleccionada, Rey Pastor [9], es una monografía publicada en Buenos Aires tras un proceso lleno de dificultades iniciado tres años antes en Madrid, así que podríamos decir que el texto estaba escrito en 1928 pero no se publicó en

<sup>10</sup> Primera edición: Corona, Madrid, 1916. Facsímil: Instituto de Estudios Riojanos, Logroño, 1983, con introducción de E. Ortiz.

<sup>11</sup> Tesis: *Correspondencia entre formas de primera categoría y aplicación al estudio de algunas de segunda*, junio de 1909. Facsímil: Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid, 1988, con un estudio de F.J. Etayo. La tesis apareció en imprenta un año después, 1910, con pequeños arreglos y un título algo diferente.

<sup>12</sup> Fundación Exterior, Madrid, 1988. Es una selección comentada, más a base de recuerdos personales de antaño que mediante un estudio científico histórico-crítico de la obra en tiempo presente.

1931<sup>13</sup>. Rey Pastor demostró interés por los procesos de sumación de series desde joven, pero se propuso como tema de investigación la sumación de series divergentes hasta después de su incorporación a Buenos Aires en 1921. Su actividad en este campo se consolidó hacia la mitad de la década, con una producción escrita sistemática situada entre 1928 y 1936<sup>14</sup>. Profundizar en el análisis crítico de dicha investigación, que incluye a Rey Pastor y a varios de sus discípulos —destacan San Juan en Madrid, Durañona, González Domínguez, en Buenos Aires— exige, entre otros requisitos, un conocimiento más profundo del tema, en particular un estudio interno detallado de la obras principales, para lo que empezar por ésta nos ha parecido lo más conveniente.

La memoria tuvo su origen en unos cursos impartidos en Buenos Aires y Madrid a partir de 1924-25. Podríamos presentarla como un curso de doctorado en el que se hace una puesta a punto en el tema con aportaciones personales del autor que abren caminos a la investigación de los discípulos. Esta finalidad le da a su vez un estilo en cierto modo informal y poco acabado, como si se tratara de un texto dirigido a un público próximo, que comparte ciertas claves de conocimiento general necesarias para comprenderlo, pero claves que no se explicitan en él, dificultando la asimilación al lector actual. Esta característica, ser una memoria apresurada en su redacción y accidentada en el trámite de la imprenta, motiva también la falta de precisión en las citas y la ausencia de una bibliografía solvente y de índices, elementos que son habituales en las obras de este autor; también hay numerosa erratas e imprecisiones que denuncian cierta improvisación.

<sup>13</sup> 176 páginas en formato 16x26,4 cm. Disponemos de un ejemplar original nuevo, por el que pasaron los años pero no el uso, donado en septiembre de 2000 por María Rey Pastor, nieta y única descendiente de don Julio hasta la fecha.

<sup>14</sup> Ver L. Español, C. Sánchez [4].

JULIO REY PASTOR

TEORÍA DE LOS ALGORITMOS LINEALES  
DE CONVERGENCIA Y DE SUMACIÓN

Trabajos del Seminario Matemático Argentino. Núm. 5  
Extracto de la publicación N° 12 de la Serie B

BUENOS AIRES  
IMPRENTA DE LA UNIVERSIDAD  
1931

El propio Rey Pastor reconocía estos defectos en una brevísima introducción que termina con una disculpa: “la falta de revisión de originales y pruebas por otros colaboradores, indispensable en obras de esta índole, explicará algunas deficiencias y descuidos, y mucho agradeceremos a los lectores que nos lo hagan notar, por si llega el día de reeditarla en forma menos imperfecta y más completa”. Ese día no le llegó al genial riojano, pero nosotros pretendemos asumir la tarea con toda prudencia y humildad, añadiendo notas y comentarios además de los retoques imprescindibles a los que nos sentimos autorizados por las palabras del maestro recién citadas.

Entramos ya en la explicación de las características que tendrá la reedición que preparamos y de algunos de los problemas principales a los que nos estamos enfrentando cuando hemos procesado los dos primeros capítulos, de los ocho de que consta la memoria, en los que ya aparecen de bruces todas las dificultades.

*LaTeX*. Ya que uno de los objetivos planteados es limpiar la memoria de erratas y realizar algunos retoques aclaratorios, se ha procedido a escribirla de nuevo con el procesador de textos LaTeX, con el que hemos conseguido una nueva versión que reproduce el original página a página, con el mismo tamaño de mancha y con una reproducción lo más fiel posible, si bien no del tipo principal de letra, sí del despliegue del texto, incluidas las notas a pie de página, y de las fórmulas. Así podremos corregir erratas e introducir todas aquellas modificaciones muy concretas que no alteren la paginación. Las modificaciones que fuercen este formato no se harán en el propio texto, sino que se incluirán al final en un anexo de aclaraciones.

*Notas y comentarios*. Llamamos «notas» a los textos breves, de pocas palabras o líneas, dirigidos directamente a facilitar la lectura de un detalle de la memoria. En cambio, llamaremos «comentarios» a los textos más amplios destinados a aclarar aspectos generales de un fragmento de la memoria o de sus diversos contextos.

Tanto las notas como los comentarios podrán tener carácter matemático, histórico o mixto. Unas y otros irán detrás de la memoria ordenados por capítulos.

*Diccionario de términos.* Los temas tratados por Rey Pastor en la obra que nos ocupa reciben en la matemática de hoy un tratamiento tan distinto que buena parte de la terminología entonces utilizada ya no es reconocible. Conviene por tanto elaborar un diccionario que facilite la lectura de la obra a los matemáticos actuales. En algunos casos, las notas y los comentarios antes mencionados se dirigirán a aclarar cuestiones terminológicas, así como relativas a las notaciones. Por ejemplo, el término «algoritmo» que aparece en el título merece una aclaración, pues tiene un sentido más amplio que el asignado en la matemática elemental, pero distinto del vinculado a la programación informática.

*Índices.* La obra original no tiene índice analítico, tampoco alfabético ni de autores, ni mucho menos bibliográfico. Nos proponemos realizar todos ellos. El procesador de textos LaTeX se encargará de los primeros, pero será sin duda más laborioso el mencionado en último lugar, pues será necesario identificar las referencias que el autor cita de un modo coloquial e impreciso, lo que dificulta su determinación exacta desde la distancia histórica en la que nos encontramos. Consultar los primeros trabajos de sus discípulos (tesis doctorales y primeros artículos publicados) será importante en este punto, pues es previsible que utilicen fuentes compartidas con su maestro. Existen también algunos trabajos de la época que dan repertorios muy útiles para esta tarea, en particular Smail [11].

#### **4. Un ejemplo de dificultad matemática**

La descripción de la tarea pendiente da una idea de las dificultades que surgen para llevarla a cabo, algunas de las cuales ya hemos mencionado, pero queremos señalar especialmente un ejemplo en el que las matemáticas juegan directamente un importante papel. En efecto, el trabajo que vamos a realizar tiene, además de su vertiente histórica general, un contenido interno en la disciplina matemática, y presenta algunos problemas a la hora de valorar qué debe corregirse en el texto.

Como ejemplo, mostramos en el Apéndice un amplio fragmento de la página 26 del original y su correlativo en nuestra versión LaTeX, que permitirá al lector comprobar las semejanzas de composición (las páginas están reducidas con la misma escala). Además, podemos mostrar con ello dos ejemplos de erratas simples que se corrigen sin dificultad ni alteración esencial de la obra y uno más en el que la solución no es tan simple. Los tres caen dentro de la exposición que Rey Pastor hace del

algoritmo de convergencia de Abel-Stolz, así llamado porque Abel (1826) lo dio para variable real y Stolz (1875) lo extendió a variable compleja<sup>15</sup>.

Las dos erratas de corrección simple son:

*Primera.* En la figura que aparece en la página que reproducimos es  $d=AQ$ , pero en la fórmula más abajo (línea -6 del fragmento reproducido) usa  $d=AP$ . La errata no es importante porque se borra cuando se toma la cota superior, pero era necesario corregir en uno de los dos lugares señalados. Hemos preferido cambiar los puntos  $P$  y  $Q$  en la figura.

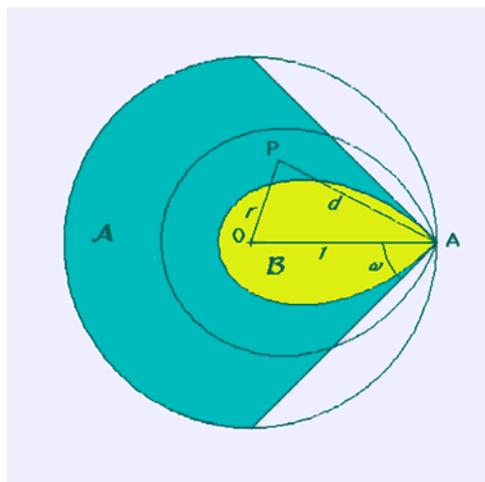
*Segunda.* Debajo de la figura mencionada, el texto se reanuda con un cadena de igualdades relativa a una suma de los valores absolutos de la función  $\lambda(t)$ , a la que le falta en el original el índice  $r$  de variación de la suma, que hemos añadido.

Pero en la nota que cierra la página (ver Apéndice) se plantea otro problema más delicado. Rey Pastor da la cota  $1/\cos\omega$  con validez «en toda la región del círculo interior a ese ángulo», lo que fácilmente se ve que es falso en zonas alejadas de  $A$ . Pero, como ha puesto antes «si  $t \rightarrow 1$ », cabe pensar que el resultado pueda verificarse en cierta región más pequeña con  $A$  como punto límite.

Esto encaja con el estilo impresionista característico del autor, que deja a menudo para el lector la tarea de refinar los argumentos. Si recurrimos a la bibliografía de la época, es natural para este tema acercarse a Knopp [6, p. 406], y allí vemos que, para probar la extensión compleja del teorema de Abel, se reduce la región angular interior al círculo exigiendo que la distancia al vértice  $A$  sea menor que  $\cos\omega$ , y se obtiene para la suma la cota  $2/\cos\omega$ , el doble que la dada por Rey Pastor.

Hasta aquí, la ventaja parece que es para el español, pues da una cota más pequeña; además, su demostración es simple y geométrica («riemanniana»), basada en el teorema de los senos, mientras que la del alemán es puramente analítica («weierstrassiana»). Para terminar de otorgar esta ventaja a Rey Pastor, es necesario mostrar esa supuesta región más pequeña en la que su argumento sea válido. Pero puestos a la tarea de determinar dicha región, encontramos que tal acotación es falsa.

<sup>15</sup> Ver Knopp [7], pp. 311 y 406 respectivamente. Este autor afirma (p. 177) que Gauss había enunciado y usado el resultado de Abel en 1812, pero dando del mismo una demostración incorrecta.



En efecto, en la figura se ha representado, dentro del círculo con centro  $O$  y con un ángulo  $\omega$  fijo, el óvalo interior del caracol de Pascal, junto con sus dos tangentes en  $A$ , de ecuaciones respectivas (con las rectas dadas en forma conjunta)

$$d / 1-r = 1 / \cos\omega \quad \text{y} \quad r^2 = 1 + d^2 - 2d \cos\omega.$$

La región **B** es el interior del óvalo y la región **A** es la complementaria de **B** dentro del recinto angular limitado por la circunferencia exterior. Las inequaciones que definen estas regiones son respectivamente

$$d / 1-r < 1 / \cos\omega \quad \text{y} \quad d / 1-r > 1 / \cos\omega.$$

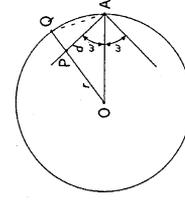
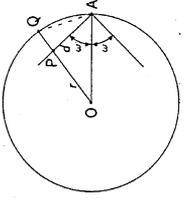
Es claro entonces que existen sucesiones de puntos  $P$  de la región **A**, situados entre el óvalo antes citado del caracol de Pascal y sus tangentes, que convergen al punto  $A$ , de modo que la acotación propuesta por Rey Pastor es falsa. Por otra parte, se ha representado también el óvalo mayor

$$d / 1-r = k / \cos\omega \quad k > 1,$$

(en la figura  $k=2$ ) lo que permite ver que la sucesiones  $P_n$  que tienden al punto  $A$  dentro de la región angular del círculo siempre quedan dentro del dicho óvalo mayor es decir, se tiene una región limitada en la que vale la cota  $k / \cos\omega$  para cualquier  $k > 1$ ; pero no, como hemos dicho, en el caso  $k=1$  pretendido por Rey Pastor.

¿Cómo corregir en este caso? Parece inevitable dejar el texto en su estado original y añadir aparte un comentario que explique la situación matemática planteada en los términos antes expuestos.

APÉNDICE: Fragmento de la página 26.

Original	Copia LaTeX
<p><b>Algoritmo de Abel-Stolz (AS<sub>t</sub>)</b></p> <p>31. Estudiaremos ahora el método (A) para camino complejo. Sea <math>t</math> un parámetro complejo que tiende a 1 en un conjunto ordenado cualquiera, interior al círculo unidad y pongamos:</p> $ t  = r < 1, \quad  1 - t  = d.$ <p>Las condiciones I y III se cumplen evidentemente. La condición II se verificará si está acotada la serie:</p>	<p><b>Algoritmo de Abel-Stolz (AS<sub>t</sub>)</b></p> <p>31. Estudiaremos ahora el método (A) para camino complejo. Sea <math>t</math> un parámetro complejo que tiende a 1 en un conjunto ordenado cualquiera, interior al círculo unidad y pongamos:</p> $ t  = r < 1, \quad  1 - t  = d.$ <p>Las condiciones I y III se cumplen evidentemente. La condición II se verificará si está acotada la serie:</p>
	
$\sum  \lambda(t)  =  1 - t  +  t(1 - t)  + \dots +  r^{n+1}(1 - t)  + \dots$ $= d(1 + r + r^2 + \dots) = \frac{d}{1 - r}$ <p>es decir, si los valores <math>t</math> cumplen la condición <math> 1 - t  &lt; k(1 -  t )</math>.          Nota 1.<sup>a</sup>. — En el triángulo <math>APQ</math> es:</p> $\frac{d}{1 - r} = \frac{AP}{PQ} = \frac{\text{sen } AQP}{\text{sen } PAQ} < \frac{1}{\text{sen } PAQ}$ <p>luego, si <math>t \rightarrow 1</math> dentro de un ángulo de vértice <math>A</math>, bisectriz <math>AO</math> y semi-amplitud <math>\omega &lt; \frac{\pi}{2}</math> se verifica, en toda región del círculo interior a ese ángulo:</p> $\sum  \lambda(t)  < \frac{1}{\cos \omega},$ <p>acotación que es independiente de <math>t</math>.</p>	$\sum  \lambda(t)  =  1 - t  +  t(1 - t)  + \dots +  r^{n+1}(1 - t)  + \dots$ $= d(1 + r + r^2 + \dots) = \frac{d}{1 - r}$ <p>es decir, si los valores <math>t</math> cumplen la condición <math> 1 - t  &lt; k(1 -  t )</math>.          Nota 1.<sup>a</sup>. — En el triángulo <math>APQ</math> es:</p> $\frac{d}{1 - r} = \frac{AP}{PQ} = \frac{\text{sen } AQP}{\text{sen } PAQ} < \frac{1}{\text{sen } PAQ}$ <p>luego, si <math>t \rightarrow 1</math> dentro de un ángulo de vértice <math>A</math>, bisectriz <math>AO</math> y semi-amplitud <math>\omega &lt; \frac{\pi}{2}</math> se verifica, en toda región del círculo interior a ese ángulo:</p> $\sum  \lambda(t)  < \frac{1}{\cos \omega},$ <p>acotación que es independiente de <math>t</math>.</p>

**Referencias**

- [1] DOU, A., (1967) «Julio Rey Pastor», *Razón y Fe*, 167, 133-146 y 273-282.
- [2] ESPAÑOL, L. (ed.) (1985) *Actas I Simposio sobre Julio Rey Pastor*, (Logroño, 28 de octubre a 1 de noviembre de 1983), IER, Logroño.
- [3] ESPAÑOL, L. (ed.) (1980) *Estudios sobre Julio Rey Pastor*, IER, Logroño.
- [4] ESPAÑOL, L., SÁNCHEZ, C. (2001) «Julio Rey Pastor y la teoría de sumación de series divergentes», *LLULL*, 24 (2001) 89-118.
- [5] GONZÁLEZ, J.J. (1964) *Julio Rey Pastor*, Ediciones Culturales Argentinas, Buenos Aires. (Apéndice: REY PASTOR, J., *Álgebra del lenguaje*, Real Academia Española, Madrid, 1954).
- [6] KNOPP, K. (1990) *Theory and applications of infinite series*, Dover, New York, 1990. (Reproducción de la 2ª ed. inglesa de 1951, que es traducción de la 2ª alemana de 1928, revisada conforme a la 4ª de 1947).
- [7] LAWRENCE, J.D., (1972) *A catalog of special plane curves*, Dover, New York.
- [8] MILLÁN, A., (1988) *El matemático Julio Rey Pastor*, Colegio Universitario de La Rioja, Logroño.
- [9] REY PASTOR, J. (1931) *Teoría de los algoritmos lineales de convergencia y de sumación*, Imprenta de la Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires.
- [10] RÍOS, S., SANTALÓ, L.A., BALANZAT, M. (1979) *Julio Rey Pastor matemático*, Instituto de España, Madrid. (Apéndice: REY PASTOR, J., «La vocación científica», *La Nación*, Buenos Aires, 1923).
- [11] SMAIL, L.L. (1925) *History and synopsis of the theory of summable infinite processes*, Oregon University Press, Eugen.