Formación Universitaria
Vol. 12(1), 25-34 (2019)
http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062019000100025

Modelos de Crecimiento Poblacional: Enseñanza-Aprendizaje desde las Ecuaciones Recursivas

Enrique Parra[1]* ,Wilson Gordillo[1] y Wilson J. Pinzón[1]
(1) Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Facultad del Medio Ambiente y Recursos Naturales, Carrera 5° Este N° 15 – 82, Bogotá-Colombia (e-mail:,campokike@yahoo.com; wgordillot@udistrital.edu.co wjpinzonc@udistrital.edu.co)

* Autor a quien debe ser dirigida la correspondencia

Recibido Abr. 24, 2018; Aceptado Jun. 22, 2018; Versión final Ago. 20, 2018, Publicado Feb. 2019

Resumen

Este artículo presenta los resultados obtenidos mediante una estrategia metodológica que involucra la noción de crecimiento poblacional, crecimiento restringido y ecuaciones recursivas, en el desarrollo de un curso de cálculo diferencial para la formación de ingenieros forestales. Se implementa un enfoque de investigación–acción, que permite contrastar resultados entre dos grupos; experimental y control, con los cuales se valida la propuesta. Esta forma de trabajar las nociones en los grupos permitió identificar falencias en los diferentes tipos de representación usados en algunos objetos matemáticos como lo son función, sucesión y limite. Igualmente, el contraste final evidencia que el uso de contextos propios de la ingeniería fortalece el aprendizaje del cálculo diferencial.

Palabras clave: ecuación recursiva; modelo de crecimiento; cálculo diferencial; investigación-acción

Models of Population Growth: Teaching-Learning from Recursive Equations

Abstract

This article presents the results obtained through a methodological strategy that involves the notion of population growth, restricted growth and recursive equations, in the development of a differential calculus course for the training of forestry engineers. An action-research approach is implemented, which allows to compare results between two groups; experimental and control, with which the proposal is validated. This way of working the notions in the groups allowed to identify flaws in the different types of representation used in some mathematical objects such as function, succession and limit. Likewise, the final contrast shows that the use of engineering contexts strengthens the learning of differential calculus.

Keywords: recursive equation; growth model; differential calculus; action-research

INTRODUCCIÓN

La enseñanza del cálculo diferencial plantea nuevos retos respecto a la generación de estrategias metodológicas que permitan la introducción de contextos problémicos propios del objeto de estudio de cada ingeniería, así lo plantea Gordillo y Pino-Fan (2016), y Pino-Fan et al (2017). La posibilidad de generar nuevos escenarios de aprendizaje, basados en la experimentación y simulación dinámica de los conceptos matemáticos, facilita el proceso de aprendizaje de las matemáticas (Camarena, 2013; Ting, 2017). Una de las dificultades que presentan los estudiantes en un curso de cálculo diferencial está asociada a la resolución de situaciones problemáticas contextualizadas (Weurlander, Cronhjort y Filipsson, 2017). Esta situación tiene relación con la forma en que los estudiantes caracterizan matemáticamente los objetos involucrados en una situación problemática a partir del uso de variables, constantes y parámetros, a partir de los cuales se construyen un modelo para dar una solución al problema que sea coherente al contexto en el que presenta la situación como lo describe Kusniak, Nechache y Drouhard (2016). Aunado a ésta manifiestan dificultades para relacionar diferentes representaciones de un mismo concepto (Duval, 2006), y que a su vez permita generar conexiones significativas entre los conceptos matemáticos y los fenómenos que se desean estudiar a partir del modelamiento de una situación propuesta.

Este articulo muestra los resultados de abordar el curso de cálculo diferencial en estudiantes de ingeniería forestal, a través de modelos discretos como lo es el modelo poblacional (Lushnikov y Kagan, 2016), con el fin de comprender la manera en la que se interrelacionan los individuos de una comunidad y la forma óptima en que estos aprovechan los recursos que les proporciona su entorno. Esta forma de abordar el curso de calculo diferencial es compleja, dado que involucran elementos característicos de las poblaciones y objetos matemáticos propicios para describir las relaciones entre los individuos de una comunidad y el entorno en el cual se desenvuelven, obteniendo como resultado final un modelo matemático que permite predecir el comportamiento futuro de la población bajo las condiciones que presenta el entorno.

Un modelo matemático es un conjunto de ecuaciones que describe las relaciones entre un conjunto de objetos que conforman un sistema, resolviendo estas ecuaciones podemos imitar, o simular, el comportamiento del sistema, así lo describe Grant et al. (2001). En este sentido se pretendió simular los diferentes comportamientos que son imaginables de tener al abordar una situación, partiendo de hechos simples que se complejizan al involucrar nuevas variables (Strømskag, 2017). El contexto en la enseñanza de la matemáticas según Ramos y Font (2006), permite considerar entornos alrededor de problemáticas relacionadas con los objetos matemáticos. Por tal razón los objetos matemáticos involucrados en el estudio de un recurso forestal, permiten caracterizar aspectos relacionados con la dinámica de un ecosistema, formulando modelos matemáticos a partir de los cuales se establece el tamaño que logra alcanzar un individuo o una población determinada.

Un arquetipo de esta orientación se encuentra en el estudio de relaciones alométricas (relación de la dimensión relativa de las partes corporales en correlación con los cambios en el tamaño total). Esta relación alométrica puede extrapolarse cuando por ejemplo se desea construir una relación entre la altura total de un árbol y su diámetro a la altura del pecho, relación empleada en el aprovechamiento de los recursos forestales.

Uno de los objetos matemáticos del cálculo diferencial es la función, objeto que se asocia en el modelamiento de fenómenos biológicos, en particular al crecimiento de plantas y especies arbóreas se han encontrado trabajos en los cuales se aplican relaciones alométricas que permiten establecer relaciones significativas entre características medibles de un individuo, como las aplicaciones de modelos para especies forestales propuesta por Zill y Cullen (2009), este tipo de relaciones de recurrencia es considerada secuencia recursiva o ecuación recursiva y se usa con el fin de estimar el volumen de biomasa para plantaciones de especies leñosas, aspecto morfológico relevante en estudios de captura de carbono en plantaciones, dadas la diversas condiciones que se presentan en los ecosistemas. Otro tema de interés en el aprovechamiento de los recursos, está relacionado con el crecimiento de las poblaciones, por lo cual es indispensable emplear modelos en tiempo discreto, mediante los cuales se establece el tamaño que alcanza una población de acuerdo con mediciones igualmente espaciadas en el tiempo.

MODELOS EN TIEMPO DISCRETO

El trabajo matemático en torno a la generación de modelos presenta diferentes escenarios bajo los cuales se construyen de acuerdo a las características del fenómeno a modelar; en particular los modelos en tiempo discreto se presentan como el mejor método para describir el comportamiento de un fenómeno que se rastrea a partir de mediciones temporales igualmente espaciadas (Durcheva y Varbanova, 2017). En este sentido el proceso de comprender la manera en la cual se interrelacionan los individuos de una comunidad y la forma óptima en que éstos aprovechan los recursos que les proporciona su entorno, es una tarea compleja en la que se involucran elementos característicos de las poblaciones y objetos matemáticos propicios para describir las relaciones entre los individuos de una comunidad y el entorno en el cual se desenvuelven, obteniendo como resultado final un modelo matemático que permite predecir el comportamiento futuro de la población bajo las condiciones que presenta el entorno. En este sentido se pretende simular los diferentes comportamientos que son imaginables al abordar una situación, partiendo de hechos simples que se complejizan al involucrar nuevas variables.

CONSTRUCCIÓN DISCRETA DEL MODELO POBLACIONAL DE MALTHUS

Uno de los modelos discretos usados en el contexto biológico es el modelo poblacional de Malthus o modelo Malthusiano (Hodgson, 2016), el cuál establece que una población aumenta su tamaño en una tasa proporcional al número de individuos presentes en cada instante de tiempo; bajo este supuesto las tasas de natalidad y mortalidad siempre permanecerán constantes con lo cual la población siempre aumentará su tamaño, sin embargo este modelo no puede ser indefinidamente válido, ya que llegará un momento en que los recursos alcancen su límite, acortando la tasa de crecimiento, pero puede ser apropiado en el corto plazo. En el caso de las poblaciones humanas, el crecimiento exponencial se puede sostener por períodos largos si los recursos aumentan a medida que crece la población, mediante el desarrollo tecnológico así lo muestran Quiñonez y Lecompte (2017). Desde una mirada discreta la construcción del modelo exponencial de Malthus, parte del supuesto de que la población se caracteriza por tener períodos de reproducción estacional no solapados, con lo cual se establece que la población en un instante $(t+1)$ depende directamente de la población existente en el instante t, lo que permite establecer una sucesión, como se muestra en la ecuación (1).

$$N_{t+1} = f(N_t)\,; \quad N_0 > 0 \tag{1}$$

En la ecuación (1), N_t indica el número de individuos presentes en el instante $(t+1)$ y N_0 el tamaño inicial de la población.

Para un mejor entendimiento del modelo exponencial de Malthus, se puede considerar el caso de un crecimiento bacteriano. Suponiendo que se tiene una población de bacterias y que cada veinte minutos, la población existente se duplica, además teniendo en cuenta que el número inicial de individuos es cien; bajo estas condiciones se pueden obtener los tamaños poblacionales que se muestran en la tabla 1.

Tabla 1: Crecimiento bacteriano

t	0	1	2	3	4	5
N_t	100	200	400	800	1600	3200

De acuerdo a los datos registrados en la tabla 1, se puede encontrar una relación entre el tiempo y población de bacterias, por ejemplo en la ecuación (2) se relaciona la cantidad de bacterias en un tiempo inicial 0, y de forma sucesiva se hace para los otros tiempos, como se evidencia en las ecuaciones (3) a (5).

$$N_0 = 100 \tag{2}$$

$$N_1 = 200 = 2 \cdot 100 = 2N_0 \tag{3}$$

$$N_2 = 400 = 2 \cdot 200 = 2N_1 \tag{4}$$

$$N_3 = 800 = 2 \cdot 400 = 2N_2 \tag{5}$$

Luego, para este caso en particular $(t+1)$, se obtendrá la ecuación (6).

$$N_{t+1} = 2N_t \quad ; \ N_0 = 100 \tag{6}$$

La ecuación (6), recibe el nombre de ecuación recursiva (Neuhauser, 2004), porque es una regla que se aplica de forma repetida para ir de un intervalo temporal al siguiente. De esta forma la ecuación (6) define el tamaño de la población recursivamente. Sin embargo la ecuación (6), se puede apreciar a partir de los valores tabulados exponencialmente, como se muestra en la ecuación (7).

$$N_t = 100 \cdot 2^t \quad ; \ N_0 = 100 \tag{7}$$

Es decir que una forma general de tipo recursivo de crecimiento tendrá una ecuación recursiva, como se muestra en la ecuación (8).

$N_{t+1} = RN_t$; N_0 =tamaño inicial de la población (8)

En la ecuación (8), El factor R es necesariamente un valor real positivo e indica el factor de crecimiento de la población. Empleando un razonamiento análogo al realizado en la ecuación (8), se deduce la ecuación (9) con valores tabulados exponencialmente.

$N_t = R^t N_0$; N_0 =tamaño inicial de la población (9)

La ecuación (9) representa un modelo algebraico que permite estimar el tamaño de la población en cualquier instante de manera directa reemplazando valores para la variable t. Puesto que R es una constante positiva, conviene analizar tres casos para el valor de R. Primero para valores donde R varié entre cero y uno, luego para cuando R tome el valor uno y finalmente cuando R sea mayor que uno, en el primer caso se obtiene que el tamaño de la población se reduce en cada intervalo de tiempo, esto se puede observar con claridad en la Figura 1.

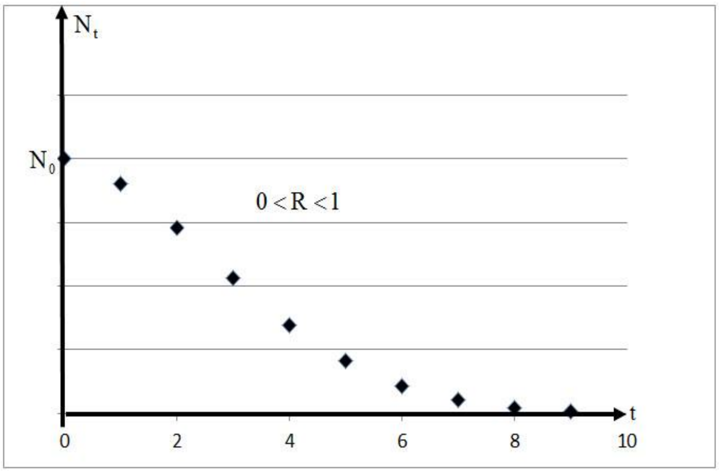

Fig.1: Tamaño de población para 0<R<1

En el segundo caso se tendrá que el tamaño inicial de la población se mantendrá constante en cada intervalo de tiempo, como se muestra en la figura 2. En el último caso se tendrá que la población aumentará su tamaño en cada intervalo de tiempo, creciendo sin un límite, para esto véase la figura 3. Sin embargo hay que tener en cuenta que biológicamente una población no mantiene un único comportamiento a lo largo del tiempo, pues su dinámica de crecimiento no sólo depende de las tasas de natalidad y mortalidad, sino que también debe tenerse en cuenta que el crecimiento poblacional puede estar limitado por condiciones ambientales desfavorables, por la competencia, por recursos limitados o por ambas situaciones, como lo describen Grant et al. (2001). El comportamiento esperado es que la población aumente su tamaño hasta un punto en el cual se equilibre y mantenga un tamaño adecuado para el uso de los recursos que le provee el ambiente en el cual se desarrolla.

Crecimiento restringido

El comportamiento usual de las poblaciones corresponde al presentar un crecimiento restringido, este comportamiento ha sido analizado en modelos como el propuesto por Beverton-Holt (1993). Los modelos de crecimiento restringido, han sido de gran utilidad en el ámbito del aprovechamiento de los recursos naturales, en particular el modelo de Beverton-Holt permite describir de manera acertada el comportamiento de una población de peces, donde los individuos experimentan cambios relacionados con la composición de la población y el aprovechamiento que se hace de ella. Toda población está constantemente bajo el efecto de factores contrapuestos que al mismo tiempo tienden a hacerla aumentar o hacerla disminuir, de modo que el tamaño y la estructura de la población dependen en todo momento del balance existente entre éstos factores. Si tomamos cualquier población de peces y la seguimos a través del tiempo encontraremos que, a consecuencia de los factores descendentes, parte de sus integrantes irán muriendo por la pesca y otros irán muriendo por causas naturales, pero a consecuencia de los factores ascendentes los peces que sobrevivan seguirán alimentándose, seguirán creciendo y podrán reproducirse.

Además, a medida que esto ocurre, nuevos individuos se van integrando a la población que está siendo explotada. Debido a esto es que los integrantes de cada población cambian con el tiempo, cambiando también la estructura y composición de la población. La población tenderá entonces a aumentar o a disminuir, o podrá mantenerse estable y en equilibrio, pero siempre será como resultado del balance existente entre los factores contrapuestos que ocasionan su activa y constante renovación. Conocer la dinámica de una población de peces implica conocer el tamaño, la estructura de la población, la forma y la intensidad en que ésta cambia y se renueva. (Csirke, 1993).

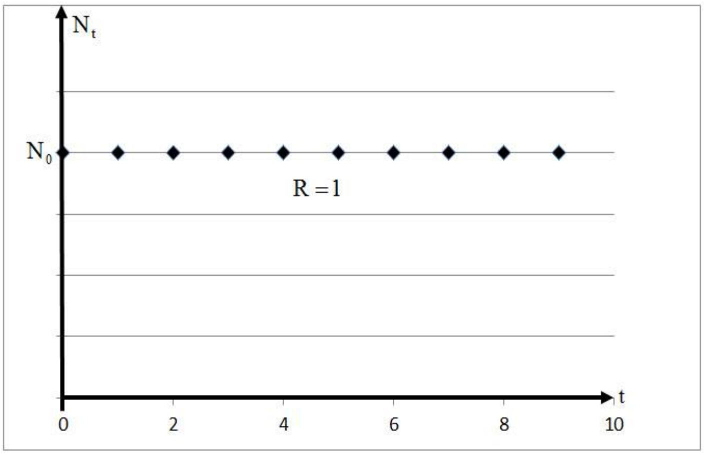

Fig. 2: Tamaño de población para R=1

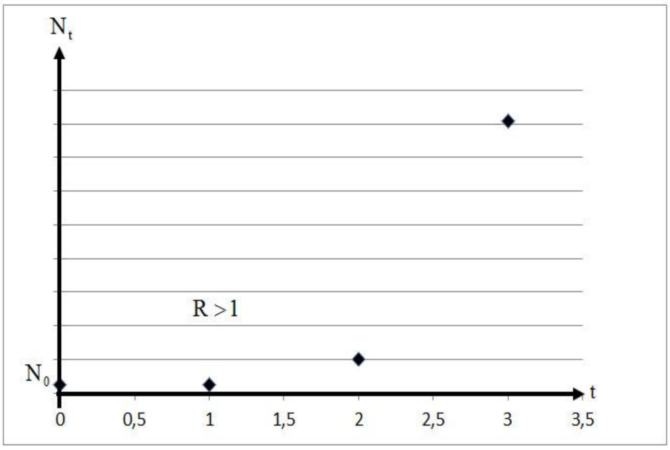

Fig. 3: Tamaño de población para R >1

La construcción del modelo de Beverton-Holt, desde una perspectiva discreta, se parte de la ecuación (8) la cual se ha llamado ecuación recursiva y que permitió explicar el crecimiento exponencial, si despejamos la constante R de la ecuación (8) obtenemos una razón matemática que se describe en la ecuación (10).

$$\frac{N_t}{N_{t+1}} = \frac{1}{R} \tag{10}$$

La ecuación (10) expresa la razón de padres a hijos que es un valor constante para un modelo de crecimiento bacteriano, para establecer un cambio en la manera en la cual crece el tamaño de la población se abandona este supuesto, de manera que la razón de padres a hijos varíe de forma creciente en cada intervalo de tiempo, partiendo de un valor inicial $1/R$, para N_0, dado que $1/R$ es un cociente cuyo valor máximo es uno, se encuentra una relación lineal entre la razón de padres a hijos y el tamaño de la población en cada instante t, como se muestra en la figura 4.

En la figura 4. El valor K es de vital importancia dado que cuando la población alcanza este tamaño, la razón entre padres e hijos es igual a uno, este valor biológicamente, se conoce como capacidad de alojamiento (Neuhauser, 2013). Entonces a partir de la relación que se representa en la figura 4, se deduce la ecuación (11), la que corresponde a una ecuación recursiva.

$$N_{t+1} = \frac{RN_t}{1 + \frac{R-1}{K} N_t} \tag{11}$$

La ecuación (11), se denomina curva de reclutamiento de Beverton-Holt (1975), y presenta un modelo del crecimiento de una población que regula su tamaño hasta un valor límite K, en la figura 5, se muestra el comportamiento del modelo para diferentes valores de N_0, K=20 y R=1.3

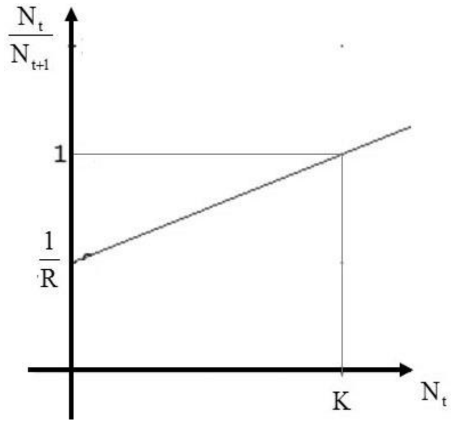

Fig. 4: Razón de padres a hijos en crecimiento bacteriano

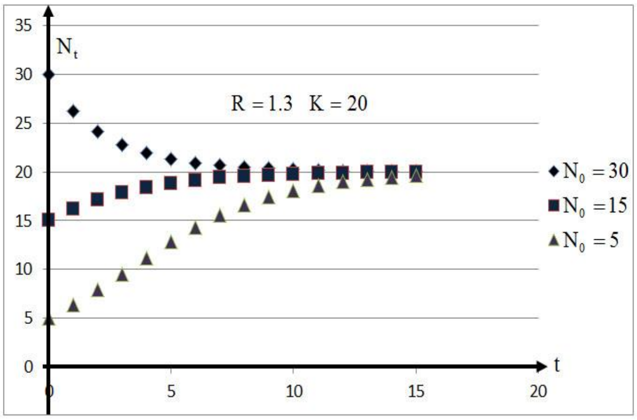

Fig. 5: Tamaños de N_t para K=20 y R=1.3

Aunque este modelo se ajusta mejor al comportamiento biológico que experimentan diferentes poblaciones animales, los análisis que pueden realizarse acerca del comportamiento a largo plazo de la población se encuentran estrechamente ligados a los valores de los parámetros R y K que se consideren en la construcción del modelo, esto obliga a generar tablas y gráficas que permitan realizar análisis acerca del comportamiento de la población y solo pueden ser acertados bajo las suposiciones iniciales de R y K

METODOLOGÍA

Esta investigación se enmarca en la metodología investigación-acción (I-A), la cuál se encamina a caracterizar el proceso experimental desde un enfoque práctico de la teoría. En esta investigación participaron setenta estudiantes de dos cursos (control y experimental) de cálculo diferencial en el programa de Ingeniería Forestal en la Facultad del Medio Ambiente y Recursos Naturales de la Universidad Distrital en Colombia. Siguiendo las fases que definen en términos generales de la metodología I-A se realiza la problematización, diagnóstico, planificación, implementación y evaluación.

Problematización

En esta primera fase se detectan los problemas prácticos ocurridos al realizar las actividades en el aula, en general, se trata de incoherencias o inconsistencias entre lo que se persigue y lo que ocurre en la realidad (Ely, 2017). De esta forma la situación problema genera la necesidad de propiciar estrategias que involucren nuevos contextos y herramientas que permitan enriquecer las experiencias de aula en la generación de un ambiente propicio para la construcción de redes conceptuales a través de las cuales los objetos matemáticos se caractericen por poseer una estructura dinámica de los conceptos aplicados a las realidades de los fenómenos que se desean analizar.

En este sentido se diseñan situaciones que involucran las ecuaciones recursivas como objeto matemático y que a su vez contenga un componente dinámico temporal discreto, con la finalidad de llevar a los estudiantes al modelamiento de algunos fenómenos biológicos que representan un nicho de conocimiento para el desarrollo de la investigación en tareas propias de los profesionales en Ingeniería Forestal.

Diagnóstico

En esta etapa del proceso investigativo se diseña un instrumento que permita categorizar variables involucradas en el desarrollo y resolución de problemas matemáticos contextualizados, que evidencien el cambio de representaciones (Duval, 2006). Para ello se proponen situaciones que abordan objetos matemáticos como los son: sucesión, función, límite y razón de cambio. Que permitan una relación con unos fenómenos biológicos relacionados con dinámicas poblacionales y patrones de crecimiento.

Planificación

En esta etapa metodológica, el diseño del instrumento se centra en tres objetos matemáticos fundaméntales que se abordan un curso de cálculo diferencial: función, límite y la razón de cambio. Estos objetos involucrados con fenómenos biológicos a manera de contexto y con una dinámica discreta, en donde el estudiante pueda relacionar los objetos e interrelacionarlos como lo puede hace una construcción de mapas conceptuales como lo describe Gordillo et al. (2017), para el desarrollo de conexión entre objetos.

Implementación

La implementación de la propuesta didáctica se realiza a lo largo del desarrollo de un curso de cálculo diferencial, empleando los encuentros cada dos semanas, la propuesta actúa como elemento anexo al desarrollo curricular del curso. Para la implementación de los diseños, se hacen acercamientos desde perspectivas discretas aplicados a los diferentes que se trabajan: función, límite, razón de cambio involucrado en los modelos de crecimiento poblacional.

Evaluación

La evaluación como proceso constante de mejoramiento del proceso de enseñanza y aprendizaje se lleva a cabo durante la ejecución de cada una de las actividades, estableciendo el grado de apropiación de los conceptos matemáticos, de acuerdo con los procesos que emplean para el modelamiento de las situaciones problemáticas que se proponen a lo largo del curso. Con el fin de establecer el grado de efectividad de esta propuesta metodológica se realiza una evaluación final a los dos grupos (control y experimental) que permita contrastar una metodología tradicional con la propuesta.

Diseños de los instrumentos

Para cada una de las etapas de la metodología se un diseñaron instrumentos, y se establece una escala cualitativa y cuantitativa para permite caracterizar los resultados obtenidos en las tareas relacionadas con los tipos de representación, obtenida a partir de estas aproximaciones de los conceptos matemáticos contextualizados al modelamiento de fenómenos biológicos, en particular al crecimiento poblacional, la Tabla 2, presenta un resumen de la tareas diseñadas en cada una de la pruebas como el propuesto por Pino-Fan et al. (2017).

ANÁLISIS DE RESULTADOS

El análisis de la información recolectada tras la aplicación de cada una de las actividades propuestas en relación con el marco teórico y la metodología. Con el fin de valorar el desempeño de los estudiantes se cuantifican las respuestas de cada una de las tareas, en donde se asigna una escala numérica ascendente de 1 hasta 5 donde; 1 es la solución propuesta es inadecuada al problema, porque omite información o la emplea de manera inadecuada o no responde; 2 si la solución presentada, es inviable puesto que las relaciones que se establecen entre las variables y datos del problema no reflejan la situación planteada; 3 si la solución propuesta es viable en situaciones discretas mas no permite establecer generalizaciones del fenómeno propuesto; 4 si la solución tiene en cuenta las variables y aplica correctamente un tipo de representación para la solución de la situación propuesta; 5 si la solución presentada, permite establecer generalizaciones del fenómeno planteado y su abordaje desde distintos tipos de representación.

Tabla 2: Resumen de Actividades y Tareas

Nombre de la actividad	*Tareas*	*Representación que activa*
Actividad 1. Prueba Diagnóstica	Problema de contexto biológico, identificación de variables	Verbal
	Problema de crecimiento poblacional, tablas de datos	Tabular
	Problema de contexto biológico, construcción de funciones	Algebraica
	Gráficas de funciones	Gráfica
Actividad 2. Gráficas de Funciones y Tratamiento	Problema de crecimiento poblacional, tablas de datos	Tabular
	Evaluación de funciones	Algebraica
	Tratamiento de funciones sobre gráficas	Gráfica
Actividad 3: Gráfica de Funciones Periódicas y Concepto de Función	Gráfica de funciones trigonométricas	Gráfica
	Tratamiento de funciones Trigonométricas	Gráfica
	Problema de contexto biológico, análisis de función	Gráfica
Actividad 4: Ecuaciones Recursivas y Modelos de Crecimiento en Tiempo Discreto	Problema de contexto biológico: crecimiento poblacional	Algebraico
	Problema de contexto biológico: Beverton-Holt, caso discreto	Verbal, Algebraico
Actividad 5: Razón de Cambio y la Dinámica Poblacional	Problema de contexto biológico	Verbal, Tabular
	Problema de contexto biológico	Verbal, Algebraico
	Problema de contexto biológico: Beverton-Holt, caso discreto	Verbal, Gráfico

A continuación se presenta el análisis de los resultados obtenidos en la aplicación de la prueba diagnóstico en cada grupo, la figura 6. muestra los resultados obtenidos por las cuatro tareas en los dos grupos (control y experimental), el eje horizontal indica las categorías de análisis y el eje vertical corresponde al porcentaje de estudiantes situados en cada categoría de análisis. Los resultados de la prueba diagnostica, evidencian que los dos grupos (control y experimental) tomados como uno solo, obtienen valoraciones similares en las tareas propuestas y en la representación que se activa en cada tarea, es decir, los resultados obtenidos mediante el instrumento diagnóstico permiten observar en los estudiantes deficiencias en la aplicación de conceptos aritméticos y algebraicos para describir y solucionar problemas contextualizados. Los análisis de resultados a su vez muestran algunas diferencias en el aspecto gráfico.

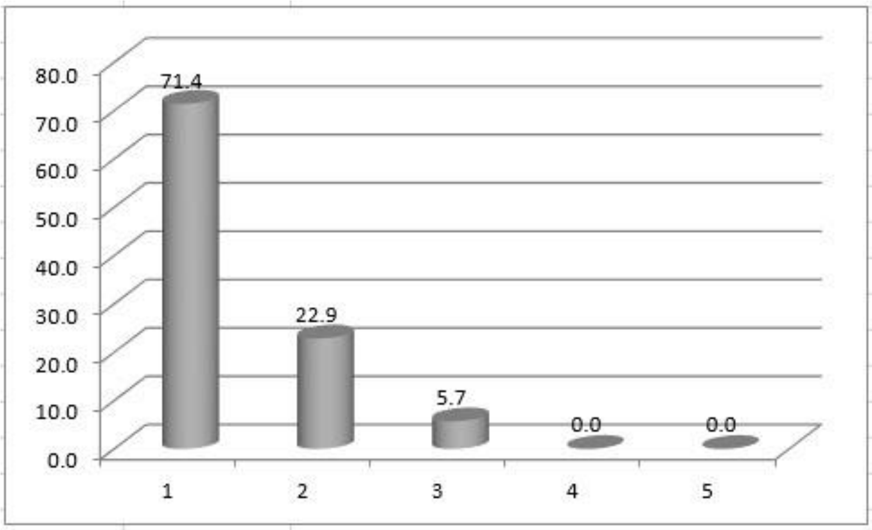

Fig. 6: Resultados actividad 1

Una vez realizada la evaluación final del curso se observan en las figura 7 y figura 8, la caracterización de los resultados obtenidos por los grupos experimental y control, el eje horizontal muestra las categorías de análisis y el eje vertical corresponde al número de estudiantes situados en la categoría de análisis, para cada pregunta.

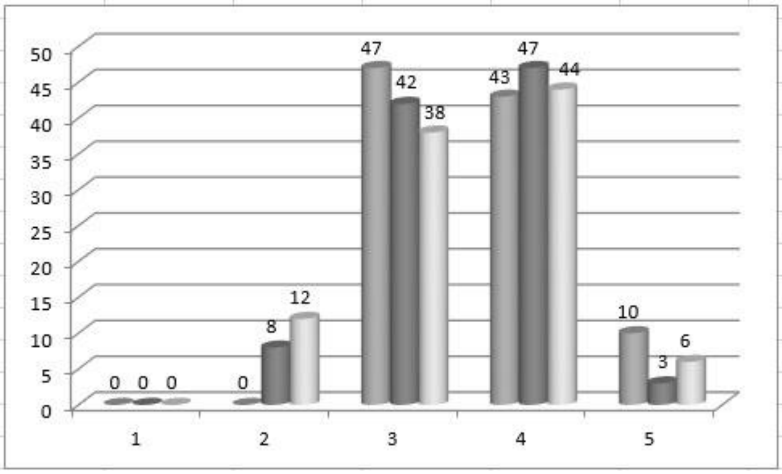

Fig. 7: Resultados evaluación final grupo experimental

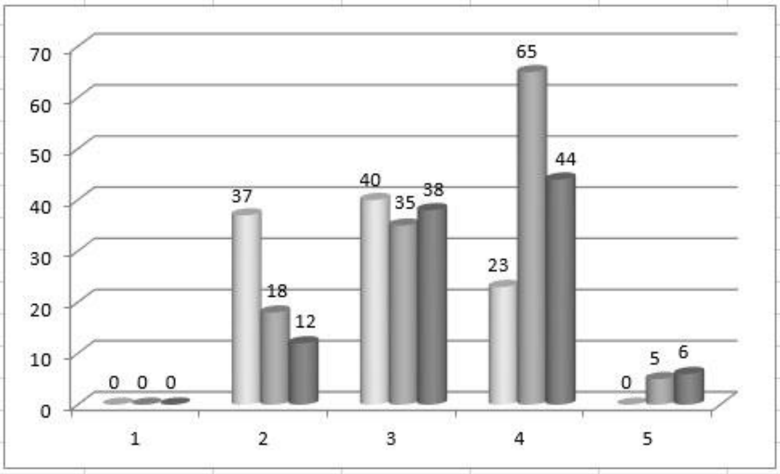

Fig. 8: Resultados evaluación final grupo control

Los resultados de la evaluación evidencian un avance significativo en los individuos del grupo experimental (figura 7.), en tanto que un alto porcentaje de la población caracteriza su desempeño en los niveles 3 y 4 de la escala establecida para valorar el proceso, en este sentido se encuentra que en su mayoría los estudiantes de este grupo consiguen generar soluciones a problemas contextualizados biológicamente teniendo en cuenta no solo la expresión algebraica que subyace a un modelo de contexto biológico sino también a las relaciones entre las variables presentes en este, caracterizándolo a partir de representaciones tabulares, gráficas y algebraicas. En el grupo de control se encuentra que el desempeño alcanzado por los estudiantes muestra que los abordajes realizados a las situaciones propuestas en algunos casos son inviables puesto que no tienen en cuenta el contexto biológico en el cual se caracterizan los objetos matemáticos, si bien se emplean diferentes tipos de representación para caracterizar las situaciones problemáticas su uso es limitado. En ambos grupos son muy pocos los individuos que logran generalizar comportamientos en modelos más robustos aplicables a diferentes situaciones.

CONCLUSIONES

Cada una de las pruebas se ha diseñado para obtener resultados que ayudan a caracterizar y fomentar la aprendizaje del cálculo diferencial. Los resultados obtenidos mediante el instrumento diagnóstico permitió observar en estudiantes de primer semestre deficiencias en conceptos aritméticos y algebraicos para describir y solucionar problemas contextualizados. En algunas de las preguntas que hacen alusión a representación gráfica se encuentran falencias en la conversión de funciones (Duval, 2006); esto ocurre al pasar de una representación tabular al bosquejo de gráficas, sin embargo se detectaron patrones al construir gráficas si el modelo poblacional se presenta en forma algebraica. Se considera que la aplicación de la estrategia diseñada desde la I-A también permitió a los estudiantes aplicar los conceptos matemáticos en forma eficiente en la solución de problemas contextualizados con modelos de crecimiento poblacional, caracterizando matemáticamente los parámetros presentes en los modelos y relacionándolos con los comportamientos observados. En este sentido se encuentra una herramienta valiosa, dado que los diseños elaborados, permiten hacer visibles elementos adicionales de la función como lo son: dominio y rango. Los cuales son relacionados con situaciones contextualizadas en el ámbito del crecimiento poblacional. Otro resultado relevante observado a través del desarrollo de las actividades en el grupo control mostró mejoramiento en el proceso de argumentación (representación verbal) que emplean los estudiantes en la solución de situaciones problemáticas, que los llevó a cuestionarse no sólo el objeto matemático también fenómeno que se estudia.

REFERENCIAS

Beverton, R.J.H. y S.J. Holt, On the Dynamics of Exploited Fish Populations, 2ª Ed., Springer, ISBN: 9789401121064, Dordrecht, Holanda (1993)

Camarena, P., A treinta años de la teoría educativa "Matemática en el Contexto de las Ciencias", Innov. Educ, ISSN: 1665-2673, 13(62), 17-44 (2013)

Csirke. J., Introducción a la dinámica de poblaciones de peces. 2ª Ed., Organización de las naciones unidas para la agricultura y la alimentación, ISBN: 9253009160, Callao, Perú (1993)

Durcheva, M. y E. Varbanova, Applications of CAS in the Teaching and Learning of Discrete Mathematics, doi: 10.1007/s11786-017-0310-8, Mathematics in Computer Science, 11(3-4), 305-314 (2017)

Duval, R., A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in A Learning of Mathematics, doi: 10.1007/s10649-006-0400-z, Educational Studies in Mathematics, 61, 103–131 (2006)

Ely, R., Definite Integal Registes using infinitesimals, doi:10.1016/j.mathb.2107.10.002, Journal of Mathematical Behavior, 48(1), 152-167 (2017)

Gordillo, W. y L. R. Pino-Fan, Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada, doi: 10.1590/1980-4415v30n55a12, Bolema, 30(55), 535-558 (2016)

Gordillo, W., W. J. Pinzón, y J. H. Martinez, Los mapas conceptuales: una técnica para el análisis de la noción de derivada en un libro de texto, doi: 10.4067/S0718-50062017000200007, Form. Univ., 10(2), 57-66 (2017)

Grant, W., S. Marin y E. Pedersen, Ecología y manejo de recursos naturales: análisis de sistemas y simulación. Instituto interamericano de cooperación para la agricultura (IICA), ISBN: 9290394536, San José, Costa Rica (2001)

Hodgson, D., The new worlds of thomas Robert Malthus: Rereading the principle of population, doi: 10.1111/padr.12016, Population and Development Review, 42(4), 717-721 (2016)

Kusniak, A., A. Nechache y J.P. Drouhard, Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom, doi: 10.1007/s1158-016-0773-0, ZDM Mathematics Education, 48(6), 881-874 (2016)

Lushnikov, A. A. y A.I. Kagan, A Linear model of population dynamics, doi: 10.1142/s0217979215410088, International Journal of Modern Physics B, 30(15), 1541008 -1541018 (2016)

Neuhauser, C., Matemáticas para Ciencias. 2ª Ed., Pearson-Prentice Hall, ISBN: 9788420542539, México D.F., (2004)

Pino-Fan, L. R., V. Font, W. Gordillo, V., Larios y A. Breda, Analysis of the Meanings of the Antiderivative Used by Students of the First Engineering Courses, doi: 10.1007/s10763-017-9826-2, International Journal of Science and Mathematics Education, 1-23 (2017)

Quiñonez, J. y A. Lecompte, Modelos exponencial y logístico de la población en el suroeste de Puerto Rico, Revista de investigación en ciencias matemáticas, ISSN: 0256-5374, 1(3), 63-78 (2007)

Ramos, A.B. y V. Font, Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della Matemática. Una prospettiva ontosemiotica, La Matematica e la sua didattica, ISSN: 1120-9968, 20(4), 535-556 (2006)

Strømskag, H., A methodology for instructional design in mathematics—with the generic and epistemic student at the centre, doi: 10.1007/s11858-017-0882-4, ZDM Mathematics Education, 49(1), 909–921 (2017)

Ting, M.Y., Definite integral automatic analysis mechanism research and development using the “find the area by integration” unit as an example, doi: 10.12973/eurasia.2017.00724a, EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education, 13(7), 2883-2896 (2017)

Weurlander, M., M. Cronhjort y L. Filipsson, Engineering Students’ Experiences of Interactive Teaching in Calculus, doi: 10.1080/07294360.2016.1238880, Higher Education Research & Development, 36(4), 852-865 (2017)

Zill, D. y M. Cullen, Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera. 7ª Ed., Cengaje Learning, ISBN: 139789708300384, México D.F., (2009)