

## Una introducción a los modelos deterministas y estocásticos

*Roberto Laura*

Departamento de Física y Química, EFB, FCEIA, Universidad Nacional de Rosario.

Instituto de Física Rosario, CONICET-UNR, Argentina

E-mail: laura@ifir.ifir.edu.ar

*Se presentan las ideas básicas sobre modelos deterministas y estocásticos, caos determinista y atractores, por medio de ejemplos simples y sin recursos matemáticos especiales. Se discuten las dificultades para la predicción en sistemas caóticos, y el comportamiento determinista de ciertos sistemas estocásticos.*

**Palabras clave:** *modelos deterministas, modelos estocásticos, caos, modelos matemáticos, modelos de la física.*

*The basic ideas on deterministic and stochastic models, deterministic chaos and attractors, are presented using simple examples and no special mathematical resources. The difficulties for the prediction in chaotic systems and the deterministic behavior of certain stochastic systems are discussed.*

**Keywords:** *deterministic models, stochastic models, chaos, mathematic models, physic models.*

### Modelos deterministas

Los trabajos de Galileo y Newton produjeron un gran avance en el conocimiento. La enorme diversidad de movimientos que experimentan los cuerpos sobre la tierra y en el espacio estelar, pudo explicarse en términos de leyes simples. Así sabemos que la fuerza  $\vec{F}$  que actúa sobre un cuerpo produce en el mismo una aceleración  $\vec{a}$ . La fuerza aplicada y la aceleración que experimenta el cuerpo están relacionadas por la segunda ley de Newton  $\vec{F} = m \vec{a}$ , donde  $m$  es la masa del cuerpo. Conocida la fuerza que actúa sobre el cuerpo es posible entonces calcular su aceleración, y como esta es el cambio de velocidad por unidad de tiempo, es posible determinar la posición y velocidad futura del cuerpo si se conoce su posición y velocidad en un tiempo inicial. En esta descripción del objeto en movimiento, su *estado* en un instante dado está caracterizado por seis números: tres que corresponden a las componentes de su vector posición respecto de algún sistema de referencia, y otros tres números que representan las componentes de su vector velocidad. El estado del cuerpo se puede entonces representar como un punto en un *espacio de*

*los estados* de seis dimensiones. Este punto representativo del estado del cuerpo se mueve en el espacio de los estados describiendo una curva que se denomina *trayectoria*. Las coordenadas del punto en este espacio abstracto de seis dimensiones son los valores instante a instante de la posición y la velocidad del cuerpo.

El éxito de este modo de describir el movimiento de los cuerpos fue proveer una imagen unificada de fenómenos tan dispares como el movimiento de los planetas alrededor del sol, la trayectoria de una bala de cañón, o las oscilaciones del péndulo de un reloj, y esto produjo un impacto tremendo en la ciencia. A partir de entonces, la estrategia que tuvo éxito en el campo de la mecánica se extrapoló a otros campos del conocimiento. Desde entonces, en el estudio de poblaciones, de las reacciones químicas, de los procesos económicos, etc., se trató de encontrar el conjunto de variables que caracterizan el estado del sistema en estudio, y la ley que rige la evolución temporal del estado, características de los modelos deterministas.

Según S. Kellert (1993), un *modelo* determinista contiene los siguientes cuatro ingredientes:

1) El estado del sistema puede ser representado por un punto en un espacio de determinadas dimensiones, donde las coordenadas de ese punto son los valores de las variables de estado.

2) Existe una ley dinámica para la tasa de variación de las variables de estado.

3) Por cada punto del espacio de los estados pasa una única trayectoria, o en otras palabras, si se conoce los valores de las variables de estado en un instante de tiempo, hay una única evolución futura posible.

4) Conocido el estado del sistema en un dado tiempo, es posible predecir cual será su estado en todo tiempo futuro.

Notemos la sutil diferencia entre el punto 3) y el punto 4): el primero asevera la existencia de una única historia futura, mientras que el punto 4) se refiere a nuestra posibilidad de predecir esa historia. Enseguida veremos que estas dos cosas pueden no ser ciertas simultáneamente.

Supongamos, por ejemplo, una única bola que se mueve en una mesa de billar rectangular (sin troneras). Vamos a considerar el movimiento que se produce golpeando la bola sobre su centro, así que nos podemos olvidar de los curiosos efectos que tienen que ver con la rotación de la bola sobre sí misma. Además, como toda modelización encierra alguna idealización, vamos a suponer que es posible considerar los choques contra los bordes como perfectamente elásticos. También nos vamos a olvidar del rozamiento, así que las leyes de la mecánica nos permiten aseverar que el movimiento se produce con rapidez uniforme y de modo tal que cada vez que la bola choca contra un borde, se refleja con un ángulo de salida igual al de incidencia. El estado de la bola en un instante dado, puede ser representado por su posición sobre el paño de la mesa y por su velocidad (módulo, dirección y sentido). Las leyes de la mecánica determinan, a partir de un estado, toda la historia futura de la bola. En este caso particular, la historia futura es bastante independiente de pequeñas modificaciones del estado inicial. La figura 1 muestra superpuestas tres trayectorias que se iniciaron con valores ligeramente diferentes de la posición y con la misma velocidad. Vemos como

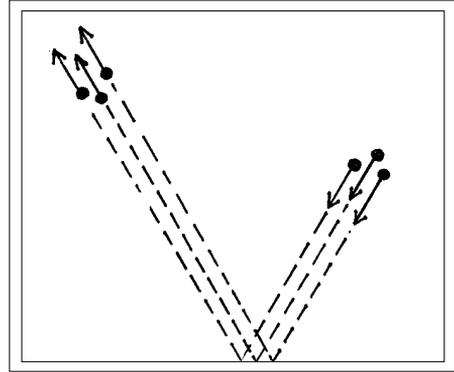


Figura 1: Tres trayectorias con la misma velocidad y valores ligeramente diferentes de la posición inicial.

las trayectorias no se alejan entre sí.

Ahora consideremos una mesa de billar un poco más extravagante, que tiene en su centro un borde circular. La figura 2 muestra también tres trayectorias que se inician con valores ligeramente diferentes de la posición y con la misma velocidad. El borde central convexo hace que las trayectorias que comienzan muy juntas se separen apreciablemente en corto tiempo. En esta mesa de billar será más difícil jugar, ya que se requiere una gran precisión en el impulso inicial para obtener la trayectoria deseada.

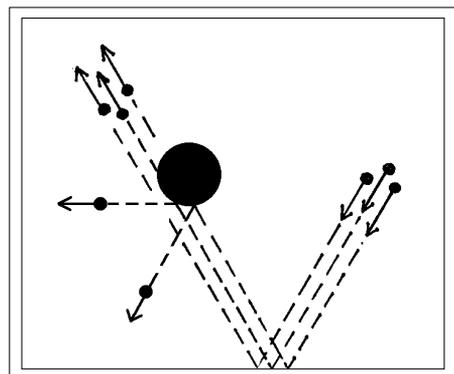


Figura 2: Trayectorias que comienzan muy juntas y se separan apreciablemente en corto tiempo.

### Transformaciones unidimensionales discretas

Analicemos a continuación un modelo matemático abstracto muy simple, que pone en evidencia el tipo de problemas que pueden

aparecer en la posibilidad de predicción para modelos deterministas en que la trayectoria depende fuertemente de pequeñas variaciones del estado inicial. Consideraremos como espacio de los estados, al conjunto de los números reales comprendidos entre cero y uno. Para cada uno de estos números  $x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ), vamos a considerar la ley de evolución obtenida por aplicaciones sucesivas de un caso particular de la denominada transformación de Bernoulli. Esta transformación consiste en tomar un valor inicial  $x_0$ , multiplicarlo por diez, y al resultado quitarle su parte entera. Al resultado  $x_1$  obtenido se le vuelve a aplicar la misma transformación para obtener  $x_2$ , y así sucesivamente. La secuencia de números  $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  forma la historia futura del sistema, unívocamente determinada por el estado inicial. Veamos como es esta historia futura en el caso concreto en que  $x_0 = 0,7534$ , con los puntos suspensivos queremos decir que ignoramos los decimales a partir del quinto). Si reiteramos la transformación de Bernoulli a partir de este valor de  $x_0$ , se obtiene la evolución dada por la secuencia siguiente:

$$x_0 = 0,7534\dots \quad x_1 = 0,534\dots \quad x_2 = 0,34\dots \quad x_3 = 0,4\dots \\ x_4 = 0,\dots \quad x_5 = 0,\dots$$

Ciertamente, como no sabemos cuál es el quinto decimal de  $x_0$ ,  $x_4$  puede ser cualquier número entre cero y uno, y así todos los números de la secuencia a partir de  $x_4$  quedan indeterminados. El desconocimiento del quinto decimal del estado inicial se ha convertido en corto tiempo en una completa ignorancia sobre el estado del sistema. Sólo el conocimiento preciso de todos los decimales de  $x_0$  permite predecir la historia futura. Como es imposible colocar a un sistema real en un estado inicial con un valor infinitamente preciso de sus variables de estado, un sistema determinista como el descrito resulta en la práctica impredecible.

En términos más generales, la transformación de Bernoulli es un ejemplo de una clase especial de modelos deterministas, en que el estado es representado por el valor de una única variable real (que genéricamente designaremos con  $x$ ). Interesa conocer los valores de es-

ta variable en intervalos regulares de tiempo. La evolución del sistema se representa entonces por la secuencia de números reales

$$(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots)$$

Cada valor  $x_{n+1}$  de la secuencia está unívocamente determinado por el valor anterior  $x_n$ . Se supone conocida una función  $f$  tal que

$$x_1 = f(x_0) \quad x_2 = f(x_1) \quad \dots \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad \dots$$

Este tipo de modelos ha sido usado para el análisis de la dinámica de poblaciones. Para fijar ideas, consideremos por ejemplo una población de insectos (May, 1991). Supongamos que  $x$  representa la densidad de insectos en la  $n$ -ésima generación, que cada insecto puede producir  $r$  descendientes cuando no hay efectos de superpoblación, y que las generaciones sucesivas están separadas por el tiempo. Podríamos representar esta situación por la ecuación  $x_{n+1} = r \cdot x_n$ . Pero hay que tener en cuenta que la capacidad de reproducción disminuye con el aumento de la densidad de población. Los ecólogos modelizaron este efecto con la ecuación

$$x_{n+1} = f(x_n) = r \cdot (1 - x_n) \cdot x_n$$

El factor  $(1 - x_n)$  da cuenta del efecto de la densidad de población en la capacidad de reproducción:  $(1 - x_n)$  decrece cuando la densidad  $x_n$  aumenta. Si se reitera la aplicación de esta ecuación un gran número de veces, para determinar la densidad "final" de la población, se obtienen diferentes resultados, dependiendo del valor de  $r$ .

Para cualquier densidad de población inicial  $x_0$ , y siempre que  $r$  sea menor que 3, la población alcanza finalmente un único valor estable (ver figura 3). La disminución en la capacidad de reproducción, motivada por el aumento de la densidad, conduce a un valor final  $x_\infty = 1 - 1/r$ .

Si la tasa de reproducción  $r$  tiene algún valor entre 3 y  $1 + \sqrt{6} \cong 3,45$ , la densidad de población no alcanza un valor estable, sino que oscila con un período de dos generaciones (ver figura 4). Si la tasa de reproducción sigue au-

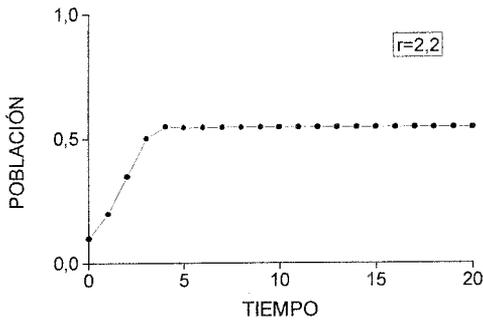


Figura 3: Comportamiento dinámico de una población que alcanza la estabilidad.

mentando, la población oscila con un período cada vez mayor, siempre que no supere un valor muy próximo a 3,57.

Por encima de este valor, la población no se estabiliza en un valor constante ni oscila periódicamente, sino que continúa fluctuando irregularmente (ver figura 5). Aunque la evolución es gobernada por una ley determinista muy simple, y unívocamente determinada por la población inicial  $x_0$ , las complicadas fluc-

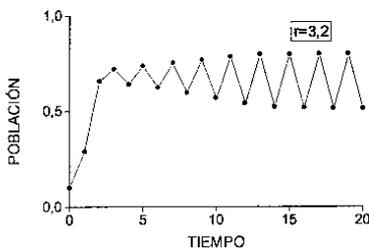


Figura 4: Comportamiento inestable de una población en la que la densidad oscila con un período de dos generaciones.

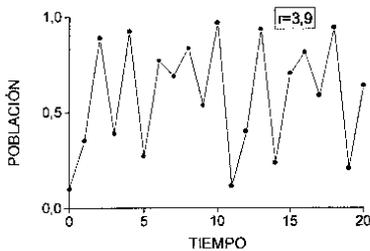


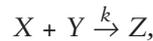
Figura 5: Fluctuación irregular de una población cuya evolución es gobernada por una ley determinista.

tuciones de la población tienen una apariencia aleatoria. Además, la evolución depende fuertemente de la población inicial: mínimas diferencias en el valor de  $x_0$  determinan trayectorias que se hacen muy diferentes a corto plazo. Entonces, como sólo es posible una precisión finita en el conocimiento de la población inicial, este modelo tan simple no puede usarse para hacer predicciones a largo plazo. Se dice en estos casos que el modelo presenta *caos determinista*.

### Sistemas dinámicos con tiempo continuo

En esta clase de sistemas, un estado está representado por los valores de cierto número de variables. Para conocer su evolución, será necesario determinar como dependen las variables de estado del tiempo, que se representa por el parámetro continuo  $t$ . La ley que rige la dinámica de este sistema especifica las tasas de variación de las variables de estado en cada instante de tiempo, como una función definida de las variables de estado en el mismo instante.

Podemos citar como ejemplo de sistema que puede modelarse de esta forma, una reacción química en la cual un compuesto X reacciona con otro compuesto Y para producir un nuevo compuesto Z. Simbólicamente este proceso se escribe



donde  $k$  es un parámetro que caracteriza la velocidad de la reacción. Si consideramos como variables que caracterizan el proceso a las concentraciones  $x$  e  $y$  de los compuestos X e Y, las tasas de variación de ambas concentraciones dependerán de la probabilidad que tiene una molécula de un compuesto de encontrarse con una del otro. Esta probabilidad es mayor cuanto mayor sean las concentraciones  $x$  e  $y$ . Para bajas concentraciones son válidas las siguientes ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = -k \cdot x \cdot y, \quad \frac{dy}{dt} = -k \cdot x \cdot y,$$

donde  $dx/dt$  y  $dy/dt$  designan a las tasas de va-

riación de las concentraciones (en términos matemáticos se trata de las derivadas de las concentraciones respecto al tiempo).

En general, un sistema dinámico bidimensional se representa por las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y),$$

donde  $F(x, y)$  y  $G(x, y)$  son dos funciones conocidas de las variables de estado.

Para este tipo de sistemas, una trayectoria se puede representar como una curva en el plano de coordenadas  $(x, y)$ . Por cada punto de este plano pasa una única trayectoria. Esto es así porque al ser el sistema determinista, el estado actual determina en forma unívoca la historia futura del sistema. Si en un punto del espacio de los estados se cruzaran dos trayectorias, el estado que corresponde a ese punto de cruce tendría dos historias futuras posibles. El plano de coordenadas  $(x, y)$  puede cubrirse totalmente con curvas de trayectoria que no se cortan entre sí.

En la figura 6 se representa un diagrama de trayectorias, que ilustra esquemáticamente los tipos posibles de evolución. Un estado que en un momento dado se corresponde con un punto de una curva, evoluciona desplazándose sobre esa misma curva siguiendo la dirección que indican las flechas.

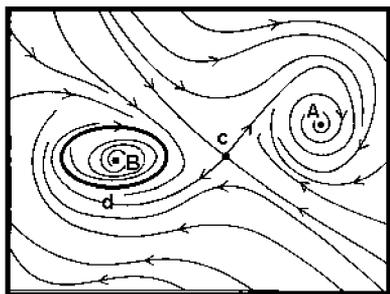


Figura 6: Diagrama de trayectorias que ilustra tipos posibles de evolución.

Notemos que si el sistema está en un estado próximo al representado por el punto A, evoluciona de modo tal que un tiempo después alcanza el estado A. El punto A es en sí mismo una trayectoria: si el sistema está en A se queda en ese estado para siempre. Este estado es

además estable: si alguna pequeña perturbación externa al sistema desplaza el estado hacia un punto próximo, cuando esta perturbación cesa el sistema vuelve hacia A. Un punto con estas características se denomina *sumidero*. Hay una región formada por estados que evolucionan de manera de terminar, al cabo de un cierto tiempo, en el estado final A. A esta región se la llama *dominio de atracción* de A, y el propio punto A se denomina *atractor*.

El estado representado por el punto B es también un estado de equilibrio del sistema, ya que si se encuentra allí en un instante dado, permanece allí para siempre. Sin embargo este estado es inestable: si alguna pequeña perturbación saca al sistema de este estado, el sistema entra en alguna de las trayectorias que pasan cerca de B y se alejará de este estado. Un punto con estas características se denomina *fuerza*.

Un punto tal como el C resulta estable en algunas direcciones e inestable en otras. Se lo denomina *punto de ensilladura*.

La trayectoria determinada por la curva d tiene la particularidad de que si el sistema se encuentra inicialmente en un estado sobre esta curva, el sistema en su evolución volverá infinitas veces al estado inicial, y las variables del sistema oscilarán en forma periódica. Esta evolución periódica es además estable: si una pequeña perturbación externa desplaza el sistema hacia un estado próximo a la curva d, cuando desaparece la perturbación el sistema volverá a la curva d. Una trayectoria como la de la curva d se denomina *ciclo límite*. Hay una región formada por estados que evolucionan de manera de terminar, al cabo de un cierto tiempo, orbitando en el ciclo límite d. Esta región se la llama *dominio de atracción* de d, y el ciclo límite es un atractor para los estados de ese dominio.

Los sistemas bidimensionales con tiempo continuo no presentan caos determinista. Si dos estados muy próximos evolucionaran en el corto plazo en dos estados muy diferentes, algunas de las trayectorias que cubren el plano en que se representan los estados deberían cortarse, lo que no es posible si el sistema es determinista. La sensibilidad a las condiciones iniciales puede aparecer sólo en sistemas que se modelizan con tres o más variables de estado.

### Dimensión del atractor. Su medición

Supongamos que el estado de un sistema se pueda representar por tres variables dinámicas. El espacio de los estados es en este caso un volumen tridimensional con coordenadas  $(x, y, z)$ . La historia de este sistema estará representada por los sucesivos valores de estas tres variables, es decir por las tres funciones

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Supongamos que, una vez que el sistema estabiliza su evolución sobre un atractor, se determinan experimentalmente los valores que toman las tres variables en tiempos sucesivos  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ , etc.. Se dispondrá entonces de una secuencia de ternas de números de la forma

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \dots, \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \dots$$

Es posible obtener información sobre el atractor a partir de estos datos experimentales. Por ejemplo, es evidente que si el atractor es un estado único (tal como el que representamos con el punto  $A$  en el caso bidimensional), nos daremos cuenta inmediatamente porque a partir de cierto valor del tiempo todas las ternas sucesivas tendrán los mismos valores numéricos.

Si el atractor es más complicado resultará difícil obtener información sobre el mismo por simple inspección de la secuencia de ternas numéricas. Una técnica que se utiliza para determinar la dimensión del atractor es considerar un punto de la trayectoria determinada experimentalmente, trazar una esfera de radio  $r$  con centro en ese punto y contar el número de ternas que quedan encerradas en la esfera. Este número será una función creciente  $N(r)$  del radio  $r$  elegido. Analizando esta función  $N(r)$  se puede obtener información valiosa sobre las características del atractor. Por ejemplo, si el atractor es una curva,  $N(r)$  crece en forma directamente proporcional a  $r$  (ver figura 7). Si el atractor es una superficie, las ternas dentro de la esfera se ubican sobre un círculo deformado que contiene al centro de la esfera,

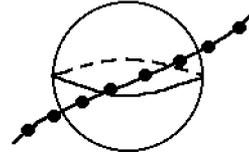


Figura 7: Cuando el atractor es una curva, el número de ternas dentro de la esfera crece en forma directamente proporcional a  $r$ .

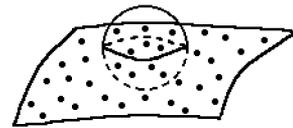


Figura 8: Cuando el atractor es una superficie, las ternas dentro de la esfera se ubican sobre un círculo deformado.

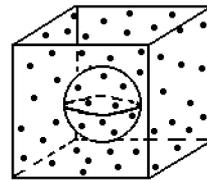


Figura 9: Si las ternas se distribuyen volumétricamente, su número será proporcional al volumen de la esfera.

y entonces  $N(r)$  crece en forma proporcional a  $r^2$  (ver figura 8). Si las ternas se distribuyen volumétricamente, el número de ternas dentro de la esfera de radio  $r$  será proporcional al volumen de la esfera ( $4\pi r^3/3$ ), y entonces  $N(r)$  resulta proporcional a  $r^3$  (ver figura 9).

En resumen, si  $N(r)$  es proporcional a  $r^1$  la trayectoria del sistema cubre una curva del espacio de los estados, si es proporcional a  $r^2$  la trayectoria cubre una superficie, y si es proporcional a  $r^3$  cubre un volumen. El exponente de  $r$  indica entonces la dimensión del lugar geométrico en que evoluciona el sistema.

Hasta aquí hemos considerado un sistema que hipotéticamente depende de tres variables de estado, y hemos descrito un método que permite conocer la dimensión del atractor, aún sin conocer cual es la ley que gobierna el siste-

ma. Este método se puede generalizar para determinar la dimensión del atractor aún cuando ni siquiera se conozca cuantas variables de estado son necesarias para caracterizarlo (Bergé, 1984). Para ello sólo es necesario determinar experimentalmente los valores de una variable en intervalos regulares de tiempo. Supongamos, para concretar, que en un estudio meteorológico se registra la temperatura media mes a mes, obteniéndose la siguiente secuencia de temperaturas

17,3; 14,2; 16,7; 12,4; 18,3; 15,6; 11,1; 12,5; ...

Estos números se pueden representar sobre una recta. Si buscamos cuantas temperaturas de la secuencia están a una distancia menor que  $r$  de un punto de la recta, encontraremos un número que crece en forma proporcional a  $r$  si las temperaturas se distribuyen uniformemente sobre una porción de la recta. Con la secuencia de temperaturas también podemos construir una secuencia de duplas de números de la siguiente forma:

$$\left( \begin{array}{c} 17,3 \\ 14,2 \end{array} \right); \left( \begin{array}{c} 14,2 \\ 16,7 \end{array} \right); \left( \begin{array}{c} 16,7 \\ 12,4 \end{array} \right); \left( \begin{array}{c} 12,4 \\ 18,3 \end{array} \right); \left( \begin{array}{c} 18,3 \\ 15,6 \end{array} \right); \left( \begin{array}{c} 15,6 \\ 11,1 \end{array} \right); \left( \begin{array}{c} 11,1 \\ 12,5 \end{array} \right); \dots$$

En la primera columna se representa la temperatura del primer mes y la temperatura del segundo, en la segunda columna se representan las temperaturas del segundo y del tercer mes, y así sucesivamente. Estas duplas pueden representarse como las coordenadas de puntos en un plano. Si se traza un círculo de radio  $r$  en este plano y se cuenta el número de duplas  $N(r)$  que quedan incluidas dentro del círculo, este número será proporcional a  $r^2$  si las duplas cubren uniformemente una porción del plano.

El proceso puede repetirse formando ahora ternas de la forma

$$\left( \begin{array}{c} 17,3 \\ 14,2 \\ 16,7 \end{array} \right); \left( \begin{array}{c} 14,2 \\ 16,7 \\ 12,4 \end{array} \right); \left( \begin{array}{c} 16,7 \\ 12,4 \\ 18,3 \end{array} \right); \left( \begin{array}{c} 12,4 \\ 18,3 \\ 15,6 \end{array} \right); \left( \begin{array}{c} 18,3 \\ 15,6 \\ 11,1 \end{array} \right); \left( \begin{array}{c} 15,6 \\ 11,1 \\ 12,5 \end{array} \right); \dots$$

Pueden representarse estas ternas como puntos en un espacio de tres dimensiones, y se puede investigar cuantas ternas  $N(r)$  quedan

incluidas dentro de una esfera de radio  $r$ . Si  $N(r)$  resulta proporcional a  $r^3$ , se deberá seguir investigando que sucede en una dimensión mayor, pero si sucediera que  $N(r)$  es proporcional a  $r^2$ , como en el caso de las duplas, esto indica que la evolución temporal se realiza sobre un atractor de dimensión dos, es decir que puede ser descrito por la evolución en el tiempo de dos variables de estado. En este caso, si construyéramos con este procedimiento secuencias de columnas de tamaño  $n$ , y las representáramos como puntos en un espacio con  $n$  coordenadas, podríamos verificar que el número de puntos  $N(r)$  interiores a una hipersfera de radio  $r$  es proporcional a  $r^2$ , para todo  $n$  mayor que dos.

Si a partir del registro experimental de una complicada secuencia temporal (como las temperaturas mencionadas más arriba, o las cotizaciones de bolsa de una acción), encontramos regularidades de este tipo, tendremos fuertes razones para creer que el sistema en estudio no evoluciona aleatoriamente, sino que está regido por alguna ley determinista. En cierta forma, se puede deducir de los datos empíricos si el sistema es determinista, y cual es la dimensión del espacio de los estados que lo representa.

El método también puede poner en evidencia la complejidad de la trayectoria seguida por el sistema. Hasta ahora sólo mencionamos puntos, curvas, superficies o volúmenes, según que  $N(r)$  sea proporcional a  $r^0$ ,  $r^1$ ,  $r^2$  ó  $r^3$ . Existen sistemas dinámicos para los cuales las cosas son más complicadas. Por ejemplo, el registro de los intervalos de tiempo irregulares entre gota y gota de una canilla, procesado con el método que se explicó más arriba, indica que en ciertas condiciones la dimensión del atractor es un número mayor que dos y menor que tres: ¡la trayectoria del sistema genera un complicado lugar geométrico de dimensión mayor al de una superficie pero menor que la de un volumen! Estos objetos geométricos sobre los que se concentra la trayectoria se conocen con el nombre de *atractores extraños*.

Destaquemos que los sistemas dinámicos con dimensión mayor que dos pueden presentar caos determinista. Como ya dijimos esto es imposible en dimensión dos, porque si trayec-

torias que comienzan muy próximas se separan entre sí muy rápidamente, deberán existir trayectorias que se cortan, lo que no es compatible con la propiedad de los sistemas deterministas de que por cada punto del espacio de los estados debe pasar una única trayectoria. Si la dimensión del espacio de estados es mayor que dos, puede haber trayectorias que se separan una de otra sin necesidad de cortarse entre sí.

### Modelos estocásticos

Consideremos ahora los denominados *modelos estocásticos*, donde también el estado del sistema es representado por un punto de cierto espacio (esto parece ineludible si se quiere hacer modelos matemáticos), pero en vez de tener una ley que permita determinar unívocamente el estado futuro del sistema, sólo es posible hacer predicciones probabilísticas acerca de su evolución futura. Así por ejemplo si consideramos una secuencia de tiradas sucesivas de una moneda, el “espacio de los estados” de la moneda tiene sólo dos puntos: cara o cruz. Si el estado actual es cara, y se arroja nuevamente la moneda, el estado siguiente no está unívocamente determinado: puede ser cara o cruz con igual probabilidad.

Tenemos entonces dos tipos de modelos posibles: deterministas o estocásticos. En el primero, el futuro del sistema está unívocamente determinado por la ley de evolución y el estado inicial. En el segundo, sólo se pueden determinar probabilidades. Notemos que esta diferenciación no es tan terminante a la hora de hacer predicciones usando estas dos clases de modelos: ya vimos que hay modelos deterministas incapaces de ser predictivos, y también veremos que hay modelos estocásticos que pueden conducir a una predicción muy precisa de la evolución futura de alguna de sus variables.

Consideremos, en general, un estado  $E$  que pertenece a un conjunto  $\Omega$  de estados posibles del sistema en estudio ( $E \in \Omega$ ). Vamos a considerar tiempos discretos, y designaremos con  $P_t(E)$  la probabilidad de encontrar el sistema en el estado  $E$  al tiempo  $t$  (como consideramos tiempos discretos tendremos  $t=0,1,2,\dots$ ). De-

signemos con  $W_{E,E'}$  a la probabilidad de encontrar al sistema en el estado  $E$  en el tiempo si estaba en el estado  $E'$  en el instante de tiempo anterior  $t$ . Si sabemos que el sistema está exactamente en el estado  $E'$  para el tiempo  $t$ , resultará entonces  $P_{t+1}(E) = W_{E,E'}$ . Pero si sólo conocemos las probabilidades  $P_t(E')$  de encontrar al sistema en los distintos estados  $E'$  al tiempo  $t$ , la probabilidad  $P_{t+1}(E)$  debe incluir las contribuciones de todas las posibles transiciones desde los diferentes estados  $E'$ . Resulta entonces

$$P_{t+1}(E) = \sum_{E' \in \Omega} W_{E,E'} \cdot P_t(E') \quad (a)$$

donde  $\sum_{E' \in \Omega}$  indica que deben sumarse los factores  $W_{E,E'} \cdot P_t(E')$  para todos los valores posibles de  $E'$ .

No es posible determinar exactamente el estado del sistema para el tiempo  $t+1$ , pero si en un tiempo  $t$  se conocen las probabilidades de todos los estados (los  $P_t(E')$  para todos los  $E'$ ), y se conocen las probabilidades de transición  $W_{E,E'}$ , la ecuación anterior permite determinar las probabilidades de cualquier estado en un instante posterior (los  $P_{t+1}(E)$  para todos los  $E$ ). La ecuación anterior es una ley de evolución para las probabilidades y recibe el nombre de ecuación de Markov. Si se aplica reiteradamente, será posible en principio conocer las probabilidades a todo tiempo:  $P_t(E)$ ,  $P_{t+1}(E)$ ,  $P_{t+2}(E)$ ,  $P_{t+3}(E)$ ,...

Un ejemplo de proceso estocástico es el que se da cuando dos jugadores, que disponen de cantidades de dinero  $X$  e  $Y$ , respectivamente, juegan un peso a cara o cruz de una moneda. Después de la primera apuesta, los capitales de ambos jugadores serán  $X+1$  e  $Y-1$  si gana el primer jugador, ó  $X-1$  e  $Y+1$  si gana el segundo jugador. Ambas posibilidades son igualmente probables. Como las variables  $X$  e  $Y$  no son independientes (lo que gana uno es lo que pierde el otro) podemos concentrarnos en describir la evolución del capital del primer jugador. Si designamos con  $C$  al capital total involucrado ( $C=X+Y$ ), podemos escribir

$$W_{X+1,X} = W_{X-1,X} = \frac{1}{2},$$

para cualquier  $X$  comprendido entre  $1$  y  $C-1$ . Los casos extremos necesitan un análisis especial. Si  $X$  es igual a cero, el primer jugador se ha quedado sin dinero y no puede jugar mas, y por lo tanto  $W_{0,0} = 1$ ,  $W_{1,0} = W_{-1,0} = 0$ . Si  $X=C$  es el segundo jugador el que se quedó sin dinero, y entonces  $W_{C,C} = 1$ ,  $W_{C-1,C} = W_{C+1,C} = 0$ .

Consideremos el caso particular en que el capital involucrado es de tres pesos ( $C=3$ ). En este caso, el capital  $X$  del primer jugador puede tomar, en el curso de las reiteradas apuestas, alguno de los valores comprendidos entre  $0$  y  $3$ . La ecuación (a) permite escribir

$$\begin{aligned}
 P_{t+1}(0) &= P_t + \frac{1}{2} \cdot P_t(1) & (b) \\
 P_{t+1}(1) &= \frac{1}{2} \cdot P_t(2) \\
 P_{t+1}(2) &= \frac{1}{2} \cdot P_t(3) \\
 P_{t+1}(3) &= P_t(3) + \frac{1}{2} \cdot P_t(2)
 \end{aligned}$$

Analicemos en una situación concreta como puede usarse esta ecuación. Supongamos que en un cierto tiempo  $t$ , el capital del primer jugador es  $X=1$ , y el del segundo jugador es  $Y=2$ . Tendremos entonces

$$P_t(0) = 0, \quad P_t(1) = 1, \quad P_t(2) = 0, \quad P_t(3) = 0.$$

Aplicando la ecuación (b) resulta

$$P_{t+1}(0) = \frac{1}{2}, \quad P_{t+1}(1) = 0, \quad P_{t+1}(2) = \frac{1}{2}, \quad P_{t+1}(3) = 0$$

Este resultado es fácil de entender. El primer jugador tiene al tiempo  $t$  un capital de un peso. Al jugarlo a cara o cruz, en el tiempo  $t+1$  tendrá igual probabilidad de perderlo todo ( $X=0$ ), o de ganar un peso ( $X=2$ ).

Si en la ecuación (b) reemplazamos  $t$  por  $t+1$ , podremos calcular las probabilidades al cabo de dos jugadas

$$\begin{aligned}
 P_{t+2}(0) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}, \\
 P_{t+2}(1) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \\
 P_{t+2}(2) &= \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \\
 P_{t+2}(3) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

En dos jugadas, el primer jugador que comenzó con un capital de un peso, tiene un 50% de posibilidades de haber perdido todo, un 25% de posibilidades de seguir teniendo un peso, y un 25% de posibilidades de tener un capital de tres pesos.

Veamos ahora un caso que puede modelarse en forma estocástica, y que se conoce en la literatura como "modelo de la urna de Ehrenfest" (Kac, 1959). Un cierto número  $N$  de bolillas numeradas se reparten en dos cajas. La figura 10 ilustra el caso en que hay siete bolillas ( $N=7$ ), con las bolillas  $1, 2, 3, 5$  y  $6$  en la caja de la izquierda, y las bolillas  $4$  y  $7$  en la caja de la derecha. Se repite muchas veces el siguiente proceso: se elige al azar un número entre  $1$  y  $N$ , se busca la bolilla con ese número, que estará en alguna de las dos cajas, y se la cambia de caja. En la Figura 11 se indica el movimiento que se produce al salir sorteado el número  $6$ . La figura 12 ilustra el siguiente movimiento cuando se obtiene el número  $7$ . Claramente se trata de un proceso estocástico: si se repitiera el experimento con la misma distribución inicial de bolillas, los números sorteados serían distintos y la evolución sería diferente.

Concentremos nuestra atención en la evolución de los números  $N_i$  y  $N_d$  de bolillas en la caja de la izquierda y de la derecha, respectivamente. Como surgen de un proceso esto-

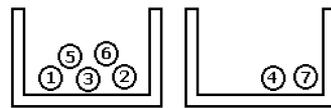


Figura 10: Modelo de la urna de Ehrenfest: un cierto número  $N$  de bolillas numeradas se reparten en dos cajas.

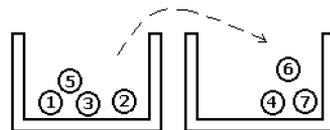


Figura 11: Movimiento de una bolilla sorteada al elegir al azar un número entre  $1$  y  $N$ .

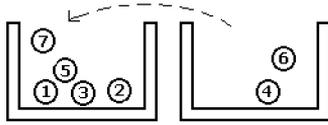


Figura 12: Movimiento de la bolilla correspondiente al salir sorteado el número 7.

cástico, no es posible predecir la historia futura de estas variables, pero puede usarse la ecuación de Markov (a) para construir la evolución de la distribución de probabilidades. Vamos a caracterizar el estado con el número  $N_i$  de bolillas en la caja de la izquierda. Entonces  $W_{N_i N_i'}$  designa la transición  $N_i \rightarrow N_i'$  en una iteración. Claramente, en una iteración del proceso, el número de bolillas en la caja de la izquierda sólo puede disminuir o aumentar en una unidad, según que salga sorteada una bolilla de la izquierda o una de la derecha. La probabilidad de que salga sorteada una bolilla de la izquierda es igual al cociente entre el número de bolillas a la izquierda y el número de bolillas total, mientras que la probabilidad de que salga sorteada una bolilla de la derecha es el cociente entre el número de bolillas a la derecha y el número de bolillas total.

Tendremos entonces

$$W_{N_i-1, N_i} = \frac{N_i}{N}, \quad W_{N_i+1, N_i} = \frac{N_d}{N} = \frac{N-N_i}{N} = 1 - \frac{N_i}{N}.$$

Sin usar la ecuación de Markov, podemos sospechar una tendencia: si en un determinado momento hay más bolillas en una de las cajas, habrá más probabilidades de que salga sorteada una bolilla de esa caja, y por lo tanto de que ese número tienda a disminuir. Habrá entonces una tendencia general a que el número de bolillas en ambas cajas sea el mismo ( $N_i = N_d = N/2$ ). Claramente, esta tendencia será más apreciable cuando el número  $N$  de bolillas es muy grande ( $N \gg 1$ ). En este caso podemos **predecir** que después de un número muy grande de repeticiones del proceso de transferencia de bolillas de una caja a otra, y en forma independiente de cual es la distribución inicial en las cajas, resultará  $N_i/N = N_d/N = 1/2$ . Nos encontramos aquí con un aspecto determinista de un proceso estocástico.

## Comentarios finales

En un modelo matemático, el estado de un sistema se representa con los  $n$  valores numéricos de ciertas variables características, que son las coordenadas de un punto en un espacio de los estados de  $n$  dimensiones. Si el modelo es determinista, hay una ley que determina unívocamente el estado futuro del sistema a partir de su estado inicial. Los sucesivos estados por los que pasa el sistema en su evolución, se representan por una sucesión de puntos que constituyen la trayectoria del sistema. Si bien esta trayectoria está unívocamente determinada matemáticamente, no siempre es posible predecirla. En los modelos que presentan caos determinista, dos estados iniciales muy parecidos evolucionan a corto plazo en estados muy diferentes. Para efectuar predicciones a largo plazo en esta clase de sistemas, se requeriría conocer los valores iniciales de las variables de estado con una precisión infinita. Más aún, el algoritmo de cálculo para encontrar los sucesivos valores de las variables no debiera tener ningún error. Los inevitables errores numéricos de redondeo en el proceso de cálculo harían que un estado “verdadero” fuera cambiado por otro estado ligeramente diferente, lo que llevaría a predicciones totalmente erróneas para el futuro próximo.

Estas peculiares características de los sistemas deterministas caóticos, han llevado a algunos autores a posiciones extremas que parecen sugerir un colapso del determinismo (Prigogine, 1996), y a algunas confusiones de interpretación (Bricmont, 1995).

Hoy se sabe que hay una limitación en la capacidad de hacer predicciones a largo plazo en muchos modelos deterministas, pero también se ha descubierto que muchos sistemas que presentan un comportamiento en apariencia errático, como si sufrieran el efecto de perturbaciones externas no controlables, son en realidad sistemas deterministas caóticos que dependen de un número reducido de variables de estado. Es llamativo como un método de análisis sobre la secuencia de datos empíricos de una sola variable, como el presentado en la sección 2, permite *determinar* experimentalmente si un sistema es determinista, y *medir* la

dimensión de su atractor, aún sin disponer de un modelo (Rueger, 1996 y Koperski, 1998).

A diferencia de los modelos deterministas, los modelos estocásticos no permiten determinar una trayectoria del sistema, sino solamente la evolución de las probabilidades de ocupar los distintos estados. Los sistemas estocásticos no tienen una trayectoria definida únicamente a partir de su estado inicial. Es interesante notar, como vimos en el ejemplo de la urna de Ehrenfest para un número muy grande de bolillas, que hay sistemas estocásticos que manifiestan un comportamiento “casi determinista” en algunas de sus variables.

Los argumentos expuestos en este trabajo

quizás le lleven al lector a preguntarse, más allá de nuestras modelizaciones, si la naturaleza “es” determinista o estocástica. No me atrevo a dar una respuesta a esta pregunta, que creo tiene más que ver con nuestra vocación por las respuestas excluyentes que con lo que la naturaleza “es”: queremos saber que nos va a pasar en el futuro, o que tenemos que hacer para que nos suceda lo que deseamos. Los ejemplos presentados en este trabajo muestran que ambos tipos de modelos pueden ser herramientas válidas para conocer la realidad, y lo que es más importante, para transformarla.

## Referencias

- Bergé, P; Pomeau, Y. y Vidal, C. (1984). *Order within chaos. Towards a deterministic approach to turbulen.* Paris: Hermann.
- Bricmont, J. (1995). Science of chaos or chaos in science?, *Physicalia Mag.*, 17, pp. 159-208.
- Kac, M. (1959). *Probability and Related Topics in Physical Sciences.* New York: Interscience.
- Kellert, S. (1993). *In the wake of chaos. Unpredictable order in dynamical systems.* Chicago: The University of Chicago Press.
- Koperski, J. (1998). Models, Confirmation, and Chaos. *Philosophy of Science*, 65, pp. 624-648.
- May, R. (1991). El caos en la biología. *Mundo Científico*, 115 (1), pp. 746.
- Prigogine, I. (1996). *La fin des certitudes.* Paris: Odile Jacob.
- Rueger, A. y Sharp, W. (1996). Simple Theories of a Messy World: Truth and Explanatory Power in Nonlinear Dynamics. *Brit. J. Phil. Sci.*, 47, pp. 93-112.