

MATEMÁTICAS**A GEOMETRIA DO MOVIMENTO DOS ASTROS****CAMPOY VÁZQUEZ, Carlos***Área de Electromagnetismo-Dpto de Física*

UNIVERSIDADE DA CORUNHA

e-mail: campoy@terra.es

RESUMO

As linhas que descrevem os planetas ao serem atraídos pelo sol são elipses, e um dos principais méritos de Newton, foi o de explicar este comportamento a partir da Lei da Gravitação Universal. Neste trabalho indica-se um método de demonstração elementar que permite que os alunos dos últimos anos de secundária, possam seguir o caminho lógico que permite alcançar aquele resultado a partir de esta.

1. INTRODUÇÃO GEOMÉTRICA

Começa-se por definir a elipse como o lugar geométrico dos pontos do plano cujas distâncias a dois pontos fixos (focos) são como soma um valor prefixado. Da definição desprende-se que por qualquer ponto do plano passa uma elipse de focos dados. Esta ideia pode-se expressar dizendo que o total das elipses confocais enche o plano inteiro.

Se um ponto é exterior a uma elipse, pertencerá a outra confocal com *eixo maior* mais grande (eixo maior é a soma das distâncias aos focos desde qualquer ponto da elipse). Com efeito, se Q é exterior, e F' e F os focos, o eixo maior da elipse que passa por Q será:

$$2 \cdot a' = QF' + QF > (PF' - QP) + QF = (PF' - QP) + (QP + PF) = 2 \cdot a,$$

sendo P o ponto da elipse dada alinhado com Q e F. Do mesmo modo, se um ponto é interior a uma elipse, a confocal que passe por ele, terá mais pequeno o eixo maior. Como estas duas situações representam exaustivamente todas as possibilidades, se verificam também as respectivas proposições recíprocas.

Umha recta t que passa polo ponto P da elipse, chama-se *tangente* se todos os outros pontos de t , som exteriores. Esta recta tem a seguinte importantíssima propriedade: Os segmentos PF e PF' formam ângulos iguais com t . Esta propriedade a compartilham todas as cónicas e serve de fundamento a numerosas aplicações em Óptica, Acústica e Electromagnetismo. Os alunos poderão entender o porquê da geometria das antenas parabólicas. Na figura 1, onde G' é simétrico de F' respecto de t , os pontos G' , P e F som colineares, pois noutro caso, o ponto P' onde se cortam FG' e a tangente, seria interior à elipse:

$$P'F + P'F = P'G' + P'F < PG' + PF = PF + PF = 2 \cdot a$$

Agora é evidente que α é igual ao simétrico de β .

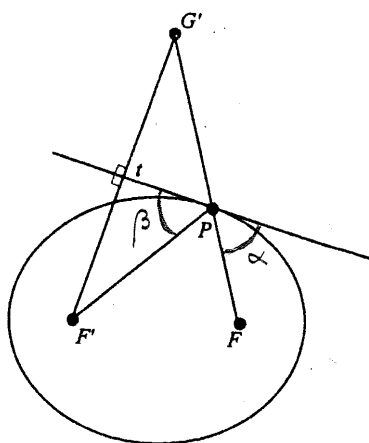


Fig. 1

O recíproco da anterior propriedade também é certo: se P , F e F' som tres pontos nom alinhados, t umha recta que contém a P e os ângulos que formam PF' e PF com t som iguais, entom t é tangente à elipse traçada por P com focos em F' e F .

Olhemos a figura 1, onde inicialmente só vemos os pontos F' , F e P ; a recta t e os ângulos α e β .

Construimos o ponto G' simétrico de F' mediante a recta t . Por serem iguais, por hipótese, os ângulos α e β , e este último ao seu simétrico, este deve ser oposto polo vértice de aquel, quedando provado que os pontos G' , P e F estão alinhados. Se P' é qualquer outro ponto de t :

$$2 \cdot a = PF + PF = PG' + PF < P'G' + P'F = P'F + P'F$$

pois que P' será exterior à elipse que passa por P e, segundo a definição, t é tangente a ela.

2. A segunda lei de Kepler

O efeito de umha força é cambiar a velocidade do objecto ao que se aplica; este câmbio é a aceleração, cuja medida nos dá a da força ao multiplicá-la por um factor de proporcionalidade. Consideremos a figura 2 onde o planeta, que inicialmente está em A , nom está sendo sometido neste momento a nengumha força, pois que a sua velocidade é uniforme: na unidade de tempo chega a B , de modo que o

vector AB é o vector velocidade inicial. Se durante outra unidade de tempo o planeta seguisse como antes, chegaria até o ponto C' , mas no ponto B o sol exerceu a atracção gravitatória que podemos interpretar como um câmbio na velocidade, é dizer, um vector Δv dirigido ao sol. Entom nesta unidade de tempo o planeta avançou realmente ao ponto C , pois BC é a soma vectorial da velocidade anterior e o câmbio na velocidade.

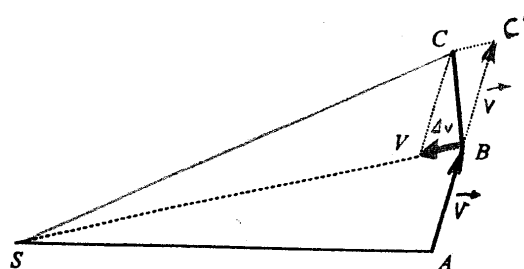


Fig. 2

É fácil ver que os triângulos SAB e SBC' , têm a mesma área, pois ambos têm igual base –o vector velocidade inicial- e igual altura –a distância do sol à recta AB . Pelo mesmo motivo têm igual área os triângulos SBC' e SBC , que têm comum a base SB e a altura de ambos é a distância entre as rectas paralelas SB e CC' .

De modo que som iguais as áreas dos triângulos SAB e SBC que som as áreas *varridas* polo planeta em diferentes unidades de tempo. Isto é o que afirma Kepler na sua segunda lei: a *velocidade areolar* do planeta é constante.

Para chegar ao anterior resultado nom foi necessário utilizar todo o que se afirma na Lei de Gravitação de Newton. Unicamente se necessitou o que se diz nela sobre a direcção da força atractiva: a força que o sol exerce sobre um planeta, tem a direcção da linha recta que os une, o que se chama umha força central. Na figura 2, por tanto, o vector Δv está na linha SB e de aquí resulta que C está no mesmo plano que A e B : *a trajectória do planeta é umha curva plana*. Outra consequência é o paralelismo das rectas SB e CC' , que se necesitou para provar a igualdade das áreas e que nom teria sucedido se nom estivesse Δv sobre SB .

3. A terceira lei de Kepler

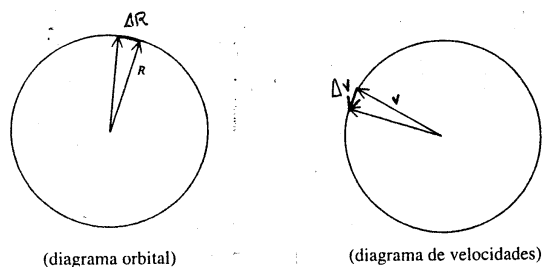


Fig. 3

Esta lei afirma que o quadrado do periodo de um planeta é proporcional ao cubo do semieixo maior da correspondente órbita. Esta lei é inexacta pois a constante de proporcionalidade depende da massa do planeta, como pode ver-se em [1]. Já que esta lei de Kepler nom é rigorosamente

exacta, tampouco seremos rigorosos na sua demonstração e utilizaremos umha órbita circular aproveitando o feito de que as órbitas reais dos planetas se aproximam bastante a esta forma geométrica. Sendo assim, o planeta estaria em movimento circular uniforme, pois só haveria aceleração normal por ser central a força gravitatória.

Na figura 3 consideramos duas posições do planeta separadas por um tempo n vezes mais pequeno que o período T . A distância ao sol é R , e ΔR a distância entre ambas as posições. A distância angular em radianos será $\phi = 2 \cdot \pi/n$. Noutro círculo podemos representar os vectores velocidade que formarão o mesmo ângulo que os raios (som perpendiculares a eles), e Δv será a separação entre os extremos de ambos os vectores. Se n é grande, podemos identificar o arco com a correspondente corda e então $\Delta v = \phi \cdot v = 2 \cdot \pi \cdot v/n$. A velocidade e a força (proporcional à aceleração), respectivamente, som:

$$v = \frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{2 \cdot p \cdot R/n}{T/n} = \frac{2 \cdot p \cdot R}{T} \quad F = k \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = k \cdot \frac{2 \cdot p \cdot v/n}{T/n} = k \cdot \frac{2 \cdot p \cdot v}{T} = k \cdot (2 \cdot p)^2 \frac{R}{T^2}$$

A lei da gravitação afirma a dependência inverso-quadrática entre a força e a distância: $F = k'/R^2$ e comparando ambas expressões da força,

$$\text{obtemos } R^3 = \left\{ k' \cdot [(2 \cdot \pi)^2 \cdot k]^{-1} \right\} \cdot T^2$$

4. A primeira lei de Kepler

Newton começou por estabelecer os tres postulados nos que se fundamenta a mecânica, referentes à inércia, às forças e ao movimento. A continuação quixo conhecer a índole de umha força tal que desse lugar à descrição de Kepler, e deduziu que [2]:

1º Devia ser umha força *central*, e assim cumpriria a lei das áreas

2º Devia ser *inverso-quadrática* e assim cumpriria a lei dos periodos

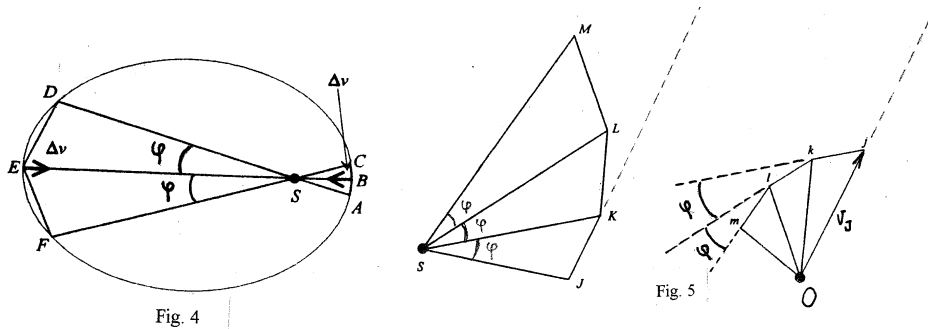
E já nom necessitou mais hipóteses. Unicamente tinha que provar que umha força tal daria necessariamente lugar a trajectórias elípticas.

O procedimento que segue para fazer tal demonstração afasta-se do de Newton e utiliza o caminho seguido por Feynman em [3]. Olhemos a figura 4, onde se dividiu a trajectória em n sectores de igual ângulo central. Consideremos os desprazamentos desde B a C, e desde E a F. O primeiro realiza-se no tempo Δt_1 e a velocidade experimenta umha variação Δv_1 , e o segundo em Δt_2 e a velocidade cambia Δv_2 . As áreas varridas –aproximadamente as dos triângulos– som, respec

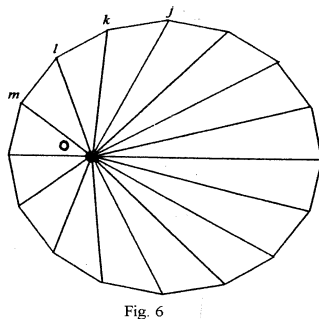
tivamente ΔA_1 e ΔA_2 . Pela lei das áreas, os tempos som proporcionais às áreas, e se temos em conta que os triângulos SBC e SEF som “aproximadamente” semelhantes –o serão tanto mais quanto mais se aproxime a zero o ângulo ϕ - a razão das áreas deverá ser igual ao quadrado da razão dos lados:

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{\Delta A_1}{\Delta A_2} = \frac{SF^2}{SC^2} \quad \frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} = \frac{\Delta v_1/\Delta t_1}{\Delta v_2/\Delta t_2} \cdot \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{1/SF^2}{1/SC^2} \cdot \frac{SF^2}{SC^2} = 1 \Rightarrow \Delta v_1 = \Delta v_2$$

Onde se utilizou que as forças som inverso-quadráticas. Chegou-se a conclusom de que **a ângulos iguais correspondem os mesmos incrementos de velocidade**.



Esto permite-nos construir o seguinte diagrama (fig 5), onde representaremos com letras maiúsculas as posições sucessivas do planeta: J, K, L e M correspondentes todas elas a múltiplos inteiros do ângulo central $\phi = 2 \cdot \pi/n$; e com as mesmas letras em minúscula: j, k l e m, os extremos dos vectores v_j , v_k , v_l e v_m , todos eles com origem em um polo O ubicado em um lugar arbitrário como é costume no diagrama das velocidades. Neste diagrama os segmentos jk, kl, lm etc, som iguais pois acabamos de ver que a ângulos iguais correspondem os mesmos incrementos de velocidade.



Teremos entom umha poligonal constituida por n segmentos iguais que formam cada um o mesmo ângulo com o seguinte (pois o incremento de velocidade jk, é o tiróm gravitatório que o planeta experimenta em k, orientado a S; de modo que $jk \parallel SK$, $kl \parallel SL$ e $lm \parallel SM$).

Esto significa que $jklm\dots$ é um polígono regular de n lados ainda que O nom é o seu centro (figura 6). A cada lado de este polígono regular de n lados, corresponde-lhe um ângulo central igual a $\phi = 2\pi/n$. Em consequência, o ângulo desde o sol entre duas posições, é igual ao ângulo *central* que separa as correspondentes velocidades no seu diagrama.

Na figura 7 consideramos já umha trajectória real, curva, onde a atracção gravitatória se exerce de modo contínuo e nom por impulsos instantâneos, como vínhamos supondo para entender o processo desde umha perspectiva simplificadora, mas nom inexacta, se se acompanha de um adequado passo ao limite. Partimos agora de umha posição do planeta no seu periélio –posição mais próxima ao sol– onde a velocidade é máxima. Entom no correspondente diagrama de velocidades –que agora é um círculo–, Oj deve estar sobre um diâmetro. A outra posição posterior do planeta, no ponto P , corresponde-lhe a velocidade Op no diagrama das velocidades. O ângulo desde o sol entre as posições J e P , é igual ao ângulo central correspondente ao arco jp no diagrama das velocidades: é o ângulo θ . O último círculo corresponde ao diagrama das velocidades rotado 90° no sentido retrógrado.

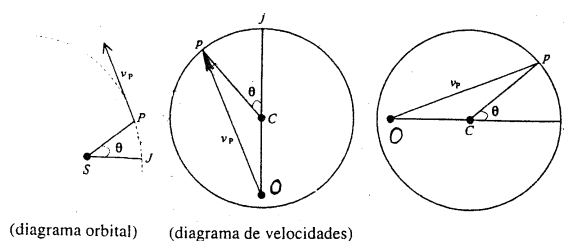


Fig. 7

Por último (figura 8), traslademos o círculo das velocidades rotado, até ubicar em S o seu centro. Utilizaremos umha escala para as velocidades tal que J esteja no ponto médio de Oj , segmento que medirá a velocidade do planeta em J (mas nom a direcção, que

aquí é perpendicular). O segmento SJ medirá a distância do sol ao planeta, cada tipo de magnitud com a sua correspondente escala.

Vejamos agora como construir a trajectória do planeta: tomamos um ponto p no círculo, a umha distância angular θ de j . Construimos a mediatriz t do segmento Op . Chamo P à intersecção de t e Sp (R = rádio do círculo).

1º J e P estão numha elipse de focos O e S :
 $PO + PS = pP + PS = R = jJ + JS = JO + JS$

2º $\alpha = \beta$ por ser ambos iguais ao simétrico de β respecto de t , logo t é tangente à elipse (Lembre-se a introdução). Neste diagrama

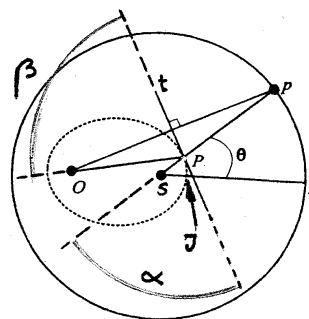


Fig. 8

rotado, as velocidades devem ser perpendiculares às tangentes à trajectória real, que é o que sucede com a velocidade Op e a recta t . Vemos que *a elipse com focos em O e S e eixo igual ao rádio do diagrama de velocidades, é a trajectória real do planeta*, pois é a única curva que, partindo de J , é tangente em cada ponto à velocidade do planeta.

REFERÊNCIAS

- [1] Marion, Jerry *Dinámica clásica de las partículas y sistemas*. Editorial Reverté, Barcelona 1986, página 291
- [2] Newton, Isaac *Principios matemáticos de la Filosofía natural* Editorial Tecnos. 2ª Ed. Madrid, 1997
- [3] Goodstein, David e Goodstein, Judith (Editores) *La conferência perdida de Feynman*. Tusquets Editores. Barcelona, 1999