CAMPOS CONSERVATIVOS EN UN ÁLGEBRA CONMUTATIVA UNITARIA DE DIMENSIÓN REAL 3.

Elifalet López González[1], Sergio Terrazas Porras[2], Víctor M. Carrillo S.[3]

RESUMEN. Consideremos un álgebra $\mathbf{A}$ sobre el campo real, conmutativa unitaria de dimensión real 3. Damos una clase de funciones con dominio en $\mathbf{A}$ y valores en $\mathbf{A}$ para las cuales la integral de línea que no dependa del camino, sólo de los puntos finales, como el teorema integral de Cauchy de variable compleja.

INTRODUCCIÓN.

Un campo vectorial se le llama *conservativo* o campo *gradiente* si existen una función con valores reales, la cual es llamada potencial, cuyo gradiente es ese campo vectorial. La integral de línea de un campo conservativo a lo largo de cualquier camino en una región depende solamente de los puntos finales del camino, ya que esta integral de línea se calcula evaluando la función potencial correspondiente en los puntos inicial y final del camino. Por esto se dice que la integral es independiente de los caminos. En física, cuando un campo de fuerzas es conservativo en una región, se tiene que el trabajo realizado para mover un cuerpo de un punto a otro no depende del camino en la región. Las superficies de nivel de la función potencial se llaman superficies equipotenciales; el trabajo necesario para mover un cuerpo entre dos puntos en una misma superficie equipotencial es cero (Mariden y Tromba, 1998).

El teorema de la integral de Cauchy en análisis complejo es un resultado muy importante acerca de las integrales de línea para funciones holomorfas en el plano complejo. Esencialmente, dice que si dos diferentes caminos en una región conectan los mismos dos puntos, y una función es holomorfa en la región, entonces las dos integrales de línea de la función van a ser la misma. La única hipótesis necesaria para que la integral de línea solo dependa de los puntos finales del camino es que la derivada compleja exista en la región. Esto implica la fórmula integral de Cauchy, y se deduce que estas funciones son infinitamente diferenciables (Ahlfors, 1979).

En este trabajo consideramos un álgebra conmutativa unitaria $\mathbf{A}$ sobre el campo $\mathbf{R}$ de dimensión 3 para la cual se tiene, que para cada función $f : U \subset \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ que es N-derivable (concepto que se dará más adelante) en un conjunto abierto simplemente conexo U, su integral de línea

$$\int_{\gamma} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

---

[1] IIT. UACJ. elgonzal@uacj.mx
[2] IIT. UACJ. sterraza@uacj.mx
[3] IIT. UACJ. vcarrill@uacj.mx

es independiente del camino, esto es, solo depende sobre $g(b)$ y $g(a)$, donde $f(g(t))g'(t)$ denota el producto de $f(g(t))$ y $g'(t)$ en el álgebra **A** y $g:[a,b]\to \mathbf{A}$ es un camino rectificable (tiene longitud finita).

1. ÁLGEBRAS CONMUTATIVAS UNITARIAS.

A lo largo de este trabajo **A** denotará un **álgebra conmutativa unitaria** sobre $\mathbf{R}$, esto es, **A** será un espacio lineal sobre $\mathbf{R}$ con una multiplicación bilineal conmutativa $(\times):\mathbf{A}\times\mathbf{A}\to\mathbf{A}$ (donde la imagen de (x,y) se escribe como xy) tal que la ley asociativa se cumple: $x(yz)=(xy)z$, y existe un elemento $e\in\mathbf{A}$ llamado *elemento unidad* con la propiedad $xe=x=ex$, para todo $x,y,z\in\mathbf{A}$.

Un elemento $a\in\mathbf{A}$ se le llama *regular* si existe un único elemento $a^{-1}\in\mathbf{A}$ llamado *inverso* de a tal que $aa^{-1}=a^{-1}a=e$. En este trabajo $G(\mathbf{A})$ denotará al grupo de los elementos regulares en **A**. Si $y\in G(\mathbf{A})$ el *cociente* x/y significará xy^{-1}.

Ejemplo 1.1. Sea **A** el espacio $\mathbf{R}^3$ con el producto entre los elementos de la base canónica $b=\{e_1,e_2,e_3\}$ dado en la siguiente tabla

producto	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	$-2e_1+2e_2+e_3$	$-e_1+e_2+e_3$
e_3	e_3	$-e_1+e_2+e_3$	$-e_1+2e_3$

y que se extiende al producto en $\mathbf{R}^3$ dado por

$$\begin{aligned}(x,y,z)(u,v,w) &= (xe_1,ye_2,ze_3)(ue_1,ve_2,we_3)\\ &= xue_1e_1+xve_1e_2+xwe_1e_3+yue_1e_2+yve_2e_2\\ &\quad +ywe_2e_3+zue_1e_3+zve_2e_3+xwe_3e_3\\ &= (xu-2yv-yw-zv-zw)e_1+(xv-yu-zyv-yw+zv)e_2\\ &\quad +(zw+zu+yv+yw+zv+zw)e_3\end{aligned}$$

con el cual **A** es un álgebra conmutativa unitaria. Los elementos e_1,e_2,e_3 son regulares y sus inversos están dados por

$$e_1^{-1}=e_1$$
$$e_2^{-1}=e_2$$
$$e_3^{-1}=e_3.$$

En $\mathbf{R}^3$, como también se cumple en el caso general $\mathbf{R}^n$, todas las normas son equivalentes (Mariden y Hoffman, 1998), por lo tanto, para propósitos de convergencia podemos suponer que tenemos en **A** alguna norma, por ejemplo la norma Euclidiana dada por

$$\|(x,y,z)\| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2},$$

y que en términos del producto punto de $\mathbf{R}^3$ se ve de la siguiente manera

$$\|(x,y,z)\| = ((x,y,z)\cdot(x,y,z))^{1/2}.$$

2. Derivada Newtoniana Generalizada.

Sea $\mathbf{A}$ el álgebra del ejemplo 1.1 y $F : U \to \mathbf{A}$ una función definida en un subconjunto abierto $U \subset \mathbf{A}$. Si x_0 es un punto en $\mathbf{A}$ para el cual el límite

$$(1) \qquad \underset{h\to 0, h\in G(\mathbf{A})}{Lim} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$$

para todo $h \in G(\mathbf{A})$ existe, diremos que f es **N-derivable en** x_0, y lo llamaremos **derivada Newtoniana** de F en x_0. Denotaremos a este por $F_N'(x_0)$, esto es,

$$F_N'(x_0) = \underset{h\to 0, h\in G(\mathbf{A})}{Lim} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}.$$

Nos vamos a referir a este concepto como la **derivada Newtoniana**. Los límites dados en esta definición están asociados a alguna norma sobre $\mathbf{A}$, por ejemplo la norma Euclidiana de $\mathbf{R}^3$.

Las funciones polinomiales con coeficientes en $\mathbf{A}$ son ejemplos de funciones con dominio en $\mathbf{A}$ y valores en $\mathbf{A}$ las cuales son N-derivables. Se puede dar una norma sobre $\mathbf{A}$ con la cual se puede ver que las funciones racionales, trigonométricas y exponenciales son derivables y satisfacen las fórmulas usuales de diferenciación.

3. Las Ecuaciones de Cauchy-Riemann para la Derivada Newtoniana.

Sean $\mathbf{A}$ el álgebra del ejemplo 1.1, $F : U \to \mathbf{A}$ una función definida en un subconjunto abierto $U \subset \mathbf{A}$ y $b = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbf{A}$. Cada función $F : U \to \mathbf{A}$ puede ser escrita como $F = (F_1, F_2, F_3)$ donde $F_k : U \to \mathbb{R}$ es la componente de la función asociada con la base b para $k = 1,2,3$, por eso $F(x) = \sum_{k=1}^{3} F_{k(x)} e_k$. De las correspondientes definiciones, si F es N-derivable en un conjunto abierto U, entonces la derivada de Gâteaux $dF(x_0, v)$ de F en x_0 en la dirección v va a existir para cada $v \in G(\mathbf{A})$ y $dF(x_0, v) = F_x(x_0)v$, entonces, para $v, w \in G(\mathbf{A})$ tendremos $dF(x_0, v)v^{-1} = dF(x_0, w)w^{-1}$ esto es, $dF(x_0, v)w = dF(x_0, w)v$ por lo tanto, calculando la N-derivada en las direcciones e_i y e_j tenemos

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial F_k}{\partial x_i} e_k e_i^{-1} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial x_j} e_k e_j^{-1}$$

para $i, j = 1,2,...,n$, donde $\frac{\partial F_k}{\partial x_i}$ por que $k, i = 1,2,...,n$ son las derivadas parciales.

Entonces como e_i es regular tenemos que $\{e_1e_i^{-1}, e_2e_i^{-1}, e_3e_i^{-1}\}$ es una base de $\mathbf{A}$ para cada $i \in \{1,2,3\}$. Vamos a llamar al conjunto de todas las ecuaciones diferenciales parciales obtenidas por las identidades (2) **ecuaciones de Cauchy-Riemann** para F, (las ecuaciones de Cauchy-Riemann clásicas se pueden ver en Ahlfor, op.cit.).

Ejemplo 3.1 Consideremos a $\mathbf{R}^3$ como el álgebra dada en el ejemplo 1.1. Sea $F : A \to \mathbb{R}^3$ un campo N-derivable, donde $A \subset \mathbb{R}^3$ es un subconjunto abierto. Entonces $F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$, donde $F_1, F_2, F_3 : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. De (2) obtenemos la igualdad para cualquier función $F : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ N-derivable

$$\frac{\partial F}{\partial x} e_1^{-1} = \frac{\partial F}{\partial y} e_2^{-1} = \frac{\partial F}{\partial z} e_3^{-1}$$

en las funciones componentes de F asociadas a la base canónica se tienen las igualdades

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial x} e_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x} e_2e_1^{-1} + \frac{\partial F_3}{\partial x} e_3e_1^{-1} &= \frac{\partial F_1}{\partial y} e_1e_2^{-1} + \frac{\partial F_2}{\partial y} e_2e_2^{-1} + \frac{\partial F_3}{\partial y} e_3e_2^{-1} \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial z} e_1e_3^{-1} + \frac{\partial F_2}{\partial z} e_2e_3^{-1} + \frac{\partial F_3}{\partial z} e_3e_3^{-1}\end{aligned}$$

De donde se obtienen las ecuaciones de Cauchy-Riemann para F.

(3) $$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2\frac{\partial F_1}{\partial z} + \frac{\partial F_2}{\partial z} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

(4) $$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial z}$$

(5) $$\frac{\partial F_3}{\partial x} = -\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_2}{\partial z}$$

(6) $$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_2}{\partial z}$$

(7) $$\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial z} + 2\frac{\partial F_2}{\partial z} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

(8) $$\frac{\partial F_3}{\partial y} = -\frac{\partial F_1}{\partial z}.$$

4. CAMPOS CONSERVATIVOS.

Se dice que un campo $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido en una región Ω (región es un abierto y simplemente conexo) es **conservativo** existe una función diferenciable, llamada **potencial**, $P : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cuyo gradiente *grad* $P = \left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}\right)$ coincide con el campo F, i.e., *F= grad P.*

Consideramos a $\mathbb{R}^3$ como un álgebra con el producto dado en el ejemplo 1.1. Si $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ es un camino en una región Ω en $\mathbb{R}^3$ y $F:\Omega\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ es un campo N-derivable en Ω, entonces $F(x,y,z)=F_1(x,y,z)e_1+F_2(x,y,z)e_2+F_3(x,y,z)e_3$ donde $F_1,F_2,F_3:\Omega\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ son las funciones componentes. Del producto dado en el ejemplo 1.1 tenemos

$$\begin{aligned}F\gamma'(t) &= \left(F_1\gamma_1' - 2F_2\gamma_2' - F_3\gamma_2' - F_3\gamma_3'\right)e_1\\ &+ \left(F_1\gamma_1' + F_1\gamma_2' + 2F_2\gamma_2' + F_3\gamma_2' + F_2\gamma_3'\right)e_2\\ &+ \left(F_3\gamma_1' + F_2\gamma_2' + F_3\gamma_2' + F_1\gamma_3' + F_2\gamma_3' + 2F_3\gamma_3'\right)e_3.\end{aligned}$$

Usando el producto punto de $\mathbb{R}^3$ podemos hacer la siguiente factorización para el producto $F\gamma'(t)$

$$F\gamma'(t) = \left(H_1\cdot\gamma'(t)\right)e_1 + \left(H_2\cdot\gamma'(t)\right)e_2 + \left(H_3\cdot\gamma'(t)\right)e_3, \tag{9}$$

en donde, $H_1,H_2,H_3:U\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ son campos dados por

$$\begin{aligned}H_1 &= \left(F_1, -2F_2 - F_3, -F_2 - F_3\right)\\ H_2 &= \left(F_2, F_1 + 2F_2 + F_3, F_2\right)\\ H_3 &= \left(F_3, F_2 + F_3, F_1 + F_2 + 2F_3\right).\end{aligned}$$

Veremos que los campos H_1,H_2,H_3 son conservativos, esto es, sus rotaciones son las funciones cero

$$\nabla\times H_1 = \nabla\times H_2 = \nabla\times H_3 = 0.$$

Por lo que las integrales

$$\int_\gamma H_1\cdot d\gamma, \int_\gamma H_2\cdot d\gamma, \int_\gamma H_3\cdot d\gamma$$

no dependen del camino (Mariden y Tromba, op.cit.), donde $\cdot$ denota el producto punto de $\mathbb{R}^3$.

Proposición 4.1. *Si* $F=(F_1,F_2,F_3):\Omega\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *es una función N-derivable, entonces el campo*

$$H_1 = \left(F_1, -2F_2 - F_3, -F_2 - F_3\right)$$

es conservativo.

Prueba. Tenemos que $H_1 = \left(F_1, -2F_2 - F_3, -F_2 - F_3\right)$, entonces

$$\nabla\times H_1 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ H_{11} & H_{12} & H_{13}\end{vmatrix}$$

Donde $H_{11}=F_1, H_{12}=-2F_2-F_3, H_{13}=-F_2-F_3$, luego

$$\nabla\times H_1 = \left(\frac{\partial H_{13}}{\partial y} - \frac{\partial H_{12}}{\partial z}\right)e_1 + \left(\frac{\partial H_{11}}{\partial z} - \frac{\partial H_{13}}{\partial x}\right)e_2 + \left(\frac{\partial H_{12}}{\partial x} - \frac{\partial H_{11}}{\partial y}\right)e_3.$$

Utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann dadas en el ejemplo (3.1) probaremos lo siguiente

(10) $$\frac{\partial H_{13}}{\partial y} = \frac{\partial H_{12}}{\partial z}$$

(11) $$\frac{\partial H_{11}}{\partial z} = \frac{\partial H_{13}}{\partial x}$$

(12) $$\frac{\partial H_{12}}{\partial x} = \frac{\partial H_{11}}{\partial y}.$$

Utilizamos las ecuaciones (7), (8) de Cauchy-Riemann para obtener

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_{13}}{\partial y} &= -\frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_3}{\partial y}\\ &= -\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} + 2\frac{\partial F_2}{\partial z} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) - \left(-\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\\ &= -2\frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{\partial H_{12}}{\partial z},\end{aligned}$$

de esta manera probamos la igualdad (10).

Usando las ecuaciones (5), (6) de Cauchy-Riemann obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_{13}}{\partial x} &= -\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\\ &= -\frac{\partial F_2}{\partial z} - \left(-\frac{\partial F_1}{\partial z} - 2\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\\ &= \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial H_{11}}{\partial z},\end{aligned}$$

de esta manera obtenemos la ecuación (11).

Por último, de las ecuaciones (4), (5) y (6) de Cauchy-Riemann obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_{12}}{\partial x} &= -2\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\\ &= -2\frac{\partial F_2}{\partial x} - \left(-\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) = \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\\ &= \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial H_{11}}{\partial y},\end{aligned}$$

de esta manera probamos la igualdad (12). $\square$

Proposición 4.2. *Si* $F = (F_1, F_2, F_3): \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *es una función N-derivable, entonces el campo*

$$H_2 = (F_2, F_1 + 2F_2 + F_3, F_2)$$

es conservativo.

Prueba. Como $H_2 = (F_2, F_1 + 2F_2 + F_3, F_2)$ tenemos que $H_{21} = F_2, H_{22} = F_1 + 2F_2 + F_3, H_{23} = F_2$. Luego

$$\nabla \times H_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \end{vmatrix}$$
$$= \left(\frac{\partial H_{23}}{\partial y} - \frac{\partial H_{22}}{\partial z}\right)e_1 + \left(\frac{\partial H_{21}}{\partial z} - \frac{\partial H_{23}}{\partial x}\right)e_2 + \left(\frac{\partial H_{22}}{\partial x} - \frac{\partial H_{21}}{\partial y}\right)e_3.$$

Por lo tanto tenemos que verificar, utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann dadas en el ejemplo (3.1) , lo siguiente

(13) $$\frac{\partial H_{23}}{\partial y} = \frac{\partial H_{22}}{\partial z}$$

(14) $$\frac{\partial H_{21}}{\partial z} = \frac{\partial H_{23}}{\partial x}$$

(15) $$\frac{\partial H_{22}}{\partial x} = \frac{\partial H_{21}}{\partial y}.$$

Utilizamos las ecuaciones (7) de Cauchy-Riemann para obtener
$$\frac{\partial H_{23}}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial z} + 2\frac{\partial F_2}{\partial z} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{\partial H_{22}}{\partial z},$$
de esta manera probamos la igualdad (13).

Usando las ecuaciones (4) de Cauchy-Riemann obtenemos
$$\frac{\partial H_{23}}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial H_{21}}{\partial z}$$
de esta manera obtenemos la ecuación (14).

Por último, de las ecuaciones (3), (4), (5) y (7) de Cauchy-Riemann obtenemos
$$\frac{\partial H_{22}}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + 2\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial x}$$
$$= \left(2\frac{\partial F_1}{\partial z} + \frac{\partial F_2}{\partial z} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) + 2\left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)$$
$$= \frac{\partial F_1}{\partial z} + 2\frac{\partial F_2}{\partial z} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial H_{21}}{\partial y},$$
de esta manera probamos la igualdad (15). □

Proposición 4.3. *Si* $F = (F_1, F_2, F_3): W \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *es una función N-derivable, entonces el campo*
$$H_3 = (F_3, F_2 + F_3, F_1 + F_2 + 2F_3).$$
es conservativo.

Prueba. El campo H_3 esta dado por $H_3 = (F_3, F_2 + F_3, F_1 + F_2 + 2F_3)$, entonces
$$H_{31} = F_3, H_{32} = F_2 + F_3, H_{33} = F_1 + F_2 + 2F_3.$$
Luego

$$\nabla \times H_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times H_3 = \left(\frac{\partial H_{33}}{\partial y} - \frac{\partial H_{32}}{\partial z}\right)e_1 + \left(\frac{\partial H_{31}}{\partial z} - \frac{\partial H_{33}}{\partial x}\right)e_2 + \left(\frac{\partial H_{32}}{\partial x} - \frac{\partial H_{31}}{\partial y}\right)e_3.$$

Por lo tanto tenemos que verificar, utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann dadas en el ejemplo (3.1) probaremos lo siguiente

(16) $$\frac{\partial H_{33}}{\partial y} = \frac{\partial H_{32}}{\partial z}$$

(17) $$\frac{\partial H_{31}}{\partial z} = \frac{\partial H_{33}}{\partial x}$$

(18) $$\frac{\partial H_{32}}{\partial x} = \frac{\partial H_{31}}{\partial y}.$$

Utilizamos las ecuaciones (6), (7) y (8) de Cauchy-Riemann para obtener

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{33}}{\partial y} &= \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + 2\frac{\partial F_3}{\partial y} \\ &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} + 2\frac{\partial F_2}{\partial z} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) + 2\left(-\frac{\partial F_1}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial F_2}{\partial z} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{\partial H_{32}}{\partial z}, \end{aligned}$$

de esta manera probamos la igualdad (16).

Usando las ecuaciones (3),(4) y (5) de Cauchy-Riemann obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{33}}{\partial x} &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial x} + 2\frac{\partial F_3}{\partial x} \\ &= \left(2\frac{\partial F_1}{\partial z} + \frac{\partial F_2}{\partial z} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + 2\left(-\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{\partial H_{31}}{\partial z}, \end{aligned}$$

de esta manera obtenemos la ecuación (17).

Por último, de las ecuaciones (4), (5) y (8) de Cauchy-Riemann obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{32}}{\partial x} &= \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ &= \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right) + \left(-\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) \\ &= -\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial H_{31}}{\partial y}, \end{aligned}$$

de esta manera probamos la igualdad (18). $\square$

En el caso complejo, si $f:\Omega\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ es una función holomorfa en la región Ω, entonces

$$\int_{\alpha} f(z)dz=\int_{\beta} f(z)dz$$

si α y β son dos caminos en Ω con los mismos puntos iniciales y finales, y f es holomorfa en todos los puntos contenidos entre α y β, (ver [1]). En el siguiente teorema obtendremos un resultado similar.

Teorema 4.1. *Sea* $\mathbf{A}$ *el álgebra de dimensión 3 dada en el ejemplo (1.1) y* $F:\Omega\subset\mathbf{A}\to\mathbf{A}$ *una función N-derivable en una región* Ω, *entonces*

$$\int_{\gamma} F(x)dx=\int_{\gamma} H_1(x)\cdot dx+\int_{\gamma} H_2(x)\cdot dx+\int_{\gamma} H_3(x)\cdot dx$$

donde $F(x)dx$ *es el producto en el álgebra* $\mathbf{A}$ y $H_i(x)\cdot dx$ representa el producto punto en $\mathbb{R}^3$ *para* i=1,2,3, y $H_1,H_2,H_3:\Omega\subset\mathbf{A}\to\mathbb{R}^3$ son campos conservativos.

Prueba. Utilizando la ecuación (9) tenemos que

$$\int_{\gamma} F(x)dx=\int_{\gamma} H_1(x)\cdot dx+\int_{\gamma} H_2(x)\cdot dx+\int_{\gamma} H_3(x)\cdot dx.$$

De las Proposiciones 4.1, 4.2 y 4.3 tenemos que los campos H_1,H_2,H_3 son conservativos. □

REFERENCIAS.

Ahlfors, Lars V.. 1979. *Complex Analysis*. USA: McGraw-Hill Internacional Book Company.

Mariden J., y M. Hoffman. 1998. *Análisis Clásico Elemental,* Mex.: Addison-Wesley.

Mariden J., y A.J. Tromba. 1998. *Cálculo Vectorial, Tromba.* Mex.: Addison-Wesley, Freeman and Co., (1996).