

Relatividad: un curso acelerado

por

Joan Girbau

INTRODUCCIÓN

En enero de 1998 (hace por tanto más de un año) el amigo Manuel de León me pidió un artículo sobre relatividad para *La Gaceta*, invocando mi experiencia previa en la redacción de un manual sobre Geometría Diferencial y Relatividad aparecido en catalán en 1993: *Geometria Diferencial i Relativitat*¹. En un primer momento planeé escribir un *survey* sobre ciertos problemas matemáticos de la teoría de ondas gravitatorias, pero luego me persuadí de que quizá una mayor parte de lectores de *La Gaceta* preferirían un texto más básico: un mini-curso de relatividad.



A. EINSTEIN

Parece totalmente inexplicable que casi un siglo después de su aparición dicha teoría no figure entre los conocimientos básicos de la mayor parte de licenciados en matemáticas que salen de nuestras universidades, a pesar de constituir uno de los más bellos campos de aplicación de la geometría riemanniana. Ahora que están tan de moda las asignaturas semestrales y los créditos de libre elección ¿cuántos de nuestros licenciados han tenido oportunidad de seguir algún curso de relatividad? De manera más general uno puede preguntarse incluso ¿cuántos de nuestros licenciados han tenido oportunidad de seguir algún curso sobre algún tema de física actual? Para paliar, aunque sea modestamente, esta carencia, me he permitido redactar estas notas esencialmente dirigidas a un público matemático. He presupuesto, por tanto, que el lector tiene unos ciertos conocimientos de geometría riemanniana.

Para comprender profundamente el significado del tensor de impulsión-energía que aparece en la ecuación de Einstein de la relatividad general, es imprescindible tener unos someros conocimientos de mecánica de fluidos. Por ello estas notas empiezan con una introducción a la mecánica clásica de fluidos. Siguen después unas nociones de relatividad especial (cinemática y dinámica) para las cuales no es necesario haber leído antes la parte de dinámica de fluidos. Las notas finalizan con una introducción a la relatividad general.

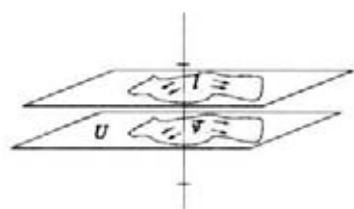
¹Manuals de la Universitat Autònoma de Barcelona n° 10. Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona. Bellaterra (Barcelona), 1993.

MECÁNICA CLÁSICA DE FLUIDOS

UN LEMA SOBRE DERIVACIÓN DE INTEGRALES

Una familia uniparamétrica de difeomorfismos en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ es una aplicación diferenciable,

$$\begin{aligned} U \times I &\xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^3 \\ (x, t) &\longrightarrow \varphi_t(x) \end{aligned}$$



donde I es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ que contiene el origen, de manera que se verifican las dos propiedades siguientes: (1) Para todo t de I , φ_t es un difeomorfismo de U sobre $\varphi_t(U)$. (2) $\varphi_0 = \text{id}$. Si φ_t es una tal familia, designaremos por $\vec{v}(x) = (d\varphi_t(x)/dt)_{t=0}$. $\vec{v}$ es un campo vectorial sobre U que se denomina el campo de velocidades de la familia φ_t en el instante $t = 0$.

Lema Si $F(x, t)$ es una función diferenciable sobre $U \times I$ y V es un abierto cualquiera de U tal que $\forall t \varphi_t(V) \subset U$, se verifica:

$$\left[\frac{d}{dt} \int_{\varphi_t(V)} F(x, t) dx \right]_{t=0} = \int_V \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \text{div}(F\vec{v}) \right)_{t=0} dx$$

INDICACIÓN DE LA DEMOSTRACIÓN: Por el teorema del cambio de variable tenemos

$$\int_{\varphi_t(V)} F(x, t) dx = \int_V F(\varphi_t(x), t) J_t(x) dx,$$

donde $J_t(x)$ indica el jacobiano de φ_t . Teniendo presente que φ_0 es la identidad, se ve fácilmente que $(dJ_t(x)/dt)_{t=0} = \text{div } \vec{v}$. Derivando entonces la igualdad anterior se obtiene:

$$\left[\frac{d}{dt} \int_{\varphi_t(V)} F(x, t) dx \right]_{t=0} = \int_V \left(\sum \frac{\partial F}{\partial x^i} v^i + \frac{\partial F}{\partial t} + F(x, t) \text{div } \vec{v} \right)_{t=0} dx.$$

Se ve entonces de manera inmediata que el segundo miembro de la igualdad anterior equivale al segundo miembro de la igualdad que se quiere demostrar.

MASA DE UN FLUIDO. ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Para describir el movimiento de un fluido vamos a introducir en primer lugar el concepto de densidad de masa. Cuando hablamos de un sistema de n

partículas, cada una tiene su masa, $m_1, \dots, m_n$, y la masa total del sistema es la suma $m = \sum_i m_i$. Ahora bien, en los medios continuos, para describir la masa de cada región del medio supondremos que existe una función diferenciable $\rho(x, t)$ de manera que para cada región V la integral $\int_V \rho(x, t) dx$ da la masa del medio que está contenido en la región V en el instante t . La función ρ se denomina densidad de masa del medio (o, simplemente, densidad).

Supondremos que el movimiento de un fluido viene descrito por una aplicación diferenciable $\varphi : U \times I \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde U es un abierto de $\mathbb{R}^3$ e I es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, de manera que $\varphi(x, t_0, t_1)$ indica la posición en el instante t_1 de la partícula de fluido que en el instante t_0 ocupaba la posición x . Se ha de verificar, pues, que $\varphi(x, t, t) = x$. Fijado un instante inicial t_0 , se supone que $\varphi_t(x) = \varphi(x, t_0, t_0 + t)$ es una familia uniparamétrica de difeomorfismos en el sentido del apartado anterior. Su campo de velocidades $\vec{v}(x, t_0) = (d\varphi_t(x)/dt)_{t=0}$, dependerá, pues, del instante inicial t_0 . Supondremos de ahora en adelante que hemos fijado un instante inicial $t_0 = 0$. Si V es una región cualquiera contenida en U , la región $\varphi_t(V)$ contiene en el instante t todas las partículas del fluido que en el instante inicial $t = 0$ ocupaban la región V . La conservación de masa dice, por tanto, que $m(\varphi_t(V), t) = m(V, 0)$. Derivando, $dm(\varphi_t(V), t)/dt = 0$. Es decir,

$$\left[\frac{d}{dt} \int_{\varphi_t(V)} \rho(x, t) dx \right]_{t=0} = 0.$$

Aplicando el lema, y teniendo en cuenta que la igualdad anterior se ha de cumplir para toda región V , tendremos

$$\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right]_{t=0} = 0.$$

Y en general, para todo t ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

Esta ecuación se conoce con el nombre de **ecuación de continuidad**.

FUERZA TOTAL

Definimos la **cantidad de movimiento** (o impulsión) $\vec{P}(V, t)$ que actúa sobre una región V de fluido en el instante t , como la integral $\int_V \rho(x, t) \vec{v}(x, t) dx$. Y podríamos definir también (por analogía con el caso de n partículas) la fuerza total que actúa sobre una región V en el instante $t = 0$ como $\vec{F}(V, 0) = (d\vec{P}(\varphi_t(V), t)/dt)_{t=0}$. Tendremos, pues, para la componente i -ésima de dicha fuerza

$$F^i(V, 0) = \left[\frac{d}{dt} \int_{\varphi_t(V)} \rho(x, t) v^i(x, t) dx \right]_{t=0}$$

$$= \int_V \left(\frac{\partial(\rho v^i)}{\partial t} + \sum \frac{\partial(\rho v^i v^k)}{\partial x^k} \right)_{t=0} dx.$$

Si disponemos de alguna ley física que nos diga cuál es la fuerza total en cada instante, entonces a partir de la definición anterior podremos calcular el movimiento del fluido (calculando el campo de velocidades y luego, por integración, las trayectorias $\varphi_t(x)$ de las partículas del fluido). Ahora bien, si no conocemos a priori la fuerza total, la definición anterior nos permite a posteriori calcular la fuerza total que actúa sobre cada región V en un instante dado $t = 0$ observando experimentalmente las trayectorias y obteniendo por derivación la fuerza total.

La experiencia demuestra que el movimiento de un fluido es fruto de las fuerzas exteriores (por ejemplo, la gravedad, si el fluido se deja caer libremente) y de unas fuerzas internas o de ligadura. Si tenemos un sistema de n partículas y sobre cada una de ellas actúa una fuerza exterior (sea $\vec{f}_i$ la fuerza que actúa sobre la i -ésima partícula) la fuerza exterior total que actúa sobre el sistema será la suma de dichas fuerzas ($\sum_i \vec{f}_i$). Pero cuando hablamos de medios continuos, para describir la fuerza exterior que actúa sobre cada región, habremos de suponer que existe una función (vectorial) diferenciable $\vec{f}(x, t)$ tal que para cada región V la integral $\int_V \vec{f}(x, t) dx$ da la fuerza exterior total que actúa sobre el medio contenido en dicha región en el instante t . La función $\vec{f}(x, t)$ se denomina densidad de fuerza exterior que actúa sobre el medio.



J. GIRBAU

Si suponemos conocida la función densidad de fuerza exterior, se define la fuerza interna que actúa sobre una región V del fluido en el instante t , $\vec{F}_{\text{int}}(V, t)$, como la diferencia entre la fuerza total y la fuerza exterior que actúan sobre el medio. Es decir, $\vec{F}_{\text{int}}(V, t) = \vec{F}(V, t) - \int_V \vec{f}(x, t) dx$. De esta manera, la ecuación del movimiento dirá $\int_V \vec{f}(x, t) dx + \vec{F}_{\text{int}}(V, t) = \vec{F}(V, t)$. Para poder calcular a priori el movimiento del fluido se precisan leyes físicas que nos digan a priori cómo son las fuerzas exteriores y cómo son las fuerzas internas. Ya tenemos leyes físicas para las fuerzas exteriores en algunos casos importantes (por ejemplo, cuando el fluido evoluciona bajo la acción del campo gravitatorio o cuando el fluido evoluciona sin fuerzas exteriores ($\vec{f} = 0$)). Ahora daremos una ley física (principio de Cauchy) que nos dice cómo son las fuerzas internas.

PRINCIPIO DE CAUCHY

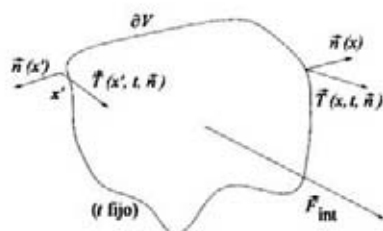
Cauchy postula que existe una aplicación diferenciable

$$\begin{aligned} U \times I \times \mathbb{R}^3 &\xrightarrow{T} \mathbb{R}^3 \\ (x, t, \vec{v}) &\longrightarrow \vec{T}(x, t, \vec{v}) \end{aligned}$$

que para x y t fijados es lineal en la variable $\vec{v}$ y tal que para cada región V contenida en U la fuerza interna $\vec{F}_{\text{int}}(V, t)$ viene dada por

$$\vec{F}_{\text{int}}(V, t) = \int_{x \in \partial V} \vec{T}(x, t, \vec{n}(x)) ds,$$

donde $\vec{n}(x)$ indica el vector unitario normal exterior al borde ∂V de V (se supone que ∂V es variedad diferenciable) y ds el elemento de área de ∂V .



Para cada x y t fijados, $\vec{T}$ es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, es decir, un tensor de tipo $(1, 1)$. Así pues, para t fijado $\vec{T}$ es un campo tensorial de tipo $(1, 1)$ sobre U que se denomina **tensor de los esfuerzos**.

El principio de Cauchy se fundamenta en el hecho intuitivo siguiente: puesto que la fuerza que el resto de fluido ejerce sobre el fluido contenido en la región V se transmite a V a través de su borde ∂V , es lógico que dicha fuerza venga dada por una integral extendida a ∂V . Ahora bien, no es muy intuitiva la parte del principio de Cauchy que pide que $\vec{T}$ dependa *linealmente* del vector normal $\vec{n}(x)$. De hecho Cauchy demostró esta dependencia lineal a partir de hipótesis más intuitivas.

El tensor de los esfuerzos depende de la naturaleza del fluido. Hay unos fluidos particulares para los que el tensor de los esfuerzos es de la forma $\vec{T}(x, t, \vec{v}) = -p(x, t)\vec{v}$. Estos fluidos se denominan **perfectos**. En los fluidos de esta naturaleza, la fuerza interna que actúa sobre una región V (fuerza que el resto de fluido ejerce sobre V) viene dada por

$$\vec{F}_{\text{int}}(V, t) = - \int_{x \in \partial V} p(x, t) \vec{n}(x) ds.$$

Cuando el fluido es perfecto, dentro de la integral sólo figura una fuerza normal al borde de V (no hay componentes tangenciales al borde). La función $p(x, t)$ que interviene en la definición de fluido perfecto se denomina presión. El signo $-$ se refiere al hecho de que la fuerza que el resto del fluido ejerce sobre la región V tiene sentido opuesto al sentido del vector normal exterior (por esto la función p se denomina "presión").

EXPRESIÓN DIFERENCIAL DE LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

Sea $\vec{T}$ el tensor de los esfuerzos de nuestro fluido. El vector $\vec{T}(x, t, \vec{v})$ tendrá tres componentes, (T^1, T^2, T^3) , donde $T^j(x, t, \vec{v}) = \sum_i T_i^j(x, t) v^i$ (puesto que $\vec{T}$ depende linealmente de $\vec{v}$). Designemos por $\vec{Y}^j = (T_1^j, T_2^j, T_3^j)$. Con esta notación $T^j(x, t, \vec{v}) = \sum_i T_i^j v^i = g(\vec{Y}^j, \vec{v})$, donde g designa el producto escalar habitual de $\mathbb{R}^3$.

Por el teorema de la divergencia tendremos

$$\int_{x \in \partial V} T^j(x, t, \vec{n}(x)) ds = \int_V \operatorname{div} \vec{Y}^j(x, t) dx = \int_V \left(\sum_k \frac{\partial T_k^j}{\partial x^k} \right) dx.$$

Designemos por $\operatorname{div} \vec{T}$ el vector de componentes $\sum_k \partial T_k^j / \partial x^k$. Con esta notación, teniendo presente la expresión de la fuerza total obtenida en el apartado FUERZA TOTAL, las ecuaciones del movimiento se escriben

$$\int_V \left(\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) \right) dx = \int_V \vec{f}(x, t) dx + \int_V \operatorname{div} T dx.$$

Puesto que esto debe verificarse para toda región V , tendremos

$$\boxed{\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = \vec{f} + \operatorname{div} T.}$$

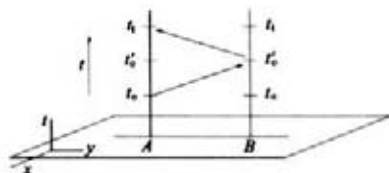
CINEMÁTICA DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL

SISTEMAS INERCIALES

Un sistema físico de referencia consiste en

1. Tres ejes perpendiculares de coordenadas que viajan por el espacio ordinario.
2. En cada punto de coordenadas fijas (x, y, z) respecto a dichos ejes, un observador dotado de un reloj, de manera que los diferentes relojes de los diferentes observadores van "sincronizados". Los infinitos observadores del sistema físico de referencia están, pues, inmóviles respecto a los ejes. El significado de la palabra "sincronizados" se explicará a continuación.

Vamos a explicar qué significa que los relojes de los diferentes observadores estén sincronizados. Consideremos dos observadores que están en dos puntos A y B del sistema de referencia (A y B viajan con el sistema y, por tanto, están inmóviles uno respecto al otro). Supongamos que el observador situado en A emite un rayo de



luz en la dirección de B en el instante t_0 de su reloj. Supongamos que este rayo llega a B en el instante t'_0 del reloj de B y que, reflejado por un espejo, vuelve hacia A y llega de nuevo allí en el instante t_1 del reloj de A . Si cada vez que se realiza esta experiencia se cumple $t'_0 - t_0 = t_1 - t'_0$, diremos que los relojes de A y de B están sincronizados. Un sistema inercial es un sistema físico de referencia en el cual no actúa ninguna fuerza sobre cada uno de los observadores del sistema. Ello significa que si uno de estos observadores deja en libertad un objeto cualquiera sin comunicarle velocidad inicial, dicho objeto permanecerá siempre en el lugar donde el observador lo ha dejado, inmóvil respecto a dicho observador.

LOS POSTULADOS DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL

La relatividad especial se fundamenta en los siguientes postulados:

1. Existen sistemas inerciales.
2. Si S y S' son sistemas físicos de referencia que se mueven uno respecto al otro con movimiento rectilíneo uniforme, entonces si uno de ellos es inercial, el otro también. Recíprocamente, dos sistemas inerciales cualesquiera se mueven uno respecto al otro con movimiento rectilíneo uniforme (que puede ser de velocidad nula).
3. Todos los sistemas inerciales juegan el mismo papel en la teoría ("tanto monta, monta tanto...").
4. Dos sucesos ocurridos en un punto inmóvil respecto a un sistema inercial S en tiempos diferentes t_1 y t_2 son vistos desde cualquier otro sistema inercial S' en el mismo orden temporal en que los ha visto un observador de S .
5. Invariancia de la velocidad de la luz en el vacío: Si un observador de un sistema inercial S contempla la propagación en el vacío de un rayo de luz emitido por cualquier foco luminoso (el foco luminoso puede viajar o estar inmóvil respecto al observador) observará que el rayo se propaga con movimiento rectilíneo y uniforme. Además, el módulo del vector velocidad de dicho rayo de luz respecto al sistema inercial S es una constante que no depende del sistema inercial S . Es decir, que un observador de otro sistema inercial S' que desde S' midiera el módulo de la velocidad de este rayo de luz, encontraría el mismo valor.

Hagamos ahora algún comentario sobre estos postulados. En la realidad no existen sistemas inerciales como los que aquí se describen, ya que por efecto de los campos gravitatorios es imposible hallar un sistema (infinito en todas direcciones) en el cual no actúe ninguna fuerza sobre los observadores del sistema. Ahora bien, la relatividad especial pretende modelizar los fenómenos físicos en ausencia de campos gravitatorios y por ello se postula la existencia de sistemas inerciales. Sobre el segundo postulado, digamos que más adelante

veremos que ningún sistema inercial se puede mover respecto a otro con velocidad superior a la de la luz. Por tanto la redacción del postulado segundo la admitimos de momento como provisional ya que luego habría de ser retocada ligeramente a fin de que la teoría fuera coherente.

El postulado tercero, tal como está formulado, resulta muy ambiguo. Aunque podríamos dar de él una redacción más concisa, no lo hacemos para no alargar innecesariamente este artículo, aunque ya se verá qué sentido damos al mismo cuando lo apliquemos a casos concretos.

La mecánica clásica cumple todos los postulados aquí descritos, excepto el de invariancia de la velocidad de la luz. Este postulado quedó demostrado por un ingenioso experimento de Michelson y Morley. En cambio el electromagnetismo clásico (leyes de Maxwell-Lorentz) no cumple el tercer postulado (necesita de una referencia privilegiada, inmóvil: el éter).

TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

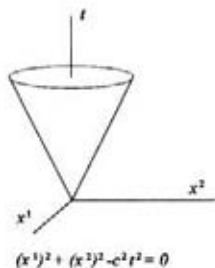
Sean S y S' dos sistemas inerciales. Un suceso cualquiera visto por un observador de S quedará determinado por las coordenadas (x^1, x^2, x^3) del punto del espacio donde se ha producido (respecto a los tres ejes de S) y por el tiempo t (de los relojes sincronizados de S) en que ha tenido lugar. A cada suceso contemplado desde S le corresponde, pues, un punto (x^1, x^2, x^3, t) de $\mathbb{R}^4$. Al mismo suceso contemplado desde S' le corresponde otro punto (x'^1, x'^2, x'^3, t') de $\mathbb{R}^4$. Por tanto, dados dos sistemas inerciales S y S' , tenemos una aplicación $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que asigna a las coordenadas (x^1, x^2, x^3, t) de un suceso contemplado desde S las coordenadas (x'^1, x'^2, x'^3, t') del mismo suceso contemplado desde S' . Esta aplicación f se denomina transformación de Lorentz asociada al cambio de sistema inercial de S a S' (el orden en que se escriben S y S' es importante). f tiene inversa y dicha inversa es precisamente la asociada al cambio de S' a S .

El segundo postulado implica que toda transformación de Lorentz es una afinidad. En efecto, sea f una transformación de Lorentz asociada al cambio de dos sistemas inerciales S y S' . Sea r una recta no horizontal de $\mathbb{R}^4$ (no contenida en un hiperplano de la forma $t = \text{constante}$). r se puede parametrizar por

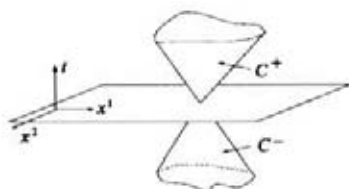
$$\begin{cases} x^i(t) = v^i t + b^i & i = 1, 2, 3. \\ t = t. \end{cases}$$

Esta recta de $\mathbb{R}^4$ representa para un observador de S el movimiento de una partícula $P(t)$ de coordenadas $(x^1(t), x^2(t), x^3(t))$ que se mueve respecto a S con movimiento rectilíneo uniforme de velocidad $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$. Existirá, pues, un sistema inercial S'' que tendrá por origen dicho punto. S'' viaja respecto a S' con movimiento rectilíneo uniforme (segundo postulado). Por tanto los observadores de S' describirán el movimiento del origen de S'' por una recta del su $\mathbb{R}^4$. Dicha recta ha de ser $f(r)$ en virtud de la definición de f .

Por tanto f es una biyección que transforma rectas en rectas, y por tanto es una afinidad. Sea c la velocidad de la luz en el vacío (constante independiente de los sistemas inerciales). Dotemos a $\mathbb{R}^4$ de la métrica de Minkowski $g = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - c^2 dt^2$.



Vamos a ver que las transformaciones de Lorentz han de ser isometrías respecto a dicha métrica. Para ver esto, consideremos una transformación de Lorentz f asociada al cambio entre dos sistemas inerciales S y S' . Supondremos, sin pérdida de generalidad, que hemos tomado unos orígenes de espacio y de tiempo en S y en S' de tal manera que en el instante de los dos sistemas $t = t' = 0$, los orígenes de espacio de S y S' coinciden. Supongamos que en el instante $t = 0$ de S se emite un rayo luminoso desde el origen de S en todas direcciones. Este rayo luminoso, para un observador de S' también habrá salido de su origen en el instante $t' = 0$. Consideremos ahora un personaje cualquiera, de nombre Juan, que viaja por el espacio (y que no es preciso que esté en ninguno de los dos sistemas inerciales). Consideremos el suceso siguiente: "Juan empieza a ver el rayo luminoso". Para un observador de S este suceso tendrá coordenadas (x^1, x^2, x^3, t) tales que $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - c^2 t^2 = 0$. Para un observador de S' el mismo suceso tendrá coordenadas (x'^1, x'^2, x'^3, t') tales que $(x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 - c^2 t'^2 = 0$. Así pues, f ha de aplicar los puntos (x^1, x^2, x^3, t) del cono de $\mathbb{R}^4$ $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - c^2 t^2 = 0$ en puntos (x'^1, x'^2, x'^3, t') del cono $(x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 - c^2 t'^2 = 0$. Para que una aplicación lineal (f ahora es lineal por ser una afinidad que transforma el origen en el origen) transforme el cono $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - c^2 t^2 = 0$ en el cono $(x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 - c^2 t'^2 = 0$ se ha de verificar que $(x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 - c^2 t'^2 = k \{ (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - c^2 t^2 \}$, donde (x^i, t) indica el punto transformado $\tilde{f}(x^i, t)$.



El postulado 3 ("tanto monta...") permite demostrar que la constante k anterior vale 1. Por tanto, f es una isometría de la métrica de Minkowski. Un vector X de $\mathbb{R}^4$ diremos que es temporal si $g(X, X) < 0$, donde g indica la métrica de Minkowski. El conjunto C de $\mathbb{R}^4$ formado por los vectores temporales constituye el cono definido por $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - c^2 t^2 < 0$, el cual tiene dos componentes conexas, C^+ y C^- . Designemos por C^+ la componente conexa contenida en el semiespacio $t > 0$. Un vector X que pertenezca a C^+ (que es temporal por pertenecer a C) se dice que apunta hacia el futuro. Las transformaciones de Lorentz, por ser isometrías, transforman vectores temporales en vectores temporales. Además, en virtud del postulado 4, transforman vectores de C^+ en vectores de C^+ .

LOS SISTEMAS INERCIALES SE INTERPRETAN COMO REFERENCIAS
ORTONORMALES DEL ESPACIO DE MINKOWSKI

Una base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ diremos que es ortonormal por la métrica g de Minkowski si cumple $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ para $i, j = 1, 2, 3$ (donde δ_{ij} son los símbolos de Kronecker que valen 0 si $i \neq j$ y 1 si $i = j$), $g(e_4, e_i) = 0$ para $i = 1, 2, 3$, y $g(e_4, e_4) = -c^2$. Diremos que es ortonormal positiva si además de cumplir las condiciones anteriores también cumple $e_4 \in C^+$.

Hasta ahora, siempre que teníamos un sistema inercial S , representábamos los sucesos como puntos de $\mathbb{R}^4$. Si teníamos otro sistema inercial S' representábamos los sucesos como puntos de otro $\mathbb{R}^4$. La aplicación f que asignaba al punto P del primer $\mathbb{R}^4$ correspondiente a un suceso, el punto P' del segundo $\mathbb{R}^4$ correspondiente al mismo suceso, era la aplicación de Lorentz asociada al cambio de S a S' . f era una afinidad, de la forma $f(\vec{x}) = F(\vec{x}) + \vec{a}$, con F lineal. Sea $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$. Designemos por $\varepsilon_\alpha = F^{-1}(e_\alpha)$, donde $\alpha = 1, 2, 3, 4$. Consideremos la referencia del primer $\mathbb{R}^4$ formada por el origen $f^{-1}(0)$ y por los vectores $\{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha=1\dots 4}$. El punto P' del segundo $\mathbb{R}^4$ tiene las mismas coordenadas (respecto a la base canónica) que el punto $P = f^{-1}(P')$ del primer $\mathbb{R}^4$ en la referencia $\{f^{-1}(0); \varepsilon_\alpha\}$. Esta observación elemental pone de manifiesto que los dos puntos de vista siguientes son completamente equivalentes:



H. MINKOWSKI

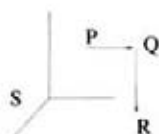
1. Cada sistema inercial utiliza un $\mathbb{R}^4$ diferente para representar los sucesos. Dados dos sistemas inerciales S y S' , se pasa del punto P que representa un suceso en el $\mathbb{R}^4$ correspondiente a los señores de S , al punto P' que representa el mismo suceso en el $\mathbb{R}^4$ que utilizan los señores de S' , a través de una transformación de Lorentz f .
2. Todas las personas, estén en el sistema inercial que estén, utilizan el mismo $\mathbb{R}^4$ para representar los sucesos. Es decir, un suceso siempre es un punto de $\mathbb{R}^4$ (el mismo punto, independientemente del sistema inercial del observador). Pero los observadores de un sistema inercial determinado, para medir las coordenadas de un punto P utilizan una referencia determinada, $\{O; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$, con la base $\{\varepsilon_\alpha\}$ ortonormal positiva. De esta manera los diferentes sistemas inerciales atribuyen al mismo punto P coordenadas diferentes.

(Recuérdese que un sistema inercial está formado por tres ejes del espacio ordinario e infinitos señores dotados de relojes (un señor en cada punto) y que cumplen unas determinadas propiedades, mientras que una referencia del espacio de Minkowski está formada por una base y un origen de dicho espacio.)

REPRESENTACIÓN DEL MOVIMIENTO DE CUALQUIER PARTÍCULA:
TIEMPO PROPIO

Supongamos que yo estoy en el origen de coordenadas de los tres ejes de un sistema "físico" inercial S . Supongamos que en el instante t_0 de mi reloj digo "ya" y en el instante t_1 vuelvo a decir "ya" (suponemos $t_1 > t_0$). A mi sistema inercial S corresponde una referencia ortonormal positiva del espacio de Minkowski $\{O; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$, y a los dos sucesos anteriores (yo digo "ya" las dos veces) corresponden sendos puntos A y B del espacio de Minkowski que en la referencia anterior tienen coordenadas $A = (0, 0, 0, t_0)$ y $B = (0, 0, 0, t_1)$. A será, pues, el punto $A = O + t_0\varepsilon_4$ y $B = O + t_1\varepsilon_4$. El intervalo de tiempo transcurrido en mi reloj entre estos sucesos es $t_1 - t_0$. Calculemos ahora en el espacio de Minkowski la distancia entre A y B . Tendremos $d(A, B) = \sqrt{g(B - A, B - A)} = \sqrt{g((t_1 - t_0)\varepsilon_4, (t_1 - t_0)\varepsilon_4)} = \sqrt{-(t_1 - t_0)^2 c^2} = ic(t_1 - t_0)$, donde $i = \sqrt{-1}$. Por tanto, el intervalo de tiempo entre los dos sucesos medido con mi reloj es $d(A, B)/ic$. Como la distancia es un concepto intrínseco, cualquier observador de cualquier sistema inercial, calculando $d(A, B)/ic$ en sus coordenadas, podrá conocer cuál es el intervalo de tiempo $t_1 - t_0$ de mi reloj. Por otro lado, el segmento rectilíneo del espacio de Minkowski que une A y B representa mi vida durante el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$. El vector director $B - A$ de este segmento es obviamente un vector temporal. Además pertenece a C^+ (apunta hacia el futuro).

Imaginemos ahora una situación un poco más complicada. Supongamos que tenemos un sistema inercial S y que uno de sus relojes empieza a viajar con movimiento rectilíneo uniforme respecto a S , describiendo un segmento rectilíneo $\overline{PQ}$ del espacio ordinario. Supongamos, sin embargo, que cuando llega a Q cambia bruscamente de dirección y pasa a describir un segmento $\overline{QR}$, también con movimiento uniforme. Los puntos P , Q y R se suponen inmóviles respecto al sistema inercial S . Sean t_P , t_Q , t_R los tiempos que marca el reloj cuando pasa por P , Q y R respectivamente. Consideremos los tres sucesos "el reloj pasa por P ", "el reloj pasa por Q ", "el reloj pasa por R ". A dichos tres sucesos corresponden puntos $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ del espacio de Minkowski. Cuando el reloj viaja de P a Q podemos considerar que viaja en un sistema inercial. Cuando viaja de Q a R podemos considerar que viaja en otro sistema inercial. Postulemos que el tiempo del reloj, cuando cambia bruscamente de dirección en el punto Q , no sufre ningún salto. El tiempo total transcurrido en el viaje según el reloj viajero será $t_R - t_P = (t_R - t_Q) + (t_Q - t_P)$. Podemos calcular los dos intervalos de tiempo $t_Q - t_P$ y $t_R - t_Q$ por el procedimiento anterior, de manera que el tiempo transcurrido en el viaje según el propio reloj será $(1/ic)(d(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) + d(\mathcal{Q}, \mathcal{R}))$. Por otro lado, la poligonal del espacio de Minkowski que une $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{R}$ representa la vida del reloj viajero durante el intervalo de su tiempo $[t_P, t_R]$. Observemos que cada uno de estos dos segmentos tiene vector director temporal. Además, los vectores $\mathcal{Q} - \mathcal{P}$ y $\mathcal{R} - \mathcal{Q}$ son de C^+ .



Supongamos ahora una situación todavía más complicada. Supongamos que tenemos un sistema inercial S y que uno de sus relojes, r , comienza a viajar con movimiento diferenciable arbitrario (no uniforme) respecto a S , hasta que al cabo de un rato se para. Queremos medir el tiempo transcurrido en el viaje según el propio reloj (diferencia entre el tiempo que marca cuando termina el viaje y el que marcaba cuando empezó). El viaje vendrá representado por un arco de curva diferenciable γ del espacio de Minkowski. Dicho arco de curva se puede aproximar por una poligonal de segmentos $\overline{P_0P_1}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}$. Esta poligonal corresponderá a la representación en el espacio de Minkowski del viaje de una partícula que viaja en una trayectoria próxima a la del reloj r . Si el reloj viajara según esta poligonal (situación anterior), marcaría un tiempo de viaje de $(1/ic)(d(P_0, P_1) + \dots + d(P_{n-1}, P_n))$. Por medio de un paso al límite (que es la misma definición de integral) concluimos que el tiempo transcurrido en el viaje según el propio reloj r es

$$(1/ic) \text{ longitud de } \gamma \text{ entre } P_0 \text{ y } P_n.$$

Por otro lado, cada uno de los segmentos $\overline{P_iP_{i+1}}$ tiene vector director temporal apuntando hacia el futuro. Por paso al límite habremos de suponer que γ tiene en cada punto vector tangente temporal apuntando hacia el futuro. Resumiendo: *el movimiento de cualquier partícula viene representado por una curva del espacio de Minkowski de vector tangente temporal en todo punto. La longitud del arco de curva entre dos puntos multiplicada por el factor $1/ic$, representa el tiempo propio de la partícula entre los instantes correspondientes a los dos extremos del arco. El tiempo propio τ de una partícula en cada momento es, pues, el parámetro arco de la curva dividido por ic .*

LA PARADOJA DE LOS GEMELOS

Vamos a explicar ahora una de las muchas aparentes paradojas de la relatividad especial. Se trata de la paradoja de los gemelos.

Supongamos dos hermanos gemelos, A y B , que nacieron exactamente en el mismo instante y que habitan en un determinado sistema inercial S . Un día B se va de viaje, mientras que A se queda en su sistema inercial S sin moverse. Cuando B vuelve y se encuentra de nuevo con A , han dejado de ser gemelos puesto que B es más joven que A . Ello es rigurosamente cierto como veremos dentro de poco.

¿Donde está pues la contradicción o la paradoja? Un mal estudiante de relatividad podría argumentar que B puede pensar que él ha permanecido quieto siempre, y que el que se ha movido (en movimiento relativo respecto a él) ha sido A . Entonces por el principio del "tanto monta" (tercer postulado de la relatividad especial) B llegaría a la conclusión de que el que se ha rejuvenecido con el viaje ha sido A , y por tanto que A es más joven que él. Resumiendo, ambos llegan a la conclusión de que después del viaje es el otro hermano quien es más joven. El fallo de este razonamiento es que aquí el principio del "tanto monta" no puede aplicarse puesto que mientras A ha estado siempre quieto en

un sistema inercial, B no ha estado siempre en el mismo sistema inercial (B habrá notado que en algún momento del viaje sobre él actuaba alguna fuerza, mientras que A , no). En realidad B es rigurosamente más joven que A . Vamos a calcular ahora cuánto más joven es B que A en un ejemplo concreto.

Supongamos que los hermanos gemelos A y B se hallan en un sistema inercial S en el punto de coordenadas $x = 6385$ Km., $y = 0$, $z = 0$ (el número 6385 es aproximadamente el radio ecuatorial de la Tierra en Km. más 7). Supongamos que B parte de viaje en un cierto instante $t = 0$ del tiempo de S , y describe una circunferencia del sistema inercial S de centro el origen y radio $R = 6385$ Km. a una velocidad (medida en el sistema inercial S) de 1000 Km. por hora (si la Tierra fuera un sistema inercial, podríamos imaginar que B coge un avión comercial y da una vuelta a la Tierra volando a 7000 metros de altura, a una velocidad de 1000 Km/h). Dicha circunferencia tiene una longitud de 40118,138186 Km. El tiempo T que tardará en recorrer esta distancia será $T = 144425,29747083$ segundos. Las ecuaciones paramétricas de la circunferencia descrita por B son

$$x(t) = R \cos(2\pi/T)t, \quad y(t) = R \sin(2\pi/T)t, \quad z(t) = 0; \quad 0 \leq t \leq T.$$

Los observadores de S representan todos los sucesos en $\mathbb{R}^4$. La vida de B mientras da una vuelta a la circunferencia vendrá representada por el arco de hélice de $\mathbb{R}^4$ definido por

$$x(t) = R \cos(2\pi/T)t, \quad y(t) = R \sin(2\pi/T)t, \quad z(t) = 0, \quad t = t; \quad 0 \leq t \leq T.$$

El vector tangente a esta hélice en un punto de parámetro t será

$$(-R(2\pi/T) \sin(2\pi/T)t, R(2\pi/T) \cos(2\pi/T)t, 0, 1).$$

La norma de dicho vector por la métrica de Minkowski es $\sqrt{R^2(2\pi/T)^2 - c^2}$. La longitud en el espacio de Minkowski del arco de hélice es

$$\int_0^T \sqrt{R^2(2\pi/T)^2 - c^2} dt = T \sqrt{R^2(2\pi/T)^2 - c^2}.$$

Esta longitud dividida por ic es $T \sqrt{1 - (2\pi/T)^2(R/c)^2}$. Éste será el tiempo de duración del viaje según un reloj muy preciso que llevara B consigo (tiempo propio de B). En cambio el tiempo que según un reloj de A ha durado el viaje es T . El valor numérico de la diferencia de tiempos (dando a c el valor 300000) es 0,062 millonésimas de segundo. Por tanto, después del viaje B será $6,2 \times 10^{-8}$ segundos más joven que A .

DINÁMICA DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL

MASA E IMPULSIÓN

Por un procedimiento físico basado en el choque elástico (procedimiento que ahora no podemos describir por falta de espacio), a cada partícula material

se le asigna un número real positivo m , que denominamos masa de la partícula (si habéis oído decir que en relatividad la masa de un cuerpo varía con la velocidad, apresurémonos a precisar que la masa m de la que aquí hablamos es la masa en reposo).

Recordemos que el movimiento de cualquier partícula da lugar a una curva γ del espacio de Minkowski de vector tangente temporal en todo punto y que apunta hacia el futuro. Dicha curva puede parametrizarse por el tiempo propio τ , que es un parámetro intrínseco (que no depende de ningún sistema de referencia). Si m es la masa de una tal partícula, denominaremos cantidad de movimiento de Minkowski o impulsión de Minkowski de esta partícula en un instante τ_0 al vector $\vec{P} = (m d\gamma(\tau)/d\tau)_{\tau_0}$.

Elijamos ahora un sistema inercial S . A este sistema inercial corresponde una referencia $\{O, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ del espacio de Minkowski. En las coordenadas (x^1, x^2, x^3, t) correspondientes a dicha referencia la curva γ (parametrizada por t) se puede escribir: $x^1 = \gamma^1(t)$, $x^2 = \gamma^2(t)$, $x^3 = \gamma^3(t)$, $x^4 = t$. Si ponemos ahora t en función del tiempo propio τ , tendremos la parametrización siguiente respecto a τ : $x^1 = \gamma^1(\tau)$, $x^2 = \gamma^2(\tau)$, $x^3 = \gamma^3(\tau)$, $x^4 = t(\tau)$. Tendremos:

$$\vec{P} = m \frac{d\vec{\gamma}}{d\tau} = \left(m \frac{d\gamma^1}{d\tau}, m \frac{d\gamma^2}{d\tau}, m \frac{d\gamma^3}{d\tau}, m \frac{dt}{d\tau} \right) =$$

$$\frac{dt}{d\tau} \left(m \frac{d\gamma^1}{dt}, m \frac{d\gamma^2}{dt}, m \frac{d\gamma^3}{dt}, m \right) = \frac{dt}{d\tau} (mv^1, mv^2, mv^3, m),$$

donde $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$ es la velocidad usual de la partícula respecto al sistema inercial S . Por la definición de tiempo propio tendremos

$$\tau(t) = (1/c) \int_0^t \sqrt{g(d\vec{\gamma}/d\xi, d\vec{\gamma}/d\xi)} d\xi,$$

de donde

$$d\tau/dt = (1/c) \sqrt{g(d\vec{\gamma}/dt, d\vec{\gamma}/dt)} = (1/c) \sqrt{g((v^1, v^2, v^3, 1), (v^1, v^2, v^3, 1))}$$

$$= (1/c) \sqrt{c^2 - \|\vec{v}\|^2} = \sqrt{1 - (\|\vec{v}\|/c)^2},$$

donde $\|\vec{v}\| = \sqrt{(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2}$. Por tanto, el vector impulsión de Minkowski, en las coordenadas correspondientes a un sistema inercial se expresa así:

$$\vec{P} = \frac{1}{\sqrt{1 - \|\vec{v}\|^2/c^2}} (mv^1, mv^2, mv^3, m).$$

(Obsérvese que de la fórmula anterior implícitamente se desprende que el módulo $\|\vec{v}\|$ del vector velocidad $\vec{v}$ de la partícula respecto a un sistema inercial debe ser menor que c .) Teniendo en cuenta el desarrollo de Taylor

$(1/\sqrt{1-x^2}) = 1 + x^2/2 + \dots$, tendremos: $\vec{P} = (mv^1, mv^2, mv^3, m + m \|v\|^2/2c^2) + \dots$, donde hemos explicitado sólo los términos hasta el orden 2 en la velocidad. Vemos, pues, que para velocidades pequeñas respecto a un sistema inercial, las tres primeras componentes de $\vec{P}$ corresponden aproximadamente a la impulsión clásica, mientras que la cuarta componente corresponde aproximadamente a la masa incrementada en la energía cinética dividida por c^2 . Se define la energía total de la partícula en relación con un sistema inercial como la cuarta componente de $\vec{P}$ multiplicada por c^2 . La energía es pues un concepto que no es intrínseco, que depende del sistema inercial.

LEYES DEL CHOQUE. EQUIVALENCIA DE MASA Y ENERGÍA

En mecánica clásica una de las leyes del choque de dos partículas es la **conservación de la impulsión**: la impulsión del sistema formado por las dos partículas permanece constante antes y después del choque. Esta ley rige cualquier tipo de choque, tanto los elásticos como los inelásticos. En mecánica clásica se define choque elástico de dos partículas como el choque en que se conserva la energía cinética. Es decir, aquél en que la energía cinética del sistema antes del choque coincide con la energía cinética del sistema después del choque. En mecánica clásica se definen los choques completamente inelásticos como aquéllos en que las dos partículas permanecen juntas después del choque. Entre los choques elásticos y los completamente inelásticos hay muchas clases intermedias de choques. En los choques que no son elásticos se pierde, por definición, energía cinética, la cual se transforma en calor.

¿Cómo formularemos en relatividad las leyes del choque? En virtud del postulado 3 de la relatividad especial, la ley que demos ha de ser intrínseca. O sea, independiente de cualquier sistema inercial. Puesto que en relatividad el único concepto intrínseco que se asemeja a la impulsión clásica es la impulsión de Minkowski, parece razonable admitir como ley del choque relativista de dos partículas, la conservación de la impulsión de Minkowski del sistema (formado por las dos partículas) antes y después del choque. Las leyes físicas no se demuestran. El único criterio que usaremos para admitir esta ley es que sea una ley intrínseca (que lo es) y que para velocidades pequeñas coincida con la ley clásica que regula el choque de dos partículas. Ahora bien, para velocidades pequeñas la conservación de la impulsión de Minkowski comporta la conservación de la impulsión clásica (tres primeras componentes) y la conservación de la energía (cuarta componente). Por tanto, para velocidades pequeñas hallamos las leyes clásicas del choque elástico. ¿Y los choques inelásticos, que no existen en relatividad?

Para contestar la pregunta anterior estudiemos primero el choque de dos partículas de la misma masa m que se mueven respecto a un sistema inercial con velocidades opuestas de igual módulo. Elijamos los ejes de este sistema de manera que el movimiento de las dos partículas tenga lugar sobre el eje de las x . Supongamos que las velocidades de las partículas son $\vec{v} = (v, 0, 0)$ y $-\vec{v} = (-v, 0, 0)$. La impulsión de Minkowski del sistema antes

del choque será $(mv/\sqrt{1-v^2/c^2}, 0, 0, m/\sqrt{1-v^2/c^2}) + (-mv/\sqrt{1-v^2/c^2}, 0, 0, m/\sqrt{1-v^2/c^2}) = (0, 0, 0, 2m/\sqrt{1-v^2/c^2})$. Si se consiguiera que las dos partículas permanecieran juntas después del choque con velocidad nula respecto al sistema inercial S (tal como pasa en un choque completamente inelástico en mecánica clásica), la impulsión de Minkowski después del choque sería $(0, 0, 0, m')$, con m' la suma de las masas de las dos partículas. Igualando este vector a la impulsión antes del choque, vemos que si estas dos impulsiones han de ser iguales, se ha de cumplir que $m' = 2m/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Por tanto, tendríamos que suponer que la masa del sistema después del choque es superior a la masa $2m$ del sistema antes del choque. La diferencia $m' - 2m$ de masas después y antes del choque sería $2m((1/\sqrt{1-v^2/c^2}) - 1) \cong mv^2/c^2$. Tendríamos que admitir, pues, que la energía cinética se invierte en aumentar la masa. Así pues, si las partículas permanecen juntas después del choque, o bien se aumenta la masa del sistema en una cantidad aproximadamente igual a la energía cinética clásica dividida por c^2 , o bien dicha energía se transforma en calor (otra forma de energía). En cualquier caso hemos de admitir que *toda forma de energía (cinética, calorífica, etc.) equivale a masa multiplicada por c^2* .

FUERZA DE MINKOWSKI

Consideremos una partícula de masa m que se mueve. Sea $\vec{P} = m d\gamma/d\tau$ la impulsión de Minkowski de dicha partícula. Definimos la fuerza de Minkowski de la partícula como $\vec{F} = d\vec{P}/d\tau$. Evidentemente la fuerza de Minkowski es un concepto intrínseco asociado a la partícula que se mueve. Ahora bien, dado un sistema inercial S , el vector $\vec{F}$ tendrá cuatro componentes en la referencia del espacio de Minkowski asociada a S . $\vec{F} = (F^1, F^2, F^3, F^4)$. Las tres primeras componentes vienen dadas por

$$F^i = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^i}{\sqrt{1 - \|v\|^2/c^2}} \right) \frac{dt}{d\tau},$$

donde (v^1, v^2, v^3) representa el vector velocidad (ordinaria) de la partícula respecto al sistema inercial. Entonces, un cálculo inmediato prueba que si designamos por $\alpha = \sqrt{1 - \|v\|^2/c^2}$, se tiene

$$(d/dt)(mv^i/\alpha) = (1/\alpha)(mdv^i/dt) + \alpha^{-3}(mv^i/c^2)(d\|v\|/dt).$$

Si en un instante τ_0 del tiempo propio de la partícula elegimos un sistema inercial respecto al cual la partícula no se mueve en aquel instante, entonces en dicho sistema y en dicho instante las tres primeras componentes de $\vec{F}$ respecto a la referencia $\{O; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ asociada al sistema inercial serán $F^i = mdv^i/dt$ (la fuerza de Newton clásica). La cuarta componente F^4 en esta referencia es nula como veremos a continuación. En efecto, en general se tiene

$$F^4 = \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{\alpha} \right) \frac{dt}{d\tau} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{\alpha} \right) \frac{1}{\alpha} = \frac{m\alpha^{-4} \|v\|}{c^2} \frac{d\|v\|}{dt},$$

que se anula cuando $\vec{v} = 0$.

Resumiendo, si en un instante τ_0 del tiempo propio de la partícula tomamos un sistema inercial respecto al cual la partícula no se mueve en aquel instante, la fuerza de Minkowski tiene componentes $(mdv^1/dt, mdv^2/dt, mdv^3/dt, 0)$. Ello nos lleva a introducir la definición de sistema inercial propio de la partícula (en cada instante de su tiempo propio) como un sistema inercial respecto al cual la partícula no se mueve en aquel instante. Las tres primeras componentes de la fuerza de Minkowski respecto a la referencia del espacio de Minkowski asociada a un tal sistema, coinciden con la fuerza de Newton en aquel sistema inercial, y la cuarta, es nula.

DINÁMICA RELATIVISTA DE FLUIDOS

En las ecuaciones clásicas de la mecánica de fluidos intervienen las variables siguientes: la densidad de masa ρ , el tensor de los esfuerzos T , el vector densidad de fuerza exterior $\vec{f}$, el campo de velocidades del fluido $\vec{v}$. Es obvio que todas estas variables dependen del sistema inercial elegido. Haciendo los mínimos cambios posibles a las ecuaciones clásicas, tendríamos que encontrar otras ecuaciones intrínsecas de tal manera que estas nuevas ecuaciones se parezcan bastante a las clásicas en cualquier sistema inercial concreto respecto al cual el fluido se mueva con velocidades pequeñas. Para escribir unas ecuaciones intrínsecas tendríamos que partir de conceptos intrínsecos que substituyeran a los conceptos clásicos de densidad de masa, tensor de los esfuerzos, vector densidad de fuerza exterior, etc. Ello es lo que vamos a hacer a continuación.

Podemos pensar el fluido como un conjunto de partículas que se mueven. La vida de cada una de las partículas de este fluido vendrá representada en el espacio-tiempo de Minkowski por una curva de vector tangente temporal. Supondremos, como hacíamos en mecánica clásica, que dos partículas del fluido no coinciden nunca en un mismo lugar. Ello comporta que las curvas que representan la vida de las partículas del fluido no se corten nunca entre ellas. Cada una de dichas curvas va parametrizada por el tiempo propio de la partícula. El vector tangente en cada punto de estas curvas será un campo vectorial temporal, de norma *ic*, que apunta hacia el futuro. Así pues, la vida del fluido viene representada por la familia de curvas tangentes a un campo vectorial temporal $\vec{u}$, de norma *ic*, que apunta hacia el futuro, definido en un cierto abierto V del espacio de Minkowski $(\mathbb{R}^4, g)$. $\vec{u}$ se denomina **campo de velocidades (de Minkowski) del fluido**.

Sea P un punto de V . Hay una única partícula del fluido cuya vida es una curva $\gamma(\tau)$ que pasa por P . Sea τ_0 el tiempo propio de esta partícula para el cual $\gamma(\tau_0) = P$. Consideremos una referencia ortonormal del espacio de Minkowski de origen P y con el cuarto vector igual a $\vec{u}_P$. O sea, una referencia

de la forma $\{P; \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3, \vec{u}_P\}$. Dicha referencia corresponde a un sistema inercial S_P que es propio de la partícula del fluido cuya vida viene representada por γ en el instante τ_0 de su tiempo propio (el instante τ_0 del tiempo propio de la partícula corresponde al instante inicial $t = 0$ del sistema inercial S_P). Se define la densidad propia de masa-energía del fluido como la función ρ sobre V que en cada punto P representa la densidad de masa clásica del fluido medida desde el sistema inercial S_P en su origen y en su instante inicial. Se define el vector densidad de fuerza exterior de Minkowski (que actúa sobre el fluido) como el campo vectorial $\vec{f}$ sobre V que en cada P de V es el vector que en la referencia $\{P; \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3, \vec{u}_P\}$ tiene por componentes $(f^1, f^2, f^3, 0)$, donde f^1, f^2, f^3 son las tres componentes del vector densidad de fuerza exterior de la mecánica clásica, medida desde el sistema inercial S_P en su origen, en el instante $t = 0$. Se define el tensor de los esfuerzos T del fluido como el campo tensorial de tipo $(1, 1)$ sobre V definido en cada P de V como el tensor T_P cuyas componentes en la referencia $\{P; \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3, \vec{u}_P\}$ quedan determinadas por las siguientes condiciones: $T_i^i = T_i^4 = 0$ para $i = 1, 2, 3$, $T_4^4 = 0$, y T_j^i (cuando $i, j = 1, 2, 3$) son las componentes del tensor de los esfuerzos del fluido de la mecánica clásica, medido desde el sistema inercial S_P en su origen, en el instante $t = 0$. Todos estos conceptos son intrínsecos.

Consideremos en el espacio de Minkowski la ecuación $\text{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u} - T) = \vec{f}$, donde $\vec{u}$ es el campo de velocidades de Minkowski del fluido, ρ es la densidad propia, T es el tensor de los esfuerzos en el espacio de Minkowski y $\vec{f}$ el vector densidad de fuerza exterior de Minkowski. Puesto que todas las variables que intervienen en la ecuación anterior están definidas intrínsecamente, dicha ecuación es intrínseca. Pero ¿qué relación tiene con las ecuaciones clásicas del movimiento de un fluido? Supongamos que nosotros nos hallamos en un sistema inercial S , y que el fluido se mueve respecto a S con velocidades pequeñas. En cada punto del fluido y en cada instante de tiempo habrá un sistema inercial S' propio (tal que la partícula de fluido está en aquel instante en el origen de S' y se mueve con velocidad nula respecto a S' en aquel instante). Estos sistemas S' son los que hemos utilizado para definir los conceptos de densidad propia, vector densidad de fuerza exterior de Minkowski, etc. Si todas las mediciones (de densidad propia, vector densidad de fuerza exterior de Minkowski, etc.) que debemos realizar en cada uno de los S' las realizásemos todas en S ¿qué sucedería? Pues que casi obtendríamos los mismos valores que si las hubiéramos realizado en cada uno de los S' (ya que cada S' se mueve respecto a S con velocidad muy pequeña). Puesto que obtendríamos prácticamente los mismos valores, realicémoslas en S . De este modo supondremos que la densidad propia coincide con la densidad medida en S , etc. El sistema inercial S dará lugar, como siempre, a una referencia del espacio de Minkowski. Escribamos la ecuación $\text{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u} - T) = \vec{f}$ en componentes respecto a dicha referencia. La ecuación se escribirá

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} (\rho u^\alpha u^j - T^{\alpha j}) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho u^\alpha u^4 - T^{\alpha 4}) = f^\alpha,$$

donde los índices latinos varían de 1 a 3 y los griegos de 1 a 4. Puesto que suponemos que todos los sistemas propios S' coinciden con S , $T^{\alpha 4} = 0$. Por otro lado, para velocidades pequeñas el vector $\vec{u}$ es aproximadamente igual a $(v^1, v^2, v^3, 1)$, donde $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$ es el campo de velocidades ordinarias del fluido respecto al sistema inercial S . Vemos pues que las tres primeras ecuaciones anteriores (correspondientes a $\alpha = 1, 2, 3$) se pueden aproximar por $\text{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v} - T) + \partial(\rho \vec{v})/\partial t = \vec{f}$ (ecuación vectorial en $\mathbb{R}^3$), y que la última (correspondiente a $\alpha = 4$) se puede aproximar por $\text{div}(\rho \vec{v}) + \partial \rho / \partial t = 0$. Ambas ecuaciones son las ecuaciones clásicas del movimiento del fluido. Estas consideraciones nos llevan a aceptar la ecuación $\text{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u} - T) = \vec{f}$ como la ecuación que gobierna el movimiento del fluido en relatividad (puesto que es una ecuación intrínseca que para velocidades pequeñas se aproxima por las ecuaciones clásicas).

EL TENSOR DE IMPULSIÓN-ENERGÍA DE FLUIDO

Se define el tensor de impulsión-energía de un fluido como el campo tensorial (en un abierto del espacio de Minkowski) dos veces contravariante que con las notaciones del apartado anterior se expresa por $\mathcal{T} = (1/c^2)(\rho \vec{u} \otimes \vec{u} - T)$. A través de la métrica de Minkowski, cuando nos convenga podemos pensar también que $\mathcal{T}$ es una vez contravariante y una vez covariante, o bien que es dos veces covariante. Si pensamos $\mathcal{T}$ como aplicación lineal, es fácil ver que $\mathcal{T}$ sólo tiene un vector propio temporal, de norma ic , y que apunta hacia el futuro, que es $\vec{u}$, y que $-\rho$ es el valor propio correspondiente a este vector propio. Ello nos dice que el conocimiento de $\mathcal{T}$ implica el conocimiento de ρ , de $\vec{u}$ y del tensor de los esfuerzos. Puesto que $\rho \vec{u}$ es el vector densidad de impulsión-energía (o densidad de cantidad de movimiento) en el espacio de Minkowski y puesto que dicha información está contenida en $\mathcal{T}$, es lógico que hayamos denominado tensor de impulsión-energía al tensor $\mathcal{T}$. Veremos ahora que si el fluido es perfecto el tensor de impulsión-energía es

$$\mathcal{T} = \frac{1}{c^2} (\rho + p/c^2) \vec{u} \otimes \vec{u} + \frac{p}{c^2} g,$$

donde g es la métrica de Minkowski considerada como tensor *contravariante*. Para ver esto, designemos por $\mathcal{T}$ el tensor de impulsión-energía tal como lo hemos definido antes, y por $\tilde{\mathcal{T}}$ el segundo miembro de la expresión anterior. Queremos ver que $\mathcal{T} = \tilde{\mathcal{T}}$. En un punto cualquiera P del espacio de Minkowski tomemos una referencia ortonormal, $\{P; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$, con $\varepsilon_4 = \vec{u}_P$. Según la definición de $\mathcal{T}$ que hemos dado antes, tendremos: $\mathcal{T}^{ij} = -T^{ij}/c^2 = pg^{ij}/c^2$ (donde i, j varían de 1 a 3), $\mathcal{T}^{i4} = -T^{i4}/c^2 = 0$, $\mathcal{T}^{44} = \rho/c^2$. Es obvio ahora que las componentes de $\tilde{\mathcal{T}}$ en esta referencia coinciden con las de $\mathcal{T}$ que acabamos de calcular. Por tanto $\mathcal{T} = \tilde{\mathcal{T}}$.

La ecuación del movimiento del fluido es $c^2 \text{div } \mathcal{T} = \vec{f}$. En el caso de un fluido perfecto hay 6 variables escalares desconocidas (incógnitas) que nos interesa determinar a partir del conocimiento de $\vec{f}$. Estas 6 incógnitas son

ρ , p y las cuatro componentes de $\vec{u}$. Ahora bien, ρ y p acostumbran a estar relacionadas por una ecuación de estado, de manera que p es una cierta función conocida de ρ . Por otro lado, $\vec{u}$ tiene norma *ic*. Estas dos consideraciones reducen a 4 el número de incógnitas. Si se conocen las fuerzas exteriores $\vec{f}$, de la ecuación vectorial $c^2 \operatorname{div} \mathcal{T} = \vec{f}$ (en derivadas parciales de primer orden) se pueden obtener las cuatro incógnitas independientes, en el supuesto de conocer las mismas sobre una hipersuperficie espacial (condiciones iniciales). Así pues, si se conocen todas las variables del fluido en un instante $t = 0$ respecto a un sistema inercial, se conoce cómo evoluciona dicho fluido con el tiempo.

RELATIVIDAD GENERAL

FUNDAMENTOS

La relatividad especial que hemos desarrollado hasta ahora tenía por objeto modelizar los fenómenos físicos que se presentan en ausencia de gravedad. La relatividad general pretende introducir los campos gravitatorios en la teoría relativista. Einstein tardó mucho tiempo hasta que consiguió vislumbrar que las fuerzas gravitatorias en realidad no existen, sino que sólo son fruto del particular sistema de referencia de cada observador. De hecho un observador sometido al campo gravitatorio terrestre no notará los efectos de dicho campo si se halla en caída libre. Por el contrario, un observador que se halle en el interior de una caja cerrada y en ausencia de campos gravitatorios, tendrá la sensación de estar sometido a un campo gravitatorio si la caja en la que se encuentra se mueve con movimiento uniformemente acelerado respecto a otro observador inercial. En tal caso si deja en libertad una partícula de masa m verá que ésta sufre una aceleración relativa (respecto a él) constante, independiente del valor de m , y podrá atribuir dicha aceleración a un campo gravitatorio (en los campos gravitatorios la aceleración que adquiere una partícula también es independiente de su masa). Estas consideraciones llevaron a Einstein a intuir que las fuerzas gravitatorias no existen, sino que son fruto de una particular elección del sistema de referencia. Si en ausencia de gravedad el marco adecuado para presentar la teoría relativista era el espacio de Minkowski y cualquier fenómeno físico tenía una descripción geométrica adecuada en dicho espacio, en presencia de gravedad el marco adecuado pasaría a ser un espacio-tiempo con otra métrica (más adelante definiremos con precisión el concepto de espacio-tiempo). Es decir, los campos gravitatorios lo único que harían sería deformar la métrica del espacio-tiempo que dejaría de ser la de Minkowski y pasaría a ser otra más general.

Como hemos dicho la relatividad especial modeliza los fenómenos físicos en ausencia de gravedad. Repasemos brevemente cómo los modeliza.

Cualquier suceso viene representado por un punto del espacio de Minkowski. La vida de cualquier partícula material es una curva de dicho espacio de vector tangente temporal en todo punto que apunta hacia el futuro. El parámetro "arco" de dicha curva (que es imaginario) dividido por *ic* representa el tiempo propio de la partícula. Si la partícula material no está sometida a

ninguna fuerza (está en libertad) la curva que representa su vida es una recta (o sea, una geodésica del espacio de Minkowski) de vector tangente temporal que apunta hacia el futuro. La vida de un rayo de luz también es siempre una recta del espacio de Minkowski cuyo vector director $\vec{v}$ cumple las dos condiciones: 1) $\vec{v}$ pertenece a la adherencia del cono C^+ . 2) $g(\vec{v}, \vec{v}) = 0$, donde g es la métrica de Minkowski. Un sistema de referencia inercial (tres ejes perpendiculares del espacio ordinario que viajan por el espacio junto con observadores dotados de relojes, etc...) viene representado en el espacio de Minkowski por una referencia $\{O; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ con base $\{\varepsilon_\alpha\}$ ortonormal y con $\varepsilon_4 \in C^+$. A cualquier partícula material cuya vida se representa en el espacio de Minkowski por la curva $\gamma(\tau)$ se le asigna en cada instante τ de su tiempo propio un sistema inercial propio (que no es único) respecto al cual la partícula no se mueve en aquel instante. Este sistema inercial viene representado por una referencia $\{\gamma(\tau); \varepsilon_\alpha(\tau)\}$ del espacio de Minkowski que constituye una referencia móvil a lo largo de la curva $\gamma(\tau)$. Un observador no es más que una partícula material que se mueve, dotada en cada momento de su vida de su sistema inercial propio. Un tal observador puede, pues, pensarse como una curva $\gamma(\tau)$ del espacio de Minkowski dotada de una referencia móvil $\{\gamma(\tau); \varepsilon_\alpha(\tau)\}$ ortonormal para todo valor de τ con la condición que $\varepsilon_4(\tau)$ es tangente a $\gamma(\tau)$ para todo τ y $\varepsilon_4(\tau) \in C^+$. A cada partícula material se le asigna una masa m (su masa en reposo, o bien, su masa medida en un sistema inercial propio), masa que en principio puede cambiar mediante choques u otros fenómenos físicos. Si la vida de la partícula viene representada por la curva $\gamma(\tau)$ del espacio de Minkowski, en cada instante τ los vectores $\vec{P} = m\dot{\gamma}$ y $\vec{F} = m\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$ se denominan respectivamente impulsión y fuerza de Minkowski en el instante τ . Si la partícula de vida $\gamma(\tau)$ y masa m se encuentra en un cierto instante de su vida con un observador representado por una referencia móvil $\{\gamma'(\tau'); \varepsilon_\alpha(\tau')\}$ con $\gamma(\tau_0) = \gamma'(\tau'_0)$, entonces la cuarta componente de la impulsión $\vec{P}(\tau_0)$ de la partícula en la referencia $\{\gamma'(\tau'_0); \varepsilon_\alpha(\tau'_0)\}$ multiplicada por c^2 es la masa-energía de la partícula medida por el observador. La energía es pues un concepto que depende del observador.

Einstein pensó que la descripción geométrica del párrafo anterior, válida en ausencia de campos gravitatorios, debería continuar siendo válida en presencia de campos gravitatorios sin más que substituir la métrica de Minkowski por otra métrica similar a una métrica de Riemann (pero no definida positiva) que cumpla la propiedad que en cada espacio tangente exista una base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ tal que los productos escalares de sus elementos puedan representarse por la matriz

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Una tal métrica se denomina métrica de Lorentz.

Einstein trabajaba localmente en abiertos de $\mathbb{R}^4$. Si se quiere trabajar globalmente, deben considerarse variedades de Lorentz (V, g) , donde V es una variedad de dimensión 4 y g una métrica de Lorentz sobre V . En una variedad de Lorentz (V, g) , para cada punto x de V un vector v del espacio tangente $T_x(V)$ se denomina temporal si $g(v, v) < 0$, espacial si $g(v, v) > 0$ y se llama nulo si $g(v, v) = 0$. Para cada punto x de V sea C_x el cono abierto del espacio tangente $T_x(V)$ formado por los vectores temporales en dicho punto. C_x tiene dos componentes conexas. Una variedad de Lorentz (V, g) se dice que admite una orientación temporal si es posible elegir una componente conexa C_x^+ de C_x para cada $x \in V$ de manera que se cumpla la siguiente condición de coherencia: en cada carta local U de V existe un campo vectorial diferenciable X tal que $X_x \in C_x^+$. La elección efectiva de C_x^+ para cada x se denomina una orientación temporal de V . (Mediante la utilización de una partición de la unidad puede demostrarse fácilmente que una variedad de Lorentz (V, g) es orientable temporalmente si y sólo si existe un campo vectorial diferenciable X tal que $g(X, X) < 0$ en todo punto.) Una variedad de Lorentz (orientable respecto al tiempo) con una orientación temporal se denomina *espacio-tiempo*.

Resumiendo pues, la idea fundamental de Einstein para introducir la relatividad general fue intuir que la descripción geométrica en el espacio de Minkowski que se hace de los fenómenos físicos en ausencia de campos gravitatorios, debía continuar siendo válida en presencia de campos gravitatorios sin más que substituir el espacio de Minkowski por un espacio-tiempo apropiado.

ECUACIÓN DE EINSTEIN

La métrica g de la variedad de Lorentz (V, g) que hay que considerar debe venir determinada de alguna manera por la materia que crea el campo gravitatorio. Pero ¿cómo?

En primer lugar, aunque las fuerzas gravitatorias no existan en realidad y se deban a una mala elección de las coordenadas, deberíamos explicar cómo se nos presentan a nosotros dichas fuerzas aparentes. Si dejamos en libertad una partícula, la vida de la misma se representará por una geodésica $\gamma(\tau)$ de la variedad de Lorentz (V, g) . La condición de que γ sea geodésica se escribe $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$, que en un sistema de coordenadas (x^α) se escribe $d^2\gamma^\lambda/d\tau^2 = -\sum \Gamma_{\mu\nu}^\lambda (d\gamma^\mu/d\tau)(d\gamma^\nu/d\tau)$. Las derivadas segundas $d^2\gamma^\lambda/d\tau^2$ serán las responsables de la aceleración aparente de la partícula. Observemos que dicha aceleración aparente depende de los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ y que éstos, a su vez, dependen de los coeficientes $g_{\alpha\beta}$ de la métrica y de sus derivadas. Ello nos conduce a la siguiente pregunta: ¿En la mecánica clásica, existe algún objeto matemático cuyas derivadas de primer orden intervengan en la expresión de la aceleración de una partícula dejada en libertad bajo la acción de un campo gravitatorio? La respuesta es afirmativa y el objeto matemático al que se refiere la pregunta es la función potencial del campo gravitatorio (cuyo gradiente con el signo cambiado da precisamente dicha aceleración). Por tanto, los coeficientes $g_{\alpha\beta}$ de la métrica g juegan en relatividad general el mismo papel que

en mecánica clásica jugaba la función potencial del campo gravitatorio. Por ello a dichos coeficientes $g_{\alpha\beta}$ se les denomina a veces potenciales gravitatorios.

¿De que manera se determina en mecánica clásica la función potencial de un campo gravitatorio a partir de la materia que lo origina? Si la materia que origina el campo gravitatorio es un medio continuo de función densidad ρ , el potencial gravitatorio V originado por dicha materia verifica la ecuación de Poisson

$$\Delta V = 4\pi K\rho,$$

donde K es la constante de gravitación universal y Δ es el operador de Laplace $\partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2$. La ecuación de Poisson es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden que, conocida ρ , permite determinar V a partir de unas condiciones de contorno.



J. C. MAXWELL

Einstein pensó que en relatividad general debía existir una ley parecida que permitiera determinar los coeficientes $g_{\alpha\beta}$ de la métrica g conociendo de alguna manera la materia causante del campo gravitatorio. Las leyes fundamentales de la Física (leyes de Maxwell del electromagnetismo, ley de Newton de la gravitación, etc.) no se demuestran. Simplemente, algún físico las propone (a modo de axioma) para explicar a partir de ellas el comportamiento de fenómenos más complejos. Einstein quiso intuir cómo debiera ser una ley que permitiera determinar la métrica g a partir del conocimiento de la materia responsable del campo gravitatorio. Para ello tomó como punto de partida la ley clásica de Poisson y trabajó simplemente por analogía con la teoría clásica. En dicha teoría hay sólo una

función a determinar (el potencial V), mientras que en relatividad las componentes de g (tensor simétrico de orden 2 en una variedad de dimensión 4) son 10. Pensó pues que debía substituir la ecuación de Poisson por 10 ecuaciones escalares o bien por una ecuación tensorial entre tensores simétricos de orden 2. Así que se imaginó que la ecuación clásica de Poisson debía substituirse por una ecuación tensorial de la forma

$$G = \chi \mathcal{T},$$

donde G fuera un tensor simétrico cuyas componentes en cualquier carta local fueran funciones de $g_{\alpha\beta}$ y de sus derivadas hasta el orden 2 (puesto que en la ecuación de Poisson figuran sólo derivadas hasta el orden 2), χ fuera una constante y $\mathcal{T}$ un tensor simétrico de orden 2 que contuviera toda la información sobre la materia. En mecánica relativista de fluidos (en relatividad especial), aparece el tensor de impulsión-energía que es un tensor simétrico de orden 2

que describe de manera total la materia del medio. Einstein pensó pues que el candidato natural como tensor $\mathcal{T}$ de su ecuación era el tensor de impulsión-energía. Según su filosofía el paso de la relatividad especial a la general debía hacerse únicamente cambiando la métrica g que en el caso de la relatividad especial era la de Minkowski por otra métrica de Lorentz conveniente (la que saliese como solución de su ecuación). De manera que si antes hemos visto en el caso particular de fluidos perfectos qué forma tenía en relatividad especial el tensor $\mathcal{T}$ de impulsión-energía, ahora en relatividad general (y en el mismo caso particular de fluidos perfectos) tendrá la misma expresión, cambiando simplemente la métrica.

Recordemos que en relatividad especial la ecuación que rige la vida de un fluido (el estado del fluido en cada momento) es $c^2 \operatorname{div} \mathcal{T} = \vec{f}$, donde $\vec{f}$ indica la densidad de fuerza exterior de Minkowski que actúa sobre el fluido. Aquí, en relatividad general, suponemos que el medio continuo (no necesariamente fluido) es el que origina el campo gravitatorio, y también hemos supuesto que no existen fuerzas gravitatorias. Por tanto, en nuestro caso (no existen fuerzas exteriores) deberá verificarse $\operatorname{div} \mathcal{T} = 0$.

Antes de continuar repasemos brevemente qué significa la divergencia de un tensor de orden 2 en nuestro caso actual. En la sección DINÁMICA RELATIVISTA DE FLUIDOS hemos utilizado el concepto de divergencia de un tensor contravariante de orden 2 en el espacio de Minkowski. Si $\mathcal{T}$ era un tensor de este tipo, la divergencia de $\mathcal{T}$ significaba el campo vectorial dado por

$$(\operatorname{div} \mathcal{T})^\alpha = \sum_\beta \frac{\partial \mathcal{T}^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}.$$

En una variedad de Lorentz (V, g) la divergencia de un tensor $\mathcal{T}$ contravariante de orden 2 significa el campo vectorial definido por la contracción $(1, 1)$ de la diferencial covariante $\nabla \mathcal{T}$. Expliquemos qué significa esto en una carta local de coordenadas (x_α) . Si designamos por $\nabla_\lambda \mathcal{T}^{\mu\nu}$ las componentes de $\nabla_{\partial/\partial x_\lambda} \mathcal{T}$ dadas por

$$\nabla_{\partial/\partial x_\lambda} \mathcal{T} = \nabla_\lambda \mathcal{T}^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \otimes \frac{\partial}{\partial x_\nu},$$

entonces la divergencia de $\mathcal{T}$ es el campo vectorial que tiene por componentes $(\operatorname{div} \mathcal{T})^\nu = \sum_\mu \nabla_\mu \mathcal{T}^{\mu\nu}$. La divergencia de un tensor de orden 2 cualquiera (no necesariamente contravariante) se define de la siguiente manera: primero se pasa el tensor a contravariante (utilizando la métrica), luego se calcula su divergencia (definida anteriormente) y, finalmente, se vuelve al tipo de partida (utilizando la métrica).

Continuemos con la ecuación que estamos buscando (que relacione la materia con la métrica g). Habíamos dicho que por analogía con la mecánica clásica buscábamos una ecuación de la forma $G = \chi \mathcal{T}$, donde $\mathcal{T}$ sería el tensor de impulsión-energía de la materia (cumpliendo, por tanto, $\operatorname{div} \mathcal{T} = 0$), χ sería una constante y G sería un tensor simétrico de orden 2 cuyas componentes en cualquier carta local fueran funciones de $g_{\alpha\beta}$ y de sus derivadas hasta el

orden 2. En una variedad de Lorentz (o, también, en cualquier variedad de Riemann) ¿qué tensores simétricos de orden 2 conocemos cuyas componentes en cualquier carta local sean funciones de $g_{\alpha\beta}$ y de sus derivadas hasta el orden 2? El primer tensor que se nos ocurre con estas características es la curvatura de Ricci $\mathcal{R}$, tensor definido a partir del tensor de curvatura por $\mathcal{R}_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda} R^{\lambda}_{\alpha\lambda\beta}$. En principio parece pues que dicho tensor de Ricci podría ser candidato a ser el tensor G del primer miembro de la ecuación $G = \chi\mathcal{T}$. Pero como el segundo miembro de dicha ecuación es el tensor $\mathcal{T}$ de divergencia nula, el primer miembro también debe tener divergencia nula. ¿Cuál es la divergencia del tensor de Ricci? Un cálculo que utiliza las identidades de Bianchi del tensor de curvatura muestra que la divergencia del tensor de Ricci es $(1/2)dR$, donde dR indica la diferencial exterior de la curvatura escalar R (R se define como el escalar obtenido por contracción del tensor de Ricci $\mathcal{R}$. En componentes $R = \sum g^{\alpha\beta}\mathcal{R}_{\alpha\beta}$). A partir de este cálculo es inmediato observar que el tensor de Ricci tiene la misma divergencia que el tensor $(1/2)Rg$, donde g indica el tensor métrico. Por tanto, si se quiere un tensor con divergencia nula, el tensor de Ricci no nos sirve, pero el tensor $\mathcal{R} - (1/2)Rg$ sí. Además este tensor cumple los otros requerimientos exigidos al primer miembro de la ecuación $G = \chi\mathcal{T}$, a saber: ser simétrico y depender de los coeficientes de la métrica g y de sus derivadas hasta el orden 2. Einstein tomó pues como primer miembro G de su ecuación el tensor $\mathcal{R} - (1/2)Rg$ (que se denomina tensor de Einstein).

Si al tensor $\mathcal{R} - (1/2)Rg$ se le añade un término de la forma Λg , donde Λ es cualquier constante, el tensor $\mathcal{R} - (1/2)Rg + \Lambda g$ que se obtiene cumple también todos los requerimientos exigidos al primer miembro de la ecuación $G = \chi\mathcal{T}$. Por tanto, en principio, también podría tomarse como primer miembro de dicha ecuación. Poincaré demostró que los únicos tensores de orden 2 que cumplieran todos los requerimientos anteriores (simétricos, de divergencia nula, cuyas componentes dependieran sólo de los coeficientes $g_{\alpha\beta}$ de la métrica y de sus derivadas hasta el orden 2) eran los de la forma $\mathcal{R} - (1/2)Rg + \Lambda g$. Así pues la ecuación que Einstein buscaba (ecuación de Einstein) debía ser de la forma

$$\mathcal{R} - (1/2)Rg + \Lambda g = \chi\mathcal{T}.$$

La ecuación de Poisson $\Delta V = 4\pi K\rho$ que describe el potencial gravitatorio clásico V creado por una materia de densidad ρ debería ser una aproximación de la ecuación de Einstein. Es fácil ver que para que dicha aproximación sea posible, las constantes Λ y χ de la ecuación $\mathcal{R} - (1/2)Rg + \Lambda g = \chi\mathcal{T}$ deben ser aproximadamente $\Lambda = 0$ y $\chi = 8K\pi/c^2$, donde K es la constante de gravitación de Newton. La condición $\Lambda = 0$ no debe interpretarse de manera exacta, pues se obtiene al imponer que la ecuación de Poisson se obtenga de la de Einstein de manera aproximada. Lo único que afirma dicha condición es que el valor de Λ debe ser pequeño en valor absoluto, o nulo. Generalmente se toma el valor cero para la constante Λ de manera que se toma como ecuación de Einstein la ecuación $\mathcal{R} - (1/2)Rg = \chi\mathcal{T}$. En las regiones del espacio-tiempo donde no hay materia, el tensor de impulsión-energía $\mathcal{T}$ es nulo y la ecuación de Einstein se escribe $G = 0$, donde G es $\mathcal{R} - (1/2)Rg$. Puede verse de manera

inmediata que ello equivale a la anulación del tensor de Ricci. Por tanto, fuera de la materia que origina el campo gravitatorio, la métrica g debe ser de tensor de Ricci nulo.

Bibliografía

Para no perder al lector en un mar infinito e ilimitado de bibliografía sobre relatividad, damos solamente una lista de seis libros bien escogidos, ordenados por orden alfabético de autores. Haremos luego un breve comentario sobre cada uno de ellos.

- [1] EDDINGTON, A. S.: The mathematical theory of Relativity, *Chelsea Publishing Company*, 3th edition. New York, 1975.
- [2] EINSTEIN, A.: Sobre la teoría de la Relatividad especial y general, *Editorial Debate*, Madrid, 1998.
- [3] LICHNEROWICZ, A.: Éléments de calcul tensoriel, *Librairie Armand Colin*, 5ème edition. Paris, 1960.
- [4] O'NEIL, B.: Semi-Riemannian Geometry with applications to Relativity, *Academic Press*, 1983.
- [5] STRAUMANN, N.: General Relativity and Relativistic Astrophysics, *Springer-Verlag*, second printing, 1991.
- [6] WEYL, H.: Space-Time-Matter, *Dover Publications*, New York, 1952. Translated from the german by H.L.Brose

COMENTARIO SOBRE ESTOS LIBROS

El libro de **Einstein**, aunque divulgativo, explica a la perfección el origen de las ideas subyacentes tanto de la relatividad especial como de la general. Los libros de **Eddington** y **Weyl** son dos clásicos (muy completos y avanzados en su época) que mantienen, tanto en la presentación de la teoría como en el lenguaje utilizado, todo el frescor de los primeros tiempos de la relatividad. El libro de **Lichnerowicz**, en contra de lo que su título pudiera sugerir, contiene en muy pocas páginas una introducción a la mecánica clásica de fluidos y a la teoría de la relatividad, tanto especial como general. El libro de **Straumann** es quizá uno de los libros avanzados mejor escritos y más completos de relatividad. Finalmente la obra de **O'Neill** puede ser útil a los matemáticos que pretendan estudiar nociones básicas de relatividad general y de cosmología.

Joan Girbau. Departament de Matemàtiques.
Universitat Autònoma de Barcelona. 08193 Bellaterra, Barcelona.