Problemas ricos en argumentación para secundaria: reflexiones sobre el pensamiento del alumnado y la gestión del profesor

Laura Morera
Judit Chico
Edelmira Badillo
Núria Planas

SUMA+ núm. 100
pp. 87-98
Artículo publicado originalmente en el número 70 de *Suma* en julio de 2012

Ejemplificamos dos problemas ricos desde la perspectiva del trabajo de la argumentación y la generalización en el aula de secundaria. Este es el punto de partida para reflexionar sobre aspectos de la gestión del profesor y, en general, de la preparación de las interacciones en ambientes de resolución de problemas. El estudio se enmarca en dos proyectos de investigación sobre cuestiones de argumentación matemática e interacción social. En esta ocasión, ponemos especialmente de relieve la utilidad de dos instrumentos para mejorar la gestión y anticipar algunas de las respuestas de los estudiantes.

Palabras clave: Educación matemática, Secundaria, Problemas, Generalización, Gestión del profesor.

Rich-Argumentative Problems for Secondary Education: Reflexions on the Problem and the Teacher's Orquestration // We illustrate two problems that attempt to promote abilities of argumentation and generalization in the secondary mathematics classroom. This is the starting point to reflect on issues about the teacher's actions and, more generally, about the organization of interactions in problem solving environments. The study is part of two research projects on questions of mathematical argumentation and social interaction. On this occasion, we put especial emphasis on the functionality of two tools addressed to both improve the teacher's actions and anticipate some of the students' answers.

Keywords: Mathematics Education, Problems, Generalization, Teacher's Orquestration.

En el marco de dos Proyectos de Investigación[1], estamos colaborando en el diseño y desarrollo de trabajos para la facilitación de procesos de argumentación matemática en el aula de secundaria. Dos de estos trabajos, liderados respectivamente por L. Morera y J. Chico, comparten el interés por elaborar secuencias de problemas en base a criterios de potencial argumentativo y de coherencia interna. Este artículo muestra parte de una secuencia que pretende facilitar la elaboración de conjeturas y de procesos de generalización a partir del análisis de casos particulares.

Para la selección de problemas, recurrimos a los conceptos de «matematización horizontal» y «matematización vertical», introducidos por Treffers —cuyo trabajo de 1987 hemos consultado vía Freudhental, 1991—, tal como usan Morera (2010) y Planas y Morera (2012). La matematización horizontal se refiere al proceso de «traducir» situaciones-problema desde el mundo real al matemático, contribuyendo así a comprender mejor relaciones entre lenguaje ordinario y lenguaje matemático. Por otro lado, la matematización vertical se refiere al proceso de establecer conexiones cada vez más complejas dentro de las matemáticas, con ciclos que llevan a argumentar y generalizar. Bajo estos dos principios, nuestro objetivo es crear y/o adaptar problemas contextualizados con un nivel elevado de reto matemático. En el contexto de nuestros trabajos, el proceso completo de matematización se interpreta como la capacidad del alumnado por realizar sendos procesos de matematización horizontal y vertical de forma integrada. En concreto, esto significa ser capaz de validar el proceso seguido desde la doble perspectiva de volver al contexto real/realista para dar sentido a la resolución del problema y, al mismo tiempo, reflexionar sobre la validación de los argumentos matemáticos utilizados. En esta misma línea encontramos la secuencia de problemas propuestos por Badillo, Giménez y Vanegas (2012), en las que el contexto artístico permitió la construcción de significados colectivos con relación al concepto de forma, a partir del desarrollo de competencias argumentativas en el ciclo superior de primaria.

Tras tener en cuenta los procesos de argumentación y generalización, junto con el tipo de contextos sugeridos por los enunciados, para la selección de problemas «argumentativamente ricos», todavía queda por determinar el contenido matemático. En esta ocasión, los dos problemas que describimos —que son parte de una secuencia de ocho problemas— se basan en contenidos de aritmética y álgebra. Tenemos otras secuencias, que dejamos para otro artículo y que explican el título de este primer elemento de la serie «Problemas argumentativamente ricos para secundaria».

Preparación de la experimentación en el aula

¿Hasta qué punto es razonable esperar que los procesos matemáticos de argumentación y generalización sean fáciles de aprender en el aula de secundaria? ¿Por qué deberíamos pensar que el alumnado será capaz de argumentar y generalizar correctamente si estos procesos no se han trabajado de forma explícita y sistemática? ¿Contribuyen las distintas culturas del aula de matemáticas del mismo modo al desarrollo de estos procesos? Si no es así, ¿cuáles son las normas de la práctica matemática en el aula que mejor predisponen al trabajo de la argumentación y la generalización?

Las preguntas anteriores son fundamentales en el procedimiento que lleva a tomar decisiones sobre qué problemas matemáticos seleccionar y cómo organizar su gestión en clase. Desde el inicio, los dos problemas que ejemplificamos en este artículo se han pensado como una secuencia real para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en un aula de secundaria, con alumnado de 15 y 16 años. Por tanto, ha sido necesario clarificar no solo el tipo de problemas y sus enunciados, sino también, y sobre todo, el escenario didáctico de gestión de la actividad antes de la experimentación realizada en otoño de 2010. Para la preparación de la experimentación en el aula, hemos recurrido a dos instrumentos básicos: el árbol del problema y el cuadro de consignas.

El «árbol del problema» es un instrumento inspirado en un instrumento anterior elaborado por Morera (2010) y detallado en Morera, Souto y Arteaga (2011). Se trata de una representación en forma de árbol de un problema con los propósitos de determinar la riqueza matemática dada por la diversidad de aproximaciones y resoluciones, tanto correctas como erróneas, y anticipar lo que matemáticamente puede ocurrir en el aula. En síntesis, el árbol permite al profesor conocer en profundidad las posibilidades del problema y prever algunas de sus intervenciones en clase para sacar el máximo rendimiento de la actividad del alumnado.

Los dos árboles que se ejemplifican en la sección siguiente, uno para cada problema, son por tanto instrumentos de ayuda a la acción del profesor en el aula. Reproducimos versiones de estos árboles revisadas tras la implementación en clase de los problemas. La modificación de los árboles elaborados «a priori» es una tarea que, en realidad, no se acaba nunca. A toda planificación de una clase, sigue su implementación, cuya evaluación lleva a otra planificación, y así sucesivamente. La necesidad de un ajuste permanente de los contenidos incluidos en el árbol debe conjugarse con la necesidad de mirar estos contenidos en momentos puntuales de la cadena planificación-implementación-planificación. Los árboles de este artículo son resultado de la revisión tras un primer ciclo planificación-implementación. Pueden por tanto llamarse «árboles reales», aunque son también «árboles hipotéticos» si tenemos en cuenta que pueden realizarse nuevas implementaciones.

Mientras que el árbol del problema aporta información sobre lo que matemáticamente puede ocurrir en clase, el «cuadro de consignas» se elabora para recoger información del plano social. Para cada secuencia de problemas, se diseña un cuadro con tipos de consignas que promuevan dinámicas de iniciación, seguimiento, ampliación y finalización a lo largo de los procesos de resolución de los problemas. De algún modo, estas consignas indican las normas de actuación en el aula durante la resolución de los problemas, que en otras ocasiones hemos llamado normas socio-matemáticas (ver, por ejemplo, la discusión de Planas, 2011, inspirada en los trabajos sobre normas de Yackel y Cobb, 1996). La tabla 1 muestra el cuadro de consignas usado para la experimentación, desde una perspectiva general sin todavía referencias a la particularidad de cada problema.

En la tabla 1, bajo el descriptor «Pensamiento matemático» se incluyen tanto la situación inicial del alumno pensando el problema como el trabajo en pareja que sigue durante unos veinte minutos de la

Consignas -tipos-	*Pensamiento matemático -pareja-*	*Contexto de discusión -gran grupo-*
Inicio	Dar sentido al trabajo en pareja [Recurrid a vuestro compañero si tenéis algún tipo de duda sobre lo que se pide]	Escoger la pareja que más conflicto cognitivo pueda producir en el grupo: no haber finalizado la tarea o haber usado un razonamiento poco común [¿Dónde os habéis quedado atascados? Explicad lo pensado hasta este punto]
Seguimiento	Reafirmar el sentido de la pareja [Recordad que si tenéis alguna duda le podéis preguntar a vuestro compañero] Desatascar momentos de silencio o poca argumentación [María: explícale a Juan tu razonamiento y decidid entre los dos si es correcto, pensando bien cada paso]	Dinamizar la puesta en común [¿Alguien podría ayudarlos a salir del punto donse se han quedado? ¿Lo has comprendido? Explícalo con tus palabras] Provocar conflicto cognitivo en el grupo [¿Está bien? ¿Por qué?] Hacer repetir a un alumno lo expuesto por otro [¿Has comprendido la explicación de María? ¿La podrías repetir con tus palabras?] Desatascar momentos de silencio o poca argumentación [¿Alguna pareja ha razonado el problema de otro modo? ¿Lo explicáis?]
Ampliación	Dinamizar la pareja en caso de resolución rápida [¿Hay más formas de resolución? ¿Por qué? ¿Qué interpretación geométrica hay detrás de cada resolución?]	Dinamizar la puesta en común [¿Creéis que hay más formas de resolución? ¿Por qué? ¿Qué interpretación geométrica hay detrás de cada resolución?] Ampliar la discusión [Un alumno me dio esta solución, ¿es correcta? ¿Por qué?]
Finalización	Concluir el trabajo en pareja y pasar a la puesta en común [Se acabó el tiempo en pareja, escribid hasta donde habéis llegado y discutimos juntos]	Provocar reflexión sobre lo expuesto y mostrar si hay evidencias de aprendizaje [Ahora vais a revisar lo escrito en pareja. ¿Añadiríais o cambiaríais algo? ¿Vuestras argumentaciones eran completas?

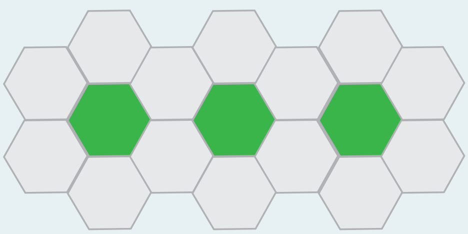
Tabla 1. Cuadro de consignas

sesión de clase. Aunque el trabajo en parejas es cualitativamente distinto al trabajo individual y, en muchos aspectos, se asemeja al trabajo en gran grupo, planteamos esta agrupación porque queremos poner de relieve dos papeles del profesor en la gestión de la sesión: 1) dinamizador del pensamiento matemático del alumnado (trabajo individual y en pareja); y 2) mediador de contrastes entre alumnos y formas de aproximación al problema (trabajo en gran grupo). Para gestionar los contrastes, son útiles los procesos de filtraje, donde se promuevan la generación de ideas, la comparación, la evaluación y, posteriormente, la selección. En este sentido, el árbol del problema es un instrumento que facilita la toma de decisiones sobre qué ideas seleccionar/filtrar en los distintos momentos de la resolución.

Ejemplificación del Problema 1

Problema 1

El ayuntamiento quiere ornamentar una plaza colocando jardineras hexagonales (verdes en el dibujo) rodeadas de baldosas también hexagonales:



1. ¿Cuántas baldosas harán falta para las tres jardineras del dibujo?
2. ¿Cuántas baldosas serán necesarias para 7 jardineras? Explícalo.
3. Para un número cuaquiera de *n* jardineras, ¿cuántas baldosas hacen falta? Explícalo.

La figura 1 muestra el árbol elaborado para el Problema 1. Durante la resolución de este problema, se contemplan distintos momentos en los cuales puede convenir ofrecer ayudas al alumno. Estas ayudas simbólicamente se representan por medio de cuadros azules con la terminología Ci. Por ejemplo, en C1 el profesor podría recomendar hacer conteo en el dibujo. En C2, podría recomendar hacer una tabla o extender el dibujo para cuatro y cinco jardineras y buscar regularidades. En C3, podría convenir refutar conjeturas con un caso particular. En C4, como ejemplo de ayuda haríamos una tabla o buscaríamos patrones geométricos para extender el dibujo. Por último, una ayuda en C5 podría consistir en hacer describir cada paso de la resolución, explicando los patrones geométricos que haya detrás.

En la experimentación en clase, gestionada por Morera, fue interesante cuando se pidió imaginar el razonamiento geométrico que había detrás de cada expresión algebraica. La tabla 4 (página 94) resume las expresiones algebraicas y los razonamientos geométricos que surgieron acerca de este problema.

Otro aspecto a tener en cuenta es que el problema se podría haber resuelto mediante un razonamiento numérico, construyendo una tabla y viendo que se forma una sucesión aritmética de factor 4, tal como indicamos en la tabla 2.

Es igualmente interesante observar que en algún grupo surgió la idea de realizar una regla de tres: Si para 3 jardineras necesitamos 14 baldosas, para 100 necesitaremos… Aquí el propio enunciado del problema, en el que era fácil probar para casos menores, promovió procesos de regulación dentro del grupo hacia la búsqueda de patrones y generalizaciones más complejas. En general, se confirmó que el problema de las baldosas es una excelente propuesta para el trabajo de la argumentación, la generalización y la descripción de estrategias inductivas. Nuestros resultados, por tanto, coinciden con los de Cañadas, Castro y Castro (2008), sobre un estudio en torno al mismo problema con 359 estudiantes de 3.º y 4.º de Educación Secundaria Obligatoria. Aunque por supuesto queremos resaltar

Jardineras	*Baldosas*
1	6
2	10
3	14
4	18
5	22
…	…
8	6+4(n-1)

Tabla 2. Aproximación numérica al problema 1

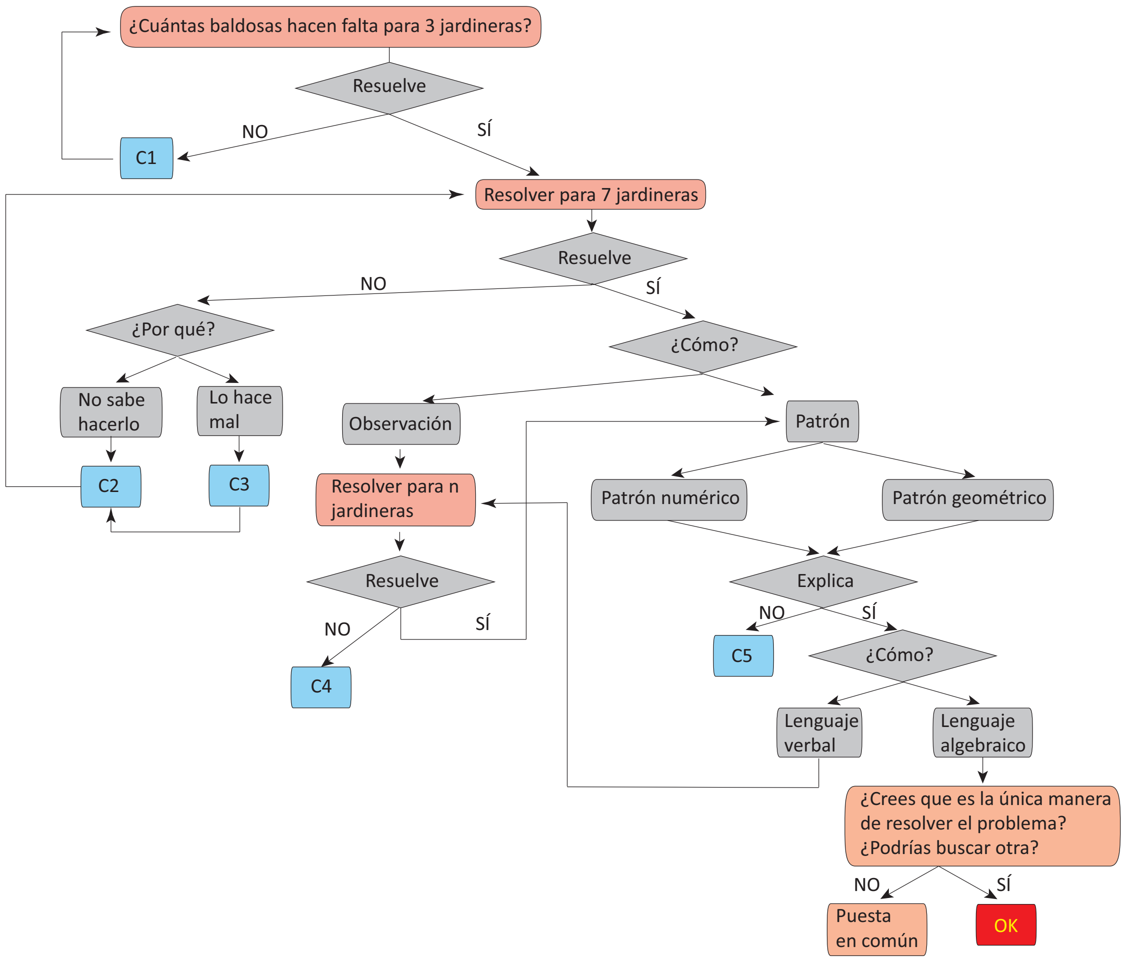


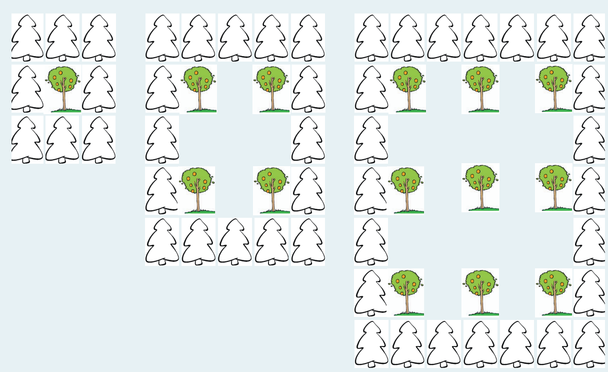
Figura 1. Árbol del Problema 1

la riqueza matemática del problema y de sus resoluciones, en este artículo uno de los aspectos que queremos poner de relieve es el papel de la gestión del profesor —con la ayuda del árbol del problema y del cuadro de consignas— y de la colaboración entre alumnos para hacer efectiva dicha riqueza. En Morera (2010) se analiza precisamente la riqueza de los problemas de forma integrada a la gestión del profesor y a las características de la colaboración entre alumnos

Ejemplificación del Problema 2

Problema 2

Un agricultor quiere plantar naranjos siguiendo una forma cuadrada y alrededor quiere plantar pinos. Se imagina el siguiente esquema para 1, 2 y 3 filas de naranjos:



1. Explica cuántos naranjos y pinos hacen falta para cinco filas de naranjos. ¿Cómo lo has hecho?
2. Para el caso general de n naranjos, ¿cuántos naranjos necesitan? ¿Y pinos?
3. El principal ingreso del agricultor proviene de la venta de naranjas. Por tanto, le interesa tener más cantidad de naranjos que de pinos. Manteniendo la forma del huerto, ¿es esto posible?

En el marco de la secuencia de problemas diseñada para el trabajo de argumentación y generalización matemáticas, el Problema 2 sigue al Problema 1. Se supone que el alumno ha ganado una cierta agilidad en el planteamiento de estrategias de pensamiento inductivas. Se trata de dos problemas similares en muchos aspectos, tanto desde la perspectiva de la matematización horizontal como la vertical. No obstante, hay algunos rasgos distintivos que los hacen complementarios. Por ejemplo, la generalización a la que se llega con el Problema 1 no va acompañada de la necesidad de procesos de modelización que den sentido a la fórmula algebraica. Por el contrario, con la última pregunta del Problema 2 se busca un proceso de modelización que aporte significado al producto de la generalización en el contexto del agricultor. Esta es una diferencia importante entre ambos enunciados.

La figura 2 muestra el árbol elaborado para el Problema 2. A modo de ejemplo, las ayudas que el profesor puede ofrecer al alumno son las siguientes: en C1 se podría recomendar realizar la representación gráfica para el caso $n = 5$ y hacer conteo; en C2, se podrían buscar regularidades a través de una tabla o un patrón geométrico; en C3, sería útil hacer describir cada paso de la resolución, junto con hacer explicar el patrón geométrico que hay detrás de cada resolución; por último, en C5 podría convenir estudiar más casos e interpretar el resultado para cada uno.

De nuevo, insistimos en el carácter ilustrativo de estas ayudas y en la necesidad de «filtrarlas» en función de los contenidos concretos de la discusión en gran grupo, y eventualmente en parejas.

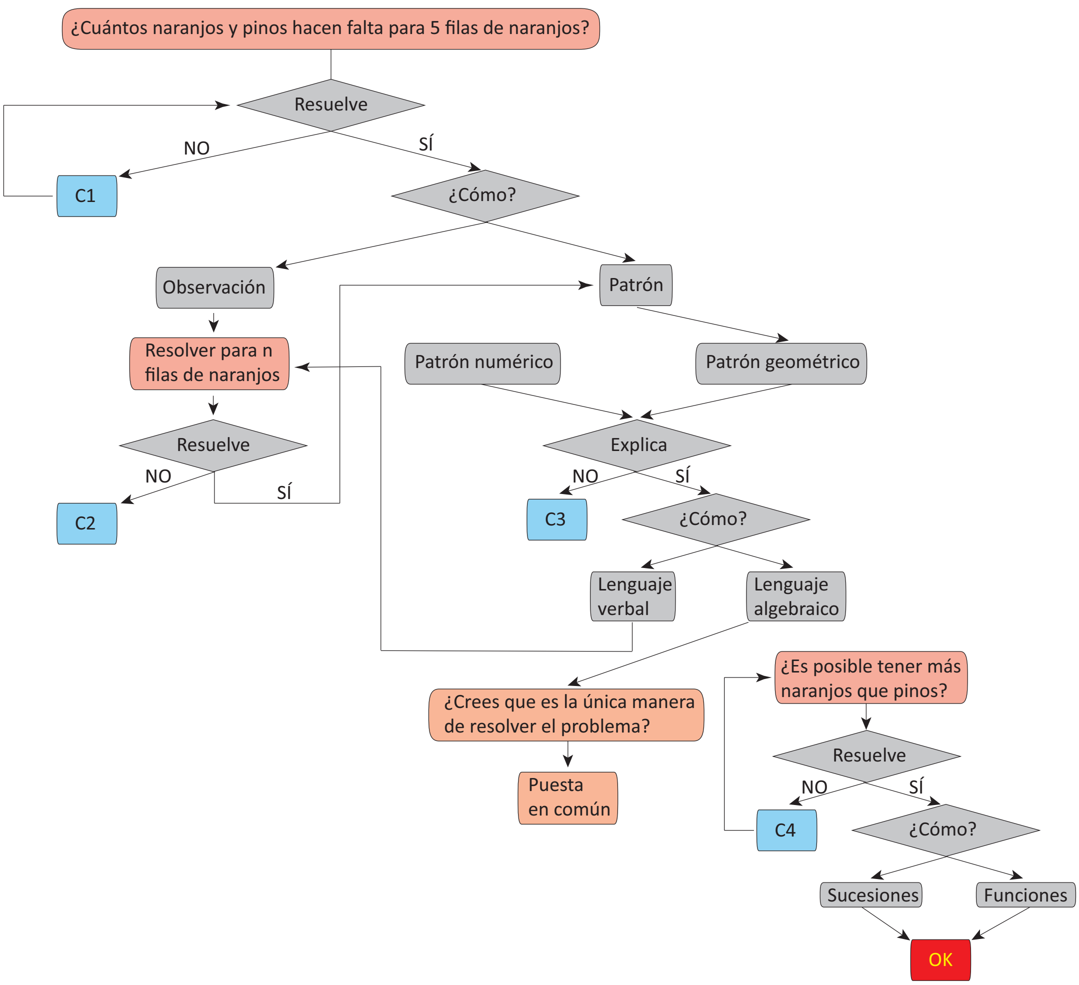


Figura 2. Árbol del Problema 2

La experimentación en clase de este problema también ha sido gestionada por Morera. La tabla 5 (página 95) resume las expresiones algebraicas y los razonamientos geométricos que surgieron durante la puesta en común. Se pudo ver cómo el hecho de que razonamientos distintos lleven a la solución del problema facilita la argumentación y la búsqueda de aproximaciones alternativas. Los alumnos no se conforman con una única forma de resolución, sino que muestran interés por entender otras, ya sea porque las han introducido compañeros de clase o porque el profesor ha proporcionado una «consigna».

La tabla 3 contiene el razonamiento numérico asociado a este problema, donde aparentemente se podría haber obviado el recurso del pensamiento geométrico. Para los alumnos que obtuvieron las dos expresiones, n^2 y $8n$, fue útil la tabla numérica para responder a la pregunta sobre la relación progresiva entre cantidad de naranjos y cantidad de pinos, siempre y cuando se llegara hasta el valor 8 y este se superara.

En clase, Morera dibujó en la pizarra un esquema de la representación gráfica de las dos expresiones algebraicas, para la cantidad de naranjos y de pinos respectivamente (figura 3). Los alumnos no tenían todavía un conocimiento profundo sobre los comportamientos matemáticos de las funciones lineales y cuadráticas, pero sí estaban familiarizados con la parábola «estándar» y con la representación de líneas rectas. La gráfica de ambas funciones, la localización del punto de corte para $n=8$ (siendo n la variable establecida para el número de filas de naranjos) y la visualización del cambio gradual de pendiente en distintos puntos de la parábola fueron elementos de discusión.

Es clave el momento de aprendizaje en el cual los alumnos se dan cuenta de que hay un número n para el cual el número de naranjos es igual al de pinos. Es

Filas de naranjos	*Número de naranjos*	*Número de pinos*
1	1	8
2	4	16
3	9	24
4	16	32
...	...	...
n	n²	8n

Tabla 3. Aproximación numérica al Problema 2

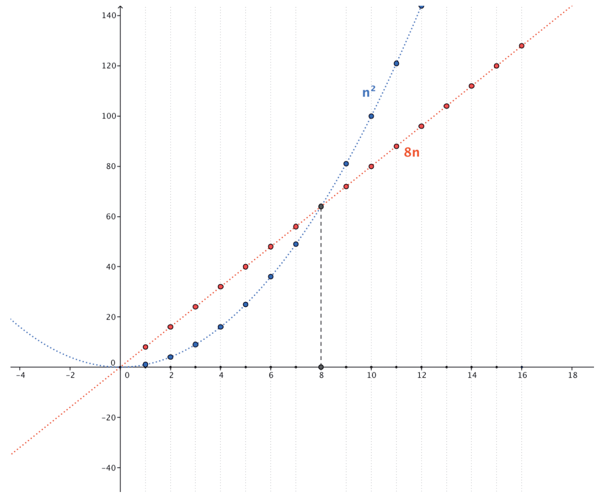


Figura 3. Gráfica relativa al Problema 2

también clave cuándo muestran que hay varios procedimientos para encontrar dicho número, aunque por supuesto no llegan a mostrarlos todos. Por ejemplo, sin recurrir a la tabla numérica ni a la representación gráfica, se puede optar por igualar las dos expresiones, n^2 y $8n$, y acabar resolviendo una ecuación de segundo grado, $n^2=8n$, donde solo una de las soluciones tendrá sentido en el contexto del enunciado (si $n=0$, el agricultor ya no tiene huerto). Sin embargo, si solo se recurre al planteamiento de la ecuación, no hay evidencia suficiente de que se haya entendido en su totalidad la relación entre n^2 y $8n$.

En nuestro trabajo, buscamos no solo la resolución correcta del problema, sino también la elaboración de argumentaciones y explicaciones válidas que confirmen un elevado grado de comprensión. Para más detalles sobre este problema y sus resoluciones, recomendamos consultar el Problema de los Manzanos de las Pruebas PISA (Pajares, Sanz y Rico, 2000), del cual hemos partido y que ha sido adaptado para fines específicos de la secuencia de problemas.

Mirada conjunta al pensamiento del alumnado y a la gestión del profesor

En Goñi y Planas (2010) se afirma que los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

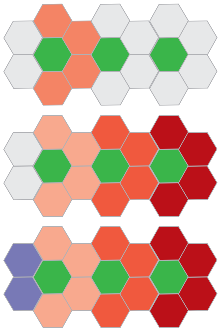
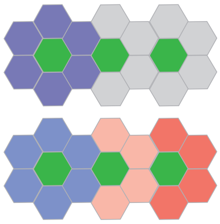
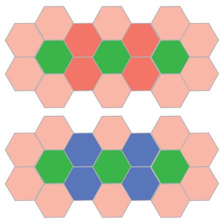
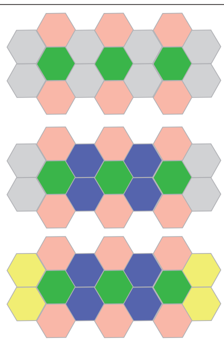
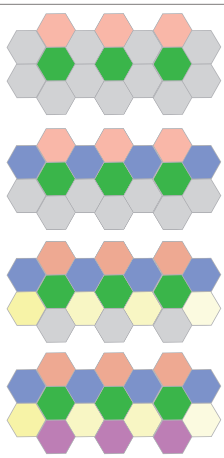
Razonamiento geométrico	*Razonamiento algebraico implícito*	*Expresión algebraica*
	Piensan que por cada jardinera añadirán 4 baldosas Como hay n jardineras, añaden 4n baldosas Cuando ya las han llenado todas tienen en cuenta que han dejado de contar las 2 iniciales	$4n+2$
	Primero piensan que para la primera jardinera necesitarán 6 baldosas Luego ven que por cada jardinera más que quieren añadir sólo faltará añadir 4 baldosas. Hay (n-1) jardineras además de la primera. Por tanto: 4(n-1)	$6+4(n-1)$
	Primero piensan que cada jardinera está envuelta por 6 baldosas. Por tanto: 6n Luego ven que están contando dos veces todas las baldosas interiores, por eso sacan las solapadas: 2(n-1)	$6n-2(n-1)$
	Primero piensan que por cada jardinera añadirán 2 baldosas, la de arriba y la de abajo: 2n Luego quieren añadir las interiores: 2(n-1) Finalmente, falta añadir las cuatro baldosas de los extremos: 4	$2n+2(n-1)+4$
	Piensan que por cada jardinera añaden 1 baldosa, que forman una fila: n Después añaden n+1 baldosas de la siguiente fila Después, la siguiente fila, con n+1 baldosas Finalmente, añaden las n baldosas de la última fila	$n+(n+1)+(n+1)+n$

Tabla 4. Síntesis de razonamientos elaborados en clase sobre el Problema 1

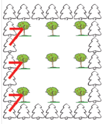
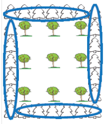
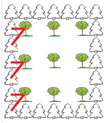
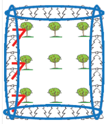
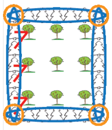
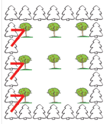
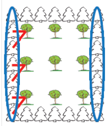
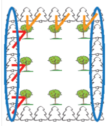
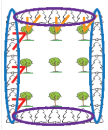
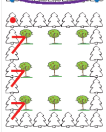
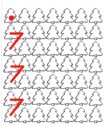
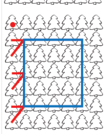
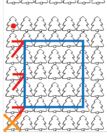
Razonamiento geométrico	*Razonamiento algebraico implícito*	*Expresión algebraica*
	Piensan que por cada naranjo habrá dos pinos en un lado: $2n$	$2n\cdot 4$
	Después ven que hay cuatro lados que completan todo el cuadrado: $2n\cdot 4$	
	Piensan que hay el doble más uno de pinos que de naranjos en cada lado: $(2n+1)$	
	Multiplican por cuatro, ya que hay cuatro lados: $(2n+1)\cdot 4$	$(2n+1)\cdot 4n-4$
	Se dan cuenta de que las esquinas las han contado el doble de veces y que hay que sacarlas una vez: $(2n+1)\cdot 4-4$	
	Piensan que hay el doble más uno de pinos que de naranjos en un lado: $(2n+1)$	
	Ven que de estos lados hay dos: $2\cdot(2n+1)$	$2\cdot(2n+1)+2\cdot(2n-1)$
	Cuentan cuántos pinos hay en uno de los otros dos lados restantes en función de los naranjos: $2n-1$	
	Finalmente, ven que para completar los pinos, tienen que contar dos lados de aquellos: $2\cdot(2n-1)$	
	Piensan que en cada lado hay $(2n+1)$ pinos	
	Piensan que en un cuadrado lleno habría el cuadrado: $(2n+1)^2$	$(2n+1)^2-(2n-1)^2$
	Piensan que tienen que quitar el cuadrado central para quedarse sólo con el contorno: $(2n+1)^2-()^2$	
	Finalmente, calculan que el lado del cuadrado interior será 2n-1. Por lo tanto: $(2n+1)^2-(2n-1)^2$	

Tabla 5. Síntesis de razonamientos elaborados en clase sobre el Problema 2

están estrechamente ligados a las condiciones de la interacción y la comunicación en torno a ellos.

Gran parte de este artículo está dedicada a mostrar la riqueza de dos problemas matemáticos, desde el punto de vista de su pertenencia a una secuencia más amplia de problemas sobre argumentación y generalización. Sin embargo, hemos ido incluyendo comentarios y reflexiones sobre la importancia de la gestión del profesor, dando ejemplos de dos instrumentos que tienen que contribuir a enriquecer dicha gestión.

Para acabar, en este apartado final, introducimos aspectos de discusión sobre cómo profundizar algo más en una gestión del profesor que favorezca los procesos de regulación en los distintos momentos de resolución de un problema.

Del cuadro de consignas (tabla 1) puede deducirse una visión de la gestión del profesor poco interventora durante los momentos de trabajo individual y en parejas, y facilitadora de la interacción entre alumnos durante la puesta en común. Esta dinámica, que ha sido implementada con éxito por miembros de nuestro equipo en distintas sesiones de clase, supone un cambio en las formas más tradicionales de actuación del profesor puesto que reduce considerablemente el tiempo de gestión.

El énfasis reside en la calidad de una gestión planificada y no tanto en la cantidad de las intervenciones del profesor. De algún modo, el cuadro de consignas supone una rutina que hay que automatizar, sin contenido matemático específico, y que hay que saber relacionar con cuestiones incorporadas para cada árbol del problema correspondiente. Por otra parte, el tiempo que se libera puede destinarse a una mejor atención a los distintos razonamientos, aparecidos en pareja o en gran grupo, y a la revisión práctica de las ayudas que se necesitarán en la interacción con los alumnos.

En la consecución de los buenos resultados que hemos resumido para la experimentación con los Problemas 1 y 2 ha sido crucial el papel de filtro del profesor ante los razonamientos e ideas de los alumnos. La atención a las conversaciones en pareja y más tarde a las conversaciones en la puesta en común de cada problema constituye un aspecto principal de la gestión del profesor que posibilita la activación de procesos de filtraje.

En Morera, Fortuny y Planas (2012), reflexionamos ampliamente sobre el papel de filtro del profesor en la delimitación progresiva de los razonamientos que contribuyen a la resolución de un problema y aquellos otros que no son matemáticamente significativos. Aquí, una de las mayores dificultades reside en ser capaz de iniciar el proceso de filtraje y traspasar parte de la responsabilidad de este proceso a los alumnos para que sean ellos quienes lo acaben.

En nuestro trabajo, buscamos no solo la resolución correcta del problema, sino también la elaboración de argumentaciones y explicaciones válidas que confirmen un elevado grado de comprensión.

En la puesta en común del Problema 1 la profesora empezó un ciclo de filtraje gestionando la generación de ideas. Primero, anotando todas las expresiones algebraicas que habían surgido de las diferentes parejas de alumnos. Después, la profesora dejó un periodo de comparación y evaluación donde cada pareja tenía que intentar pensar un razonamiento geométrico que llevase a la expresión planteada.

Por tanto, los alumnos generaron un primer filtro, ya que todas las expresiones que no eran equivalentes a $8n$, fueron filtradas. Acto seguido, se empezó otro ciclo, generando nuevas ideas sobre lo que se creía que habían pensado otros compañeros al plantear las diferentes expresiones algebraicas. En esta ocasión, los autores de cada expresión jugaban un papel importante como evaluadores y gestores de los filtros.

También se concluyó que gracias al hecho de no haber dado las expresiones simplificadas totalmente se pudo realizar este ejercicio. Otro ciclo se completó evaluando las incorrecciones en las argumentaciones geométricas que se habían filtrado como incorrectas al principio. Un alumno presentó su resolución mediante regla de tres y otros filtraron esta idea con ayuda de contraejemplos.

En el Problema 2 se siguió la misma estructura que la mencionada para el Problema 1, pero en este caso surgió de los alumnos, posiblemente por establecimiento de analogías con el problema anterior. Hubo alguna pareja que directamente pensó más de una forma de expresar la solución, es decir, más de un razonamiento geométrico, mientras que alguna otra se esforzó en pensar formas que fueran inéditas en el grupo clase.

> La atención a las conversaciones en pareja y, más tarde, a las conversaciones en la puesta en común de cada problema constituye un aspecto principal de la gestión del profesor que posibilita la activación de procesos de filtraje.

En esta situación, se completó un ciclo de filtraje cuando la profesora introdujo una resolución equivocada que había oído durante el trabajo en parejas, pero que ellos mismos habían filtrado y, por tanto, no habían acabado presentando. La profesora quiso presentarla porque intuía que filtrando los errores se podría generar otra idea de solución.

Y así fue como, en la puesta en común, los alumnos generaron la solución $4(2n+1)-4$, ya que faltaba restarle las cuatro esquinas. Otro grupo, durante el trabajo en parejas, había propuesto una opción de forma oral y con lenguaje ordinario, que plantearon a la profesora para que les ayudara a transformarla en lenguaje algebraico. De esta manera, entre todos, generaron las ideas necesarias para añadir la expresión $(2n+1)^2-(2n-1)^2$

Referencias bibliográficas

Badillo, E., J. Giménez y Y. Vanegas (2012), «Desarrollo de competencias en un contexto artístico: construyendo significados sobre la forma», en E. Badillo, L. García, A. Marbà y M. Briceño (eds.), *El desarrollo de competencias en las clases de ciencias y matemáticas*, Fondo Editorial Mario Briceño Iragorry, Universidad de los Andes, Mérida, 329-368.

Cañadas, M. C., y E. Castro (2008), «Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3.º y 4.º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas», *PNA*, 2(3), 137-151.

Freudenthal, H. (1991): *Revisiting mathematics education. China lectures*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Goñi, J. M., y N. Planas (2011): «Interacción comunicativa y lenguaje en la clase de matemáticas», en J. M. Goñi (coord.), *Didáctica de las Matemáticas*, Editorial Graó, Barcelona, 167-197.

Morera, L. (2010), *Momentos clave en el aprendizaje matemático en un contexto de trabajo de las isometrías usando un entorno tecnológico*, Trabajo de Maestría, Universitat Autònoma de Barcelona.

Morera, L., J. M. Fortuny y N. Planas, (2012),«Momentos clave en el aprendizaje de isometrías en un entorno colaborativo y tecnológico», en *Enseñanza de las Ciencias*, 30(1), 143-154.

Morera, L., B. Souto y P. Arteaga, (2011), *¿Qué puede hacerse antes de llevar un problema al aula?*, comunicación presentada en las XV Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, Gijón, julio 2011.

Pajares, R., Á. Sanz y L. Rico, (2004), *Aproximación a un modelo de evaluación: el Proyecto PISA 2000*, INECSE, Madrid.

Planas, N. (2011), «Innovación y buenas prácticas en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato», en J. M. Goñi (Coord.), *Matemáticas: investigación, innovación y buenas prácticas*, Editorial Graó, Barcelona, 57-160.

Planas, N., y L. Morera (2012), «La argumentación en la matemática escolar: Dos ejemplos para la formación del profesorado», en E. Badillo, L. García, A. Marbà y M. Briceño (eds.), *El desarrollo de competencias en las clases de ciencias y matemáticas*, Fondo Editorial Mario Briceño Iragorry, Universidad de los Andes, Mérida, 275-300.

Yackel, E., y P. Cobb, (1996), «Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics», *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.

Laura Morera
<Laura.Morera@uab.cat>
Universitat Autònoma de Barcelona

Judit Chico
<Judit.Chico@uab.cat>
Universitat Autònoma de Barcelona

Edelmira Badillo
<Edelmira.Badillo@uab.cat>
Universitat Autònoma de Barcelona

Núria Planas
<Nuria.Planas@uab.cat>
Universitat Autònoma de Barcelona)

1 Los Proyectos «Estudio sobre el desarrollo de competencias discursivas en el aula de matemáticas», EDU2009-07113/EDUC, y «Contribución al análisis y mejora de las competencias matemáticas en la enseñanza secundaria con un nuevo entorno tecnológico», EDU2008-01963/EDUC, están financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad, España. Las dos primeras autoras tienen becas asociadas: BES-2009-022687 y BES-2010-030877. Las investigadoras son miembros del Grupo «Educació i Competència Matemàtica», SGR2009-00364, Departament d'Innovació, Universitats i Empresa.