Alan McIntosh y la conjetura de Kato

por

Pedro J. Miana

Desde su publicación en 1961 hasta su demostración en 2002, la conjetura de Kato o de la raíz cuadrada ha sido el germen de diversas teorías matemáticas tanto en el análisis armónico como en el análisis funcional. Presentamos un recorrido de 40 años en el que el trabajo del matemático Alan McIntosh ha sido referencia fundamental durante los últimos 30 años.

Introducción

Tosio Kato (1917-1999) nació el 25 de agosto de 1917 en Kanuma (Japón), al norte de Tokio. Estudió física teórica en la Universidad Imperial de Tokio, obteniendo su licenciatura en 1941. Debido a la Segunda Guerra Mundial y a problemas de salud, no entró a formar parte de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Tokio como profesor asistente hasta 1951. En la década de los cincuenta, visitó Estados Unidos varias veces y decidió trasladarse allí definitivamente en 1962. Un año antes, en [15], había expuesto su conjetura. Fue profesor de matemáticas de la Universidad de California, Berkeley, donde dirigió 21 tesis doctorales.

Sus inquietudes matemáticas fueron diversas, llegando a firmar más de 150 artículos de investigación. Trabajó en ecuaciones de evolución no lineales, ecuaciones dispersivas, en las matemáticas de la mecánica cuántica y de fluidos. Su libro «*Perturbation Theory for Linear Operators*» ([17]) es una de las monografías más influyentes escritas en análisis funcional. Se pueden encontrar más detalles sobre las aportaciones de Kato en el artículo homenaje al mismo en la revista «Notices» de la American Mathematical Society ([9]).

En la primavera de 1990, el Instituto de Investigación de Ciencias Matemáticas en Berkeley (MSRI) organizó un gran conferencia en honor del Profesor Kato. A ella acudieron gran parte de sus estudiantes, amigos y colegas. Un año antes, recibía un homenaje similar en Tokio. La «Conferencia internacional en análisis funcional y sus aplicaciones» en honor del Profesor Tosio Kato tuvo lugar en Tokio entre el 3 y el 6 de Julio de 1989. Las actas de este congreso fueron publicadas por la editorial Springer-Verlag con el título «*Functional-analytic methods for partial differential equations*» en la colección Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1450. En este libro aparece el artículo «*The square root problem for elliptic operators, a survey*» del australiano Alan McIntosh, donde se recogen los logros más importantes desde que Kato planteó su conjetura, en 1961, y a los que el propio McIntosh había contribuido notablemente. Al final de la primera sección, McIntosh afirma:

«*I would also like to take this opportunity to acknowlegde my great debt to Tosio Kato for the profound influence which he has had on my mathematical development*».

Dr. Alan McIntosh

Dr. Tosio Kato

Alan McIntosh obtuvo su licenciatura en 1962 en la Universidad de Nueva Inglaterra, Armidale (Australia). En 1966, defendió su tesis doctoral en la Universidad de California, Berkeley, realizada bajo la dirección de Frantisek Wolf. En uno de sus primeros trabajos, McIntosh construye ciertos operadores sobre espacios de Hilbert para dar un contraejemplo a una cuestión de conmutadores ([19]). Estas técnicas también las aplica a formas bilineales acretivas y da otro contraejemplo a la conjetura planteada por Kato ([20]). Asimismo, replantea la conjetura restringiéndola a operadores diferenciales en $\mathbb{R}^n$.

Otros artículos que presentan el problema de Kato y su demostración a nivel de divulgación son [1] y [23].

NOTACIÓN. Sean $(X, \|\ \ \|)$ un espacio de Banach y $T : D(T) \to X$ un operador lineal y cerrado sobre X, donde $D(T)$ es el subespacio dominio de T contenido en X, véase la definición por ejemplo en [17], [25]. Un subconjunto $\mathcal{D} \subset D(T)$ se dice que es un *núcleo* de T (en inglés *core*), si para $f \in D(T)$ existe $(f_n) \subset \mathcal{D}$ tal que

$$\lim f_n = f \qquad \text{y} \qquad \lim T f_n = Tf.$$

El núcleo $\mathcal{D}$ de un operador $(T, D(T))$ es denso en $D(T)$ con la norma $\|\ \ \|_T$ donde

$$\|f\|_T := \|f\| + \|Tf\|, \qquad f \in D(T).$$

1 . LA CONJETURA DE KATO

Denotamos por $(H^1(\mathbb{R}^n), \|\ \ \|_{1,2})$ el espacio clásico de Sobolev de las funciones de $(L^2(\mathbb{R}^n), \|\ \ \|_2)$ cuyas derivadas parciales distribucionales vuelven a estar en $(L^2(\mathbb{R}^n), \|\ \ \|_2)$,

$$H^1(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) \ : \ \|u\|_{1,2} := \left(\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\},$$

donde $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$ y $\|\nabla u\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} \| \frac{\partial u}{\partial x_j} \|_2^2$.

Para $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ consideremos la forma sesquilineal J definida por

$$J(u,v) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j,k=1}^{n} a_{j,k} \frac{\partial u}{\partial x_k} \overline{\frac{\partial v}{\partial x_j}} + \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} v + \sum_{j=1}^{n} c_j \overline{\frac{\partial v}{\partial x_j}} + duv \right)(x)dx,$$

donde $a_{j,k}, b_k, c_j, d \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $1 \le j,k \le n$, y se verifica la condición de elipticidad,

$$\kappa |z|^2 \le \Re \sum_{j,k=1}^{n} a_{j,k}(x) z_k \overline{z_j}, \quad z = (z_j) \in \mathbb{C}^n, \tag{1}$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ y donde $\Re w$ es la parte real de $w \in \mathbb{C}$. Asociado a esta forma sesquilineal, se encuentra el operador $(L, D(L))$ con $D(L) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ dado por

$$L(u) = -\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{j,k} \frac{\partial u}{\partial x_k}) + \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} c_j + du, \quad u \in D(L), \tag{2}$$

tal que $J(u,v) = (L(u), v)_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ con $u \in D(L)$ y $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$. La condición de elipticidad de J permite definir la raíz cuadrada $(L^{\frac{1}{2}}, D(L^{\frac{1}{2}}))$ del operador L. La *conjetura de Kato* afirma que $D(L^{\frac{1}{2}}) = H^1(\mathbb{R}^n)$, para lo cual es suficiente con obtener la desigualdad

$$(K) \qquad \|\sqrt{L} f\|_2 \le C \|\nabla f\|_2, \qquad f \in C_c^{(\infty)}(\mathbb{R}^n).$$

Notar que $H^1(\mathbb{R}^n)$ es independiente del operador L e identificar el dominio de $L^{\frac{1}{2}}$ aporta información sobre el operador L, en particular sobre $D(L)$ $(L^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} = L)$. Como consecuencia de la conjetura de Kato, se obtendría la igualdad

$$J(u,v) = (L^{\frac{1}{2}}(u), (L^{\frac{1}{2}})^*(v))_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad u, v \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

Sin pérdida de generalidad en el problema, los sumandos diferenciales de grado menor o igual que 1 (de coeficientes b_k, c_j y d) se eliminan y las funciones $a_{j,k}$ se tomarán infinitamente derivables. Con estas simplificaciones, si denotamos por A una matriz $n \times n$ de funciones pertenecientes a $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, la acción del operador L se escribe simbólicamente como $Lf = -\mathrm{div}(A \nabla f)$, lo que se interpreta así,

$$J(u,v) = (A \nabla u, \nabla v)_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad u \in D(L), \ v \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

2 . LA CONJETURA ORIGINAL DE KATO

Sin embargo, la conjetura inicialmente planteada por Kato no se expresa en términos de operadores diferenciales, sino de unos operadores más generales: los operadores maximales acretivos, introducidos por él mismo. Un operador *maximal acretivo* ([17]) $(A, D(A))$ en un espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle)$ es un operador lineal cerrado tal que

(a) $D(A)$ es denso en $\mathcal{H}$.

(b) $\Re\langle Au, u\rangle \geq 0$, para todo $u \in D(A)$.

(c) $A + \lambda$ es suprayectivo siempre que $\Re\lambda > 0$.

Con estas condiciones, se cumple que

$$(\lambda + A)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \qquad \|(\lambda + A)^{-1}u\| \leq \frac{\|u\|}{\Re\lambda}, \qquad u \in \mathcal{H},$$

siempre que $\Re\lambda > 0$, y $\sigma(-A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re\lambda \leq 0\}$, ([15], [17]). Las potencias fraccionarias $(A^\alpha, D(A^\alpha))$ con $0 < \alpha < 1$ están definidas y son operadores maximales acretivos. El operador adjunto $(A^*, D(A^*))$ es también un operador maximal acretivo en $\mathcal{H}$ tal que

$$((A^*)^\alpha, D((A^*)^\alpha)) = ((A^\alpha)^*, D((A^\alpha)^*)), \qquad 0 < \alpha < 1,$$

(todos estos resultados se pueden consultar en [15]). Kato probó directamente que

(a) $D(A^\alpha) = D((A^*)^\alpha)$ con $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

(b) $D(A^\alpha) \neq D((A^*)^\alpha)$ con $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$.

dejando el caso $\alpha = \frac{1}{2}$ abierto. Se tiene el siguiente resultado parcial.

TEOREMA 1 *[15, Theorem 5.1] Sea A un operador cerrado y maximal. Entonces $D(A^{\frac{1}{2}}) \cap D((A^*)^{\frac{1}{2}})$ es un núcleo de $A^{\frac{1}{2}}$ y $(A^*)^{\frac{1}{2}}$.*

En [15, Remark 1, p. 268], se plantea la llamada conjetura de Kato o de la raíz cuadrada:

«*We do not know whether or not $D(A^{\frac{1}{2}}) = D((A^*)^{\frac{1}{2}})$ in Theorem 5.1. This is perhaps not true in general. But the question is open even when A is regularly accretive*».

La segunda frase de esta nota hace sospechar que Kato conocía ya el trabajo de J.L. Lions publicado unos meses más tarde en la misma revista ([18]). En éste, Lions da un ejemplo de un operador maximal acretivo pero no regular acretivo, para mostrar que $D(A^{\frac{1}{2}}) \neq D((A^*)^{\frac{1}{2}})$. Para ello, Lions utiliza la teoría de interpolación y prueba

$$D(A^\alpha) = [\mathcal{H}, D(A)]_\alpha, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

donde $[X, Y]_\alpha$ denota el espacio interpolado de orden α entre X e Y (en este caso, los método reales y complejos de interpolación coinciden, véanse definiciones y resultados sobre espacios de interpolación en [6]).

Los operadores *regulares acretivos* $(A, D(A))$ son aquellos que vienen definidos por una forma sesquilineal regular, $J : D_J \times D_J \to \mathbb{C}$ con $D(A) \subset D_J$ y

$$J(u, v) = \langle Au, v\rangle, \qquad u \in D(A),\ v \in D_J,$$

ver más detalles en [15] y [16]. Ejemplos de operadores regulares acretivos son los operadores diferenciales considerados en la primera sección. Para los operadores regulares acretivos, la conjetura de Kato se reduce a probar uno de los cuatro contenidos de estas dos igualdades:

$$D(A^{\frac{1}{2}}) = D_J, \qquad D((A^*)^{\frac{1}{2}}) = D_J.$$

([16, Theorem 1]). Casi diez años más tarde McIntosh construía dos operadores autoadjuntos A y B en un espacio de Hilbert cuyo conmutador $AB - BA$ es un operador acotado y sin embargo el operador $|A|B - B|A|$ no lo es ([19]). Para ello utilizaba una técnica ingeniosa que un año más tarde volvía a aplicar en la construcción de un operador regular acretivo $(A, D(A))$ sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que $D(A^{\frac{1}{2}}) \neq D((A^*)^{\frac{1}{2}})$ ([20]). Sin embargo, este ejemplo no era un operador diferencial y fue el propio McIntosh quien reformuló la conjetura de Kato en términos de operadores diferenciales como se ha presentado en la primera sección.

3. La transformada de Cauchy y la conjetura de Kato unidimensional

Uno de los resultados más relevantes en los años sesenta en el campo del análisis armónico es el teorema del conmutador de A. P. Calderón ([7]), a saber,

$$\|\frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{(x-y)^2} f(y)dy\|_2 \le const.\|\varphi'\|_\infty \|f\|_2, \tag{3}$$

para toda función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lipschitziana, $f \in L^2(\mathbb{R})$, y donde v.p. denota la integral singular valor principal. En 1982, R. Coifman, A. McIntosh e Y. Meyer probaron que

$$\|\frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\varphi(x) - \varphi(y))^n}{(x-y)^{n+1}} f(y)dy\|_2 \le const.(1+n)^4 \|\varphi'\|_\infty \|f\|_2, \quad f \in L^2(\mathbb{R}),$$

para toda función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lipschitziana y $n \in \mathbb{N}$ ([8, Théorème II]). Este resultado implica la acotación de la integral de Cauchy sobre curvas lipschitzianas: si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función lipschitziana ($|\varphi(x)-\varphi(y)| \leq M|x-y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$) entonces

$$\|\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{C}_\varphi(x,y) f(y) dy\|_2 \leq const.(1+M)^9 \|f\|_2, \quad f \in L^2(\mathbb{R}), \tag{4}$$

donde $\mathcal{C}_\varphi(x,y) = \dfrac{1+i\varphi'(y)}{x-y+i(\varphi(x)-\varphi(y))}$ ([8, Théorème I]). Sobre estos resultados se puede consultar también [13], [27] y [24].

Una de las importantes consecuencias de las técnicas desarrolladas por Coifman, McIntosh y Meyer es la estimación precisa de desarrollos multilineales de operadores diferenciales en el caso unidimensional ([8, Proposition 3]). Estas estimaciones permiten demostrar la conjetura de Kato para operadores diferenciales regulares acretivos en $\mathbb{R}$: sea $a \in L^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\Re a(x) \leq \delta$ con $\delta > 0$ y

$$D = -i\frac{d}{dx} : H^1(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}),$$

entonces el dominio del operador $(DM_aD)^{\frac{1}{2}}$ es igual a $H^1(\mathbb{R})$ ([8, Théorème X]), donde M_a es el operador de multiplicación por la función a.

Estas mismas ideas y técnicas se plantean en $L^2(\mathbb{R}^n)$ con $n \geq 2$ ([21]). También en este caso, McIntosh consigue notables resultados parciales. Suponiendo condiciones de regularidad en los coeficientes de (2) (por ejemplo que $a_{j,k}, b_k, c_j$ sean multiplicadores del espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ con $0 < s < \frac{1}{2}$), prueba la conjetura de Kato en [21, Theorem 1, 2]. Sin embargo, él mismo es consciente de la dificultad de obtener las estimaciones multilineales sin añadir condiciones adicionales al problema, ver [21, Introduction]. Esta dificultad le lleva a plantearse nuevas técnicas provenientes del análisis funcional.

4 . El cálculo funcional H^∞

En casos particulares, las estimaciones multilineales necesarias para la demostración de la conjetura de Kato se obtienen de la teoría de operadores autoadjuntos no negativos $(A, D(A))$ sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Para $0 < s < 2$, se definen las funciones $\psi^{(s)}(r) = r^s(1+r^2)^{-1}$ con $r \geq 0$ y los operadores

$$\psi^{(s)}(tA) = (tA)^s(I+t^2A^2)^{-1}, \qquad t > 0,$$

mediante el cálculo funcional L^∞ ([25]) asociado a $(A, D(A))$. Estos operadores satisfacen las igualdades cuadráticas

$$\left(\int_0^\infty \|\psi^{(s)}(tA)w\|^2 \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^\infty \psi^{(s)}(r)^2 \frac{dr}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \|w\|, \qquad w \in \mathcal{H}, \tag{5}$$

y de éstas se prueban las estimaciones multilineales, ver [22, p. 136].

Sin embargo, las estimaciones (5) no sólo se cumplen para operadores autoadjuntos no negativos. McIntosh, con algunos de sus colaboradores, desarrolla a finales de los ochenta y principios de los noventa la teoría del cálculo funcional H^∞ para operadores $(A, D(A))$ de tipo ω con $\omega \in [0, \pi)$. Por definición, éstos cumplen que su espectro está contenido en el sector $S_\omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |\arg(z)| \leq \omega\} \cup \{0\}$ y

$$\|(A - zI)^{-1}\| \leq C|z|^{-1}, \qquad z \in \mathbb{C} \backslash S_\omega.$$

Entonces la integral de Cauchy

$$f(A)w := \int_\gamma f(z)(zI - A)^{-1} w dz, \qquad w \in \mathcal{H},$$

tiene sentido y permite definir operadores para determinadas funciones f holomorfas sobre el interior del sector S_μ, $\mu > \omega$, donde γ es un camino alrededor del espectro de A con unas propiedades determinadas. Se dice que A admite *un cálculo funcional* H^∞ si la aplicación $f \mapsto f(A)$ se extiende al conjunto de funciones holomorfas y acotadas en el interior de S_μ y

$$\|f(A)\| \leq C\|f\|_\infty,$$

ver [10]. Existen ejemplos de operadores de tipo ω sin cálculos funcionales H^∞.

Este concepto, surgido del ánalisis armónico, tiene importantes consecuencias en el análisis funcional. Además de las estimaciones cuadráticas buscadas, la existencia de un cálculo funcional H^∞ para un operador $(A, D(A))$ es equivalente a que las potencias imaginarias $(A^{it})_{t \in \mathbb{R}}$ sean un (C_0)-grupo de operadores en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ([10, Theorem 2.4]). Otras afirmaciones equivalentes a la existencia del cálculo funcional H^∞, esta vez en términos de espacios de interpolación, se prueban en [2]. El cálculo funcional H^∞ ha sido estudiado también en espacios de Banach, ver por ejemplo [10] y [28].

Sin embargo, el cálculo funcional H^∞ no condujo a la solución del problema de Kato, si bien se puede caracterizar la conjetura Kato en términos de la existencia del cálculo funcional H^∞ ([2, Theorem 10.1]). McIntosh termina su artículo resumen «The square root problem for elliptic operators, a survey» (1991) con el siguiente comentario:

«*It remains a challenge, however, to prove the multilinear estimates needed to solve the square root problem of Kato for elliptic operators, or to find an alternative approach*».

5 . El teorema $T1$

El resultado de Calderón sobre conmutadores (3) o la acotación de la transformada de Cauchy sobre algunas curvas lipschitzianas (4) pueden obtenerse como aplicaciones de uno de los teoremas más importantes del análisis armónico, el teorema llamado $T1$, probado por G. David y J.L. Journé en 1984 (ver [11] y también [13]). Sea T un operador lineal que envía funciones de la clase de Schwartz sobre distribuciones temperadas $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Diremos que el operador T está asociado al núcleo $K : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \backslash \Delta \to \mathbb{C}$ (donde Δ es la diagonal de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$) si

$$\langle Tf, g \rangle = \int \int K(x,y) f(y) g(x) dx dy, \qquad f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

El operador adjunto $T^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se define mediante

$$\langle T^* f, g \rangle = \langle f, Tg \rangle \qquad f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

y su núcleo asociado es $K^*(x,y) = K(y,x)$. Cuando el núcleo K satisface las condiciones de Calderón-Zygmund (ver condiciones (5.14), (5.15 a) y (5.15 b) en [13]), es posible definir Tf para $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ([13, p.194]).

Teorema 2 *(Teorema $T1$) Un operador $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ asociado al núcleo K se extiende a un operador acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$ si y solo si se verifican las siguientes condiciones:*

(a) $T1, T^*1 \in BMO$ donde 1 es la función idénticamente uno y BMO es el espacio de funciones con oscilaciones en media acotadas.

(b) T tiene la propiedad de acotación débil (ver [13, Definición 9.8]).

Un año más tarde, David, Journé y Semmes demostraron el Teorema Tb para funciones b llamadas *para-acretivas* en $\mathbb{R}^n$ ([12], [13, p. 207]) extendiendo el Teorema $T1$. Consecuencia del Teorema $T1$ (y por tanto del Teorema Tb) es la obtención de estimaciónes cuadráticas

$$\int_0^\infty \|T_t(f)\|_2^2 \frac{dt}{t} \leq C \|f\|_2^2, \qquad f \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

donde los operadores T_t se definen mediante $T_t(f) = \psi_t * T(f)$ con $\psi_t(x) = \frac{1}{t^n}\psi(\frac{x}{t})$, $t > 0$, y ψ es una función test radial, no idénticamente nula y de integral nula. Semmes, partiendo de estas estimaciones cuadráticas, probó la acotación de la transformada de Cauchy en curvas lipschitzianas ([26]). P. Auscher y Ph. Tchamitchian recuperaron estas ideas para la conjetura de Kato ([3]) y definitivamente Auscher *et al.* consiguieron probar la conjetura de Kato en $\mathbb{R}^n$ ([5]).

6 . Sobre la demostración de la conjetura de Kato

Auscher y Tchamitchian propusieron en 1998 un planteamiento distinto para atacar la conjetura de Kato ([3]). Este planteamiento se basa en tres puntos:

(a) La obtención de estimaciones puntuales usando el cálculo funcional.

(b) La introducción de medidas de Carleson.

(c) El uso de teoremas $T(b)$ para raíces cuadradas.

Con estas ideas, consiguen mejorar resultados probados mediante el método de las estimaciones multilineales y prueban la conjetura de Kato para matrices A que verifican cierta condición, ver [3, Cap. 3, Definition 1, Theorem 3]. Además, esta misma demostración puede seguirse en el caso de que el núcleo del calor W_t, asociado al operador L, verifique las *estimaciones gaussianas*, condiciones (G) en [14]. Como todo operador diferencial L con la condición de elipticidad (1) en $n=2$ verifica estas estimaciones ([4]), la conjetura de Kato se resuelve totalmente en $\mathbb{R}^2$.

La demostración de la conjetura en $\mathbb{R}^n$ aparece publicada en la revista «Annals of Mathematics» en 2002 ([5]). Antes de dar unas ideas de la demostración, recordamos e introducimos la siguiente notación: sea $A=(a_{j,k})$, con $a_{j,k}\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, y $Lu=-\operatorname{div}(A\nabla u)$. Definimos los operadores $(\theta_t)_{t>0}$

$$\theta_t = -(1+t^2L)^{-1}t\operatorname{div}A, \qquad \theta_t f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,$$

y las funciones

$$\gamma_t(x) = (\theta_t\mathbf{1})(x) = -\left((1+t^2L)^{-1}t\sum_k \frac{\partial a_{j,k}}{\partial x_k}\right)(x).$$

Una medida de Borel μ es una *medida de Carleson* en $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ si para todo cubo Q en $\mathbb{R}^n$ de longitud de lado $l(Q)$, se cumple

$$\sup_{Q\subset\mathbb{R}^n}\frac{1}{|Q|}\mu(Q\times(0,l(Q))<\infty.$$

La estructura de la demostración consiste en probar las siguientes desigualdades:

$$(Q)\qquad \int_0^\infty \|(1+t^2L)^{-1}tLf\|_2^2\frac{dt}{t}\le C\|\nabla f\|_2^2, \qquad f\in C_c^{(\infty)}(\mathbb{R}^n).$$

(C)

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty |\gamma_t(x)\cdot(P_t^2\nabla f)(x)|^2\frac{dtdx}{t}\le C\sup_{Q\subset\mathbb{R}^n}\int_Q\int_0^{l(Q)}|\gamma_t(x)|^2\frac{dxdt}{t}\|\nabla f\|_2^2,$$

para $f \in C_c^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ y $P_t(u) = p_t * u$ donde $p_t = \frac{1}{t^n}p(\frac{\cdot}{t})$, el soporte de p está en la bola unidad y $\int p = 1$.

$$(D) \qquad |\gamma_t(x)|^2 \frac{1}{t} \text{ es una medida de Carleson en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty).$$

Probando (D), la demostración es encadenada: $(D) \Rightarrow (C) \Rightarrow (Q) \Rightarrow (K)$. Algunas implicaciones son asequibles al nivel de exposición de este artículo, y las presentamos a continuación. En otras, sólo señalamos las principales ideas y desigualdades necesarias, remitiendo a [5] y otras referencias ya citadas para mayor detalle.

$(Q) \Rightarrow (K)$ Sean $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, con $\|g\|_2 = 1$. Es posible representar $\sqrt{L}$ de forma integral (con $a > 0$) y operando obtenemos

$$\begin{aligned}
|\langle \sqrt{L} f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}|^2 &= |a\langle \int_0^\infty (1+t^2L)^{-3} t^3 L^2 f \frac{dt}{t}, g\rangle|^2 \\
&= a^2 \left(\int_0^\infty |\langle (1+t^2L)^{-1} tLf, t^2L^*(1+t^2L^*)^{-2} g\rangle| \frac{dt}{t} \right)^2 \\
&\le a^2 \left(\int_0^\infty \|(1+t^2L)^{-1} tLf\|_2 \|t^2L^*(1+t^2L^*)^{-2} g\|_2 \frac{dt}{t} \right)^2 \\
&\le a^2 \int_0^\infty \|(1+t^2L)^{-1} tLf\|_2^2 \frac{dt}{t} \int_0^\infty \|t^2L^*(1+t^2L^*)^{-2} g\|_2^2 \frac{dt}{t} \\
&\le C\|g\|_2^2 \int_0^\infty \|(1+t^2L)^{-1} tLf\|_2^2 \frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

(D) y $(C) \Rightarrow (Q)$ Como $Lu = -\mathrm{div}(A\nabla u)$, y $\theta_t = -(1+t^2L)^{-1} t\mathrm{div} A$ entonces

$$\int_0^\infty \|(1+t^2L)^{-1} tLf\|_2^2 \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \|\theta_t \nabla f\|_2^2 \frac{dt}{t} \le C\|\nabla f\|_2^2.$$

Tomamos $p \in C_c^\infty(B(0,1))$ con $\int_{\mathbb{R}^n} p(x)dx = 1$, $p_t = \frac{1}{t^n}p(\frac{\cdot}{t})$, y $P_t(f) = p_t * f$ entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \|\theta_t \nabla f\|_2^2 \frac{dt}{t} \le\ & 2\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |\gamma_t(x) \cdot (P_t^2 \nabla f)(x)|^2 \frac{dxdt}{t} \\
& + 2\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |\gamma_t(x) \cdot (P_t^2 \nabla f)(x) - \theta_t \nabla f(x)|^2 \frac{dxdt}{t}.
\end{aligned}$$

Se puede escribir que

$$\gamma_t(x) \cdot (P_t^2 \nabla f)(x) - \theta_t \nabla f(x) = (U_t P_t \nabla f)(x) + (\theta_t (P_t^2 - I)\nabla f)(x)$$

con $U_t f(x) = \gamma_t(x) \cdot (P_t f)(x) - (\theta_t P_t f)(x)$ para $t > 0$ y

$$\int_0^\infty \|U_t P_t \nabla f\|_2^2 \frac{dt}{t} \leq C\|\nabla f\|_2^2,$$

([5, Lemma 4.4]) y como $\displaystyle\int_0^\infty \|\theta_t(P_t^2 - I)\nabla f\|_2^2 \frac{dt}{t} \leq C\|\nabla f\|_2^2$ ([5, p. 643]), obtenemos (Q) usando (C).

$(D) \Rightarrow (C)$ Se deduce del teorema de Carleson, [13, Teorema 9.4].
(D) Probar que $|\gamma_t(x)|^2 \frac{1}{t}$ es una medida de Carleson en $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ es la parte más difícil de la demostración. Para ello se utiliza el siguiente lema.

Lema 1 *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Si existe $\nu \in (0,1)$ tal que para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$, existen subcubos disjuntos $Q_i \subset Q$, tales que*

$$\sum |Q_i| \leq \nu|Q|, \qquad \mu\left(Q \times (0, l(Q)) \backslash \bigcup_i (Q_i \times (0, l(Q_i)))\right) \leq C|Q|,$$

entonces μ es una medida de Carleson en $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.

Por este lema, hay que comprobar que $|\gamma_t(x)|^2 \frac{1}{t}$ es medida de Carleson en las «zonas buenas»,

$$Q \times (0, l(Q)) \backslash \bigcup_i (Q_i \times (0, l(Q_i))),$$

ya que las zonas malas (Q_i) tienen medida pequeña. En esta parte, se aplican las estimaciones puntuales obtenidas por el cálculo funcional y los teoremas $T(b)$, ver más detalles en [5].
Agradecimientos: Este trabajo fue realizado con el disfrute de una beca postdoctoral en el proyecto TMR-network «Harmonic Analysis and related problems» en la C.A.U. de Kiel (Alemania) . El autor quiere agradecer este tiempo y el interés mostrado por el Departamento de Matemáticas, y en particular por el profesor Detlef Müller. Parcialmente subvencionado por los proyectos BFM2001-1793 de M.C.YT.D.G.I./F.E.D.E.R. y 12/25 E-64 de la D.G.A.

Referencias

[1] P. Auscher, *Lectures on the Kato square root problem,* `http://arxiv.org/abs/math.CA/0108029`

[2] P. Auscher, A. McIntosh y A Nahmod, Holomorphic functional calculi of operators, quadratic estimates and interpolation, *Indiana Univ. Math. J.* **46** (1997) p. 375–403.

[3] P. AUSCHER Y P. TCHAMITCHIAN, Square root problem for divergence operators and related topics, *Astérisque* **249**, Soc. Math. France, Paris, 1998.

[4] P. AUSCHER, A. MCINTOSH Y PH. TCHAMITCHIAN, Heat kernels of second order complex elliptic operators and applications, *J. Funct. Analysis* **152** (1998) p. 22–73.

[5] P. AUSCHER, S. HOFMANN, M. LACEY, A. MCINTOSH Y P. TCHAMITCHIAN, The solution of the Kato square root problem for second order elliptic operators in $\mathbb{R}^n$, *Annals of Math.* **156** (2002) p. 633–654.

[6] J. BERGH Y J. LÖFSTRÖM, *Interpolation spaces. An introduction*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[7] A. P. CALDERÓN, Commutators of singular integral operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **53** (1965) p. 1092–1099.

[8] R. COIFMAN, A. MCINTOSH E Y. MEYER, L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour les courbes lipschitziennes, *Annals of Math.* **116** (1982) p. 361–387.

[9] H. CORDES, A. JENSEN, S.T. KURODA, G. PONCE, B, SIMON Y M. TAYLOR, Tosio Kato (1917-1999), *Notices of the Amer. Math. Soc.* **47**(6) (2000) p. 650–657.

[10] M. COWLING, I. DOUST, A. MCINTOSH Y A. YAGI, Banach space operators with a bounded H^∞-functional calculus, *J. Austral. Math. Soc. Series (A)* **60** (1996) p. 51–89.

[11] G. DAVID Y J. L. JOURNÉ, A boundedness criterion for generalized Calderón-Zygmund operators, *Annals of Math.* **120** (1984) p. 371–397.

[12] G. DAVID, J. L. JOURNÉ Y S. SEMMES, Opérateurs de Calderón-Zygmund operators, fonctions para-accrétives et interpolation, *Rev. Math. Iberoamericana* **1** (1985), p. 1–56.

[13] J. DUOANDIKOETXEA, *Análisis de Fourier*, Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, Wilmington, Delaware, 1995.

[14] S. HOFMANN, M. LACEY Y A. MCINTOSH, The solution of the Kato problem for divergence form elliptic operators with Gaussian heat kernel bounds, *Annals of Math.* **156** (2002) p. 623–631.

[15] T. KATO, Fractional powers of dissipative operators, *J. Math. Soc. Japan* **13** (1961) 3, p. 246–274.

[16] T. KATO, Fractional powers of dissipative operators, II, *J. Math. Soc. Japan* **14**(2) (1962), p. 242–248.

[17] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[18] J. L. LIONS, Espaces d'interpolation et domains de puissances fractionnaires d'operateurs, *J. Math. Soc. Japan* **14** (1962) 2, p. 233–241.

[19] A. MCINTOSH, Counterexample to a question on commutators, *Proc. Amer. Math. Soc.* **29** (1972) 2, p. 337–340.

[20] A. McIntosh, On the comparability of $A^{1/2}$ and $A^{*1/2}$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **32** (1972) 2, p. 430–434.

[21] A. McIntosh, Square roots of elliptic operators, *J. Funct. Analysis* **61** (1985), p. 307–327.

[22] A. McIntosh, *The square root problem for elliptic operators, a survey*. Functional analytic methods for partial differential equations. Springer Verlag, Lect. Notes in Math., vol. **1450**, 1990, p. 122–140.

[23] A. McIntosh, y M. Schmalmack, *Kato's square root problem. Background and recent results.* http://wwwmaths.anu.edu.au/~alan/

[24] Y. Meyer, *Wavelets: Calderon-Zymund and multilinear operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[25] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, New York, 1991.

[26] S. Semmes, Square function estimates and the $T(b)$-theorem, *Proc. Amer. Math Soc.* **110** (1990), p. 721–726.

[27] E. M. Stein, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton University Press, Princeton, 1993.

[28] L. Weis, Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L_p-regularity *Math. Ann.* **319** (2001), p. 735–758.

Pedro J. Miana
Departamento de Matemáticas
Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones
Facultad de Ciencias
Universidad de Zaragoza
50009 Zaragoza, España
Correo electrónico: pjmiana@unizar.es