

LA FORMACIÓN GEOMÉTRICA EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE ENSEÑANZA PRIMARIA A TRAVÉS DE ENTORNOS DE APRENDIZAJE*

Isabel Escudero Pérez
Departamento de Didáctica de las Matemáticas
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Sevilla

Resumen

El objetivo de este proyecto es la identificación de aspectos de un contenido matemático que nuestros alumnos (estudiantes para profesores de primaria) sean capaces de trasladar desde la información teórica suministrada a la realización de la tarea propuesta. Dicha tarea forma parte de un entorno de aprendizaje. Con los datos obtenidos desde el trabajo de los estudiantes pretendemos validar los diseños y analizar los resultados para modificar, si procede, dichos entornos de aprendizaje, ampliarlos o rediseñarlos, contribuyendo a los esfuerzos por integrar las informaciones procedentes de las investigaciones teóricas con la práctica en los programas de formación inicial.

Abstract

The aim of this project is the identification of aspects related to the mathematical content that preservice elementary teacher can translate from theoretical information to the process of solving a proposed task. This task forms part of a learning environment. The data obtained from the work of the students allowed us to validate or modify the design of that environment. The results contribute to the efforts for integrating theory and practice in initial teacher training.

INTRODUCCIÓN

El trabajo que presentamos responde al objetivo de diseñar e implementar entornos

de aprendizaje y validarlos posteriormente a partir de los datos recogidos de los trabajos de nuestros alumnos (estudiantes para profesores). En el diseño de estos entornos, uno de los elementos lo constituye la selección de documentos teóricos con relación a los diferentes tópicos matemáticos

* Actividad financiada por el Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Sevilla, dentro de la Convocatoria de Ayudas a la Docencia para la Innovación (curso 2000-2001).

implicados en la tarea propuesta. Un objetivo específico del proyecto de innovación desarrollado es tratar de identificar los aspectos de un contenido matemático que los alumnos son capaces de trasladar desde los documentos de trabajo suministrados, de tal forma que permitan un nuevo replanteamiento de la tarea. Con los datos obtenidos pretendemos validar los diseños y analizar los resultados para modificar si procede dichos entornos de aprendizaje, ampliarlos o rediseñarlos, contribuyendo a los esfuerzos por integrar las informaciones procedentes de las investigaciones teóricas con la práctica en los programas de formación inicial.

El diseño, implementación y validación de entornos de aprendizaje tiene unos fundamentos teóricos (Llinares, 1991; García, 2000, en prensa) respecto a dos dimensiones básicas: el conocimiento y el aprendizaje del profesor de matemáticas, a través de los que se han llegado a concretar las componentes de contenido en la formación de profesores de matemáticas y las características del proceso de aprender a enseñar. Además, nuestro grupo de investigación (GIEM¹) ha intentado en los últimos años hacer operativas las ideas teóricas en nuestro contexto de la formación inicial de maestros (García y otros, 1994, 2000; Llinares y otros, 2000; Sánchez y otros, 1997, 2000) concretando contenidos que nos parecen fundamentales en los programas de dicha formación desde la Educación Matemática y diseñando entornos de aprendizaje con una serie de características, en coherencia con nuestras ideas teóricas respecto a la forma de caracterizar los procesos de aprender a enseñar (García, 2000).

Asimismo, hemos concretado nuestra propuesta metodológica a través de lo que hemos denominado “itinerarios de formación” (García, 2000).

En particular, en este proyecto de innovación discutimos el diseño, implementación y validación de entornos de aprendizaje cuyo contenido pertenece a la componente relativa al conocimiento de y sobre las matemáticas (Ball y McDiarmid, 1990). A continuación, pasamos a concretar qué aspectos caracterizan dicho conocimiento.

UNA APROXIMACIÓN AL CONOCIMIENTO DE Y SOBRE MATEMÁTICAS DE LOS FUTUROS MAESTROS

Por conocimiento de matemáticas en este contexto entendemos el estudio y comprensión de conceptos, el conocimiento, comprensión y destrezas en el uso de los procedimientos, de distintos tópicos matemáticos que abarquen el campo numérico, geométrico, funciones y estadística y probabilidad, entendiendo las conexiones entre ellos y sus relaciones con otros campos. Junto a ello se incluyen los procesos de hacer matemáticas, identificar y definir conceptos, establecer conjeturas, construir modelos, razonar inductiva y deductivamente, así como la realización de pruebas y demostraciones. Además, dentro del conocimiento de matemáticas se debe prestar especial atención a la comprensión y uso del discurso matemático, centrado en particularizar, abstraer, generalizar, justificar y/o rebatir argumentos, siendo muy importante el proceso de comunicar y

¹ Grupo de Investigación en Educación Matemática de la Universidad de Sevilla (Plan Andaluz de Investigación; FQM-226).

conectar las ideas matemáticas. En particular, algunas características que destacan distintas organizaciones profesionales con relación a la formación matemática de los profesores son aprender ideas matemáticas, conectarlas, comunicarlas, formas de razonar matemáticamente, resolver problemas y potenciar y aumentar el discurso matemático (Leitzel, 1990).

El conocimiento sobre matemáticas incluye diferentes aspectos que ayudan a caracterizarla como ciencia, tratando de ampliar la idea “clásica” de su consideración como ciencia exacta, con carácter determinista. En el contexto en el que nos encontramos algunos de estos aspectos incidirá en la posibilidad de utilizar herramientas empíricas aunque sea una ciencia deductiva y la necesidad de resolver problemas desde distintos planteamientos, contribuyendo a ver la matemática como una resultante idealizada de procesos de abstracción con base empírica.

CARACTERÍSTICAS DEL CURSO Y LOS ALUMNOS

La distribución de los créditos correspondientes al Área de Conocimiento de Didáctica de las Matemáticas en el Plan de Estudios de la Diplomatura de Maestros de la Facultad de Ciencias de la Educación contempla en la especialidad de Educación Física dos asignaturas, estando encaminada la primera de ellas fundamentalmente al desarrollo de la componente del conocimiento de y sobre las matemáticas y la segunda al desarrollo de la componente sobre el conocimiento del aprendizaje de las nociones matemáticas y del proceso instructivo. El hecho de haber estado inmersa durante los últimos

años en las reflexiones sobre los cambios de programas que han tenido lugar en nuestros planes de estudio y ligada a la docencia en estos niveles de la asignatura que trata del desarrollo de la componente del conocimiento de y sobre las matemáticas, me ha permitido apreciar las dificultades que se le presentan a nuestros alumnos al enfrentarse con el quehacer matemático, abordar ideas matemáticas, desarrollar estrategias de resolución de problemas, aplicar destrezas y procedimientos entre otros, y ha hecho, que dentro de las componentes anteriormente mencionadas, me sienta especialmente próxima a toda la problemática que plantea el desarrollo del conocimiento de y sobre las matemáticas. Es precisamente esta asignatura, situada en el primer curso de la citada Diplomatura, el contexto en que se desarrolla dicha innovación.

Esta asignatura, impartida en el segundo cuatrimestre, tiene seis créditos, estando repartidos dichos créditos para tratar contenidos de los cuatro campos siguientes: numérico, geométrico, funciones y estadística. En particular, la situación del entorno de aprendizaje al que nos vamos a referir en el proyecto de innovación está en el campo geométrico, en un momento del curso en el que se han trabajado otros entornos de aprendizaje centrados en contenidos del campo numérico y habiendo trabajado explícitamente procesos de conjeturar, comunicar, probar y comprobar, entre otros. Dentro del campo geométrico se incluyen los conceptos de figuras y cuerpos geométricos y las relaciones entre ellos y las relaciones métricas en el plano y en el espacio. En este estudio nos situamos a veces desde un punto de vista de la geometría sintética y otras veces desde el de la geometría de coordenadas, tratando en algunas situaciones problemáti-

cas de comparar y conectar ambos puntos de vista.

En relación a la situación de los alumnos de este nivel, los grupos de clase son bastante heterogéneos no sólo en su procedencia (que suele ser general en todos las especialidades de estas Diplomaturas) sino también en sus expedientes académicos, lo que crea unos desniveles muy grandes en las capacidades de comprensión de los alumnos de un mismo grupo. Lo que sí suele ser general en estos alumnos es el desconocimiento de temas geométricos y la falta de hábito de uso de la nomenclatura adecuada y del proceso de probar y/o demostrar en este campo.

UNA APROXIMACIÓN A LAS CONCEPCIONES PREVIAS DE LOS ALUMNOS

Otro aspecto importante a tener en cuenta son las concepciones previas de los alumnos sobre las clases de matemáticas (papel del profesor, su propia actividad en las clases, etc.). Para tratar de conocer algunas características de esas concepciones, al iniciar el curso le pedí a los alumnos que hicieran un pequeño informe sobre lo más característico de su actividad en las clases de matemáticas (ver Anexo 1). De la lectura y un pequeño análisis de estos informes inferimos las siguientes características: i) en general los alumnos se fijan más en la actividad y actuación de sus profesores en las clases de matemáticas (con matices diferentes según sea el colegio o el instituto) que en su propia actividad en dichas clases; ii) salvo uno o dos grupos de alumnos, ninguno de ellos entran en hacer referencia a los contenidos trabajados; iii) la casi totalidad de los gru-

pos coinciden en indicar que en las clases de matemáticas se han seguido el “método tradicional”, describiéndolo con algunas de las posibilidades siguientes:

Opción 1:

- El profesor exponía (o explicaba) la teoría.
- El profesor realizaba un ejercicio modelo.
- El profesor proponía otros ejercicios del mismo tipo para realizarlos.
- Corrección de los ejercicios en la pizarra.

Opción 2:

- Explicación por el profesor del tema: Introducción y teoremas o propiedades.
- Algunas clases se dedicaban a la realización de actividades del tema.

Opción 3:

- El profesor planteaba un problema y explicaba su desarrollo.
- Proponía una relación de ejercicios para trabajar en casa.

Todo lo anterior nos llevó a inferir que en general las concepciones que tenían los alumnos sobre su actividad en las clases de matemáticas era un papel bastante pasivo y poco reflexivo en sus propias actuaciones. En la identificación de las características de las clases de matemáticas se destaca el papel del profesor como director y principal protagonista de todo el proceso de enseñanza/aprendizaje y se deja entrever una concepción de las matemáticas como “cuerpo” cerrado de conocimiento, como un conjunto de verdades universales que pueden ser transmitidas por el profesor. Estas características generales se tuvieron posteriormente en cuenta para cruzarlas con los datos extraídos durante la implementación del entorno de aprendizaje.

CONCRETANDO LA PROPUESTA

Al diseño e implementación de tareas y a la identificación en ellas de espacios problemáticos planteado en anteriores propuestas les sucede una etapa de diseño e implementación de entornos de aprendizaje y de validación de los mismos a partir de los datos recogidos en situaciones de la práctica. Como se ha indicado en anteriores trabajos los entornos de aprendizaje se crean a partir de tareas diseñadas o seleccionadas que permiten a través de la actividad demandada caracterizar el contenido específico (el qué), siendo otro elemento fundamental en dicho entorno la forma en que se desarrolla el trabajo sobre la tarea (el cómo) y concretando la propuesta metodológica, como hemos señalado anteriormente, en los itinerarios de formación (García, 2000). Para la discusión de los objetivos propuestos en nuestro proyecto nos vamos a referir a lo ocurrido en los distintos momentos de dicho itinerario durante varias sesiones en las que se trabaja a partir de una tarea/situación que es un problema matemático del campo geométrico.

DISEÑO Y ANÁLISIS DE LA TAREA PLANTEADA

* En primer lugar, se seleccionó y adaptó la siguiente tarea:

TAREA MATEMÁTICA: Teselaciones en el plano.

a) Queremos pavimentar el suelo de una habitación usando losetas poligonales regulares que tengan sus respectivos lados de la misma medida.

Indicación: Por pavimentar entendemos cubrir la superficie con polígonos sin dejar huecos entre ellos y sin que se solapen (ver por ejemplo la Fig. 1). Se puede experimentar con el material disponible.

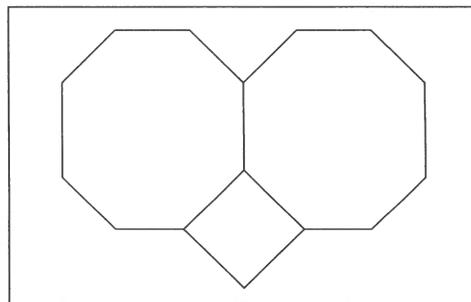


Figura 1.

Se pueden dibujar en un papel las distintas posibilidades que se obtengan (sin necesidad de usar regla y compás) cuando todos los polígonos se agrupan alrededor de un vértice.

- b) A los modelos de mosaicos también los podemos llamar **teselaciones**. Cuando en el mosaico sólo intervienen polígonos regulares iguales los llamamos **teselaciones regulares**. Encuentra las teselaciones regulares que existen. Justifica la elección de los polígonos regulares. Buscad una regla general que permita elegir unos y rechazar otros. Por si os sirve de ayuda podríais ir resumiendo las observaciones y resultados que se vayan

Nombre de la(s) Figura(s)	Nº de lados	Nº de ángulos	¿Se puede teselar con ella?

obteniendo en tablas análogas a la siguiente:

- c) Realizad un informe del proceso seguido en la realización de las pavimentaciones, anotando no sólo los polígonos elegidos y los rechazados sino también las justi-

ficaciones de las causas de las decisiones tomadas. Dichos informes los reservaremos para poderlos después intercambiar entre los distintos grupos.

- d) Buscad otras teselaciones aunque no sean regulares.
- e) ¿Qué elementos geométricos influyen en el hecho de que un polígono sirva o no para pavimentar el plano? Justifica tus respuestas de forma razonada.

Esta tarea (problema) se presentó a los estudiantes para profesores (para su trabajo en pequeños grupos) mediante un texto escrito, poniendo además a su disposición un material manipulable con las siguientes características: i) láminas troqueladas en cartulina en forma de polígonos de lados iguales; ii) figuras poligonales regulares, con la misma medida para el lado en cada una de ellas (triángulos equiláteros, cuadrados, pentágonos, hexágonos, octógonos, decágonos y dodecágonos). Además el texto de la tarea se acompañó de una información teórica sobre los contenidos matemáticos implicados, que se proporcionó por medio de distintos documentos, como mostramos a continuación:

Documentos de lectura:

- Doc. 1: CLEMENTS, S.R.; O'DAFFER P.G., y COONEY, T.J. (1989): *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*. Addison-Wesley Iberoamericana (ed.), 292-293.
- Doc. 2: ESCUDERO, I. y PÉREZ, A. (1994): *Geometría. (Primer ciclo de ESO)*. Octaedro (ed.), 46-52.
- Doc. 3: GARCÍA, M. y LLINARES, S. (en prensa): *Los procesos matemáticos como contenido: el caso de la prueba matemática*.
- Doc. 4.: GARCÍA, J. y LÓPEZ, M. (1975): *Matemáticas*. Marfil, Valencia, 31-35.
- Doc. 5: NORTES, A. (1993): *Exactas y su didáctica*, en MARÍN, D. (ed.). Murcia, 250-253.

** Análisis de la tarea:*

En la fase de planificación procedimos al análisis de la tarea, estudiando los posibles caminos de resolución que nuestros alumnos podían seguir e identificando posibles aspectos del contenido matemático implicado, que pudieran intervenir en la resolución de la tarea. El contenido de y sobre las matemáticas potencialmente implicado en la resolución de la tarea lo presentamos en el cuadro 1.

EL PROCESO DE IMPLEMENTACIÓN: SU DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS

El primer momento del itinerario de formación es la fase de trabajo en grupos, durante el cual los alumnos del curso abordan la realización de la tarea planteada con los recursos de que se disponga (calculadoras, material manipulable, etc.). Durante esta fase, si les surge la necesidad de incorporar información teórica que les posibilite para su resolución, pueden recurrir a las lecturas/documentos teóricos facilitados, tanto en clase como fuera de ella. Después de las sesiones de trabajo en pequeños grupos (aproximadamente una sesión de dos horas, que pueden estar seguidas o separadas, atendiendo al horario de clase de los cursos) se procede al análisis/discusión colectivo de las aportaciones de los pequeños grupos al problema (tarea) planteado y, generalmente se realiza el problema casi por completo (segundo momento del itinerario de forma-

Cuadro 1. Contenidos potencialmente identificados en la tarea.

Sobre Matemáticas

Las matemáticas como

- Resolución de problemas
 - Ciencia deductiva con herramientas empíricas
 - Modelo teórico para el estudio e interpretación del espacio de dos dimensiones
-

De Matemáticas

Procesos

- Interpretar información dada por imágenes apoyándose en la visualización.
 - Representación de los conceptos geométricos a través de figuras, como proceso que desarrolla la visualización.
 - Resolver problemas matemáticos.
 - Reconocer, extender y analizar patrones haciendo uso del razonamiento inductivo.
 - Conjeturar
 - Generalizar
 - Razonar deductivamente
 - Prueba y demostración
 - Demostración por inducción matemática
 - Demostración deductiva
 - Conjetura, propiedad y teorema
 - Comunicar, justificar y rebatir argumentos en lenguaje natural y en lenguaje teórico (como un proceso hipotético-deductivo)
-

Conceptos

- Identificación, descripción, definición y análisis de polígonos.
 - Elementos geométricos que caracterizan los polígonos: ángulos, vértices, lados, diagonales, etcétera.
 - Relaciones geométricas básicas en los polígonos: suma de ángulos, triangulación de polígonos, etcétera.
 - Polígonos regulares y no regulares.
 - Ángulo interior de un polígono regular convexo de n lados. Expresión general.
 - Teselaciones regulares y semirregulares.
 - Divisores de 360° .
-

ción). En estas discusiones suelen surgir nuevas cuestiones, que suelen llevar a ampliar la tarea o a la realización de nuevas tareas que complementan los contenidos que se están trabajando.

Después del trabajo en grupos y de la discusión colectiva del problema, le pedimos a los distintos grupos que nos entreguen por escrito las aportaciones del grupo a la rea-

lización de la tarea/problema planteada y un “informe de grupo” que recogiera un breve análisis de lo ocurrido en los distintos momentos de trabajo sobre la tarea. Con la recogida de las aportaciones y de los informes de los grupos buscamos: en primer lugar, tener un instrumento operativo que nos permitiera la comparación de los aspectos del conocimiento de las matemáticas que realmente

se ponen en juego con la realización de la tarea, para poder comparar con los previamente identificados por nosotros en la planificación. En segundo lugar, la realización del informe de trabajo en grupo trata fundamentalmente de que los estudiantes para profesores reflexionen y analicen su propio proceso de aprendizaje (tanto desde una perspectiva individual como en grupo) y nos ha permitido acceder en cierto sentido a lo ocurrido durante el itinerario de formación (en el Anexo 2 presentamos el guión que dimos a los alumnos para la realización de dicho informe).

A continuación, pasamos a analizar lo ocurrido durante la implementación a partir de los siguientes instrumentos: i) observación personal, realizada por el profesor, de los contenidos que son identificados por los alumnos (en el trabajo en PG y en la discusión en GG) y de las dificultades metodológicas que se presentan, ii) recogida y análisis de las aportaciones por escrito de los distintos grupos, acompañadas de los informes correspondientes, después de la discusión en gran grupo.

** Recogida y análisis de los datos procedentes de las observaciones de la implementación en el aula*

Con las notas tomadas personalmente después de las clases de lo observado en el aula, trataba de recoger los **contenidos** que habían sido identificados por los alumnos en los distintos grupos, las **ideas erróneas** que afloraron (que me llevaban a intervenir en algunos momentos, con indicaciones que trataron de remitirles a los documentos de lectura si lo consideraban necesario) y si consultaron las lecturas.

– **Contenidos** surgidos durante el trabajo en los pequeños grupos:

En el cuadro siguiente recogemos de manera sintética los contenidos de y sobre las matemáticas identificados (a través de la observación en clase) mientras los alumnos estaban realizando la tarea planteada, diferenciando entre aquellos que se daban de manera general y los que aparecían en casos puntuales.

El análisis de los contenidos identificados durante la implementación de la tarea en el aula, durante el momento del trabajo en los pequeños grupos, permite apreciar que en general aparecieron **conceptos** que podríamos calificar de “clásicos” de geometría elemental, que figuraban en el análisis previo de la tarea (Cuadro 1), además de algunos **procesos** como conjeturar, identificar una propiedad, comunicar y justificar en lenguaje natural y razonar inductivamente. Por otro lado, entre los contenidos que no aparecieron podemos citar: la ausencia de probar y/o demostrar, ya que para resolver las cuestiones planteadas les bastó con comprobarlas en casos particulares; así como la no relación directa entre el número de divisores de 360 y el ángulo interior de los polígonos regulares que permiten la realización de teselaciones regulares.

– **Ideas erróneas** que surgieron durante el trabajo en los pequeños grupos:

Algunas de las ideas erróneas que pudimos detectar y que interfirieron con la realización de la tarea son las siguientes:

- La confusión de polígonos regulares con equiláteros, que les llevó a situar el rombo entre los polígonos regulares.
- La consideración del triángulo isósceles entre los polígonos regulares, que repercutió en considerar la posibilidad de teselar con cualquier polígono regular.

Cuadro 2. Contenidos identificados durante la implementación de la tarea.

<i>SE DABAN EN GENERAL</i>	<i>SE DABAN EN CASOS PUNTUALES</i>
<i>Sobre Matemáticas</i>	
<p>Las matemáticas como:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Resolución de problemas 	<p>Las matemáticas como:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modelo teórico para el estudio e interpretación del espacio de dos dimensiones.
<i>De Matemáticas</i>	
Procesos	
<ul style="list-style-type: none"> • Interpretar información dada por imágenes apoyándose en la visualización. • Realización de dibujos de figuras adecuadas para representar los conceptos figurales. • Resolver problemas matemáticos. • La realización de conjeturas (correctas y erróneas). Se apoyan en ejemplos particulares por el procedimiento de “ensayo /error”, sin plantearse la prueba y/o justificación de la conjetura. • Razonar inductivamente. • Comunicar, justificar y rebatir argumentos en lenguaje natural. 	<ul style="list-style-type: none"> • Generalizar. • Identificación y enunciado de propiedades. • Realización de conjeturas basadas en búsquedas más sistemáticas. • Comunicar, justificar y rebatir argumentos en términos más cercanos al lenguaje matemático.
Conceptos	
<ul style="list-style-type: none"> • Identificación, descripción, definición y análisis de polígonos elementales. • Polígonos regulares. • Teselaciones con polígonos: regulares y semirregulares. • Identificación de los ángulos interiores de los polígonos como el elemento geométrico que interviene en la posibilidad de teselar. • Triangulación de polígonos. • Cálculo del ángulo interior en un polígono regular por triangulación (en casos particulares). En algunos casos sólo surge el cálculo en aquellos polígonos que intervienen en teselaciones semirregulares. • Los procedimientos utilizados en la búsqueda de teselaciones y de reglas para teselar son poco sistemáticos, basados en general en técnicas de “ensayo/error”, apoyándose en materiales y en la realización de dibujos. 	<ul style="list-style-type: none"> • Procedimientos más sistemáticos en búsqueda de teselaciones y reglas para teselar. • Procedimiento general para el cálculo del ángulo interior de un polígono regular cualquiera, que ensayan en casos particulares y <i>extienden sin justificar en general</i> a otros casos. • Identificación de la relación de divisibilidad entre el ángulo interior de los polígonos regulares que forman las teselaciones regulares y 360°. • Teselaciones formadas por polígonos regulares estrellados (no esperado).

- La realización de algunas conjeturas erróneas como por ejemplo: a) “las teselaciones regulares son aquellas que se logran con un polígono regular de un número par de lados (excepto el triángulo)”; b) “se puede teselar con cualquier polígono regular, ya que éste se puede triangularizar con triángulos ‘equiláteros’ desde su centro”.
- La aceptación de conjeturas sólo con comprobarlas en algunos casos particulares.

Las ideas erróneas detectadas que se refieren a las características de algunos conceptos podían corregirlas los propios alumnos en el intercambio de información que tenía lugar durante el trabajo en los pequeños grupos o mediante la consulta de algunas partes de los documentos de trabajo (lecturas). La mayor dificultad se presentó en aquellas ideas en las que intervenían las nociones de validez de una conjetura y de prueba y/o demostración de la misma, el concepto de generalización de un procedimiento o de una propiedad y los procesos de razonamiento inductivo y deductivo.

- Contenidos surgidos en la discusión en todo el grupo de clase:

Los contenidos que habían surgido durante el trabajo en los pequeños grupos volvieron a manifestarse aquí, con el añadido de que los alumnos tuvieron que hacer el esfuerzo de comunicar y explicitar su forma de realizar la tarea. Pero además, surgieron contenidos nuevos para muchos alumnos, ya que en algunos de los grupos de trabajo el grado de desarrollo de la tarea fue mayor que en otros y, por lo tanto, incorporaron a la discusión los contenidos surgidos en el primer momento del itinerario de formación. Entre estos contenidos podemos citar:

- el cálculo del ángulo interior de un polígono regular y su expresión general,
- la identificación de una “regla o propiedad” para poder teselar,
- la prueba y justificación de algunas conjeturas realizadas,
- la búsqueda exhaustiva de los polígonos que sirven para las teselaciones regulares basada en la obtención de los divisores de 360 y su comprobación de si corresponde o no a un polígono regular con esa medida para el ángulo interior.

El que para muchos alumnos surgieran nuevos contenidos planteó la necesidad de incorporar los documentos de lecturas, que les ayudasen a terminar de realizar la tarea y también conllevó la necesidad de introducir nuevas tareas o ampliar la planteada inicialmente, para tratar de incidir en aquellos procesos o contenidos procedimentales que no pueden adquirirse directamente de los documentos de lectura. En particular, con las tareas complementarias incidimos en la realización de conjeturas y en la justificación y/o prueba de las mismas.

- Papel de los materiales en el trabajo en pequeños grupos:

Dado que el proyecto de innovación lo hemos desarrollado en dos grupos (uno con horario de mañana y otro de tarde) de alumnos de la Diplomatura de Maestros de la especialidad de educación Física y teníamos dudas sobre la incidencia que podía tener el uso del material en la realización de la tarea, lo introdujimos en momentos distintos en ambos grupos. En uno de ellos se facilitó el material desde el primer momento de la implementación de la tarea y en el otro se les indicó que en primer lugar buscaran (mediante el dibujo a mano alzada de las

figuras correspondientes) posibilidades para teselar y, en los minutos finales de una sesión de clase se les facilitó la experimentación con el material.

¿Qué diferencias nos llamaron la atención en lo obtenido en uno y otro grupo? En el grupo que manipularon desde el principio salieron muchos tipos de teselaciones semirregulares distintos, a diferencia del otro grupo que fundamentalmente trabajaron con polígonos más elementales (triángulos, cuadrados, hexágonos). Sin embargo, en el grupo que no manipularon desde el principio afloraron algunas ideas erróneas (uso de rombos y de triángulos isósceles para teselar) e incluso aparecieron polígonos estrellados que no teníamos previsto en el análisis previo de la tarea.

Aunque estos resultados son descriptivos e incompletos, apuntan hacia una problemática sobre el papel de los materiales manipulativos que pensamos debe ser objeto de un estudio en profundidad.

– Tareas complementarias planteadas:

La tarea de partida se complementó de distintas formas en cada uno de los grupos de alumnos. En uno de ellos, que había surgido poca variedad en las teselaciones semirregulares decidimos ampliar la tarea planteando un camino que exigía la búsqueda sistemática de determinadas teselaciones de este tipo, imponiendo algunas limitaciones, que ayudaba a reducir el número de casos posibles. En el otro grupo, dado que habían surgido en general bastantes teselaciones de este tipo decidimos ampliar la tarea planteándoles las condiciones para que construyeran teselaciones semirregulares (dependiendo del símbolo de Schläfi) (J.A. Mora y J. Rodrigo, 1993) y tratando de establecer conexiones con

los conceptos de movimientos en el plano, la búsqueda de ejes de simetría y planteando el cálculo de relaciones métricas en el teselado.

– Sobre los aspectos metodológicos.

Durante el trabajo de los alumnos en pequeños grupos las mayores dificultades han estado en el rechazo que suelen manifestar los alumnos en asumir su responsabilidad en la realización de la tarea, ya que recurren constantemente a la intervención del profesor como autoridad que avale o no los pasos que se van dando en sus resoluciones.

En la discusión y puesta en común en todo el grupo la mayor dificultad está en que realmente se produzca debate de ideas matemáticas entre los distintos grupos. Dichas discusiones aparecen muchas veces de manera forzada por mis preguntas, que a muchos de ellos les parecen fuera de lugar, ya que no consideran necesario la prueba y justificación de conjeturas.

** Recogida y análisis de los datos procedentes de los documentos recogidos a los alumnos*

En relación a los **contenidos** identificados explícitamente por los alumnos, los que suelen destacar son los conceptos más “clásicos”, sin incluir procesos como conjeturar, probar y/o demostrar. La lectura global de los documentos entregados por los alumnos viene a corroborar lo observado durante la implementación en relación a:

- las mayores dificultades las manifiestan en la comprensión de las justificaciones y en las pruebas realizadas,
- sólo un número mínimo de alumnos ha sido capaz de trabajar sin dificultad con argumentos generales,

- suelen hacer bastantes conjeturas que sólo están comprobadas.

De los alumnos que entregan los informes sólo las dos terceras partes hacen la **autorreflexión** de lo ocurrido durante el trabajo en el entorno de aprendizaje. En la mayoría de los informes entregados no aparece una diferenciación clara entre los conocimientos de partida, surgidos en el momento del trabajo en pequeños grupos, y lo surgido en la discusión en el gran grupo. Esto conlleva que no hagan explícito cuál ha sido el conocimiento adquirido.

En relación al papel de los **documentos de lectura** facilitados, aproximadamente la mitad de los alumnos manifiestan que han trabajado la tarea sin consultarlos. Inferimos que, salvo algunos casos que pueden no necesitarlas, en parte esto lo pueden suplir en la discusión en gran grupo, donde el grado de intervención del profesor puede ser “mayor del deseado”. La otra mitad de los grupos indican que han consultado las lecturas para suplir sus conocimientos previos (que según ellos mismos destacan eran mínimos), pero señalan que esta lectura no había sido hecha en profundidad.

Sobre el **uso del material**, en general destacan la importancia que ha tenido en la realización de la tarea, hasta el punto de que algunos indican que no han sido capaces de utilizar otros polígonos distintos de los que aparecían en el material facilitado. Esto último, lo ven algunos alumnos como un inconveniente porque según ellos les ha “limitado mucho el campo de visión” (al pensar y utilizar sólo los polígonos que aparecen en material tangible). Otros sin embargo no consideran imprescindible su uso, aunque indican que les hubiera costado más trabajo de realizar la tarea.

- Reflexiones de los alumnos sobre aspectos metodológicos.

En las reflexiones que hacen los alumnos sobre el trabajo en los pequeños grupos suelen valorarlo positivamente, si bien en bastantes grupos lo que destacan son las aportaciones individuales realizadas por cada uno, sin ver en general “comunicar ideas matemáticas” como una parte importante del quehacer matemático. Sin embargo, en algunos grupos destacan que gracias a esta forma de trabajo han surgido distintas maneras de llegar a la solución de un problema.

Por último, debemos indicar que en el momento en que se realiza esta tarea ya hay un grado de abandono de alumnos en estos cursos que repercute en el trabajo en los pequeños grupos, que va a llevar a algunos alumnos a tener que incorporarse a otros grupos de trabajo e incluso a tener que hacer nuevos grupos.

CONCLUSIONES

Los resultados de las observaciones realizadas en el aula durante la implementación del entorno de aprendizaje con los obtenidos a través de los documentos recogidos a los alumnos nos lleva a establecer algunas reflexiones puntuales y conclusiones sobre la experiencia desarrollada, que nos permitan establecer algunas pautas para la realización de modificaciones de los entornos de aprendizaje.

Las características de los contenidos surgidos e identificados por los alumnos en sus informes y las dificultades apreciadas en el análisis de las observaciones durante la realización de las tareas ponen de manifiesto la necesidad de seguir trabajando explíci-

tamente determinados procesos como conjeturar, validar, prueba y demostración, comunicar, justificar y rebatir argumentos en lenguaje natural y en lenguaje teórico. Un aspecto importante que se hace patente en distintos momentos del itinerario de formación, y que está muy relacionado con las concepciones de los alumnos sobre lo que debe ser el contenido en las clases de matemáticas, es que los alumnos no ven “comunicar ideas matemáticas” como una parte importante del quehacer matemático. Otro aspecto que también se ha puesto de manifiesto en los distintos datos, que corrobora conclusiones extraídas en trabajos anteriores (García y Escudero, 1994), es la poca flexibilidad del conocimiento de los alumnos en establecer conexiones entre distintos campos de las matemáticas, lo que nos hace reflexionar sobre la necesidad de seguir diseñando tareas que impliquen contenidos de distintos campos matemáticos.

Uno de los elementos fundamentales del entorno de aprendizaje es la forma en que se desarrolla el trabajo sobre la tarea (el cómo). La realización de los informes es uno de los instrumentos que trata de incidir especialmente en la autorreflexión del alumno sobre su propio proceso de aprendizaje. El hecho de que en general los alumnos no hayan hecho explícito el conocimiento adquirido durante el proceso nos lleva a reflexionar sobre la posibilidad de introducir modificaciones en el itinerario de formación, en relación a los momentos de recogida de los informes de grupo de los alumnos: el primero, que tratara de lo relativo al trabajo en los pequeños grupos (TPG), se fijaría después del TPG y el segundo se recogería después de la discusión e incorporación de lecturas para la realización completa de la tarea planteada.

Otro aspecto que incide en la forma en que se desarrolla el trabajo sobre la tarea y que ha sido de especial atención en este proyecto de innovación ha sido la selección de documentos de lectura. Los datos procedentes de las observaciones y de las reflexiones de los propios alumnos ponen de manifiesto que no ha habido una lectura profunda y comprensiva de dichos documentos, en lo que pueden haber incidido varios aspectos: las restricciones institucionales que influyen en la limitación del tiempo que podemos dedicar en clase a la discusión de los documentos, la falta de hábito de los alumnos en trabajar los documentos por su cuenta en el día a día (no sólo para un examen), la extensión de las lecturas y las posibles dificultades de comprensión que puedan tener. El papel poco destacado que han tenido los documentos teóricos nos llevan a incidir en la importancia de la selección de lecturas que no sean demasiado extensas y que la comprensión del texto no entrañe demasiadas dificultades e incluso a la incorporación al itinerario de formación de una fase previa donde se podrían facilitar (dependiendo de las características de los contenidos implicados en la tarea elegida) unas primeras lecturas que contuvieran algunos los contenidos mínimos para poder abordar el problema/tarea planteado. Sin embargo, queremos destacar que estos contenidos mínimos son algo que deberían formar parte del conocimiento previo de los alumnos de este nivel.

Aunque en nuestras reflexiones hemos señalado aspectos puntuales que podemos modificar en el diseño e implementación de entornos de aprendizaje, somos conscientes que hay unos aspectos transversales que interfieren constantemente en todo el proceso, como son las limitaciones institucionales

que hacen que esta asignatura tenga un número mínimo de créditos para desarrollar la componente matemática de la formación inicial de maestros y las propias concepciones de los alumnos sobre su actividad en las clases de matemáticas, que los hace ser bastante conservadores ante una “nueva” forma de trabajar que considera tanto los contenidos como el quehacer matemático y que les exige involucrarse de forma activa en la resolución de problemas matemáticos.

La clave de la formación inicial de maestros desde la Educación Matemática en la componente de y sobre matemáticas pensamos que está en la caracterización de unas matemáticas específicas, que sean coherentes con su futura labor profesional. Somos conscientes de que junto a la importancia de la elección del contenido debemos seguir insistiendo en la importancia del desarrollo de itinerarios de formación que consideren la generación de problemas, el trabajo en pequeños grupos, la discusión y debates en gran grupo en los que los estudiantes intervengan de forma activa e incorporación de aspectos del conocimiento procedentes de los documentos teóricos, como forma de articular los procesos de aprender a enseñar matemáticas.

REFERENCIAS

- BALL, D.L. y McDIARMID, G.W. (1990): The subject-matter preparation of Teachers, en HOUSTON, W.R. (ed): *Handbook for Research on Teacher Education*. New York, McMillan.
- GARCÍA, M. (2000): El aprendizaje del estudiante para profesor de matemáticas desde la naturaleza situada de la cognición: Implicaciones para la formación inicial de maestros. *Actas del IV Simposio “Propuestas metodológicas y de evaluación en la Formación Inicial de los Profesores del Área de Didáctica de la Matemática*, 113-141.
- GARCÍA, M. (en prensa): La formación inicial de profesores de matemáticas: fundamentos para la definición de un currículo, en FIORENTINI, D. (ed): *A formação de professores de matemática: Estudos e contribuições teórico-metodológicas de Brasil, Espanha e Portugal*. UNICAMP, Brasil.
- GARCÍA, M. y ESCUDERO, I. (1994): Estudiantes para profesor, Matemáticas y Aprendizaje: El núcleo de un problema, en BLANCO (ed.): *Actas de las VI Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*. Badajoz, España.
- GARCÍA, M.; ESCUDERO, I.; LLINARES, S., y SÁNCHEZ, V. (1994): Aprender a enseñar Matemáticas: Una experiencia en la Formación Matemática de los Profesores de Primaria. *Epsilon*, 30, 11-26.
- GARCÍA, M.; ESCUDERO, I.; SÁNCHEZ, V., y LLINARES, S. (2000): Una propuesta de formación en Educación Matemática de futuros profesores de Primaria. *Actas del IX Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas “Thales”*, San Fernando, Cádiz, 223-225.
- LEITZEL, J.R. (ed.) (1990): *A call for the Change: Recommendations for the Mathematical Preparation of Teachers of Mathematics*. MAA, Washington, DC.
- LLINARES, S. (1991): *La formación de profesores de matemáticas*. Sevilla, GID, Universidad de Sevilla.
- LLINARES, S.; SÁNCHEZ, V.; GARCÍA, M., y ESCUDERO, I. (2000): Aprender a enseñar Matemáticas. Efecto de una innovación educativa. *Revista de Enseñanza Universitaria*, vol. extra, 167-178.
- MORA, J.A. y RODRIGO, J. (1993): *Mosaicos I. Cuadernos para el aula de Matemáticas*. Proyecto Sur de Ediciones S.A.L., Granada.
- SÁNCHEZ, V.; ESCUDERO, I.; GARCÍA, M., y LLINARES, S. (1997). Aprender a enseñar

Matemáticas: Integrando nuevas tecnologías en la formación inicial de profesores de Primaria. *Revista de Enseñanza Universitaria*, vol. extra.

SÁNCHEZ, V.; LLINARES, S.; GARCÍA, M., y ESCUDERO, I. (2000): La formación de profesores de Primaria desde la Didáctica de las matemáticas. Números. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, vols. 43-44, 143-146.

ANEXO 1

INFORME PEDIDO A LOS ALUMNOS AL PRINCIPIO DE CURSO:

¿Qué se hace en las clases de matemáticas?

1. Formad grupos de varios compañeros y tratad de recordar lo que hacáis en la clase de matemáticas en la escuela e instituto. Escribid un pequeño informe sobre lo más característico de vuestra actividad en las clases de matemáticas en esos lugares, poniendo ejemplos concretos de las situaciones que describáis. Tratad de utilizar palabras que no se presenten a significados distintos ni ambiguos.

2. Intentad identificar las características que definen las clases de matemáticas de esos lugares.

ANEXO 2

GUIÓN PARA RELLENAR EL INFORME DEL TRABAJO EN GRUPO:

1. Conocimientos previos que se necesitaban para la resolución del problema o situación planteada.
2. De las nociones trabajadas ¿qué sabíais? ¿qué conceptos no estaban claros o no entendíais en el enunciado del problema?
3. ¿Qué papel ha tenido el trabajo en grupo en la resolución del problema o en la comprensión del mismo para cada componente del grupo?
4. ¿Qué papel han tenido los documentos de lectura?
5. Papel del material suministrado para resolver la tarea.