Antonio A. Pulgarín García

Sobre la Caracterización del Álgebra Topológica de las Funciones Reales y Continuas sobre un Espacio Topológico

Memoria para la obtención del grado de
Doctor en Ciencias (Matemáticas)
por la
Universidad de Extremadura

Directores:
D. Francisco Montalvo Durán
D. Batildo Requejo Fernández

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

A Patricia y a Claudia

Agradecimientos

Quiero utilizar este pequeño rincón alejado de todo el rigor que envuelven estas páginas para expresar mi más sincera gratitud a todos aquellos que en mayor o menor medida han contribuido a que esta memoria haya podido realizarse. Deseo comenzar agradeciéndole muy especialmente a los profesores Montalvo y Requejo todo el tiempo que han empeñado en mi formación, así como el haberme dado la oportunidad de ser su discípulo. Para ellos sólo tengo palabras de admiración y respeto, y desde aquí quiero agradecerles todos los consejos y enseñanzas que me han brindado con su dedicación y talento. Quisiera agradecerle al profesor Fernández Castillo el haber sido mi tutor en esos primeros pasos dominados por la desorientación y el desánimo, donde su peculiar ironía me impregnó de un optimismo determinante en todo este proceso. No quiero olvidarme de Juan, Toro, Rubén y Luis, por compartir conmigo todas aquellas noches donde nació entre nosotros esa especial inquietud por las matemáticas. También quiero acordarme de Ricardo que además de un amigo ha sido para mi un guía a lo largo de todos estos años. Personalmente le quiero dar las gracias a Patricia por toda su paciencia, cariño y comprensión, y sobre todo por permitirme disponer del tiempo necesario a costa de renunciar al suyo propio, y a Claudia por hacerme la vida tan bonita. Por último quisiera agradecerles a mis Padres la oportunidad que me han dado permitiéndome disponer de una educación completa, y sobre todo por ser el espejo donde me miro cada día.

A todos y cada uno de vosotros os pertenece un pedazo de estas páginas. Gracias.

Índice General

Introducción

En esta memoria nos referiremos a $\mathcal{C}(X)$ como el conjunto de todas las funciones valoradas en $\mathbb{R}$ que son continuas en cada punto de un espacio topológico completamente regular X (que supondremos Hausdorff a lo largo de toda la introducción). En ella se dan soluciones parciales al clásico problema de la caracterización algebraico-topológica de $\mathcal{C}(X)$. Las herramientas básicas utilizadas son: diversos tópicos de la teoría de las estructuras algebraicas ordenadas, en concreto de los espacios de Riesz y las f-álgebras; la teoría de la dualidad en espacios localmente convexos; la teoría de las álgebras localmente m-convexas, en particular, la extensión a las mismas de los resultados de Gelfand sobre álgebras de Banach.

Las operaciones usuales de suma y producto de funciones, definidas punto a punto, dotan a $\mathcal{C}(X)$ de estructura de $\mathbb{R}$-álgebra. Asimismo el orden usual de $\mathbb{R}$ induce en $\mathcal{C}(X)$ un orden arquimediano compatible con las operaciones anteriores, a saber: $f \leq g$ si y sólo si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$. Es obvio que respecto a este orden $\mathcal{C}(X)$ es un retículo.

En esta memoria llamaremos retículo vectorial (ó espacio de Riesz), l-grupo, l-anillo, l-álgebra, ..., a un espacio vectorial real, grupo, anillo, $\mathbb{R}$-álgebra, ..., dotado de un orden respecto al cual tiene estructura de retículo, y que además es compatible con las operaciones. Un morfismo de retículos vectoriales, l-grupo, etc., será una aplicación lineal, morfismo de grupos, etc., que conserve los supremos e ínfimos finitos.

Con el fin de hacer un análisis sistemático sobre la caracterización de $\mathcal{C}(X)$ quizás convenga distinguir el problema algebraico del problema algebraico-topológico.

Caracterización algebraica de $\mathcal{C}(X)$

Abreviadamente el problema algebraico puede plantearse como sigue: en primer lugar nos interesamos en una parte de la rica estructura algebraica

de $\mathcal{C}(X)$, para fijar ideas, por ejemplo en la de anillo, y a continuación nos preguntamos por las propiedades internas (que se expresen en términos de la estructura de anillo) que deberá tener un anillo para ser isomorfo a un anillo de la forma $\mathcal{C}(X)$ para algún espacio topológico X que sea compacto, Lindelöf, ..., ó, con toda generalidad, completamente regular. De los diversos problemas que encierra el enunciado anterior, los que pueden considerarse resueltos, ó con una solución más satisfactoria desde el punto de vista matemático, son los que corresponden a X compacto. En este caso, nosotros destacaremos la caracterización dada por Yosida en 1942 [72] de $\mathcal{C}(X)$ como retículo vectorial (espacio de Riesz) arquimediano: *un retículo vectorial arquimediano E es l-isomorfo a $\mathcal{C}(X)$ para algún espacio compacto X si y sólo si es E uniformemente cerrado y existe $0 \leq e \in E$ tal que $E = \{x \colon |x| \leq ne$ para algún $n \in \mathbb{N}\}$* (se dice entonces que e es una *unidad fuerte de orden*) (véase Teorema 1.2.10 en esta memoria ó [43, Section 45]). Sin pretender ser exhaustivos, podemos citar también la de Ky Fan en 1949 [17] como grupo ordenado, la de Kohls en 1957 [41] como anillo, la de Henriksen-Johnson en 1961 [31] como Φ-álgebra, etc.

Para X no compacto, la más celebrada de las caracterizaciones ha sido, sin duda, la de Henriksen-Johnson de 1961 [31] para X un espacio de Lindelöf. La estructura con la que ellos trabajan es la de Φ-álgebra, un tipo especial de l-álgebras arquimedianas de las que $\mathcal{C}(X)$ es el mejor ejemplo. El enunciado preciso de su resultado, en la versión muy mejorada de Plank [57], es el siguiente: *una Φ-álgebra A uniformemente cerrada y cerrada por inversión es l-isomorfa a $\mathcal{C}(X)$ para algún espacio topológico Lindelöf X, si y sólo si, todo ideal propio uniformemente cerrado de A es intersección de ideales maximales reales* (véase Teorema 2.3.16).

Las soluciones dadas al problema algebráico en el caso general, es decir la caracterización de $\mathcal{C}(X)$ para X un espacio completamente regular, son más escasas. La primera, como anillo y como anillo ordenado, fue obtenida por Anderson y Blair en 1959 [2]. Pero esta caracterización ha sido tildada como de naturaleza *externa*, en el sentido de necesitar examinar, en cada caso, un gran número de extensiones del anillo para saber si éste es ó no un $\mathcal{C}(X)$. Caracterizaciones externas de $\mathcal{C}(X)$ como l-grupo, también en el caso general, han sido dadas en 1982 por Anderson (M) y Conrad [3]. En cuanto a caracterizaciones internas nosotros sólo conocemos dos, la de Anderson (F.W) de 1962 [1] y la de Jensen de 1969 [35], que refina la anterior. La crítica matemática sobre ellas no ha sido demasiado buena, pues éstas se expresan en términos poco manejables; de hecho Hager en 1976 [28] sigue buscando

(sin conseguirlo) una solución más agradable al problema, y aún en 1997 Henriksen considera un problema abierto la caracterización de $\mathcal{C}(X)$ para X completamente regular, dentro de la clase de las Φ-álgebras [30].

El método de trabajo en las diversas caracterizaciones no varía esencialmente. Puede dividirse en tres partes diferenciadas: dado A (anillo, retículo vectorial, Φ-álgebra, ...) se trataría de:

1. Investigar condiciones que permitan considerar A como un subconjunto (subanillo, subretículo, Φ-álgebra, ...) de $\mathcal{C}(\mathcal{S})$, donde $\mathcal{S}$ es un conjunto de morfismos de A en $\mathbb{R}$, dotado de la topología de subespacio de $\mathbb{R}^A$. Con otras palabras que el morfismo natural $A \to \mathcal{C}(\mathcal{S})$ que lleva cada punto $a \in A$ a la función $a \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ definida como $a(\omega) = \omega(a)$ sea inyectivo.

2. Considerar una topología asociada de manera natural a la estructura con la que se está trabajando (anillo, retículo vectorial, Φ-álgebra, ...), que haga continuas las operaciones de esa estructura y un teorema de densidad en $\mathcal{C}(X)$ relativo a esa topología.

3. Establecer condiciones internas sobre A tales que: i) A sea completo respecto a la uniformidad dada por la topología anterior; ii) la topología de A coincida con la de subespacio inducida por $\mathcal{C}(\mathcal{S})$; iii) A sea denso en $\mathcal{C}(\mathcal{S})$.

   Obviamente de esto resultará que A es un anillo, retículo vectorial, Φ-álgebra, ... isomorfo a $\mathcal{C}(\mathcal{S})$.

En la caracterización de Yosida de $\mathcal{C}(X)$ para X compacto, si E es un retículo vectorial arquimediano con unidad fuerte e, $\mathcal{S}$ es la familia de todos los morfismos de retículos vectoriales de E en $\mathbb{R}$ que aplican e en 1. Se tiene entonces, sin necesidad de hipótesis adicionales, que $\mathcal{S}$ es un espacio compacto no vacío (Proposición 1.2.4) y la representación $E \to \mathcal{C}(\mathcal{S})$ es inyectiva. La topología que se usa es la de la convergencia uniforme, que viene dada por la norma $\|x\|_e = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+ : |x| \leq \lambda e\}$, y el teorema de densidad el de Stone-Weierstrass. Para que E sea isomorfo a $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ es condición necesaria y suficiente que E sea completo, es decir uniformemente cerrado.

En la caracterización de Anderson de $\mathcal{C}(X)$ para X completamente regular, se parte de un anillo A al que se supone semisimple, es decir que existe un conjunto $\mathcal{S}$ de morfismo de anillos de A en $\mathbb{R}$ que aplican 1 en 1 tal que la representación $A \to \mathcal{C}(\mathcal{S})$ es inyectiva. Anderson considera en A la topología

inicial de la m-topología del anillo $\widehat{A}$ que representa a A en $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ y establece un teorema de m-densidad en $\mathcal{C}(X)$. Entonces impone a A tres condiciones de enunciado bastante antipático: i) que sea normal; ii) que sea σ^*-regular; iii) que sea completa. A partir de ellas consigue probar que $\widehat{A}$ es m-denso en $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ y que la m-topología en $\widehat{A}$ es justamente la topología de subespacio de $\mathcal{C}(\mathcal{S})$. La completitud de A da ya la igualdad $A = \mathcal{C}(\mathcal{S})$. Observemos que, respecto a la m-topología, $\mathcal{C}(X)$ tiene estructura de anillo topológico completo, cualquiera que sea el espacio completamente regular X, por eso la condición A completo no impone ninguna restricción a la topología de X.

Jensen caracteriza $\mathcal{C}(X)$ como Φ-álgebra. Para una Φ-álgebra A, considera el conjunto $\mathcal{S}$ de todos los morfismos de l-álgebra de A en $\mathbb{R}$ que aplican 1 en 1 y entonces: i) supone que $A \to \mathcal{C}(\mathcal{S})$ es inyectiva; ii) considera sobre A y $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ la topología de la convergencia uniforme (es obvio que si A y B son Φ-álgebras y $A \subseteq B$ entonces la topología de la convergencia uniforme de B induce en A la topología de la convergencia uniforme de A); iii) supone también que A es completa (uniformemente cerrada) y cerrada por inversión e impone una condición, que se expresa en términos de los ideales de A, que implica que A S^1-separa ceros disjuntos de $\mathcal{S}$. De esto último se deduce, aplicando el teorema de densidad uniforme de Hewitt [32], que $\widehat{A}$ es uniformemente denso en $\mathcal{C}^*(\mathcal{S})$. De las demás condiciones se obtiene entonces la igualdad $A = \mathcal{C}(\mathcal{S})$.

Aunque el objetivo fundamental de esta memoria es la caracterización de $\mathcal{C}(X)$ como álgebra topológica ordenada en ciertos casos particulares, que más adelante comentaremos, nosotros hemos obtenido también dos nuevas soluciones al problema de la caracterización algebraica de $\mathcal{C}(X)$ como Φ-álgebra. Son soluciones parciales, puesto que no resuelven el caso general en que X es un espacio completamente regular arbitrario, pero que se expresan en términos muy simples.

En la primera de ellas caracterizaremos $\mathcal{C}(X)$ para X un k_r-espacio realcompacto. Supuesto que A es una Φ-álgebra uniformemente cerrada, $\mathcal{S}$ será el conjunto todos los morfismos de l-álgebra de A en $\mathbb{R}$ que aplican 1 en 1. Siguiendo el esquema habitual, consideraremos en A la topología del orden τ_o, es decir la topología localmente convexa más fina que hace acotados a los intervalos cerrados, y el teorema de densidad que utilizaremos en nuestra argumentación será el de Stone-Weierstrass. Observemos que si X es realcompacto la topología del orden sobre $\mathcal{C}(X)$ coincide con la topología de la convergencia compacta (Corolario 4.3.14). Utilizaremos la notación $\mathcal{C}_k(X)$ para referirnos a $\mathcal{C}(X)$ dotado de la topología de la convergencia compacta. Nosotros probaremos que si (A, τ_o) es un álgebra localmente m-convexa y

completa (equivalentemente, cerrada por inversion y completa) entonces $\mathcal{S}$ es un k_r-espacio realcompacto y A es l-isomorfa a $\mathcal{C}(\mathcal{S})$. El recíproco es conocido (Teorema 3.3.16).

También caracterizaremos algebraicamente $\mathcal{C}(X)$ para X un espacio normal y realcompacto. Dada una Φ-álgebra uniformemente cerrada A, se procede como antes, sólo que ahora para probar que $(A, \tau_o) = \mathcal{C}_k(\mathcal{S})$ se aprovecha el resultado, ya citado antes, que dice: Si $B \subseteq \mathcal{C}(X)$ es un álgebra unitaria, uniformemente cerrada y cerrada por inversión (en $\mathcal{C}(X)$) que S^1-separa cerrados disjuntos, entonces $B = \mathcal{C}(X)$. Nosotros probamos que si i) (A, τ_o) es localmente m-convexo y Hausdorff, ii) en (A, τ_o) no existen ideales principales propios y densos, y iii) en (A, τ_o) no existen dos ideales cerrados cuya suma sea propia y densa, entonces $\mathcal{S}$ es un espacio normal y realcompacto, y A es l-isomorfa a $\mathcal{C}(\mathcal{S})$. Recíprocamente si X es un espacio normal y realcompacto entonces $\mathcal{C}_k(X) = (\mathcal{C}(X), \tau_o)$ satisface las tres condiciones anteriores. Además las condiciones i) y ii) pueden sustituirse por la condición A es cerrada por inversión en $\mathcal{C}(\mathcal{S})$.

Se pueden poner ejemplos de espacios realcompactos que son normales, que no son k_r-espacios (ni de Lindelöf): por ejemplo sea Y un conjunto de cardinal 2^c y $X = Y \cup \{\omega\}$ ($\omega \notin Y$) con la topología que tiene por abiertos a los subconjuntos de Y y a los conjuntos que contienen a ω cuyo complementario es de cardinal a lo sumo c.

También existen espacios realcompactos que son k_r-espacios no normales (ni de Lindelöf) (véase [25, Ejemplo 3K]).

Caracterización algebraico-topológica de $\mathcal{C}(X)$

Las dos caracterizaciones algebraicas que acabamos de comentar no son más que casos particulares de la solución que nosotros hemos encontrado al problema de la caracterización algebraica-topológica de $\mathcal{C}(X)$.

Sobre $\mathcal{C}(X)$ pueden definirse muchas topologías compatibles, según los casos, con algunas de las operaciones ahí definidas. Nos hemos referido ya a la m-topología, que dota a $\mathcal{C}(X)$ de estructura de anillo topológico; a la topología de la convergencia uniforme, para la que $\mathcal{C}(X)$ es un l-grupo topológico y también a la topología de la convergencia compacta para la que es un álgebra topológica.

El problema de la caracterización algebraico-topológica de $\mathcal{C}(X)$ puede enunciarse de forma análoga a como hicimos para el algebraico: ¿cuáles son los anillos topológicos, álgebras topológicas, l-álgebras topológicas, ... que son isomorfos y homeomorfos a algún $\mathcal{C}(X)$ dotado de una topología conc-

reta? Como antes, el caso general del problema será para X un espacio completamente regular y aspecto parciales del mismo se corresponderán con las diversas topologías que se consideren en X.

La primera caracterización de este tipo fue la obtenida por Gelfand en 1941 para álgebras de Banach complejas (véase [23]). La versión de ésta para álgebras de Banach reales es la siguiente:

Un álgebra de Banach real A es linealmente isométrica a algún álgebra del tipo $\mathcal{C}(X)$ para X compacto, respecto a la norma $\|f\|_\infty = \max\{|f(t)|\colon t \in X\}$, si y sólo si

(i) *A es estrictamente real, i.e., $1 + a^2$ es invertible para todo $a \in A$.*

(ii) *$\|a^2\| = \|a\|^2$ para todo $a \in A$.*

Arens en 1952 [6] generaliza el resultado de Gelfand, caracterizando las álgebras topológicas que son isomorfas y homeomorfas a $\mathcal{C}_k(X)$ para X localmente compacto y paracompacto. También Michael en 1952 en su famosa memoria sobre las álgebras localmente m-convexas (introducidas por Arens en 1946 [4]), da una condición para que un álgebra localmente m-convexa sea isomorfa y homeomorfa a algún $\mathcal{C}(X)$, respecto a una topología τ_M más débil, en general, que la de la convergencia compacta. Dicho resultado fue mejorado posteriormente por Morris y Wubert en 1965 [50]. Ellos caracterizan $\mathcal{C}(X)$, respecto a la topología τ_M de Michael, como un álgebra localmente m-convexa estrictamente real y completa cuya topología está determinada por una familia de m-seminormas $\{q_i\}$ con la propiedad $q_i(a^2) = q_i(a)^2$ para todo a. Dada un álgebra A en estas condiciones, ellos obtienen su resultado por aplicación del teorema de Gelfand a la complección del álgebra normada $A_{q_i} = A/N_{q_i}$, donde $N_{q_i} = \{a \in A\colon q_i(a) = 0\}$.

De nuevo en este problema, nuestro punto de partida serán las álgebras ordenadas, en concreto las Φ-álgebras uniformemente cerradas, marcando pues una diferencia con respecto a las caracterizaciones anteriores. Nosotros caracterizaremos, en dos casos particulares, $\mathcal{C}_k(X)$ como Φ-álgebra localmente m-convexa. El esquema de trabajo es idéntico al ya señalado en el caso algebraico. Ahora, dada una Φ-álgebra localmente m-convexa A tomamos $\mathcal{S} = \operatorname{Spec}_t A$, donde $\operatorname{Spec}_t A$ es el conjunto de todos los morfismos continuos de álgebras de A en $\mathbb{R}$ dotado de la topología débil evidente; el espacio topológico $\operatorname{Spec}_t A$ se denomina *espectro topológico* de A.

En la primera de ellas supondremos que X es un k_r-espacio realcompacto. El motivo de elegir una topología con estas propiedades es que en este primer caso caracterizaremos $\mathcal{C}_k(X)$ cuando este álgebra topológica es completa y además su topología coincide con la del orden, y esto sucede justamente

cuando X es de ese tipo (véanse [15, p. 117] y [18]). Precisamente por esto, en este caso, una parte del problema consiste en caracterizar la topología del orden, es decir en establecer condiciones para determinar τ_o entre las topologías τ que dotan a A de espacio localmente convexo y completo. A este respecto, se tiene que $\tau = \tau_o$ si y sólo si (A, τ) es bornológico y completo y cada intervalo cerrado respecto al orden es τ-acotado (véase Schaefer [64]).

Supuesto ya que $\tau = \tau_o$, lo que que queda del problema ya ha sido considerado, se trata de la primera de las dos caracterización algebraica, que antes comentábamos.

Para la segunda caracterización de $\mathcal{C}_k(X)$ que presentamos en esta memoria supondremos que X es un espacio normal. Dada una Φ-álgebra uniformemente cerrada A y una topología τ sobre A localmente m-convexa, la construcción del isomorfismo y el homeomorfismo entre A y $\mathcal{C}_k(X)$, vía la representación $(A, \tau) \to \mathcal{C}_k(X)$, se basa esencialmente en un resultado de Requejo [61]. En ese trabajo se caracteriza la topología τ_k de la convergencia compacta de $\mathcal{C}(X)$ para X normal. Es bien conocido que, si X es un espacio completamente regular, existe una biyección entre los cerrados de X y los ideales cerrados de $\mathcal{C}_k(X)$ (Morris y Wulbert [50]); Requejo demuestra que si X es un espacio normal y τ es una topología localmente m-convexa y Hausdorff sobre $\mathcal{C}(X)$, para la que se da tal biyección, entonces $\tau \leq \tau_k$; él prueba también que la desigualdad contraria $\tau_k \leq \tau$ es cierta si y sólo si el conjunto $\{f \in \mathcal{C}(K) \colon 0 \notin f(K)\}$ es τ-abierto para todo compacto K de X.

Nosotros hemos probado que, más generalmente, si (A, τ) es un álgebra localmente m-convexa y Hausdorff que separa cerrados de $X = \operatorname{Spec}_t A$ (en particular, X es normal) y satisface esas dos condiciones últimas y A es cerrada por inversión, entonces (A, τ) es l-isomorfo y homeomorfo a $\mathcal{C}_k(X)$. Por otra parte, la referencia al $\operatorname{Spec}_t A$ en todo lo anterior puede evitarse, pudiéndose sustituir las condiciones correspondientes por otras que se expresan en términos de los ideales cerrados de A.

Nosotros consideramos separadamente el caso X normal y realcompacto. Puesto que entonces $\mathcal{C}_k(X) = (\mathcal{C}(X), \tau_o)$, para que la representación $(A, \tau) \to \mathcal{C}_k(\operatorname{Spec}_t A)$ sea un l-isomorfismo y homeomorfismo, bastará obtener primero condiciones para que τ coincida con la topología del orden τ_o, y conseguir después el l-isomorfismo algebraico. Acorde con esto, hemos probado que $\tau = \tau_o$ si y sólo si i) τ es compatible con el orden, i.e., cada intervalo cerrado es τ-acotado; ii) cada ideal maximal real es τ-cerrado y iii) para I ideal τ-cerrado se tiene que A/I es una Q-álgebra (los elementos inversibles constituyen un abierto) si y sólo si 1 es unidad fuerte de A/I.

En cuanto a las condiciones para el isomorfismo algebraico, éstas han sido ya comentadas.

La memoria está dividida en cinco capítulos en los se interelacionan tópicos concretos correspondiente a extensas areas matemáticas. Para facilitar la lectura y poner de manifiesto cuáles son los métodos utilizados, hemos incorporado prácticamente todas las demostraciones de los resultados que se exponen. En algunos de ellos las demostraciones son originales ó no son las mismas que hicieron sus autores. Puesto que muchos de esos resultados conocidos aparecen en contextos más generales, a fin de hacer una presentación unificada y coherente, hemos tenido necesidad de realizar una tarea de filtrado que, en ocasiones, nos ha resultado francamente ardua.

Capítulo 1

Se tratan en este primer capítulo aspectos puramente algebraicos acerca de las estructuras de orden dentro del marco de los espacios vectoriales reales. Nos interesan especialmente los retículos vectoriales arquimedianos con unidad débil de orden. La referencia clásica sobre retículos vectoriales, que, por un lado recoge y unifica las diversas aportaciones realizadas anteriormente, y por otro establece la metodología habitual en esta materia, es la obra de Luxemburg y Zaanen [43], Riesz Spaces I. Es preciso destacar que paralelamente a esta teoría, del gusto de los analistas, se ha desarrollado otra de un parecido evidente con la anterior, que es la teoría de los grupos y anillos retículo-ordenados (también denominados l-grupos y l-anillos), con métodos más del gusto de los algebristas. La obra más conocida y precursora de posteriores investigaciones en este campo es el libro de Birkhoff [11], Lattice Theory. A ella hay que añadir la excelente recopilación hecha por Bigard, Kiemel y Wolfenstein [10]. Ambas tendencias, aunque se mantienen actualmente, han confluído con frecuencia a la hora de abordar problemas concretos, algunos de los cuales se abordan en esta memoria.

En la sección 1 se consideran las propiedades fundamentales de un retículo vectorial, estudiando con especial interés sus l-subespacios maximales.

En la sección 2 se introduce el espectro de un retículo vectorial con unidad débil de orden. Dado un retículo vectorial E con unidad débil de orden e, definimos respectivamente el *espectro y el espectro acotado* de E como

$$\operatorname{Spec} E = \{\omega : E \to \mathbb{R} \text{ morfismo de retículos vectoriales tal que } \omega(e) = 1\},$$

$$\operatorname{Spec} E^* = \{\omega : E^* \to \mathbb{R} \text{ morfismo de retículos vectoriales tal que } \omega(e) = 1\},$$

donde $E^* = \{x \in E : |x| \leq ne$ para algún $n \in \mathbb{N}\}$ es el *retículo de los elementos acotados de* E. Se prueba que si E es arquimediano entonces $\operatorname{Spec} E^*$ ($\operatorname{Spec} E$) dotado de la topología débil definida por E^* (E) es un espacio topológico compacto (realcompacto) (véanse 1.2.4 y 1.2.13), y que la representación

$$E^* \to \mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*)$$

es un morfismo de retículos inyectivo. Además, si dotamos a E^* de la norma

$$\|x\|_e = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+ : |x| \leq \lambda e\},$$

entonces dicha representación es una isometría (considerando $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*)$ dotado de la norma del supremo) (véase 1.2.6). No sucede lo mismo con la representación

$$E \to \mathcal{C}(\operatorname{Spec} E)\,.$$

Concretamente: no necesariamente $\operatorname{Spec} E \neq \varnothing$ (véase [43, p. 159]), ni la representación de Riesz es inyectiva, y aunque tal representación sea inyectiva y E sea e-uniformemente cerrado, E puede ser distinto de $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} E)$.

A pesar de los aspectos negativos que hemos señalado en el párrafo anterior, cada retículo vectorial arquimediano con unidad débil de orden E es l-isomorfo a un retículo vectorial de funciones continuas sobre $\operatorname{Spec} E^*$ que toman sus valores en $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Este resultado consiste básicamente en el teorema de representación espectral de Yosida, cuyos detalles pueden verse en [43]. Sin embargo, la exposición que nosotros hacemos de este teorema difiere de la de [43] en que allí se representa a E como funciones extendidas sobre el espacio de los l-subespacios que son maximales respecto a la propiedad de no contener a la unidad débil, en lugar de hacerlo sobre $\operatorname{Spec} E^*$.

En la sección 3 se trabaja con retículos vectoriales cuyos elementos son ya funciones reales sobre un conjunto X. Como caso particular se estudia la realcompactación de Hewitt-Nachbin υX de un espacio topológico completamente regular X.

La sección 4 la dedicamos al estudio de la 2-*universal completitud*, una propiedad estrechamente relacionada con ciertas propiedades de inversión ligadas a la representación espectral.

Capítulo 2

Este capítulo está dedicado al estudio de las Φ-álgebras, el concepto más importante de la memoria. El término Φ-álgebra fue utilizado por Henriksen y Johnson [31] para referirse a una f-álgebra arquimediana. En [12, §9,

Cor. 3], Birkhoff y Pierce habían probado que éstas álgebras coincidían con las álgebras retículo-ordenadas y arquimedianas en las que la unidad es unidad débil de orden. La demostración que ellos hacen de este hecho se basa en la representación de una f-álgebra como producto subdirecto de f-álgebras totalmente ordenadas. En la sección 1 de este capítulo se da una prueba alternativa en la se utiliza un resultado de Huijsmans y de Pagter [33], que permite esquivar dicha representación.

Henriksen y Johnson consideran en [31] un teorema de representación para Φ-álgebras análogo al de Yosida para espacios de Riesz [72]: toda Φ-álgebra puede considerarse como un álgebra de funciones continuas sobre un espacio topológico compacto con valores en $\overline{\mathbb{R}}$. De hecho, en la sección 2 se probará este teorema (véase 2.2.10) como una extensión a las Φ-álgebras de la versión del teorema de Yosida que se obtuvo en 1.2.19.

Por último, en la sección 3 se estudian las Φ-álgebras uniformemente cerradas.

Capítulo 3

Este capítulo está dedicado a las álgebras localmente m-convexas reales y comienza con una sección preliminar en la que se dan algunas definiciones y resultados previos bien conocidos de la teoría general de espacios localmente convexos y la dualidad.

En la sección 2 se estudian las álgebras localmente m-convexas y se considera, en particular, el problema de la complejificación de un algebra real, mostrándose el paralelismo entre las propiedades de un álgebra real A y las de su complejización $A_{\mathbb{C}}$.

Prestaremos un interés especial a las álgebras reales conocidas como *racionales* ($\mathcal{C}(X)$ y, más generalmente, toda Φ-álgebra uniformemente cerrada es siempre racional). Un álgebra real A es racional si y sólo si su complejificación $A_{\mathbb{C}}$ es simétrica. Utilizando este hecho, extendemos a las álgebras topológicas racionales propiedades bien conocidas de las álgebras de Banach complejas que resultaran esenciales en el desarrollo posterior de la memoria; por ejemplo, si A es un álgebra localmente m-convexa Hausdorff y racional, entonces $\operatorname{Spec}_t A$ es no vacío, todo ideal no denso de A está contenido en algún ideal maximal cerrado, todo ideal maximal cerrado de A es un hiperplano (3.2.38), etc.

La sección 3 está dedicada al estudio particular de $\mathcal{C}_k(X)$. Probamos aquí: el resultado de Morris y Wulbert sobre la biyección entre los ideales cerrados de $\mathcal{C}_k(X)$ y los subconjuntos cerrados de X, vía la aplicación $C \mapsto \{f \in \mathcal{C}(X) :$

$f(C) = 0\}$, para un espacio X completamente regular (3.3.8); el teorema que establece que $\mathcal{C}_k(X)$ es completo si y sólo si X es un k_r-espacio (3.3.16); y el resultado de Arens que afirma que $\mathcal{C}_k(X)$ es metrizable si y sólo si X es hemicompacto (3.3.15). Como consecuencia de los dos anteriores tenemos el siguiente teorema de Warner [69]: $\mathcal{C}_k(X)$ es Fréchet si y sólo si X es un k-espacio hemicompacto (3.3.17).

Capítulo 4

En los capítulos precedentes, sobre un espacio vectorial ó un álgebra se han considerado separadamente cuestiones relativas a una estructura de orden y a una estructura topológica. En este capítulo, y en el siguiente, contaremos con la presencia de ambas estructuras, la de orden y la topológica, y como consecuencia de las relaciones entre ellas obtendremos los principales resultados de esta memoria.

Comenzamos este capítulo estableciendo diversas formas de entender la compatibilidad de una topología con la estructura de retículo vectorial. En particular definimos, siguiendo básicamente el libro de Schaefer [64], el concepto de espacio localmente sólido y estudiamos sus propiedades.

En la sección 2 introducimos la *topología del orden* sobre un retículo vectorial, topología localmente convexa asociada de modo natural a la estructura de espacio vectorial ordenado, y se la compara con la inducida por la topología de la convergencia compacta del espacio de funciones continuas sobre su espectro.

La sección 3 se desarrolla en el marco de las l-álgebras. Probamos que, en general, la topología del orden sobre una l-álgebra no es localmente m-convexa. Proponemos algunas posibles definiciones para una "topología del orden localmente m-convexa" sobre l-álgebras, y probamos que para las Φ-álgebras uniformemente cerradas todas ellas coinciden entre sí, y para las que además son cerradas por inversión coinciden también con la clásica topología del orden y con la inducida por la topología de la convergencia compacta del espacio de funciones continuas sobre el espectro. Esto último se obtiene a partir de un interesante resultado de Buskes [13], en el que se se caracterizan las seminormas reticulares sobre un retículo vectorial asociadas en un cierto sentido a los conjuntos compactos del espectro (4.2.13). Después de esto, del estudio de las Φ-álgebras uniformemente cerradas realizado en los capítulos anteriores, y de la extensión de la teoría de Gelfand a las álgebras localmente m-convexas, podemos establecer al final del capítulo el teorema de caracterización de $\mathcal{C}_k(X)$ como Φ-álgebra localmente m-convexa para X un k_r-espacio realcompacto.

Capítulo 5

En la caracterización de $\mathcal{C}(X)$ obtenida en el capítulo anterior se puede observar que las álgebras consideradas son completas y a fortiori están provistas de la topología del orden, por lo tanto X debe ser un espacio realcompacto. Si sólo hubiéramos pretendido caracterizar $\mathcal{C}(X)$ algebraicamente, podríamos haber supuesto, sin pérdida de generalidad, que X es realcompacto ya que, como Φ-álgebras, $\mathcal{C}(X)$ y $\mathcal{C}(\upsilon X)$ son isomorfas. Sin embargo, como álgebras topológicas, no son en general homeomorfos, por ejemplo $\mathcal{C}_k(X)$ es bornológico sólo cuando X sea realcompacto (véase [9]). En este capítulo caracterizamos las Φ-álgebras localmente m-convexas que son homeomorfas e isomorfas a algún $\mathcal{C}_k(X)$ para X normal. Ya sabemos que tales álgebras pudieran no ser completas. Por otra parte no es difícil encontrar espacios normales que no sean realcompactos, por lo que la topología de las mismas no es necesariamente la topología del orden.

Como es habitual nuestro objetivo es encontrar condiciones internas sobre una Φ-álgebra A que nos permita identificar A con $\mathcal{C}(\operatorname{Spec}_t A)$. Estas condiciones se expresan en términos que involucran a los conjuntos cerrados de $\operatorname{Spec}_t A$. Una condición sobre A será tanto más interna cuanto menor referencia haya que hacer, en su formulación, al espacio topológico $\operatorname{Spec}_t A$ ó al morfismo $A \to \mathcal{C}(\operatorname{Spec}_t A)$. Con esto en mente, en la sección 1 analizamos la relación entre los conjuntos cerrados de $\operatorname{Spec}_t A$ y los ideales cerrado de A. De este modo conseguiremos expresar propiedades del espectro topológico de A ó de la representación espectral en términos de los ideales cerrados de A. Por ejemplo, nosotros expresamos de esta manera la continuidad del morfismo $A \to \mathcal{C}(\operatorname{Spec}_t A)$ ó la condición de que A separa cada par de cerrados disjuntos de $\operatorname{Spec}_t A$.

En la sección 2 se prueba el resultado principal (5.2.8), i.e., la caracterización de $\mathcal{C}_k(X)$ para X un espacio normal. Todas las hipótesis de este teorema son expresadas en términos de ideales cerrados, y una parte esencial de su demostración radica en que la representación espectral de un álgebra localmente m-convexa es un morfismo inyectivo de retículos cuando este álgebra es también una Φ-álgebra uniformemente cerrada.

En la sección 3 damos la versión del resultado principal en el caso normal y realcompacto. Por último en la sección 4 se caracteriza la completa separación de conjuntos en el espectro topológico de un álgebra topológica y se propone una caracterización algebraica interna de $\mathcal{C}(X)$ para el caso general.

Capítulo 1

Retículos Vectoriales

Se tratan en este primer capítulo aspectos puramente algebraicos acerca de las estructuras de orden dentro del marco de los espacios vectoriales reales. Nos interesan especialmente los retículos vectoriales arquimedianos con unidad débil de orden, cuyas propiedades son estudiadas a lo largo de la primera sección. En la segunda sección se define el espectro de un retículo vectorial arquimediano con unidad débil de orden, y se establecen condiciones para poder ser representado como un retículo de funciones reales y continuas sobre su espectro. En la sección 1.3 se describe la estructura topológica del espectro del retículo vectorial $\mathcal{C}(X)$ de todas las funciones continuas reales sobre un espacio topológico completamente regular X. Finaliza el capítulo con una cuarta sección donde se estudia la 2-universal completitud, una propiedad estrechamente ligada al concepto de ser cerrado por inversión.

1.1 La estructura de retículo vectorial

Puede considerarse que el estudio de los retículos vectoriales (espacios de Riesz) tiene su inicio sobre 1935 con los trabajos de Riesz [63], Freudenthal [20] y Kantorovitch [38]. A ellos hay que añadir las importantes contribuciones realizadas entre los años 1940 y 1945 por Nakano [54] y Yosida [72]. Sin embargo la referencia clásica sobre retículos vectoriales, que, por un lado, recoge y unifica las diversas aportaciones realizadas hasta entonces, y por otro establece la metodología habitual en esta materia, es la obra de Luxemburg y Zaanen, Riesz Spaces I [43]. Es preciso destacar que paralelamente a esta teoría, del gusto de los analistas, se ha desarrollado otra de un parecido evi-

dente con la anterior, que es la teoría de los grupos y anillos retículo-ordenados (también denominados l-grupos y l-anillos), con métodos más del gusto de los algebristas. La obra más conocida y precursora de posteriores investigaciones en este campo es el libro de Birkhoff [11], Lattice Theory. A ella hay que añadir la excelente recopilación hecha por Bigard, Kiemel y Wolfenstein [10]. Ambas tendencias, aunque se mantienen actualmente, han confluído con frecuencia a la hora de abordar problemas concretos, algunos de los cuales se presentan en esta memoria.

En lo que sigue todos los espacios vectoriales que consideremos se supondrán sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales.

Definición 1.1.1. Un *espacio vectorial ordenado* es un espacio vectorial E dotado de una relación de orden "$\leq$" compatible con la estructura vectorial, esto es, satisfaciendo

$$x, y \in E,\ x \leq y \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + z \leq y + z & \text{para todo } z \in E\,, \\ \lambda x \leq \lambda y & \text{para todo } \lambda \in \mathbb{R}\,,\ \lambda \geq 0\,. \end{cases}$$

Si E es un espacio vectorial ordenado, entonces el conjunto $E_+ = \{x \in E : x \geq 0\}$ se denomina *cono positivo* de E. Es fácil comprobar que $E_+ + E_+ \subseteq E_+$, $E_+ \cap -E_+ = \{0\}$ y $\lambda E_+ \subseteq E_+$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$; además, dados $x, y \in E$ se satisface $x \leq y$ si y sólo si $y - x \in E_+$.

Recíprocamente, si C es un *cono positivo* sobre un espacio vectorial E (esto es, C es un subconjunto de E tal que $C + C \subseteq C$, $C \cap -C = \{0\}$ y $\lambda C \subseteq C$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$), entonces sobre E tenemos definida la siguiente relación: $x, y \in E$,

$$x \leq y \iff y - x \in C\,;$$

dicha relación es una relación de orden y dota a E de estructura de espacio vectorial ordenado cuyo cono positivo es C.

Definición 1.1.2. Sea E un espacio vectorial ordenado. Dados $x, y \in E$, llamaremos *intervalo cerrado* de extremos x e y al subconjunto $[x, y]$ de E definido por la igualdad

$$[x, y] = \{z \in E : x \leq z \leq y\} = (x + E_+) \cap (y - E_+)\,.$$

Definición 1.1.3. Un *retículo vectorial* (ó *espacio de Riesz*) es un espacio vectorial ordenado que posee estructura de *retículo* (todo subconjunto finito no vacío tiene supremo e ínfimo).

Un subespacio vectorial F de un retículo vectorial E se dice que es un *subretículo vectorial* de E, si F es un retículo vectorial con el orden inducido por E, esto es, si el supremo y el ínfimo de todo subconjunto finito no vacío de F están en F.

Definiciones 1.1.4. Sea E un retículo vectorial. Como es usual, el supremo y el ínfimo de un subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de E se denotarán respectivamente por $x_1 \vee \cdots \vee x_n$ y $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$. Dado un elemento $x \in E$, su *parte positiva*, su *parte negativa* y su *valor absoluto* son elementos de E_+ que se denotan respectivamente x^+, x^-, $|x|$ y se definen por las igualdades

$$x^+ = x \vee 0, \qquad x^- = (-x) \vee 0, \qquad |x| = x^+ \vee x^-.$$

Es claro que $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$. Dado otro elemento $y \in E$ es inmediata la equivalencia

$$x \leq y \iff -y \leq -x\,,$$

y si $x \geq 0$ tenemos

$$|y| \leq x \iff y \in [-x, x]\,.$$

Ejemplo 1.1.5. El cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales con su orden usual es un retículo vectorial para el cual $\mathbb{R}_+ = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \geq 0\}$. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \in \mathbb{R}_+$ denotará el valor absoluto del número real λ, esto es, $|\lambda| = \lambda$ si $\lambda \geq 0$ y $|\lambda| = -\lambda$ si $\lambda < 0$.

Si X es un conjunto y $\mathbb{R}^X$ denota el espacio vectorial de todas las funciones reales definidas sobre X, entonces sobre $\mathbb{R}^X$ tenemos la siguiente relación de orden: dadas $f, g \in \mathbb{R}^X$,

$$f \leq g \iff f(\omega) \leq g(\omega) \;\; \forall\, \omega \in X\,;$$

dicha relación, que es conocida como *orden puntual*, dota a $\mathbb{R}^X$ de estructura de retículo vectorial.

Supongamos que X es un espacio topológico, en cuyo caso es bien conocido que el conjunto $\mathcal{C}(X)$ de todas las funciones reales y continuas definidas sobre X es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^X$. Es fácil comprobar que si $f \in \mathcal{C}(X)$, entonces para el orden puntual se satisface $|f| \in \mathcal{C}(X)$. Como dadas $f, g \in \mathcal{C}(X)$ tenemos

$$f \vee g = 1/2(f + g + |f - g|) \in \mathcal{C}(X)\,,$$

(véase (xi) del lema 1.1.6 siguiente), concluimos que $\mathcal{C}(X)$ es un subretículo vectorial de $\mathbb{R}^X$ y en consecuencia un retículo vectorial.

En el lema que presentamos a continuación, aparecen ciertas propiedades de interés que satisfacen los retículos vectoriales y que serán utilizadas a lo largo de la memoria.

Lema 1.1.6. *En todo retículo vectorial E y para cualesquiera elementos $x, y, z \in E$, se satisfacen:*

(i) $-(x \wedge y) = (-x) \vee (-y), \ -(x \vee y) = (-x) \wedge (-y)$;

(ii) $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z), \ x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$;

(iii) $x + y = x \vee y + x \wedge y$

(iv) $(x - y)^+ = x - x \wedge y, \ (x - y)^- = y - x \wedge y$;

(v) $x = x^+ - x^-, \ x^+ \wedge x^- = 0, \ |x| = x^+ + x^-, \ |x| = |-x|$;

(vi) $|x| = x \vee (-x), \ |x + y| \leq |x| + |y|, \ \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$;

(vii) *si* $x, y \geq 0$ *entonces* $[0, x + y] = [0, x] + [0, y]$;

(viii) *si* $x, y, z \geq 0$ *entonces* $x \wedge (y + z) \leq x \wedge y + x \wedge z$;

(ix) *si* $nx \geq 0$ *para algún* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $x \geq 0$;

(x) $n(x \vee y) = nx \vee ny$, $n(x \wedge y) = nx \wedge ny$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$;

(xi) $2(x \vee y) = x + y + |x - y|$;

(xii) $|\lambda x| = |\lambda||x|$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$;

(xiii) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Demostración. Las propiedades (i) y (ii) son inmediatas.

(iii) Como $x \wedge y \leq x, y$ debe ser $x - x \wedge y \geq 0, \ y - x \wedge y \geq 0$ y por lo tanto $x + y - x \wedge y \geq x, y$, es decir $x + y - x \wedge y \geq x \vee y$. Si en la última desigualdad cambiamos x, y por $-x, -y$ y aplicamos (i) obtenemos $x + y - x \wedge y \leq x \vee y$.

(iv) Probemos la primera igualdad: $(x - y)^+ = (x - y) \vee 0 = (x - y) \vee (x - x) = x + (-y) \vee (-x) = x - y \wedge x$.

(v) $x^+ = x - x \wedge 0 = x + (-x) \vee 0 = x + x^-$, luego $x = x^+ - x^-$;
$x^+ \wedge x^- - x^- = (x^+ - x^-) \wedge (x^- - x^-) = x \wedge 0 = -(-x) \vee 0 = -x^-$;
$|x| = x^+ \vee x^- = x^+ \vee x^- + x^+ \wedge x^- = x^+ + x^-$;
$(-x)^+ = x^-, \ (-x)^- = x^+$, luego $|x| = |-x|$.

(vi) Probemos que $|x + y| \leq |x| + |y|$: $x \leq x^+$ y $y \leq y^+$, luego $x + y \leq x^+ + y^+$, y como $0 \leq x^+ + y^+$ obtenemos $(x + y)^+ \leq x^+ + y^+$; del mismo modo $(x + y)^- \leq x^- + y^-$ y se concluye por (v).

(vii) La inclusión $[0, x] + [0, y] \subseteq [0, x + y]$ es inmediata. Sea ahora $z \in [0, x + y]$ y definamos $k_1 := z \wedge x, \ k_2 := z - k_1$, es claro que $k_1 \in [0, x]$ y que $z = k_1 + k_2$, de modo que concluimos si vemos que $k_2 \in [0, y]$:

$k_2 = z - z \wedge x = z + (-z) \vee (-x) = (z - z) \vee (z - x) = (z - x)^+ \geq 0$; como además $z - x \leq y$ y $0 \leq y$, tenemos $k_2 = (z - x)^+ \leq y$.

(viii) Sean $x, y, z \geq 0$ y denotemos $k = x \wedge (y + z)$; como $k \in [0, y + z]$ existen $k_1 \in [0, y]$, $k_2 \in [0, z]$ tales que $k = k_1 + k_2$; es claro que $k_1 \leq x \wedge y$ y $k_2 \leq x \wedge z$, con lo que se concluye.

(ix) De (ii) se sigue por inducción la igualdad

$$n(x \wedge 0) = nx \wedge (n-1)x \wedge \cdots \wedge x \wedge 0\,,$$

de modo que: $nx \geq 0 \;\Rightarrow\; n(x \wedge 0) = (n-1)(x \wedge 0) \;\Rightarrow\; x \wedge 0 = 0$.

(x) De (viii) se sigue que si $z \wedge k = 0$ entonces

$$0 = z \wedge (2k) = \cdots = z \wedge (nk) = \dots\ ;$$

por tanto: $0 = (x-y)^+ \wedge (x-y)^- = (x - x\wedge y) \wedge (y - x \wedge y) \;\Rightarrow (x - x\wedge y) \wedge (ny - n(x \wedge y)) = 0 \;\Rightarrow\; (nx - n(x\wedge y)) \wedge (ny - n(x \wedge y)) = 0 \Rightarrow\; nx \wedge ny - n(x \wedge y) = 0$.

(xi) Es corolario de (x).

(xii) Basta probar que $|\lambda x| = \lambda |x|$ cuando $\lambda > 0$: como $\lambda x \leq \lambda |x|$ y $-\lambda x = \lambda(-x) \leq \lambda |x|$ tenemos $|\lambda x| \leq \lambda |x|$; en particular $|x| = |\frac{1}{\lambda}\lambda x| \leq \frac{1}{\lambda}|\lambda x|$, es decir $\lambda |x| \leq |\lambda x|$.

(xiii) Veamos la primera igualdad. Si denotamos $k = x \wedge (y \vee z)$, es claro que k es cota superior del conjunto $\{x \wedge y, x \wedge z\}$. Sea h otra cota superior del conjunto $\{x \wedge y, x \wedge z\}$ y veamos que $k \leq h$: tenemos $h \geq x \wedge y = x + y - x \vee y$ y $h \geq x \wedge z = x + z - x \vee z$ es decir $h - x + x \vee y \geq y$ y $h - x + x \vee z \geq z$; por lo tanto debe ser $h - x + x \vee (y \vee z) \geq y \vee z$ y obtenemos

$$h \geq x + y \vee z - x \vee (y \vee z) = x \wedge (y \vee z) = k\,,$$

lo que concluye la demostración. □

Nota. Hagamos algunos comentarios al lema 1.1.6 que serán muy útiles para el desarrollo de la memoria. Todas las propiedades recogidas en él, salvo la (xii), que hace referencia explícita a la multiplicación por escalares, son válidos en l-grupos. Las demostraciones dadas lo ponen claramente de manifiesto. La propiedad (i) dice que para que un espacio vectorial ordenado sea un retículo vectorial es suficiente con que existan supremos de familias finitas no vacías (ó que existan ínfimos). Además, de (ii) se sigue que para que un espacio vectorial ordenado E sea un retículo vectorial es suficiente con que exista $x \vee 0$ para todo $x \in E$.

Las propiedades (i), (ii) y (xiii) son válidas para familias arbitrarias de elementos de un retículo vectorial E, siempre que tengan sentido. Por ejemplo, dado un subconjunto no vacío X de E, existe el ínfimo $\bigwedge_{x\in X} x$ si y sólo si existe el supremo $\bigvee_{x\in X} -x$, en cuyo caso $-\big(\bigwedge_{x\in X} x\big) = \bigvee_{x\in X} -x$, y para cada $y \in E$ se satisface $\big(\bigwedge_{x\in X} x\big) \vee y = \bigwedge_{x\in X} (x \vee y)$.

Definición 1.1.7. Sean E y F retículos vectoriales. Diremos que una aplicación $T : E \to F$ es un *morfismo de retículos*, si $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$ y $T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$ para cualesquiera $x, y \in E$. Diremos que una aplicación $T : E \to F$ es un *morfismo de retículos vectoriales*, si T es un morfismo de retículos y es una aplicación lineal.

Un morfismo de retículos vectoriales se dice que es un *isomorfismo de retículos vectoriales*, si es biyectivo y su aplicación inversa es también un morfismo de retículos vectoriales. Diremos que E y F son *l-isomorfos* si existe entre ellos algún isomorfismo de retículos vectoriales.

Si $T : E \to F$ es un morfismo de retículos vectoriales, es fácil comprobar que para que T sea un isomorfismo de retículos vectoriales es suficiente con que T sea biyectiva.

1.1.8. Sea $T : E \to F$ una aplicación lineal entre retículos vectoriales. Puesto que dados $x, y \in E$ se satisface $-(x \wedge y) = (-x) \vee (-y)$, es claro que para que T sea morfismo de retículos es suficiente con que T transforme supremos en supremos (ó ínfimos en ínfimos); como además $x \vee y = x + 0 \vee (y - x)$, T manda supremos a supremos si y sólo si $T(x \vee 0) = T(x) \vee 0$ para todo $x \in E$; por último, como $2(x \vee 0) = x + |x|$, concluimos que T es un morfismo de retículos vectoriales si y sólo si $T(|x|) = |T(x)|$ para todo $x \in E$.

Definición 1.1.9. Sea E un retículo vectorial. Un subconjunto S de E se dice que es *sólido* si se satisface

$$\{x \in E : |x| \leq |s|\} \subseteq S \quad \text{para todo } s \in S.$$

Llamaremos *l-subespacio* de E a todo subespacio vectorial suyo que sea sólido. Llamaremos *l-subespacio maximal* de E a todo l-subespacio de E que no esté contenido estrictamente en ningún l-subespacio propio de E.

1.1.10. Sea E un retículo vectorial. Dado un subespacio vectorial F de E, aparece de modo natural la siguiente cuestión: ¿cuándo podemos dotar al

espacio vectorial cociente E/F de estructura de retículo vectorial, de modo que el morfismo de paso al cociente $\pi : E \to E/F$ sea morfismo de retículos vectoriales? Tenemos el siguiente resultado:

Lema 1.1.11. *Sea F un subespacio vectorial de un retículo vectorial E. Son equivalentes:*
(i) *F es un l-subespacio de E;*
(ii) *$\pi(E_+)$ es el cono positivo para una estructura de retículo vectorial sobre E/F para la cual π es un morfismo de retículos vectoriales.*

Demostración. Es claro que la imagen inversa de un l-subespacio por un morfismo de retículos vectoriales es un l-subespacio, por lo que la demostración de la implicación (ii)⇒(i) es inmediata.

Supongamos ahora que F es sólido. Es claro que $\pi(E_+)+\pi(E_+) \subseteq \pi(E_+)$ y que $\lambda\pi(E_+) \subseteq \pi(E_+)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Además, dado $\pi(x) \in \pi(E_+) \cap -\pi(E_+)$ existen $x_1, x_2 \in E_+$ tales que $\pi(x) = \pi(x_1) = \pi(-x_2)$, de modo que $0 \leq x_1 \leq x_1 + x_2 \in F$ y por tanto $\pi(x) = \pi(x_1) = 0$; es decir, $\pi(E_+) \cap -\pi(E_+) = \{0\}$. Para terminar veamos que π es un morfismo de retículos vectoriales para la estructura de retículos que $\pi(E_+)$ define sobre E/F, para lo cual será suficiente probar que $\pi(x \vee 0) = \pi(x) \vee \pi(0)$ para todo $x \in E$. Es evidente que π conserva el orden, de modo que $\pi(x \vee 0) \geq \pi(x)$ y $\pi(x \vee 0) \geq \pi(0)$. Dado $x' \in E$ tal que $\pi(x') \geq \pi(x)$ y $\pi(x') \geq \pi(0)$, concluimos si vemos que $\pi(x') \geq \pi(x \vee 0)$. Nótese que la relación de orden en E/F es la siguiente: dado $y \in E$, $\pi(y) \geq 0$ si y sólo si existe $z \in F$ tal que $y + z \geq 0$. Por lo tanto existen $z_1, z_2 \in F$ tales que $x' - x + z_1 \geq 0$ y $x' + z_2 \geq 0$; como F es sólido podemos suponer que $z_1, z_2 \geq 0$, de modo que si $z = z_1 + z_2$ y $x'' = x' + z$ entonces $x'' - x \geq 0$, $x'' \geq 0$ y $\pi(x') = \pi(x'')$, por lo tanto $\pi(x') \geq \pi(x \vee 0)$. □

Nota. Siempre que F sea un l-subespacio de un retículo vectorial E, sobre E/F se considerará la estructura de retículo vectorial definida por el cono positivo $\pi(E_+)$.

Lema 1.1.12. *Dado un l-subespacio F de un retículo vectorial E, existe una biyección natural entre el conjunto de los l-subespacios de E que contienen a F y el conjunto de los l-subespacios de E/F.*

Demostración. Es conocido que las aplicaciones "imagen directa" e "imagen inversa" del morfismo de paso al cociente $\pi : E \to E/F$ establecen una correspondencia biunívoca entre los subespacios vectoriales de E que contienen a F y los subespacios vectoriales de E/F. Para concluir basta tener en cuenta que,

por ser π morfismo de retículos vectoriales, dichas aplicaciones transforman l-subespacios en l-subespacios. $\square$

Definiciones 1.1.13. Sea E un retículo vectorial. Fijado un elemento $e \in E_+$ definimos el conjunto

$$E^*(e) = \{x \in E : |x| \leq ne \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\};$$

es claro que $E^*(e) \neq \varnothing$ ($ne \in E^*(e)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$), y es fácil comprobar que $E^*(e)$ es un subretículo vectorial de E, el cual llamaremos *retículo de los elementos acotados de E respecto a e*.

Diremos que e es una *unidad débil de orden* si para cada $x \in E_+$ se satisface

$$x = \bigvee\{y \in E^*(e) : 0 \leq y \leq x\}.$$

Nótese que $\{y \in E^*(e) : 0 \leq y \leq x\} \neq \varnothing$ para todo $x \in E_+$ porque $0 \leq x \wedge e \leq x$. Diremos que e es una *unidad fuerte de orden* si $E^*(e) = E$.

Definición 1.1.14. Un retículo vectorial E se dice *arquimediano*, si dados $x, y \in E_+$, $nx \leq y$ para todo $n \in \mathbb{N}$ implica $x = 0$; ó equivalentemente, si dados $x \in E$ e $y \in E_+$, $nx \leq y$ para todo $n \in \mathbb{N}$ implica $x \leq 0$.

Ejemplo 1.1.15. Si X es un espacio topológico, entonces $\mathcal{C}(X)$ es un retículo vectorial arquimediano en el que la función constante 1 es una unidad débil de orden. Si $\mathcal{C}^*(X)$ denota las funciones de $\mathcal{C}(X)$ que son acotadas en el sentido usual, entonces $\mathcal{C}^*(X) = \mathcal{C}(X)^*(1)$.

Proposición 1.1.16. *Sean E un retículo vectorial arquimediano y $e \in E_+$. Son equivalentes:*
(i) *e es una unidad débil de orden;*
(ii) *$x = \bigvee_n (x \wedge ne)$ para todo $x \in E_+$;*
(iii) *si $x \wedge e = 0$ entonces $x = 0$.*

Demostración. Para toda la demostración fijamos $x \in E_+$.

(i)$\Rightarrow$(ii) Es claro que $x \wedge ne \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y tenemos que probar que si $z \in E$ es tal que $x \wedge ne \leq z$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $x \leq z$. Por hipótesis $x = \bigvee\{y \in E^*(e) : 0 \leq y \leq x\}$; pero si consideremos $y \in E^*(e)$ tal que $0 \leq y \leq x$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y = y \wedge ne \leq x \wedge ne \leq z$, y concluimos que $x \leq z$.

(ii)$\Rightarrow$(i) Sea $z \in E_+$ tal que $0 \leq y \leq z$ para todo $y \in E^*(e)$ satisfaciendo $0 \leq y \leq x$. Entonces, la condición $x \wedge ne \in E^*(e)$ implica que $0 \leq x \wedge ne \leq z$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $x \leq z$, es decir e es unidad débil.

(ii)⇒(iii) Supongamos que $x \wedge e = 0$, en cuyo caso $x \in E_+$. Por hipótesis $x = \bigvee_n (x \wedge ne)$. Como $x \wedge ne \leq n(x \wedge e) = 0$ (véase el lema 1.1.6 (viii)), concluimos que $x = 0$.

(iii)⇒(i) Sea $z \in E_+$ tal que $0 \leq y \leq z$ para todo $y \in E^*(e)$, $0 \leq y \leq x$, y veamos que $x \leq z$, es decir, que $x \wedge z = x$. Sea $t = (x - x \wedge z) \wedge e$, entonces para todo $y \in E^*(e)$, $0 \leq y \leq x$, se satisface

$$t + y \leq t + x \wedge z \leq x - x \wedge z + x \wedge z = x\,;$$

como $t \in E^*(e)$, $0 \leq t \leq x$, obtenemos $2t \leq x$, y es fácil probar por inducción que $nt \leq x$. Por ser E arquimediano concluimos que $x - x \wedge z = t = 0$. □

Nota. Si e es una unidad débil de orden de un retículo vectorial E, entonces es fácil comprobar que $e = 0$ si y sólo si $E = \{0\}$.

En lo que resta de capítulo, los retículos vectoriales que consideremos serán no nulos, y si e es una unidad débil de orden de un retículo vectorial E (en cuyo caso $e > 0$), entonces el retículo $E^*(e)$ lo denotaremos E^* siempre que no haya motivo de confusión. Para abreviar, los elementos de E^* los llamaremos "acotados", y diremos "unidad débil" y "unidad fuerte" en lugar de "unidad débil de orden" y "unidad fuerte de orden".

Lema 1.1.17. *Sea E un retículo vectorial con unidad débil e. Todo l-subespacio propio de E^* está contenido en un l-subespacio maximal.*

Demostración. Veamos en primer lugar que la unidad débil e no puede pertenecer a ningún l-subespacio propio de E^*. Si F es un l-subespacio de E^* tal que $e \in F$, entonces para todo $x \in E^*$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|x| \leq ne \in F$ y por tanto $x \in F$, de modo que F no es propio.

Sea ahora S un l-subespacio propio de E^* y sea $\mathcal{S}$ la colección de todos los l-subespacios propios de E^* que contienen a S. Si $\{F_i\}_{i \in I}$ es un subconjunto de $\mathcal{S}$ que está totalmente ordenado por inclusión, entonces $F = \bigcup_i F_i$ es un l-subespacio de E^* que contienen a S, y F es propio porque $e \notin F$, es decir $F \in \mathcal{S}$. Para concluir basta aplicar el lema de Zörn. □

Corolario 1.1.18. *Si E es un retículo vectorial con unidad débil e, entonces en E^* existen l-subespacios maximales.*

Lema 1.1.19. *Sea E un retículo vectorial. Si los únicos l-subespacios que admite E son los triviales, entonces E es l-isomorfo a $\mathbb{R}$.*

Demostración. Veamos en primer lugar que E es arquimediano y totalmente ordenado. Sean $x, y \in E_+$ tal que $ny \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y consideremos el l-subespacio S_y generado por y:

$$S_y = \{z \in E : |z| \leq \lambda y \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{R}_+\}.$$

Si $x \in S_y$ entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $ny \leq my$ para todo $n \in \mathbb{N}$; en particular $y \leq 0$ y por tanto $y = 0$. Si por el contrario $x \notin S_y$, entonces por hipótesis $S_y = \{0\}$, es decir, $y = 0$. Esto prueba que E es arquimediano. Para ver que E es totalmente ordenado tenemos que ver que dado $x \in E$, $x \leq 0$ ó $x \geq 0$, es decir, $x^+ = 0$ ó $x^- = 0$. Supongamos que $x^- > 0$, en cuyo caso $S_{x^-} = E$ y por lo tanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^+ \leq nx^-$, de modo que $x^+ = x^+ \wedge nx^- \leq n(x^+ \wedge x^-) = 0$.

Fijemos ahora $x > 0$, y veamos que la aplicación lineal e inyectiva $\phi : \mathbb{R} \to E$, $\phi(\lambda) = \lambda x$, es epiyectiva. Sea $y > 0$. El conjunto $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda y \leq x\}$ es no vacío porque $S_x = E$, y está acotado superiormente porque E es arquimediano; el conjunto $\{\lambda \in \mathbb{R} : x \leq \lambda y\}$ es no vacío porque $S_y = E$, y está acotado inferiormente por 0. Denotemos $\alpha = \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda y \leq x\}$ y $\beta = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : x \leq \lambda y\}$, y probemos que α y β son máximo y mínimo respectivamente: tenemos $(\alpha - 1/n)y \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $n(\alpha y - x) \leq y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por tanto $\alpha y \leq x$, es decir, $\alpha \in \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda y \leq x\}$; del mismo modo se prueba que $\beta \in \{\lambda \in \mathbb{R} : x \leq \lambda y\}$. Es claro que $\alpha \leq \beta$, y si existiera $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha < \lambda < \beta$, entonces $\lambda y \nleq x$ y $x \nleq \lambda y$, lo cual no es posible porque E está totalmente ordenado. Por tanto $\alpha = \beta$ e $y = \alpha^{-1}x = \phi(\alpha^{-1})$.

Para terminar, es inmediato comprobar que ϕ y ϕ^{-1} son morfismos de retículos vectoriales. □

Corolario 1.1.20. *Todo l-subespacio maximal de un retículo vectorial es un hiperplano.*

1.2 Representación de retículos vectoriales

Definición 1.2.1. Sea E un retículo vectorial con unidad débil e. Definimos respectivamente el *espectro de E respecto de e* y el *espectro acotado de E respecto de e* como los siguientes conjuntos:

$$\operatorname{Spec} E = \{\omega : E \to \mathbb{R} \text{ morfismo de retículos vectoriales tal que } \omega(e) = 1\},$$

$$\operatorname{Spec} E^* = \{\omega : E^* \to \mathbb{R} \text{ morfismo de retículos vectoriales tal que } \omega(e) = 1\}.$$

1.2.2. Según 1.1.20, si M es un l-subespacio maximal de E^* entonces E^*/M es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 1; además en este caso $e \notin M$, es decir, $\pi(e) > 0$, por lo tanto la composición

$$\begin{array}{rcl} E^* \xrightarrow{\pi} E^*/M & \to & \mathbb{R} \\ \lambda\pi(e) & \mapsto & \lambda \end{array}$$

es un morfismo de retículos vectoriales $\omega : E^* \to \mathbb{R}$ tal que $\omega(e) = 1$. En otras palabras, hay una correspondencia biunívoca entre $\operatorname{Spec} E^*$ y el conjunto de todos los l-subespacios maximales de E^*.

1.2.3. Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. Podemos definir de forma natural la siguiente norma sobre E^*: dado $x \in E^*$,

$$\|x\|_e = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+ : |x| \leq \lambda e\}.$$

Es fácil comprobar que $\| \ \|_e$ es una norma y que $\|e\|_e = 1$. Veamos que el ínfimo de la definición es un mínimo, estos es, que para todo $x \in E^*$ se satisface $|x| \leq \|x\|_e e$. Dado $n \in \mathbb{N}$, por definición de ínfimo tenemos $|x| \leq (\|x\|_e + 1/n)e$, es decir, $n(|x| - \|x\|_e e) \leq e$, y por la propiedad arquimediana concluimos que $|x| \leq \|x\|_e e$.

Sobre $\operatorname{Spec} E^*$ consideramos la topología débil definida por E^*, teniendo en cuenta que cada elemento $x \in E^*$ define una función sobre $\operatorname{Spec} E^*$:

$$\begin{array}{rcl} x : \operatorname{Spec} E^* & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & x(\omega) := \omega(x)\,. \end{array}$$

Hay una aplicación natural $E^* \to \mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*)$, conocida como *representación de Riesz* de E^*, que es un morfismo de retículos vectoriales y cuyo núcleo es la intersección de todos los l-subespacios maximales de E^* (véase 1.2.2). Las funciones de E^* separan puntos de $\operatorname{Spec} E^*$, por lo que $\operatorname{Spec} E^*$ es un subespacio topológico de $\mathbb{R}^{E^*}$: $\omega \in \operatorname{Spec} E^* \mapsto (\omega(x))_{x \in E^*} \in \mathbb{R}^{E^*}$.

Proposición 1.2.4. *Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. Entonces* $\operatorname{Spec} E^*$ *dotado de la topología débil definida por E^* es un espacio topológico compacto y no vacío.*

Demostración. Notemos en primer lugar que $\operatorname{Spec} E^* \neq \varnothing$ en virtud del corolario 1.1.18. Veamos que $\operatorname{Spec} E^*$ es un cerrado de $\mathbb{R}^{E^*}$, esto es, sea $\omega_0 \in \overline{\operatorname{Spec} E^*}$ y probemos que $\omega_0 : E^* \to \mathbb{R}$ es lineal, morfismo de retículos, y tal que $\omega_0(e) = 1$.

Sean $x, y \in E^*$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Es claro que hay aplicaciones de E^* en $\mathbb{R}$ que en $x+y$ valen $\omega_0(x+y)$, en x valen $\omega_0(x)$ y en y valen $\omega_0(y)$, de modo que, dado $\varepsilon > 0$, tenemos el abierto no vacío Ω de $\mathbb{R}^{E^*}$ definido como

$$\begin{aligned}\Omega = &\{\omega \in \mathbb{R}^{E^*} : |\omega(\lambda x + \mu y) - \omega_0(\lambda x + \mu y)| < \varepsilon\}\\ &\cap \{\omega \in \mathbb{R}^{E^*} : |\omega(x) - \omega_0(x)| < \varepsilon\}\\ &\cap \{\omega \in \mathbb{R}^{E^*} : |\omega(y) - \omega_0(y)| < \varepsilon\}.\end{aligned}$$

Si $\omega_1 \in \Omega \cap \operatorname{Spec} E^* \neq \varnothing$, entonces

$$\begin{aligned}|\omega_0(\lambda x + \mu y) - \lambda\omega_0(x) - \mu\omega_0(y)| &\leq |\omega_0(\lambda x + \mu y) - \omega_1(\lambda x + \mu y)|\\ &\quad + |\lambda\omega_0(x) - \lambda\omega_1(x)| + |\mu\omega_0(y) - \mu\omega_1(x)|\\ &\leq (1 + |\lambda| + |\mu|)\varepsilon\,,\end{aligned}$$

y como $\varepsilon > 0$ es arbitrario concluimos que $\omega_0(\lambda x + \mu y) = \lambda\omega_0(x) + \mu\omega_0(y)$, lo que prueba la linealidad.

Consideremos ahora el abierto no vacío Π definido como

$$\begin{aligned}\Pi = &\{\omega \in \mathbb{R}^{E^*} : |\omega(x) - \omega_0(x)| < \varepsilon/2\}\\ &\cap \{\omega \in \mathbb{R}^{E^*} : |\omega(|x|) - \omega_0(|x|)| < \varepsilon/2\};\end{aligned}$$

si $\omega \in \Pi \cap \operatorname{Spec} E^*$, entonces

$$\begin{aligned}\big|\omega_0(|x|) - |\omega_0(x)|\big| &\leq \big|\omega_0(|x|) - \omega(|x|)\big| + \big||\omega_0(x)| - \omega(|x|)\big|\\ &\leq \varepsilon/2 + \big||\omega_0(x)| - |\omega(x)|\big| < \varepsilon\,,\end{aligned}$$

y concluimos que ω_0 es morfismo de retículos.

Por último, puesto que la proyección $\pi_e : \mathbb{R}^{E^*} \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto \pi_e(\omega) := \omega(e)$ es continua obtenemos

$$\pi_e(\overline{\operatorname{Spec} E^*}) \subseteq \overline{\pi_e(\operatorname{Spec} E^*)} = \overline{\{\omega(e) : \omega \in \operatorname{Spec} E^*\}} = \{1\}.$$

Una vez que hemos probado que $\operatorname{Spec} E^*$ es cerrado, si vemos que las imágenes de los elementos de $\operatorname{Spec} E^*$ por todas las proyecciones son acotadas, tendremos que $\operatorname{Spec} E^*$ es un espacio topológico compacto: dado $x \in E^*$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|x| \leq ne$, con lo que para todo $\omega \in \operatorname{Spec} E^*$ se satisface $|\omega(x)| \leq \omega(|x|) \leq n$. $\square$

1.2.5. Según la proposición 1.2.4, sobre $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*)$ tenemos definida la norma del supremo $\| \ \|_\infty$: dada $f \in \mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*)$,

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(\omega)| : \omega \in \operatorname{Spec} E^*\}.$$

Teorema 1.2.6. *Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. Entonces E^* es isométrico a su imagen por la representación de Riesz $E^* \to \mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*)$. Como consecuencia, dicha aplicación es inyectiva, es decir, la intersección de todos los l-subespacios maximales de E^* es nula.*

Demostración. Sea $x \in E^*$, $x \neq 0$. Tenemos $|x| \leq \|x\|_e e$ (véase 1.2.3), luego $|\omega(x)| = \omega(|x|) \leq \|x\|_e$ para todo $\omega \in \operatorname{Spec} E^*$ y por lo tanto $\|x\|_\infty \leq \|x\|_e$.

Sea ahora $\gamma = \sup\{\beta \in \mathbb{R} : \beta e \leq |x|\} \neq \varnothing$. Como en ocasiones anteriores (véase la demostración del lema 1.1.19), la propiedad arquimediana prueba que dicho supremo es un máximo, es decir, se satisface $\gamma e \leq |x|$. Como $|x| \leq \|x\| e$, si fuera $\gamma = \|x\|_e$ tendríamos $|x| = \|x\|_e e$, con lo que $\omega(|x|) = \|x\|_e$ para todo $\omega \in \operatorname{Spec} E^*$ y por tanto $\|x\|_e = \|x\|_\infty$. Supongamos que existe λ tal que $\gamma < \lambda < \|x\|_e$, en cuyo caso $\lambda e \not\leq |x|$ y $|x| \not\leq \lambda e$, es decir, $(\lambda e - |x|)^+ > 0$ y $(\lambda e - |x|)^- > 0$. Argumentando como en la demostración de 1.1.19 obtenemos $(\lambda e - |x|)^- \notin S_{(\lambda e - |x|)^+}$, es decir, $S_{(\lambda e - |x|)^+}$ es un l-subespacio propio de E^* (aquí, dado $z \in E^*$, S_z denota el l-subespacio de E^* -no de E- generado por z). Según el lema 1.1.17, existe un l-subespacio maximal M en E^* que contiene a $S_{(\lambda e - |x|)^+}$. Si $\ker \omega = M$, $\omega \in \operatorname{Spec} E^*$, entonces

$$\omega(\lambda e - |x|) = \omega((\lambda e - |x|)^+ - (\lambda e - |x|)^-) = -\omega((\lambda e - |x|)^-) \leq 0\,,$$

es decir, $\omega(|x|) \geq \lambda$. Por lo tanto $\|x\|_\infty \geq \lambda$, y como esto era válido para todo λ arbitrario satisfaciendo $\gamma < \lambda < \|x\|_e$ concluimos que $\|x\|_\infty \geq \|x\|_e$. $\square$

Definiciones 1.2.7. Sea E un retículo vectorial arquimediano y sea $e \in E_+$ (e no necesariamente unidad débil). Una sucesión $\{x_n\}_n$ en E se dice que es *e-uniformemente de Cauchy*, si para cada $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) existe un entero positivo ν tal que si $n, m \geq \nu$ entonces $|x_n - x_m| \leq \varepsilon e$. Una sucesión $\{x_n\}_n$ en E se dice que es *e-uniformemente convergente* si existe $x \in E$ satisfaciendo: para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo ν tal que si $n \geq \nu$ entonces $|x_n - x| \leq \varepsilon e$. Es fácil comprobar que si $\{x_n\}_n$ es e-uniformemente convergente entonces el elemento x es único y se denomina *límite e-uniforme* de la sucesión $\{x_n\}_n$. Un subconjunto D de E se dice que es *e-uniformemente cerrado*, si cada sucesión e-uniformemente de Cauchy de D es e-uniformemente convergente a un elemento de D. Un subconjunto D de E se dice que es *e-uniformemente denso*, si cada elemento de E es límite e-uniforme de una sucesión de D.

Nota. Sea E un retículo vectorial arquimediano y sea $e \in E_+$ tal que E es e-uniformemente cerrado. En adelante utilizaremos la siguiente propiedad de comprobación inmediata: si e es una unidad débil, en cuyo caso tenemos el retículo vectorial E^*, entonces E^* es también e-uniformemente cerrado.

Ejemplo 1.2.8. Sea X un espacio topológico. Si dado $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, consideramos la función constante λ, que es continua, es fácil comprobar que en $\mathcal{C}(X)$ las nociones "sucesión λ-uniformemente de Cauchy", "sucesión λ-uniformemente convergente", "conjunto λ-uniformemente cerrado" y "conjunto λ-uniformemente denso", coinciden con las nociones clásicas de "sucesión uniformemente de Cauchy", "sucesión uniformemente convergente", "conjunto uniformemente cerrado" y "conjunto uniformemente denso".

Cuando X es compacto Hausdorff, sobre $\mathcal{C}(X)$ tenemos la topología definida por la norma del supremo, y es claro que las nociones anteriores coinciden con las de "sucesión de Cauchy", "sucesión convergente", "conjunto cerrado" y "conjunto denso" para dicha topología. Sea F un subconjunto de $\mathcal{C}(X)$ que separa puntos de X y contiene las funciones constantes; el célebre teorema de Stone-Weierstrass afirma si F es subálgebra de $\mathcal{C}(X)$ entonces F es uniformemente denso en $\mathcal{C}(X)$, y el no menos conocido teorema de Kakutani-Stone dice que si F es subretículo vectorial de $\mathcal{C}(X)$ entonces F es uniformemente denso en $\mathcal{C}(X)$.

1.2.9. Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. El teorema 1.2.6 permite que en adelante consideremos a E^* como un subretículo vectorial de $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*)$. Dicho subretículo separa puntos de $\operatorname{Spec} E^*$ y contienen las funciones constantes: dado $\lambda \in \mathbb{R}$, el elemento $\lambda e \in E^*$ representado como función sobre $\operatorname{Spec} E^*$ es la función constante λ. Por lo tanto E^* es uniformemente denso en $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*)$.

Teorema de Caracterización 1.2.10. *Un retículo vectorial arquimediano E es l-isomorfo a $\mathcal{C}(K)$ para algún espacio topológico compacto Hausdorff K, si y sólo si, en E existe una unidad fuerte e para la cual E es e-uniformemente cerrado.*

Demostración. Si K es un espacio topológico compacto Hausdorff, entonces la función constante 1 es una unidad fuerte en $\mathcal{C}(K)$, y ya hemos dicho en el ejemplo 1.2.8 que $\mathcal{C}(K)$ es 1-uniformemente cerrado.

Recíprocamente, sea E un retículo vectorial arquimediano en el que existe una unidad fuerte e tal que E es e-uniformemente cerrado, de modo

que $E = E^*$ visto como subretículo de $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*)$ es 1-uniformemente cerrado. Basta tener en cuenta que E^* es 1-uniformemente denso en $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*)$ para concluir que $E^* = \mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*)$, esto es, que la representación de Riesz $E = E^* \to \mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*)$ es un l-isomorfismo. □

Ya hemos mencionado que E^* es un subretículo vectorial de $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*)$ que separa puntos. Vamos a ver que como consecuencia de ser además uniformemente denso en $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*)$, se satisface un tipo de separación más fuerte.

Definición 1.2.11. Sea X un espacio topológico y sea E un subconjunto de $\mathcal{C}(X)$. Diremos que E S^1-*separa cerrados*, si para cada par de cerrados disjuntos no vacíos F y G de X existe $h \in E$, $0 \leq h \leq 1$, tal que $h(F) = 0$ y $h(G) = 1$.

Corolario 1.2.12. *Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. Entonces E^* S^1-separa cerrados de* $\operatorname{Spec} E^*$.

Demostración. Si F, G son cerrados disjuntos de $\operatorname{Spec} E^*$, entonces por el lema de Uryshon existe $f \in \mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*)$ tal que $f(\omega) = -1$ si $\omega \in F$ y $f(\omega) = 2$ si $\omega \in G$. Puesto que E^* es uniformemente denso en $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*)$, existirá $x \in E^*$ tal que $\|x - f\|_\infty \leq 1$, es decir $-1 \leq \omega(x) - f(\omega) \leq 1$ para todo $\omega \in \operatorname{Spec} E^*$. Si $\omega \in F$, entonces $-2 \leq \omega(x) \leq 0$ y si $\omega \in G$, entonces $1 \leq \omega(x) \leq 3$. Sea $y = 0 \vee (x \wedge e)$, entonces $\omega(y) = 0$ si $\omega \in F$ y $\omega(y) = 1$ si $\omega \in G$. □

1.2.13. Sea como ya es habitual, E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. Procediendo como en 1.2.3 dotamos a $\operatorname{Spec} E$ de la topología débil definida por E: dado $x \in E$ tenemos la función

$$\begin{aligned} x : \operatorname{Spec} E &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto x(\omega) = \omega(x)\,. \end{aligned}$$

La aplicación $\omega \in \operatorname{Spec} E \mapsto (\omega(x))_{x \in E} \in \mathbb{R}^E$ es inyectiva porque E separa puntos de $\operatorname{Spec} E$, siendo la topología de $\operatorname{Spec} E$ justamente la inducida por la topología producto de $\mathbb{R}^E$. Con una demostración idéntica a la de la proposición 1.2.4 se comprueba que $\operatorname{Spec} E$ es cerrado en $\mathbb{R}^E$. Podemos definir también una aplicación natural $E \to \mathcal{C}(\operatorname{Spec} E)$, conocida como *representación de Riesz*, que es un morfismo de retículos vectoriales. Sin embargo existen diferencias notables respecto a la situación que se tenía para E^*. Concretamente, puede ocurrir que $\operatorname{Spec} E = \varnothing$ (véase [43, p. 159]) ó que la representación de Riesz no sea inyectiva; además, aunque tal representación sea inyectiva y E sea e-uniformemente cerrado, E puede ser distinto

de $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} E)$. De hecho una parte importante de esta memoria consistirá en investigar algunos casos particulares en los que $E = \mathcal{C}(\operatorname{Spec} E)$.

A pesar de los aspectos negativos que hemos señalado en el párrafo anterior, vamos a ver a continuación que cada retículo vectorial arquimediano E con unidad débil es l-isomorfo a un retículo vectorial de funciones continuas sobre $\operatorname{Spec} E^*$ que toman sus valores en $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Este resultado consiste básicamente en el teorema de representación espectral de Yosida, cuyos detalles pueden verse en [43]. La diferencia radica en que este último representa E como funciones extendidas sobre el espacio de los l-subespacios que son maximales respecto a la propiedad de no contener a la unidad débil, en lugar de hacerlo sobre $\operatorname{Spec} E^*$.

1.2.14. Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e, y sea $\overline{\mathbb{R}}$ la compactificación de $\mathbb{R}$ por dos puntos. Se define el conjunto $\mathcal{D}(\operatorname{Spec} E^*)$ como las aplicaciones continuas $f : \operatorname{Spec} E^* \to \overline{\mathbb{R}}$ para las cuales el abierto $R(f) = \{\omega \in \operatorname{Spec} E^* : f(\omega) \in \mathbb{R}\}$ es denso en $\operatorname{Spec} E^*$. Los elementos de $\mathcal{D}(\operatorname{Spec} E^*)$ se conocen como *funciones extendidas*. Es claro que $E^* \subseteq \mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*) \subseteq \mathcal{D}(\operatorname{Spec} E^*)$.

Dadas $f, g \in \mathcal{D}(\operatorname{Spec} E^*)$, es fácil ver que para el orden puntual se satisface que las aplicaciones $f \wedge g$ y $f \vee g$ son continuas y tales que $R(f) \cap R(g) \subseteq R(f \wedge g) \cap R(f \vee g)$; es decir, $\mathcal{D}(\operatorname{Spec} E^*)$ es un retículo.

Sin embargo $\mathcal{D}(\operatorname{Spec} E^*)$ no es un espacio vectorial, ya que la suma de dos elementos de $\mathcal{D}(\operatorname{Spec} E^*)$ no siempre está definida: dadas $f, g \in \mathcal{D}(\operatorname{Spec} E^*)$, si para cada $\omega_0 \in \operatorname{Spec} E^*$ existe el límite

$$\lim_{\substack{\omega \to \omega_0 \\ \omega \in R(f) \cap R(g)}} (f(\omega) + g(\omega)),$$

entonces estará bien definida la aplicación $f + g$, y para cada $\omega \in \operatorname{Spec} E^*$ será $(f + g)(\omega) = f(\omega) + g(\omega)$. Cuando $f, g \geq 0$ siempre está definida $f + g$.

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathcal{D}(\operatorname{Spec} E^*)$, definimos λf teniendo en cuenta que si $\lambda = 0$ y $f(\omega_0) = \pm\infty$, entonces $(\lambda f)(\omega_0) = 0$ puesto que debe satisfacerse

$$(\lambda f)(\omega_0) = \lim_{\substack{\omega \to \omega_0 \\ \omega \in R(f)}} (\lambda f(\omega)).$$

Nota. Dados elementos x, y, z de un retículo vectorial, en general no es cierta la igualdad $(x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z)$; sin embargo, ésta sí que se satisface cuando $x \leq z$. En ese caso tiene sentido la expresión $x \vee y \wedge z$ que utilizaremos en adelante.

Para probar, como ya hemos dicho, que E es isomorfo a un subretículo de $\mathcal{D}(\operatorname{Spec} E^*)$ necesitamos algunos resultados previos:

Lema 1.2.15. *Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. Dados $x \in E$, $\omega \in \operatorname{Spec} E^*$, se satisfacen:*
(i) $\omega(-e \vee x \wedge e) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \sup_n \omega(x^- \wedge ne) = 0$;
(ii) $\omega(-e \vee x \wedge e) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \sup_n \omega(x^+ \wedge ne) = 0$.

Demostración. Veamos, por ejemplo, (i): $\omega(-e \vee x \wedge e) \geq 0 \Leftrightarrow \omega(-e \vee x \wedge e) \wedge 0 = 0 \Leftrightarrow \omega(-e \vee x \wedge 0) = 0 \Leftrightarrow \omega(-e \vee (-x^-)) = 0 \Leftrightarrow \omega(-(e \wedge x^-)) = 0 \Leftrightarrow \omega(x^- \wedge e) = 0$. Puesto que dado $n \in \mathbb{N}$ se satisface $x^- \wedge ne \leq n(x^- \wedge e)$, tenemos $\omega(x^- \wedge e) = 0 \Leftrightarrow \omega(x^- \wedge ne) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Definición 1.2.16. Dada una función real $f : X \to \mathbb{R}$ definida sobre un conjunto X, llamaremos *cocero* de f al subconjunto $\operatorname{coz}(f)$ de X definido por la igualdad $\operatorname{coz}(f) = \{\omega \in X : f(\omega) \neq 0\}$.

Lema 1.2.17. *Sea X un conjunto y sea E un subretículo vectorial de $\mathbb{R}^X$ que contiene a las funciones constantes. Una base de abiertos para la topología débil definida por E sobre X es $\{\operatorname{coz}(x) : x \in E\}$.*

Demostración. Dado que $\{x^{-1}(\alpha, \beta) : x \in E,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ es una subbase para la topología débil definida por E sobre X, y puesto que

$$\begin{aligned} x^{-1}(\alpha,\beta) =& \{\omega \in X : \alpha < x(\omega) < \beta\} \\ =& \{\omega \in X : (x-\alpha)(\omega) > 0\} \cap \{\omega \in X : (\beta - x)(\omega) > 0\} \\ =& \{\omega \in X : (x-\alpha)^+(\omega) \neq 0\} \cap \{\omega \in X : (\beta - x)^+(\omega) \neq 0\} \\ =& \{\omega \in X : [(x-\alpha)^+ \vee (\beta - x)^+](\omega) \neq 0\} \\ =& \operatorname{coz}((x-\alpha)^+ \vee (\beta - x)^+)\,, \end{aligned}$$

obtenemos que $\{\operatorname{coz}(x) : x \in E\}$ es subbase de dicha topología; teniendo en cuenta que dados $x_1, \ldots, x_n \in E$ se satisface

$$\operatorname{coz}(x_1) \cap \cdots \cap \operatorname{coz}(x_n) = \operatorname{coz}(|x_1| \vee \cdots \vee |x_n|)\,,$$

concluimos la demostración. □

1.2.18. Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. Para cada $x \in E$ vamos a definir una aplicación $\hat{x} : \operatorname{Spec} E^* \to \overline{\mathbb{R}}$. Supuesto en

primer lugar que $x \in E_+$, en cuyo caso tenemos $x = \bigvee_n (x \wedge ne)$ (véase 1.1.16), dada $\omega \in \operatorname{Spec} E^*$ definimos

$$\hat{x}(\omega) = \sup_n \omega(x \wedge ne) \in [0, +\infty] .$$

Nótese que si $x \in E_+^*$ entonces $\hat{x} = x$, puesto que en ese caso existe n_0 tal que $x \leq n_0 e$ y por tanto $x = x \wedge ne$ para todo $n \geq n_0$. En general, dado $x \in E$ definimos $\hat{x}$ por la igualdad

$$\hat{x} = \widehat{x^+} - \widehat{x^-}.$$

La anterior suma está bien definida porque, dada $\omega \in \operatorname{Spec} E^*$, el lema 1.2.15 asegura que $\widehat{x^+}(\omega) = 0$ ó $\widehat{x^-}(\omega) = 0$. Denotemos $\widehat{E} = \{\hat{x} : x \in E\}$.

Teorema 1.2.19. *Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. El conjunto $\widehat{E}$ es un subretículo de $\mathcal{D}(\operatorname{Spec} E^*)$ y un espacio vectorial, y la aplicación $E \to \widehat{E}$, $x \mapsto \hat{x}$, es un l-isomorfismo.*

Demostración. Veamos en primer lugar que $\widehat{E} \subseteq \mathcal{D}(\operatorname{Spec} E^*)$. Teniendo en cuenta la igualdad $\hat{x} = \widehat{x^+} - \widehat{x^-}$, será suficiente ver que si $x \in E_+$ entonces la aplicación $\hat{x} : \operatorname{Spec} E^* \to [0, +\infty]$ es continua y $R(\hat{x})$ es denso en $\operatorname{Spec} E^*$.

Para ver que $\hat{x}$ es continua hay que probar que, cualesquiera que sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, los conjuntos $\{\omega \in \operatorname{Spec} E^* : \hat{x}(\omega) > \alpha\}$ y $\{\omega \in \operatorname{Spec} E^* : \hat{x}(\omega) < \beta\}$ son abiertos. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\{\omega \in \operatorname{Spec} E^* : \omega(x \wedge ne) > \alpha\}$ es abierto porque $x \wedge ne \in E_+^*$, de modo que de la igualdad

$$\{\omega \in \operatorname{Spec} E^* : \hat{x}(\omega) > \alpha\} = \bigcup_n \{\omega \in \operatorname{Spec} E^* : \omega(x \wedge ne) > \alpha\}$$

se sigue que $\{\omega \in \operatorname{Spec} E^* : \hat{x}(\omega) > \alpha\}$ es abierto. Por otro lado, si $\hat{x}(\omega) < \beta$ y $n_0 \geq \beta$, entonces $\beta > \omega(x \wedge n_0 e) = \omega(x \wedge n_0 e) \wedge \beta = \omega(x \wedge n_0 e \wedge \beta e) = \omega(x \wedge \beta e)$. Recíprocamente, si $\omega(x \wedge \beta e) < \beta$, considerando $\omega(x \wedge \beta e) < \lambda < \beta$ tenemos $\omega(x \wedge \lambda e) \leq \omega(x \wedge \beta e) < \lambda$, y si $n \geq \lambda$ entonces $\omega(x \wedge ne) \wedge \lambda = \omega(x \wedge ne \wedge \lambda e) = \omega(x \wedge \lambda e) < \lambda$, de modo que $\hat{x}(\omega) \leq \lambda < \beta$. Hemos probado la igualdad

$$\{\omega \in \operatorname{Spec} E^* : \hat{x}(\omega) < \beta\} = \{\omega \in \operatorname{Spec} E^* : \omega(x \wedge \beta e) < \beta\},$$

y por lo tanto que $\{\omega \in \operatorname{Spec} E^* : \hat{x}(\omega) < \beta\}$ es abierto.

Veamos ahora que el abierto

$$R(\hat{x}) = \{\omega \in \operatorname{Spec} E^* : \hat{x}(\omega) < \infty\} = \bigcup_n \{\omega \in \operatorname{Spec} E^* : \hat{x}(\omega) < n\}$$

es denso, es decir, sea $y \in E_+^*$ tal quecoz$(y) \cap R(\hat{x}) = \varnothing$ y probemos entonces que $\mathrm{coz}(y) = \varnothing$ (Lema 1.2.17). Nótese que la igualdad $\mathrm{coz}(y) \cap R(\hat{x}) = \varnothing$ significa que se satisface: si $\omega \in \operatorname{Spec} E^*$ es tal que $\hat{x}(\omega) \in \mathbb{R}$, entonces $\omega(y) = 0$. Fijemos $n_0 \geq \|y\|_\infty$. Como $K = \{\omega \in \operatorname{Spec} E^* : \hat{x}(\omega) = \infty\}$ es compacto y la colección $\{\omega \in \operatorname{Spec} E^* : \omega(x \wedge ne) > n_0^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento abierto creciente de K, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq \{\omega \in \operatorname{Spec} E^* : \omega(x \wedge ne) > n_0^2\}$. Dada $\omega \in \operatorname{Spec} E^*$ tenemos: si $\hat{x}(\omega) < \infty$ entonces $\omega(y) = 0$ y por tanto $\omega(n_0 y) \leq \omega(x \wedge ne)$, y si $\hat{x}(\omega) = \infty$ entonces $\omega(n_0 y) = n_0\omega(y) \leq n_0\|y\|_\infty \leq n_0^2 < \omega(x \wedge ne)$. De lo anterior se sigue que $n_0 y \leq x \wedge ne$ (porque E^* es un subretículo de $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*)$), y como $x \wedge ne \leq x$ obtenemos $n_0 y \leq x$. La anterior desigualdad la hemos probado para todo $n_0 \geq \|y\|_\infty$, de modo que es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto debe ser $y = 0$, es decir, $\mathrm{coz}(y) = \varnothing$.

Para probar que $\widehat{E}$ es un espacio vectorial veamos que cualesquiera que sean $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se satisfacen $\widehat{x+y} = \hat{x} + \hat{y}$ y $\widehat{\lambda x} = \lambda\hat{x}$, de modo que también quedará probado que la aplicación $E \to \widehat{E}$, $x \mapsto \hat{x}$, es lineal. Demostrémoslo para la suma (para el producto por escalares se procede de modo análogo). Si $x, y \in E_+$, dado $\omega \in \operatorname{Spec} E^*$ tenemos

$$\begin{aligned}\omega(x \wedge ne) + \omega(y \wedge ne) &\leq \omega((x+y) \wedge 2ne)\\ &\leq \omega(x \wedge 2ne) + \omega(y \wedge 2ne)\\ &\leq \hat{x}(\omega) + \hat{y}(\omega)\,,\end{aligned}$$

luego $\widehat{x+y}(\omega) = \hat{x}(\omega) + \hat{y}(\omega)$. Antes de probar el caso general nótese que se satisface $\hat{x}^+ = \widehat{x^+}$. En efecto, si $\omega \in \operatorname{Spec} E^*$ entonces

$$\begin{aligned}\hat{x}^+(\omega) = (\hat{x} \vee 0)(\omega) := \hat{x}(\omega) \vee 0 &= (\sup_n \omega(x \wedge ne)) \vee 0 = \sup_n (0 \vee \omega(x \wedge ne))\\ = \sup_n \omega(0 \vee x \wedge ne) &= \sup_n \omega(x^+ \wedge ne) = \widehat{x^+}(\omega)\,.\end{aligned}$$

Del mismo modo se prueba que $\hat{x}^- = \widehat{x^-}$, y como consecuencia se obtiene la igualdad $|\hat{x}| = \widehat{|x|}$. De lo anterior se seguirá que $\widehat{E}$ es un retículo y que la aplicación $E \to \widehat{E}$ es un morfismo de retículos, cuando probemos que dados $x, y \in E$ se satisface $\widehat{x+y} = \hat{x} + \hat{y}$. Nótese también que si $x, y \in E$ son tales que $x \leq y$, entonces se satisface $\hat{x} \leq \hat{y}$, como se comprueba fácilmente.

Dados $x, y \in E$ tenemos $x + y = (x+y)^+ - (x+y)^- = x^+ - x^- + y^+ - y^-$, es decir, $(x+y)^+ + x^- + y^- = (x+y)^- + x^+ + y^+$, y aplicando lo probado para los elementos de E_+ obtenemos

$$(\widehat{x+y})^+ + \hat{x}^- + \hat{y}^- = (\widehat{x+y})^- + \hat{x}^+ + \hat{y}^+.$$

Como $(x+y)^+ \leq |x+y| \leq |x|+|y|$, si $\omega \in R(\hat{x}) \cap R(\hat{y})$ será

$$\widehat{(x+y)}^+(\omega) = (\widehat{x+y})^+(\omega) \leq (\widehat{|x|+|y|})(\omega) \leq \widehat{|x|}(\omega) + \widehat{|x|}(\omega) < +\infty\,.$$

Lo mismo ocurre para las otras partes positivas y negativas, por tanto, de la igualdad

$$(\widehat{x+y})^+(\omega)+\hat{x}^-(\omega)+\hat{y}^-(\omega) = (\widehat{x+y})^-(\omega)+\hat{x}^+(\omega)+\hat{y}^+(\omega), \quad \omega \in R(\hat{x})\cap R(\hat{y})$$

se deduce

$$\begin{aligned}(\widehat{x+y})(\omega) &= (\widehat{x+y})^+(\omega) - (\widehat{x+y})^-(\omega)\\ &= \hat{x}^+(\omega) - \hat{x}^-(\omega) + \hat{y}^+(\omega) - \hat{y}^-(\omega) = \hat{x}(\omega) + \hat{y}(\omega)\,.\end{aligned}$$

Basta tener en cuenta que $R(\hat{x}) \cap R(\hat{y})$ es un abierto denso para concluir que $\widehat{x+y} = \hat{x} + \hat{y}$.

Veamos para terminar que la aplicación $E \to \widehat{E}$ es inyectiva. Sea $x \in E$ tal que $\hat{x} = 0$. Según el lema 1.2.15, si $\omega \in \operatorname{Spec} E^*$ entonces $\hat{x}^+(\omega) = 0$ ó $\hat{x}^-(\omega) = 0$, de modo que debe ser $\hat{x}^+(\omega) = \hat{x}^-(\omega) = 0$ para todo $\omega \in \operatorname{Spec} E^*$. Lo anterior significa que $\omega(x^+ \wedge ne) = \omega(x^- \wedge ne) = 0$ para todo $\omega \in \operatorname{Spec} E^*$, y de esto se deduce que $x^+ \wedge e = x^- \wedge e = 0$, ya que la representación de Riesz $E^* \to \mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*)$ es inyectiva; basta tener en cuenta que e es unidad débil para obtener $x^+ = x^- = 0$ (véase la proposición 1.1.16). □

Observación 1.2.20. (i) En la demostración anterior hemos podido aplicar el lema 1.2.17 porque, como ya se dijo en 1.2.9, el subretículo E^* de $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*)$ contiene las funciones constantes.
(ii) También hemos señalado que, dado $x \in E^*$, se da la igualdad $\hat{x}(\omega) = \omega(x)$ para cada $\omega \in \operatorname{Spec} E^*$. En lo que sigue se probará que $\operatorname{Spec} E$ se puede considerar como un subespacio topológico de $\operatorname{Spec} E^*$, y que también es cierta la igualdad $\hat{x}(\omega) = \omega(x)$ cuando $x \in E$ y $\omega \in \operatorname{Spec} E$.

Teorema 1.2.21. *Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. El morfismo de restricción $\omega \in \operatorname{Spec} E \mapsto \omega_{|E^*} \in \operatorname{Spec} E^*$ es un homeomorfismo entre $\operatorname{Spec} E$ y su imagen.*

Demostración. El morfismo de restricción $\operatorname{Spec} E \to \operatorname{Spec} E^*$ es inyectivo: sean $\omega_1, \omega_2 \in \operatorname{Spec} E$ tales que $\omega_{1|E^*} = \omega_{2|E^*}$; dado $x \in E_+$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\omega_1(x) \leq n$ y $\omega_2(x) \leq n$, de modo que $\omega_1(x) = \omega_1(x \wedge ne)$ y $\omega_2(x) = \omega_2(x \wedge ne)$; como $x \wedge ne \in E^*$, tenemos que $\omega_1(x) = \omega_2(x)$ y por tanto $\omega_1 = \omega_2$.

Veamos ahora que $\operatorname{Spec} E$ es homeomorfo a su imagen en $\operatorname{Spec} E^*$. La topología inducida por $\operatorname{Spec} E^*$ en $\operatorname{Spec} E$ es la inducida por las composiciones

$$\{\operatorname{Spec} E \to \operatorname{Spec} E^* \xrightarrow{y} \mathbb{R} \,:\, y \in E^*\};$$

pero dados $y \in E^*$, $\omega \in \operatorname{Spec} E$ tenemos que $y(\omega_{|E^*}) = \omega(y) = y(\omega)$, viendo y en E; por tanto, la topología inducida por $\operatorname{Spec} E^*$ en $\operatorname{Spec} E$ es la débil inducida por las funciones de $E^* \subseteq E$. Teniendo en cuenta que para cada $x \in E$ se satisfacen $\operatorname{coz}(x) = \operatorname{coz}(|x|) = \operatorname{coz}(|x| \wedge e)$ y $|x| \wedge e \in E^*$, basta aplicar el lema 1.2.17 para concluir con que ambas topologías coinciden (véase la observación 1.2.20 (i)). □

En adelante identificaremos $\operatorname{Spec} E$ con su imagen en $\operatorname{Spec} E^*$. El siguiente lema nos dice cómo podemos ver $\operatorname{Spec} E$ dentro de $\operatorname{Spec} E^*$:

Lema 1.2.22. *Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. Se satisface*

$$\operatorname{Spec} E = \{\omega \in \operatorname{Spec} E^* \,:\, \hat{x}(\omega) \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in E_+\}.$$

Demostración. Si $\omega \in \operatorname{Spec} E$ y $x \in E_+$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\omega(x) \leq n_0$ y por tanto $\omega(x) = \omega(x) \wedge n = \omega(x \wedge ne)$ para todo $n \geq n_0$, de modo que $\hat{x}(\omega) = \sup_n \omega(x \wedge ne) = \omega(x) \in \mathbb{R}$.

Sea ahora $\omega \in \operatorname{Spec} E^*$ tal que $\hat{x}(\omega) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in E_+$. Definimos $\bar{\omega} : E \to \mathbb{R}$ del siguiente modo: dado $x \in E$, $\bar{w}(x) = \hat{x}(\omega) \in \mathbb{R}$. Veamos que $\bar{\omega} \in \operatorname{Spec} E$: dados $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\bar{\omega}(x+y) = \widehat{x+y}(\omega) = \hat{x}(\omega) + \hat{y}(\omega) = \bar{\omega}(x) + \bar{\omega}(y)\,,$$
$$\bar{\omega}(\lambda x) = \widehat{\lambda x}(\omega) = \lambda \hat{x}(\omega) = \lambda \bar{\omega}(x)\,, \qquad \bar{\omega}(e) = e(\omega) = 1\,,$$
$$\bar{\omega}(|x|) = \widehat{|x|}(\omega) = |\hat{x}|(\omega) = |\hat{x}(\omega)| = |\bar{\omega}(x)|\,.$$

Obviamente $\omega = \bar{\omega}_{|E^\star}$. □

Veamos una propiedad importante de $\operatorname{Spec} E$ como subespacio topológico de $\operatorname{Spec} E^*$.

Definiciones 1.2.23. Sea Y un subconjunto de un espacio topológico X. Se dice que Y es un *conjunto G_δ*, si Y es igual a la intersección de una familia numerable de abiertos. Dada $f \in \mathcal{C}(X)$, es fácil ver que $\operatorname{coz}(f)$ es un conjunto G_δ. Se define la *Q-clausura* de Y como el conjunto de puntos $\omega \in X$ que satisfacen: cada conjunto G_δ que contiene a ω tiene intersección no vacía con Y. Se dice que Y es *Q-cerrado* cuando coincida con su Q-clausura.

Lema 1.2.24. *Si E es un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e, entonces* $\operatorname{Spec} E$ *es un subespacio Q-cerrado de* $\operatorname{Spec} E^*$*. Más concretamente, dada $\omega_0 \in \operatorname{Spec} E^* \setminus \operatorname{Spec} E$, existe $h \in \mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*)$, $h \geq 0$, tal que $h(\omega_0) = 0$ y $h(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \operatorname{Spec} E$.*

Demostración. Sea $\omega_0 \in \operatorname{Spec} E^* \setminus \operatorname{Spec} E$. Por 1.2.22 sabemos que existe $x \in E_+$ tal que $\hat{x}(\omega_0) = +\infty$. Definimos $h : \operatorname{Spec} E^* \to \mathbb{R}$ del siguiente modo:

$$h(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{1+\hat{x}(\omega)} & \text{si } \omega \in R(\hat{x})\,, \\ 0 & \text{si } \omega \notin R(\hat{x})\,; \end{cases}$$

h es continua porque $R(\hat{x})$ es un abierto denso de $\operatorname{Spec} E^*$, $h(\omega_0) = 0$ porque $\omega_0 \notin R(\hat{x})$, y $h(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \operatorname{Spec} E$ porque $\operatorname{Spec} E \subseteq R(\hat{x})$. □

Definición 1.2.25. Sea E un retículo vectorial con unidad débil e. Se dice que E es *e-semisimple* si su representación de Riesz es inyectiva.

Según vimos en el teorema 1.2.6, E^* es e-semisimple.

1.2.26. Si E es un retículo vectorial con unidad débil e, y si E es e-semisimple, entonces debe ser $\operatorname{Spec} E \neq \varnothing$. En efecto, si fuera $\operatorname{Spec} E = \varnothing$ entonces $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} E)$ tiene como único elemento la inclusión $\varnothing \hookrightarrow \mathbb{R}$, luego la representación $E \to \mathcal{C}(\operatorname{Spec} E)$ no puede ser inyectiva porque en E hay más de un elemento (recuérdese que es $E \neq 0$).

Proposición 1.2.27. *Un retículo vectorial arquimediano E con unidad débil e es e-semisimple, si y sólo si* $\operatorname{Spec} E$ *es denso en* $\operatorname{Spec} E^*$*.*

Demostración. Que E sea e-semisimple significa que si $x \in E$ es tal que $x(\omega) = 0$ para todo $\omega \in \operatorname{Spec} E$ entonces $x = 0$. Dado que $\operatorname{coz}(x) = \operatorname{coz}(|x| \wedge e)$, el que E sea e-semisimple es equivalente a que si $x \in E^*$ es tal que $x(\omega) = 0$ para todo $\omega \in \operatorname{Spec} E$ entonces $x = 0$.

Por otra parte, el que $\operatorname{Spec} E$ sea denso en $\operatorname{Spec} E^*$ significa que si $x \in E^*$ es tal que $x(\omega) = 0$ para todo $\omega \in \operatorname{Spec} E$, entonces $x(\omega) = 0$ para todo $\omega \in \operatorname{Spec} E^*$; pero teniendo en cuenta que E^* es e-semisimple, lo anterior es equivalente a que si $x \in E^*$ es tal que $x(\omega) = 0$ para todo $\omega \in \operatorname{Spec} E$ entonces $x = 0$. □

1.3 La realcompactificación de Hewitt-Nachbin

En esta sección trabajaremos con retículos vectoriales cuyos elementos son ya funciones reales sobre un conjunto. Si X es un conjunto y E es un subretículo vectorial de $\mathbb{R}^X$ que contiene a las funciones constantes, entonces E es arquimediano y la función constantemente igual a 1 es unidad débil de orden. En tal caso $\operatorname{Spec} E \neq \varnothing$ puesto que para cada $\omega \in X$ el morfismo de evaluación en ω,

$$\begin{aligned} \delta_\omega : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \delta_\omega(x) = x(\omega)\,, \end{aligned}$$

pertenece a $\operatorname{Spec} E$. Además E es 1-semisimple: si $x \in E$ es tal que $\omega(x) = 0$ para todo $\omega \in \operatorname{Spec} E$, en particular debe ser $\delta_\omega(x) = x(\omega) = 0$ para todo $\omega \in X$, y entonces $x = 0$.

Cuando E separe puntos de X, la aplicación $\omega \mapsto \delta_\omega$ es inyectiva y por tanto X dotado de la topología débil definida por E puede considerarse como un subespacio topológico de $\operatorname{Spec} E$. Para precisar las propiedades de X como subespacio topológico de $\operatorname{Spec} E$ necesitaremos las siguientes cuestiones previas:

Definiciones 1.3.1. Sea X un espacio topológico completamente regular. Se dice que X es *realcompacto* si es homeomorfo a un subespacio cerrado de un producto de copias de $\mathbb{R}$. Es claro que todo espacio topológico realcompacto es Hausdorff. Dado $Y \subseteq X$, se dice que Y está C-*sumergido* en X si cada función continua $f : Y \to \mathbb{R}$ se extiende a una función continua $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$, y se dice que Y está C*-*sumergido* en X si cada función continua y acotada $f : Y \to \mathbb{R}$ se extiende a una función continua $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$.

1.3.2. Si E es un retículo vectorial arquimediano con unidad débil, entonces $\operatorname{Spec} E$ es un espacio topológico realcompacto (véase 1.2.13).

Proposición 1.3.3. *Sea X un espacio topológico completamente regular. Son equivalentes:*

(i) *X es realcompacto;*

(ii) *si X es un subespacio denso y C-sumergido de un espacio completamente regular T, entonces $X = T$.*

Demostración. (i)⇒(ii) Supongamos que X es realcompacto, es decir, X es homeomorfo a un subespacio cerrado de $\mathbb{R}^I$, y supongamos que X es denso y

C-sumergido en T. Denotemos por i, j las respectivas inmersiones de X en T y de X en $\mathbb{R}^I$. Podemos considerar el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & \mathbb{R}^I \\ i\downarrow & \nearrow \tilde{j} & \\ T & & \end{array}$$

donde $\tilde{j}$ es una extensión continua a T de la aplicación j. Como

$$\tilde{j}(T) = \tilde{j}(\overline{i(X)}) \subseteq \overline{j(X)} = j(X)\,,$$

tenemos que la aplicación continua

$$i \circ j^{-1} \circ \tilde{j} : T \to T$$

coincide en $i(X)$ con la aplicación identidad. Pero $i(X)$ es denso en T, de modo que coinciden en todo punto de T.

(ii)$\Rightarrow$(i) Puesto que X es completamente regular, X tiene la topología débil dada por $\mathcal{C}(X)$ (Lema 1.2.17). Denotemos por i la inmersión topológica de X en $\mathbb{R}^{\mathcal{C}(X)}$ y sea $f \in \mathcal{C}(X)$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ i\downarrow & \nearrow \pi_f & \\ \mathbb{R}^{\mathcal{C}(X)} & & \end{array}$$

donde π_f denota la proyección sobre la coordenada f. Así pues, π_f es una extensión continua de f a $\mathbb{R}^{\mathcal{C}(X)}$, y en particular a $\overline{i(X)}$. De acuerdo con (ii) concluimos que $X = i(X) = \overline{i(X)}$, y por lo tanto X es realcompacto. $\square$

Definiciones 1.3.4. Sea X un espacio topológico completamente regular. Llamaremos *realcompactificación* de X a todo espacio topológico realcompacto Y dotado de una aplicación continua $i : X \to Y$ tal que $i(X)$ es denso en Y e $i : X \to i(X)$ es un homeomorfismo. Llamaremos *compactificación* de X a todo espacio topológico compacto Hausdorff Y dotado de una aplicación continua $i : X \to Y$ tal que $i(X)$ es denso en Y e $i : X \to i(X)$ es un homeomorfismo.

Proposición 1.3.5. *Sean X un conjunto y E un subretículo vectorial de $\mathbb{R}^X$ que contiene a las funciones constantes y separa puntos de X. Si se considera X dotado de la topología débil definida por E, entonces* $\operatorname{Spec} E$ *es una realcompactificación de X y* $\operatorname{Spec} E^*$ *es una compactificación de X.*

Demostración. Consideremos X como subespacio topológico de $\operatorname{Spec} E$ (y por lo tanto de $\operatorname{Spec} E^*$) vía la inclusión natural $\omega \in X \mapsto \delta_\omega \in \operatorname{Spec} E$ (véase la introducción a esta sección 1.3). Según la proposición 1.2.27, $\operatorname{Spec} E$ es denso en $\operatorname{Spec} E^*$, así que sólo tenemos que probar que X es denso en $\operatorname{Spec} E$.

Sean $\varphi_0 \in \operatorname{Spec} E$, $x_1, \ldots, x_n \in E$ y $\varepsilon > 0$, y veamos que existe $\omega_0 \in X$ tal que $\delta_{\omega_0} \in \bigcap_i \{\varphi \in \operatorname{Spec} E : |\varphi(x_i) - \varphi_0(x_i)| < \varepsilon\}$. Consideremos $x = \bigvee_i |x_i - \varphi_0(x_i)| \in E$; es obvio que $\varphi_0(x) = 0$ y en consecuencia existe $\omega_0 \in X$ tal que $x(\omega_0) < \varepsilon$, pues si fuera $x(\omega) \geq \varepsilon$ para todo $\omega \in X$, entonces tendríamos $\varepsilon \leq x$ y por tanto $\varphi_0(x) \geq \varepsilon > 0$. Por último, de la desigualdad $x(\omega_0) < \varepsilon$ se sigue que $|x_i(\omega_0) - \varphi_0(x_i)| < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$. □

Definiciones 1.3.6. Sea X un espacio topológico completamente regular. El espacio topológico realcompacto $\operatorname{Spec} \mathcal{C}(X)$ se denota por υX y es conocido como la *realcompactificación de Hewitt-Nachbin* de X, y el espacio topológico compacto $\operatorname{Spec} \mathcal{C}^*(X)$ se denota por βX y es conocido como la *compactificación de Stone-Cĕch* de X.

Proposición 1.3.7. *Para cada espacio topológico completamente regular X se satisfacen:*

(i) *X está C-sumergido en υX y está C^*-sumergido en βX;*

(ii) *X es realcompacto si y sólo si $X = \upsilon X$;*

(iii) *υX es la Q-clausura de X en βX; como consecuencia, X es realcompacto si y sólo si X es Q-cerrado en βX.*

Demostración. El apartado (i) es una tautología, y el (ii) se sigue de (i) y de la proposición 1.3.3.

Veamos (iii). La Q-clausura de X en βX está contenida en υX porque υX es Q-cerrado en βX (véase el lema 1.2.24). Supongamos ahora que $\omega_0 \in \upsilon X$ y sea G un conjunto G_δ de βX que contiene a ω_0. Consideremos en βX una sucesión de abiertos $\{U_n\}_n$ tal que $G = \bigcap_n U_n$, y para cada n sea $h_n \in \mathcal{C}(\beta X)$ tal que $0 \leq h_n \leq 1$, $h_n(\omega_0) = 0$ y $h_n(\beta X \setminus U_n) = 1$. Es claro que $h = \sum_n (h_n \wedge \frac{1}{2^n})$ es una función continua sobre βX que satisface $\omega_0 \in \{\omega \in \upsilon X : \ h(\omega) = 0\} \subseteq G$, por lo que para probar que G corta a X bastará ver que h se anula en algún punto de X. Si fuera $h(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, entonces $1/h$ sería una función continua sobre X, por lo que debería extenderse continuamente a $\omega_0 \in \upsilon X$; pero esto es absurdo porque $h(\omega_0) = 0$. □

1.4 Retículos vectoriales 2-universalmente completos

En esta sección caracterizamos los retículos vectoriales e-uniformemente cerrados (e unidad débil) que son 2-universalmente e-completos (este último concepto introducido por Feldman y Porter [19]), en términos de ciertas propiedades de inversión ligadas a la representación espectral (véanse [13] y [71]).

Definición 1.4.1. Una sucesión $\{x_n\}_n$ de un retículo vectorial E se dice que es *2-disjunta*, si para cada $n \in \mathbb{N}$ existen a lo sumo dos índices m tales que $x_n \wedge x_m \neq 0$. Es claro que si $\{x_n\}_n$ es 2-disjunta entonces $\{x_n\}_n \subseteq E_+$.

Definiciones 1.4.2. Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. Diremos que E es *2-universalmente e-completo*, si para cada sucesión 2-disjunta $\{x_n\}_n$ de E tal que $\{\mathrm{coz}(x_n)\}_n$ es un recubrimiento de $\operatorname{Spec} E$ se satisface que el supremo $\bigvee_n x_n$ existe.

Diremos que E es *e-cerrado por inversión* cuando $\operatorname{Spec} E \neq \varnothing$ y se satisfaga: si $x \in E$ es tal que $\omega(x) \neq 0$ para todo $\omega \in \operatorname{Spec} E$, entonces existe $y \in E$ tal que $\omega(y)\omega(x) = 1$ para todo $\omega \in \operatorname{Spec} E$.

Definiciones 1.4.3. Sea X un conjunto. Un recubrimiento numerable $\{U_n\}_n$ de X se dice *2-finito*, si $U_n \cap U_m = \varnothing$ cuando $|n - m| > 1$. Sea $f \in \mathbb{R}^X$. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos los *conjuntos de Lebesgue de f* como

$$L_\lambda(f) = \{\omega \in X : f(\omega) \leq \lambda\}, \qquad L^\lambda(f) = \{\omega \in X : f(\omega) \geq \lambda\}.$$

Diremos que un subconjunto E de $\mathbb{R}^X$ S^1*-separa los conjuntos de Lebesgue* de f, si para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, existe $g \in E$ tal que $0 \leq g \leq 1$, $g(L_\alpha(f)) = 0$ y $g(L^\beta(f)) = 1$.

1.4.4. Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e y sea $\{x_n\}_n \subseteq E_+$. Sobre $\operatorname{Spec} E^*$ tenemos la sucesión de funciones extendidas $\{\hat{x}_n\}_n$. Es claro que el supremo puntual $f = \sup_n \hat{x}_n$ siempre existe, pudiendo ser $f(\omega) = +\infty$ para algún $\omega \in \operatorname{Spec} E^*$. Dado un subespacio Y de $\operatorname{Spec} E^*$, cuando $f(\omega) \in \mathbb{R}$ para todo $\omega \in Y$ diremos que "el supremo puntual $f = \sup_n \hat{x}_n$ es una función real sobre Y". Puede ocurrir que f no sea una función real sobre Y, pero que, como función extendida, f sea continua sobre Y.

Lema 1.4.5. *Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e, y sea $\{x_n\}_n$ una sucesión de E_+ para la que existe $x = \bigvee_n x_n$. Supongamos*

que el supremo puntual $f = \sup_n \hat{x}_n$ *es una función real y continua sobre un abierto* U *de* $\operatorname{Spec} E^*$. *Entonces* $f = \hat{x}$ *sobre* U.

Demostración. Supongamos en primer lugar que $x \in E^*$, en cuyo caso es clara la inclusión $\{x_n\}_n \subseteq E^*$. Como $x_n \leq x$ se deduce que $\hat{x}_n(\omega) \leq \hat{x}(\omega)$ para todo $\omega \in \operatorname{Spec} E^*$, luego $f(\omega) \leq \hat{x}(\omega)$ para todo $\omega \in U$. Supongamos que existe $\omega_1 \in U$ tal que $f(\omega_1) < \hat{x}(\omega_1)$. Como f y $\hat{x}$ son continuas en U, el conjunto $W = \{\omega \in U : f(\omega) < \hat{x}(\omega)\}$ es un entorno abierto de ω_1; consideremos un entorno compacto K de ω_1 contenido en W (existe por ser $\operatorname{Spec} E^*$ compacto), y sea $\alpha = \inf\{\hat{x}(\omega) - f(\omega) : \omega \in K\} > 0$. Sea $0 < c < 1$ tal que $f(\omega) < \frac{c}{1-c}\,\alpha$, para todo $\omega \in K$ (dicho c existe pues la función $\lambda \mapsto \frac{\lambda}{1-\lambda}\,\alpha$ es continua en $(0,1)$ y toma todos los valores del intervalo $(0,+\infty)$. Consideremos $g \in \mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*)$, $c \leq g \leq 1$, tal que $g(\omega_1) = c$ y $g(\omega) = 1$ si $\omega \in \operatorname{Spec} E^* \setminus \overset{\circ}{K}$. Es claro que $g\hat{x} < \hat{x}$ sobre $\operatorname{Spec} E^*$ porque $g(\omega_1) = c < 1$ y $\hat{x}(\omega_1) > f(\omega_1) \geq 0$.

Veamos que $\hat{x}_n \leq g\hat{x} < \hat{x}$ para todo n: si $\omega \notin K$, entonces $\hat{x}_n(\omega) \leq \hat{x}(\omega) = (g\hat{x})(\omega)$; si $\omega \in K$ entonces

$$\begin{aligned}(g\hat{x})(\omega) - f(\omega) &\geq c\hat{x}(\omega) - f(\omega) = c(\hat{x}(\omega) - f(\omega)) - (1-c)f(\omega)\\ &\geq c\alpha - (1-c)\frac{c}{1-c}\,\alpha = 0\,,\end{aligned}$$

y por tanto $\hat{x}_n(\omega) \leq f(\omega) \leq (g\hat{x})(\omega)$.

Si probamos que existe $z \in E^*$ tal que $g\hat{x} \leq \hat{z} < \hat{x}$ sobre $\operatorname{Spec} E^*$, entonces tendríamos $x_n \leq z < x$ para todo n, lo cual contradice la igualdad $x = \bigvee_n x_n$. Puesto que E^* es uniformemente denso en $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*)$ (1.2.9), dado $\varepsilon = \hat{x}(\omega_1) - g(\omega_1)\hat{x}(\omega_1) = (1-c)\hat{x}(\omega_1) > 0$, existe $y \in E^*$ tal que $\|g\hat{x} - \hat{y}\|_\infty \leq \varepsilon/3$; tenemos

$$g\hat{x} \leq \hat{y} + \varepsilon/3 \leq g\hat{x} + 2\varepsilon/3\,.$$

Si $z = x \wedge (y + \frac{\varepsilon}{3}e)$, entonces $g\hat{x} \leq \hat{z} < \hat{x}$. En efecto, de la definición se sigue trivialmente que $g\hat{x} \leq \hat{z} \leq \hat{x}$; además $\hat{z}(\omega_1) = \hat{x}(\omega_1) \wedge (\hat{y}(\omega_1) + \varepsilon/3) \leq g(\omega_1)\hat{x}(\omega_1) + 2\varepsilon/3 = c\hat{x}(\omega_1) + \frac{2}{3}(1-c)\hat{x}(\omega_1) < \hat{x}(\omega_1)$.

Veamos el caso general. Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $U_k = \{\omega \in U : f(\omega) < k\}$. Fijado $k \in \mathbb{N}$, $\{x_n \wedge ke\}_n$ es una sucesión en E^*_+ que tiene supremo en E, $\bigvee_n (x_n \wedge ke) = (\bigvee_n x_n) \wedge ke = x \wedge ke$, y tal que $f_k = \sup_n(\widehat{x_n \wedge ke})$ es una función real y continua sobre U_k: dado $\omega \in U_k$ tenemos

$$f_k(\omega) = \sup_n(\widehat{x_n \wedge ke})(\omega) = (\sup_n \hat{x}_n(\omega)) \wedge k = f(\omega) \wedge k = f(\omega).$$

Como $x \wedge ke \in E^*$, del caso anterior obtenemos $f_k(\omega) = (\widehat{x \wedge ke})(\omega) = \hat{x}(\omega) \wedge k$ para todo $\omega \in U_k$, y al ser $f_k = f < k$ sobre U_k, concluimos que $f(\omega) = \hat{x}(\omega)$ cuando $\omega \in U_k$. Para terminar basta tener en cuenta que $U = \bigcup_k U_k$. $\square$

Observación 1.4.6. En $\mathcal{C}(X)$, el supremo puntual, si existe como función real, no siempre coincide con el supremo en $\mathcal{C}(X)$; puede incluso ocurrir que el último no exista aunque exista el primero. Cuando el supremo puntual es una función real y continua, entonces sí es igual al supremo en $\mathcal{C}(X)$.

Por ejemplo: $X = [0,1]$, $f_n(\omega) = 1 - \omega^n$, $n \in \mathbb{N}$; el supremo puntual de la sucesión $\{f_n\}_n$ es la función

$$f(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq \omega < 1\,, \\ 0 & \text{si } \omega = 1\,; \end{cases}$$

es claro que f no es continua y que $\bigvee_n f_n = 1 \neq f$.

El lema 1.4.7 se debe a Garrido y Montalvo [22], y el lema 1.4.8 es un caso particular de un resultado del mismo trabajo [22].

Lema 1.4.7. *Sean X un conjunto, E un subretículo vectorial de $\mathbb{R}^X$ que contiene a las funciones constantes, y una función $x \in E$. Se satisfacen:*

(i) *E S^1-separa los conjuntos de Lebesgue de x;*

(ii) *para cada sucesión estrictamente decreciente $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ en $\mathbb{R}$, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ de funciones de E, $0 \leq x_n \leq 1$, satisfaciendo:*

$$\begin{aligned} \operatorname{coz}(x_0) \subseteq C_0 &= \{\omega \in X : x(\omega) > \alpha_1\}, \\ \operatorname{coz}(x_n) \subseteq C_n &= \{\omega \in X : \alpha_{n-1} > x(\omega) > \alpha_{n+1}\} \qquad (n \geq 1), \\ \sup_n x_n(\omega) &= 1 \qquad \forall\, \omega \in \bigcup_{n\geq 0} C_n. \end{aligned}$$

Demostración. (i) Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, es claro que $L_\alpha(x) = L_\alpha(\alpha \vee x \wedge \beta)$, $L^\beta(x) = L^\beta(\alpha \vee x \wedge \beta)$ y $\alpha \vee x \wedge \beta \in E^* \subseteq \mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*)$ (véase lo dicho al comienzo de la sección 1.3). Si denotamos

$$\begin{aligned} K_\alpha &= \{\omega \in \operatorname{Spec} E^* : \alpha \vee \hat{x}(\omega) \wedge \beta \leq \alpha\} \\ K^\beta &= \{\omega \in \operatorname{Spec} E^* : \alpha \vee \hat{x}(\omega) \wedge \beta \geq \beta\} \end{aligned}$$

entonces K_α y K^β son compactos disjuntos de $\operatorname{Spec} E^*$, luego, por 1.2.12, existe $y \in E^* \subseteq E$, $0 \leq y \leq 1$, tal que $y(K_\alpha) = 0$ e $y(K^\beta) = 1$. En consecuencia, $y(L_\alpha(x)) = 0$ e $y(L^\beta(x)) = 1$.

(ii) Sea $\alpha_0 > \alpha_1 > \dots$ una sucesión de números reales, y para cada n consideremos un número real β_n tal que $\alpha_{n-1} > \beta_n > \alpha_n$. Según (i), existen en E sucesiones $\{y_n\}_{n\geq 1}$, $\{z_n\}_{n\geq 0}$, $0 \leq y_n \leq 1$, $0 \leq z_n \leq 1$, tales que

$$y_n(L^{\alpha_{n-1}}(x)) = 1\,, \qquad y_n(L_{\beta_n}(x)) = 0\,, \qquad (n \geq 1)$$

$$z_n(L_{\alpha_{n+1}}(x)) = 0\,, \qquad z_n(L^{\beta_{n+1}}(x)) = 1\,. \qquad (n \geq 0)$$

Si definimos $x_0 = z_0$ y $x_n = z_n - y_n$ para $n \geq 1$, entonces $x_0(\omega) = 1$ si $x(\omega) \geq \beta_1$ y $x_0(\omega) = 0$ si $x(\omega) \leq \alpha_1$, y para $n \geq 1$ tenemos

$$x_n(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x(\omega) \leq \alpha_{n+1} \ \text{ ó } \ x(\omega) \geq \alpha_{n-1}\,, \\ 1 & \text{si } \ \beta_{n+1} \leq x(\omega) \leq \beta_n\,; \end{cases}$$

por lo tanto $\operatorname{coz}(x_0) \subseteq C_0 = \{\omega \in X : x(\omega) > \alpha_1\}$, y $\operatorname{coz}(x_n) \subseteq C_n = \{\omega \in X : \alpha_{n-1} > x(\omega) > \alpha_{n+1}\}$ cuando $n \geq 1$. Por último, se comprueba fácilmente que para todo $\omega \in \bigcup_{n\geq 0} C_n$ se satisface $\sup_n x_n(\omega) = 1$. □

Lema 1.4.8. *Sea X un conjunto y sea E un subretículo vectorial de $\mathbb{R}^X$ uniformemente cerrado y conteniendo a las funciones constantes. Si para cada sucesión $\{x_n\}_n \subseteq E_+^*$ tal que $\{\operatorname{coz}(x_n)\}_n$ es un recubrimiento 2-finito de X se satisface que la función supremo puntual $f = \sup_n x_n$ pertenece a E, entonces E tiene la siguiente propiedad: si $x \in E$ y $x(\omega) \neq 0$ para todo $\omega \in X$, entonces la función $\omega \in X \mapsto \frac{1}{x(\omega)} \in \mathbb{R}$ pertenece a E.*

Demostración. Sea $x \in E$ tal que $x(\omega) \neq 0$ para todo $\omega \in X$ y denotemos

$$y_0 = \frac{1}{2} \vee x\,, \qquad y_n = \frac{1}{n+2} \vee x \wedge \frac{1}{n} \quad (n \geq 1)\,.$$

Para $n \geq 1$ tenemos $y_n \in E^* = \mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*)$ e $y_n \geq \frac{1}{n+2}$, y por lo tanto $\frac{1}{y_n} \in E^*$. Ahora, si consideramos la representación $E \to \mathcal{D}(\operatorname{Spec} E^*)$, entonces $\hat{y}_0(\omega) = \frac{1}{2} \vee \hat{x}(\omega) \geq 1/2$ para todo $\omega \in \operatorname{Spec} E^*$. Definamos

$$y_0^{-1}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\hat{y}_0(\omega)} & \text{si } \ \omega \in R(\hat{y}_0)\,, \\ 0 & \text{si } \ \hat{x}(\omega) = \infty\,, \end{cases}$$

de modo que la función y_0^{-1} es continua y acotada en $\operatorname{Spec} E^*$. En particular, si $\omega \in X$ se tiene que $y_0^{-1}(\omega) = \frac{1}{\hat{y}_0(\omega)} = \frac{1}{y_0(\omega)}$, de modo que $\frac{1}{y_0} \in E^*$. Análogamente, si consideramos las funciones

$$y_0 = \frac{1}{2} \vee (-x)\,, \qquad y_n = \frac{1}{n+2} \vee (-x) \wedge \frac{1}{n} \quad (n \geq 1)\,,$$

concluimos de igual modo que $\frac{1}{y'_n} \in E^*$ para todo $n \geq 0$.

Consideremos en X los conjuntos

$$C_0 = \left\{\omega \in X \,:\, x(\omega) > \frac{1}{2}\right\},$$
$$C_n = \left\{\omega \in X \,:\, \frac{1}{n} > x(\omega) > \frac{1}{n+2}\right\} \qquad (n \geq 1)\,.$$

Aplicando el lema 1.4.7 (ii), existe $\{x_n\}_{n\geq 0} \subseteq E$, $0 \leq x_n \leq 1$, tal que $\operatorname{coz}(x_n) \subseteq C_n$ para todo n y $\sup_n x_n(\omega) = 1$ para todo $\omega \in \bigcup_{n\geq 0} C_n$. De igual modo, si

$$C'_0 = \left\{\omega \in X \,:\, -x(\omega) > \frac{1}{2}\right\},$$
$$C'_n = \left\{\omega \in X \,:\, \frac{1}{n} > -x(\omega) > \frac{1}{n+2}\right\} \qquad (n \geq 1)\,,$$

entonces existe $\{x'_n\}_{n\geq 0} \subseteq E$, $0 \leq x'_n \leq 1$, tal que $\operatorname{coz}(x'_n) \subseteq C_n$ para todo n y $\sup_n x'_n(\omega) = 1$ para todo $\omega \in \bigcup_{n\geq 0} C'_n$.

Puesto que $x(\omega) \neq 0$ para todo $\omega \in X$ tenemos $X = (\bigcup_n C_n) \cup (\bigcup_n C'_n)$, y por lo tanto

$$\frac{1}{x(\omega)} = \sup_n \left(\frac{1}{x(\omega)}\, x_n(\omega)\right) - \sup_n \left(\frac{-1}{x(\omega)}\, x'_n(\omega)\right) \qquad (\omega \in X)\,.$$

Observemos que sobre $\operatorname{coz}(x_n)$ la función x coincide con y_n, y que sobre $\operatorname{coz}(x'_n)$ coincide con $-y'_n$, por lo que tenemos

$$\frac{1}{x(\omega)} = \sup_n \left(\frac{x_n(\omega)}{y_n(\omega)}\right) - \sup_n \left(\frac{x'_n(\omega)}{y'_n(\omega)}\right) \qquad (\omega \in X)\,.$$

En virtud de que $E^* = \mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*)$ es un anillo se tiene que $\frac{x_n}{y_n} \in E^*$. Es claro que $\operatorname{coz}(\frac{x_n}{y_n}) = \operatorname{coz}(x_n)$, lo cual implica que $\bigcup_n \operatorname{coz}(\frac{x_n}{y_n}) = \{\omega \in X : x(\omega) > 0\}$. De aquí se sigue que aunque la colección $\{\operatorname{coz}(\frac{x_n}{y_n})\}_n$ es 2-finita, ésta no necesariamente es un recubrimiento de X (luego no es posible aún aplicar la hipótesis para deducir que $\sup_n \frac{x_n}{y_n} \in E$). Sea $y = -1 \vee x \wedge 1 \in E^*$, entonces $\operatorname{coz}(y^+) = \operatorname{coz}(x^+)$ y $\operatorname{coz}(y^-) = \operatorname{coz}(x^-)$, con lo que ahora ya se sigue que $y^- \vee (\sup_n \frac{x_n}{y_n}) \in E$ (pues $\operatorname{coz}(y^-) \cap \operatorname{coz}(\frac{x_n}{y_n}) = \varnothing$ y $X = \operatorname{coz}(y^-) \cup (\bigcup_n \operatorname{coz}(\frac{x_n}{y_n}))$, y del mismo modo $y^+ \vee (\sup_n \frac{x'_n}{y'_n}) \in E$. Para concluir tenemos

$$y^-(\omega) \vee \left(\sup_n \frac{x_n(\omega)}{y_n(\omega)}\right) - y^+(\omega) \vee \left(\sup_n \frac{x'_n(\omega)}{y'_n(\omega)}\right) = \frac{1}{x(\omega)} - y(\omega) \qquad (\omega \in X)\,,$$

de modo que $\frac{1}{x} - y \in E$ y por lo tanto $\frac{1}{x} \in E$. $\square$

Nota. El recíproco del lema anterior también es cierto; éste no es más que un caso particular de (iii) $\Rightarrow$ (ii) en el siguiente teorema.

Teorema 1.4.9 (M-P-R [49]). *Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. Si E es e-semisimple y e-uniformemente cerrado, entonces son equivalentes:*

(i) *E es 2-universalmente e-completo;*

(ii) *para cada $\{x_n\}_n \subseteq E_+^*$ tal que $\{\mathrm{coz}(x_n)\}_n$ es un recubrimiento 2-finito de $\operatorname{Spec} E$ se satisface que $\bigvee_n x_n$ existe;*

(iii) *E es e-cerrado por inversión.*

Demostración. (i)$\Rightarrow$(ii) Es inmediato.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Sea $\{x_n\}_n \subseteq E_+^*$ una sucesión para la que $\{\mathrm{coz}(x_n)\}_n$ es un recubrimiento 2-finito de $\operatorname{Spec} E$, y sea $f = \sup_n x_n$ el supremo puntual de la sucesión $\{x_n\}_n$ sobre $\operatorname{Spec} E$. Para probar que E es e-cerrado por inversión bastaría, según el lema 1.4.8, probar que $f \in E \subseteq \mathcal{C}(\operatorname{Spec} E)$. Según (ii) existe $x = \bigvee_n x_n \in E$. Si probamos que f es una función real y continua en un entorno abierto de $\operatorname{Spec} E$ en $\operatorname{Spec} E^*$, entonces aplicando el lema 1.4.5 concluiríamos que $f = x$. Si para cada n, $\mathrm{coz}^*(x_n)$ denota el cocero de x_n calculado en $\operatorname{Spec} E^*$ (puesto que $x_n \in E^* = \mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*)$), entonces $U = \bigcup_n \mathrm{coz}^*(x_n)$ es un abierto de $\operatorname{Spec} E^*$; además $\operatorname{Spec} E \subseteq U$, pues $\{\mathrm{coz}(x_n)\}$ es un recubrimiento de $\operatorname{Spec} E$ y $\mathrm{coz}(x_n) = \mathrm{coz}^*(x_n) \cap \operatorname{Spec} E$ para cada n. Fijado $k \in \mathbb{N}$, todas las funciones de la sucesión $\{x_n\}_n$, salvo a lo sumo x_{k-1}, x_k y x_{k+1}, se anulan sobre $\mathrm{coz}^*(x_k)$ porque $\mathrm{coz}(x_k)$ es denso en $\mathrm{coz}^*(x_k)$; por lo tanto

$$f_{|\,\mathrm{coz}^*(x_k)} = (x_{k-1} \vee x_k \vee x_{k+1})_{|\,\mathrm{coz}^*(x_k)}\,.$$

De todo lo anterior se sigue que f es una función real y continua sobre U.

(iii)$\Rightarrow$(i) Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión 2-disjunta de E tal que $\{\mathrm{coz}(x_n)\}_n$ es un recubrimiento de $\operatorname{Spec} E$. Para cada n se satisfacen $\mathrm{coz}^*(\hat{x}_n) = \mathrm{coz}^*(\hat{x}_n \wedge 1) = \mathrm{coz}^*(x_n \wedge e)$ y $\mathrm{coz}(x_n) = \mathrm{coz}(x_n \wedge e) = \mathrm{coz}^*(x_n \wedge e) \cap \operatorname{Spec} E$, de modo que $\mathrm{coz}(x_n) = \mathrm{coz}^*(\hat{x}_n) \cap \operatorname{Spec} E$; por tanto, al igual que antes se prueba que $U = \cup_n \mathrm{coz}^*(\hat{x}_n)$ es un entorno abierto de $\operatorname{Spec} E$ en $\operatorname{Spec} E^*$ y que el supremo puntual $f = \sup_n \hat{x}_n$ existe y es continuo sobre U (pudiera ser que $f(\omega) \notin \mathbb{R}$ para algún $\omega \in U$). Sea $g \in E^* = \mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*)$ tal que $\mathrm{coz}^*(g) = U$ y definamos $h : \operatorname{Spec} E^* \to \mathbb{R}$ como

$$h(\omega) = \begin{cases} \frac{g(\omega)}{1+f(\omega)} & \text{si } \omega \in \mathrm{coz}^*(g)\,, \\ 0 & \text{si } \omega \notin \mathrm{coz}^*(g)\,; \end{cases}$$

h es continua porque dado $\omega_0 \in \operatorname{Spec} E^*$ tal que $\omega_0 \notin \operatorname{coz}^*(g)$ se satisface

$$\lim_{\substack{\omega \to \omega_0 \\ \omega \in \operatorname{coz}^*(g)}} h(\omega) = 0\,;$$

tenemos $h \in \mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*) = E^* \subseteq E$. Como se satisface que $h(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \operatorname{Spec} E$ y E es e-cerrado por inversión, existe $y \in E$ tal que $h(\omega)\omega(y) = 1$ para todo $\omega \in \operatorname{Spec} E$, es decir, $f = gy - e$ con $h, y \in E$. Por lo tanto $f \in E$, y como $f = \sup_n x_n$ debe ser $f = \bigvee_n x_n$. □

Proposición 1.4.10. *Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e satisfaciendo:*
(i) *E es e-uniformemente cerrado;*
(ii) *E es e-semisimple;*
(iii) *E es e-cerrado por inversión.*
Entonces $E = \mathcal{D}(\operatorname{Spec} E^*)$.

Demostración. Sabemos que la representación $E \to \mathcal{D}(\operatorname{Spec} E^*)$, $x \mapsto \hat{x}$ es inyectiva (Teorema 1.2.19), por lo que debemos probar que es epiyectiva, es decir, que dada $f \in \mathcal{D}(\operatorname{Spec} E^*)$ existe $x \in E$ tal que $\hat{x} = f$. Como $f = f^+ - f^-$ podemos suponer $f \geq 0$. Por definición, el conjunto $R(f) = \{\omega \in \operatorname{Spec} E^* : f(\omega) \in \mathbb{R}\}$ es un abierto denso de $\operatorname{Spec} E^*$, con lo que la función

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{1+f(\omega)} & \text{si } \omega \in R(f)\,, \\ 0 & \text{si } \omega \notin R(f)\,, \end{cases}$$

es continua, acotada y positiva sobre $\operatorname{Spec} E^*$, es decir, $g \in \mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*) = E^* \subseteq E$. Como $\omega(g) \neq 0$ para todo $\omega \in \operatorname{Spec} E$, existe $z \in E$ tal que $\omega(z) = \frac{1}{\omega(g)} = 1 + f(\omega)$ para todo $\omega \in \operatorname{Spec} E$. Finalmente, si $x = z - e \in E$, entonces $\hat{x} = f$ porque $\operatorname{Spec} E$ es denso en $\operatorname{Spec} E^*$. □

Observación 1.4.11. La proposición anterior dice que si E es un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e, que es e-semisimple, e-uniformemente cerrado y e-cerrado por inversión, entonces E consiste en las funciones continuas sobre $\operatorname{Spec} E$ que tienen límite (finito ó no) en todo punto de $\operatorname{Spec} E^*$.

Capítulo 2

Φ-Álgebras

En este capítulo se consideran retículos vectoriales que tienen además estructura de álgebra conmutativa con elemento unidad. Entre éstos tendrán especial interés en esta memoria las Φ-álgebras, cuyas primeras propiedades se establecerán en la primera sección. La segunda sección está dedicada básicamente a describir la representación de una Φ-álgebra como álgebra de funciones extendidas. Por último, en la sección 2.3 se estudian las Φ-álgebras uniformemente cerradas. Se extenderán a este marco algunas de las propiedades de $\mathcal{C}(X)$ y se probará el conocido teorema de caracterización de $\mathcal{C}(X)$ para X Lindelöf.

En todo lo que resta de memoria supondremos conocidas las nociones de anillo, cuerpo, ideal, anillo cociente, ideal maximal, ... Todo anillo será conmutativo y con unidad, y todo morfismo de anillos mandará la unidad a la unidad.

2.1 La estructura de Φ-álgebra

El término Φ-álgebra fue utilizado por Henriksen y Johnson [31] para referirse a una f-álgebras unitaria y arquimediana. En [12, §9, Cor. 3], Birkhoff y Pierce probaron que éstas álgebras coinciden con las álgebras retículo-ordenadas y arquimedianas en las que la unidad es unidad débil de orden. La demostración que ellos hacen de este hecho se basa en la representación de una f-álgebra como producto subdirecto de f-álgebras totalmente ordenadas. Al final de esta sección damos una prueba alternativa que permite esquivar dicha representación. En dicha prueba se utiliza una propiedad de las f-álgebras debida

a Huijsmans y de Pagter [33].

Definiciones 2.1.1. Sea k un cuerpo. Llamaremos *k-álgebra* a todo anillo A dotado de un morfismo de anillos $k \to A$, el cual se denomina *morfismo estructural* de la k-álgebra A. Como el morfismo estructural debe ser inyectivo, identificaremos k con su imagen en A y consideraremos que k es un subanillo de A, como es usual.

Si A y B son k-álgebras, una aplicación $A \to B$ se dice que es un *morfismo de k-álgebras* si es un morfismo de anillos que deja invariante a k, es decir, si es un morfismo de anillos que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & k & \\ \swarrow & & \searrow \\ A & \longrightarrow & B\,. \end{array}$$

Si A es una k-álgebra e I es un ideal propio de A, entonces la composición del morfismo estructural de $k \to A$ con el morfismo de paso al cociente $A \to A/I$ dota a A/I de estructura de k-álgebra, que será la que consideraremos en adelante; es claro que dicha estructura es la única para la cual $A \to A/I$ es un morfismo de k-álgebras.

Definiciones 2.1.2. Llamaremos *l-álgebra* a toda $\mathbb{R}$-álgebra A dotada de una relación de orden "$\leq$", compatible con su producto (si $a, b \in A$ son tales que $a \leq b$ y $c \geq 0$, entonces $ac \leq bc$) y que la dota de estructura de retículo vectorial.

Sean A y B l-álgebras. Diremos que una aplicación $T : A \to B$ es un *morfismo de l-álgebras* si es morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras y morfismo de retículos. Llamaremos *isomorfismo de l-álgebras* a todo morfismo de l-álgebras biyectivo cuya aplicación inversa sea también morfismo de l-álgebras. Diremos que A y B son l-isomorfas si existe entre A y B algún isomorfismo de l-álgebras.

2.1.3. Sean A y B l-álgebras y sea $T : A \to B$ un morfismo de álgebras. Como A y B son retículos vectoriales, para T son válidos los comentarios hechos en 1.1.7 y 1.1.8: T es morfismo de l-álgebras si y sólo si $|T(a)| = T(|a|)$ para todo $a \in A$, y si T es morfismo de l-álgebras, entonces para que T sea un isomorfismo de l-álgebras es suficiente con que T sea biyectiva.

Definición 2.1.4. Sea A una l-álgebra. Un ideal I de A diremos que es un *l-ideal* si I es un subconjunto sólido de A. Un *l-ideal maximal* es un l-ideal propio que no está contenido estrictamente en ningún otro l-ideal propio.

Haciendo uso del lema de Zörn (como en la demostración del lema 1.1.17) se deduce que cada l-ideal propio está contenido en algún l-ideal maximal.

2.1.5. Sea I un ideal propio de una l-álgebra A y sea $\pi : A \to A/I$ el morfismo de paso al cociente. Igual que se hacía para un l-subespacio de un retículo vectorial, se demuestra que $\pi(A_+)$ es el cono positivo para una estructura de l-álgebra sobre A/I tal que π es morfismo de l-álgebras, si y sólo si I es un l-ideal, en cuyo caso existe una biyección natural entre el conjunto de los l-ideales de A que contienen a I y el conjunto de los l-ideales de A/I; además, los l-ideales maximales se corresponden por dicha biyección (véanse 1.1.11 y 1.1.12)

Ejemplo 2.1.6. Dado un espacio topológico X, $\mathcal{C}(X)$ es una l-álgebra en la que tenemos: si Y es un subconjunto de X e $I_Y = \{f \in \mathcal{C}(X) : f(Y) = 0\}$, entonces I_Y es un l-ideal de $\mathcal{C}(X)$.

Lema 2.1.7. *Sea A una l-álgebra. Para cualesquiera $a, b \in A$ se satisfacen:*
(i) $c(a \wedge b) \leq ca \wedge cb$ *y* $c(a \vee b) \geq ca \vee cb$ *para todo* $c \in A_+$*;*
(ii) $|ab| \leq |a||b|$.

Demostración. Las desigualdades de (i) son inmediatas. Veamos (ii):

$$\begin{aligned} -|a||b| &= -(a^+ + a^-)(b^+ + b^-) = -a^+b^+ - a^+b^- - a^-b^+ - a^-b^- \\ &\leq a^+b^+ - a^+b^- - a^-b^+ + a^-b^- = (a^+ - a^-)(b^+ - b^-) \\ &= ab \leq a^+b^+ + a^+b^- + a^-b^+ + a^-b^- = |a||b|\,, \end{aligned}$$

y por tanto $|ab| \leq |a||b|$. □

Definición 2.1.8. Una subálgebra B de una l-álgebra A se dice que es una *l-subálgebra*, si B es una l-álgebra con el orden inducido por A.

Ejemplo 2.1.9. Sea A una l-álgebra. Fijado $e \in A_+$ sea $A^*(e)$ el subretículo vectorial de A formado por los elementos que son acotados respecto de e (véase 1.1.13). El lema 2.1.7 (ii) nos dice que si $e \cdot e \in A^*(e)$ y $1 \in A^*(e)$, entonces $A^*(e)$ es una l-subálgebra de A. En particular, si $1 \geq 0$ entonces $A^*(1)$ es una l-subálgebra de A.

Lema 2.1.10. *Si J e I son l-ideales de una l-álgebra A, entonces $I + J = \{a + b : a \in I,\, b \in J\}$ también es un l-ideal. Si además $1 \in A_+$, entonces se satisface la igualdad $(I + J) \cap A^*(1) = I \cap A^*(1) + J \cap A^*(1)$.*

Demostración. Veamos que $I + J = \{a + b : a \in I, b \in J\}$ es un l-ideal. Sea $c \in A$ tal que $|c| \leq |a + b|$, con $a \in I$, $b \in J$; como $c^+ \leq |a| + |b|$ y $c^- \leq |a| + |b|$, existirán $a_1, a_2 \in I$, $b_1, b_2 \in J$ tales que $0 \leq a_1 \leq |a|$, $0 \leq a_2 \leq |a|$, $0 \leq b_1 \leq |b|$, $0 \leq b_2 \leq |b|$ satisfaciendo $c^+ = a_1 + b_1$ y $c^- = a_2 + b_2$. En consecuencia $c = c^+ - c^- = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \in I + J$.

Trivialmente $I \cap A^*(1) + J \cap A^*(1) \subseteq (I + J) \cap A^*(1)$. Veamos la otra inclusión. Si $c \in (I + J) \cap A^*(1)$ entonces $c = a + b \in A^*(1)$ con $a \in I$ y $b \in J$. Como $c^+ \leq |a| + |b|$ y $c^- \leq |a| + |b|$, existen $a_1, a_2 \in I \cap A^*(1)$, $b_1, b_2 \in J \cap A^*(1)$ tales que $0 \leq a_1 \leq |a|$, $0 \leq a_2 \leq |a|$, $0 \leq b_1 \leq |b|$, $0 \leq b_2 \leq |b|$ satisfaciendo $c^+ = a_1 + b_1$ y $c^- = a_2 + b_2$. Así pues, $c = c^+ - c^- = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \in I \cap A^*(1) + J \cap A^*(1)$. □

Definiciones 2.1.11. Diremos que una l-álgebra A es una *f-álgebra* si tiene la siguiente propiedad: si $a, b \in A$ son tales que $a \wedge b = 0$, entonces para todo $c \in A_+$ se satisface $a \wedge bc = 0$. Llamaremos *Φ-álgebra* a toda f-álgebra que sea arquimediana.

A continuación probaremos las propiedades más elementales de las f-álgebras. Excepto las dos últimas, debidas a Huijsmans y de Pagter [33], el resto son bien conocidas. Hay, que sepamos, dos demostraciones de que una Φ-álgebra carece de elementos nilpotentes, la que dan Birkhoff y Pierce en [12], que hace uso de la representación de una f-álgebra como "producto subdirecto" de f-álgebras totalmente ordenadas, y la que aparece en el libro de Bigard, Keimel y Wolfenstein [10], en la cual se utiliza la "teoría de ortomorfismos" en f-anillos. La propiedad (v) del siguiente teorema nos permitirá dar en el lema 2.1.14 una prueba alternativa del hecho mencionado.

Teorema 2.1.12. *Sea A una f-álgebra. Dados $a, b \in A$ se satisfacen:*
(i) $c(a \wedge b) = ca \wedge cb$ *y* $c(a \vee b) = ca \vee cb$ *para todo* $c \in A_+$*;*
(ii) $|ab| = |a||b|$*;*
(iii) *si* $a \wedge b = 0$ *entonces* $ab = 0$*; en particular tenemos* $a^+a^- = 0$*;*
(iv) $a^2 = |a|^2 \geq 0$*; en particular tenemos* $1 = 1 \cdot 1 \geq 0$*;*
(v) *si* $a, b \geq 0$ *entonces* $0 \leq ab - (ab \wedge nb) \leq \frac{1}{n} a^2 b$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*
(vi) $ab = (a \wedge b)(a \vee b)$*; como consecuencia, si I es un l-ideal de A y $a \geq 0$, entonces $a \in I$ si y sólo si $a \wedge 1 \in I$.*

Demostración. La demostración de (i) es análoga a la de (x) del lema 1.1.6.

(ii) Si $a \in A_+$ es consecuencia de (i):

$$|ab| = (ab) \vee (-ab) = a[b \vee (-b)] = a|b| = |a||b|\,;$$

en general tenemos

$$\begin{aligned} a|b| &= a^+|b| - a^-|b| = |a^+b| - |a^-b|| \leq \big||a^+b| - |a^-b|\big| \\ &\leq |a^+b - a^-b| = |ab|\,, \end{aligned}$$

y del mismo modo $-a|b| \leq |-ab| = |ab|$; por lo tanto se satisface $|a||b| \leq |ab|$ y concluimos por (ii) del lema 2.1.7.

(iii) Si $a \wedge b = 0$ entonces $a, b \geq 0$, y al ser A una f-álgebra obtenemos $ab \wedge ab = 0$, es decir, $ab = 0$; en particular, como $a^+ \wedge a^- = 0$ obtenemos $a^+a^- = 0$.

(iv) Teniendo en cuenta que $a^+a^- = 0$, es inmediato comprobar que $a^2 = (a^+)^2 + (a^-)^2 = |a|^2$.

(v) Sean $a, b \geq 0$. De las propiedades elementales de las l-álgebras obtenemos $(ab - nb)^+ = ab - (ab \wedge nb)$ y $(ab - nb)^- = nb - (ab \wedge nb)$, por lo que se satisface

$$(ab - (ab \wedge nb)) \wedge (nb - (ab \wedge nb)) = (ab - nb)^+ \wedge (ab - nb)^- = 0\,.$$

De aquí, y puesto que A es una f-álgebra, obtenemos la siguiente cadena de implicaciones:

$$(ab - (ab \wedge nb)) \wedge (\frac{a}{n}nb - \frac{a}{n}(ab \wedge nb)) = 0 \;\Rightarrow$$

$$(ab - (ab \wedge nb)) \wedge (ab - a(\frac{a}{n}b \wedge b)) = 0 \;\Rightarrow$$

$$ab + (-(ab \wedge nb) \wedge -a(\frac{a}{n}b \wedge b)) = 0 \;\Rightarrow$$

$$ab - ((ab \wedge nb) \vee a(\frac{a}{n}b \wedge b)) = 0 \;\Rightarrow$$

$$ab = (ab \wedge nb) \vee (a(\frac{a}{n}b \wedge b)) \leq (ab \wedge nb) + a(\frac{a}{n}b \wedge b)\,.$$

En consecuencia, $ab - (ab \wedge nb) \leq a(\frac{a}{n}b \wedge b) \leq \frac{1}{n}a^2b$.

(vi) Como $a + b = a \wedge b + a \vee b$ tenemos

$$\begin{aligned} ab - (a \wedge b)(a \vee b) &= ab - (a \wedge b)(a + b - a \wedge b) \\ &= (a - a \wedge b)(b - a \wedge b) = (a - b)^+(a - b)^-, \end{aligned}$$

y basta aplicar (iii) para concluir la demostración. □

Nota. Sea A una l-álgebra. Dados $a \in A$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, cuando escribimos "$a \leq \alpha$" estamos entendiendo $\alpha \in A$ vía la inclusión natural $\mathbb{R} \hookrightarrow A$. Si $1 \in A_+$ (lo que, según el teorema 2.1.12 (iv), ocurre con seguridad cuando A es una f-álgebra), entonces es claro que el orden que A induce en $\mathbb{R}$ es el orden usual de $\mathbb{R}$, es decir, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se satisface "$\alpha \leq \beta$ en $\mathbb{R}$ si y sólo si es $\alpha \leq \beta$ en A", motivo por el cual no haremos distinción.

Lema 2.1.13. *Si la unidad de una l-álgebra A es una unidad fuerte, entonces A es una f-álgebra. En particular, si $1 \geq 0$ en A, entonces $A^*(1)$ es una f-álgebra.*

Demostración. Supongamos que 1 es una unidad fuerte en A, es decir, $1 \geq 0$ y $A^*(1) = A$. Dados $a, b, c \in A_+$ con $a \wedge b = 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a, b, c \leq n$, luego

$$0 \leq a \wedge bc \leq a \wedge nb \leq na \wedge nb = n(a \wedge b) = 0$$

y por tanto $a \wedge bc = 0$. Para probar la segunda parte del lema basta tener en cuenta que, dado $e \in A_+$, e es una unidad fuerte de $A^*(e)$. □

Lema 2.1.14. *En una Φ-álgebra A no existen elementos nilpotentes.*

Demostración. Sea $c \in A$ tal que $c^p = 0$ para algún p; podemos suponer que p es el menor natural par que lo satisface, en cuyo caso $c^p = |c|^p$, por lo que podemos suponer $c \geq 0$. Si $k \in \mathbb{N}$ tal que $p = 2k$ y denotamos $d = c^k$, entonces $(md)^2 = m^2 d^2 = m^2 c^p = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Según el teorema 2.1.12 (v), se satisface $0 \leq md - (md \wedge 1) \leq (md)^2 = 0$ (considerando $a = md$, $b = 1$ y $n = 1$), con lo que $md = md \wedge 1$, es decir, $md \leq 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Por ser A arquimediana debe ser $d = 0$. Si $p = 2$ entonces $c = d = 0$ y hemos terminado, y si $p > 2$ entonces k ó $k + 1$ es par y menor estrictamente que p, lo cual es una contradicción. □

Corolario 2.1.15. *Sea A una Φ-álgebra. Para cualesquiera $a, b \in A_+$ se satisface*

$$a \leq b \iff a^2 \leq b^2 .$$

Demostración. Es obvio que $a^2 \leq b^2$ cuando $a \leq b$. Supongamos ahora que $a^2 \leq b^2$; sea $c = a - a \wedge b \geq 0$ y probemos la igualdad $c = 0$. En virtud del teorema 2.1.12 tenemos $ab = (a \wedge b)(a \vee b) = [a(a \vee b)] \wedge [b(a \vee b)] = (a^2 \vee ab) \wedge (ab \vee b^2) = (a^2 \wedge b^2) \vee (ab)$, así que $a^2 \wedge b^2 \leq ab$ y por lo tanto $a^2 = a^2 \wedge b^2 = a^2 \wedge b^2 \wedge (ab) = (a \wedge b)^2 \leq a^2 - c^2$, es decir, $c^2 = 0$. Como, según 2.1.14, en A no hay elementos nilpotentes debe ser $c = 0$. □

El siguiente resultado se debe a Birkhoff y Pierce [12, §9, Cor. 3]. La prueba que daremos de él está inspirada en la dada en [10, Prop. 12.3.20].

Teorema 2.1.16. *Sea A una l-álgebra arquimediana. Son equivalentes:*
(i) *A es una Φ-álgebra;*
(ii) *1 es una unidad débil.*

Demostración. (i)⇒(ii) Es consecuencia de la proposición 1.1.16 y de la propiedad (iii) del teorema 2.1.12.

(ii)⇒(i) Veamos que A es una f-álgebra. Sean $a, b, c \in A_+$ tales que $a \wedge b = 0$. La condición $a \wedge bc = 0$ se satisfará si y sólo si $a \wedge bc \wedge 1 = 0$ (1 es unidad débil), de modo que $a \wedge bc = 0$ si y sólo si $(a \wedge bc \wedge 1)^2 = 0$ (de acuerdo con 2.1.14, $A^*(1)$ no tiene elementos nilpotentes por ser, según 2.1.13, una Φ-álgebra). Como $(a \wedge bc \wedge 1)^2 \leq a(a \wedge bc \wedge 1) \wedge bc(a \wedge bc \wedge 1) \wedge (a \wedge bc \wedge 1)$, y además $a(a \wedge bc \wedge 1) \wedge bc(a \wedge bc \wedge 1) \wedge (a \wedge bc \wedge 1) = 0$ si $(a \wedge bc \wedge 1)b = 0$, es suficiente probar la igualdad $(a \wedge bc \wedge 1)b = 0$, ó lo que es lo mismo $[(a \wedge bc \wedge 1)b \wedge 1]^2 = 0$. Ahora bien, $0 \leq [(a \wedge bc \wedge 1)b \wedge 1]^2 \leq [(a \wedge bc \wedge 1)b \wedge 1][(a \wedge bc \wedge 1)b] \leq (b \wedge 1)(a \wedge 1)b \leq (a \wedge b)b = 0$, pues $(a \wedge 1)(b \wedge 1) \leq a$ y $(a \wedge 1)(b \wedge 1) \leq b$. □

2.2 Representación de Φ-álgebras

Henriksen y Johnson consideran en [31] un teorema de representación para Φ-álgebras análogo al de Yosida para espacios de Riesz [72]: toda Φ-álgebra puede considerarse como un álgebra de funciones continuas sobre un espacio topológico compacto con valores en $\overline{\mathbb{R}}$. En esta sección se probará este teorema (ver 2.2.10) como una extensión a las Φ-álgebras de la versión del teorema de Yosida que se obtuvo en 1.2.19.

Definiciones 2.2.1. Sea A una l-álgebra. Cuando hablemos en A de una sucesión *uniformemente de Cauchy* (*uniformemente convergente*), ó cuando digamos que un subconjunto de A es *uniformemente cerrado* (*uniformemente denso*), estaremos suponiendo que es $1 \geq 0$ en A y que dichas nociones significan 1-uniformemente de Cauchy (1-uniformemente convergente) para las sucesiones, y 1-uniformemente cerrado (1-uniformemente denso) para los subconjuntos (véanse las definiciones 1.2.7).

Recordemos que cuando A es una f-álgebra siempre se satisface $1 \geq 0$.

2.2.2. Sea A una Φ-álgebra. Entonces A es un retículo vectorial arquimediano en el que $1 > 0$ es una unidad débil, y por lo tanto en A tenemos las nociones

dadas en 1.1.13: $A^* = A^*(1) = \{a \in A : |a| \leq n$ para algún $n \in \mathbb{N}\}$ será la subálgebra de los elementos acotados de A (A^* también será una Φ-álgebra), $\operatorname{Spec} A^* = \{\omega : A^* \to \mathbb{R}$ morfismo de retículos vectoriales tal que $\omega(1) = 1\}$ es un espacio topológico compacto Hausdorff, $\operatorname{Spec} A = \{\omega : A \to \mathbb{R}$ morfismo de retículos vectoriales tal que $\omega(1) = 1\}$ es un espacio topológico realcompacto, y tenemos las representaciones $A \to \mathcal{C}(\operatorname{Spec} A)$, $A^* \hookrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Spec} A^*)$ y $A \hookrightarrow \mathcal{D}(\operatorname{Spec} A^*)$, de las que conocemos ciertas propiedades (como, por ejemplo, las enunciadas en 1.2.10, 1.2.19, 1.2.27 y 1.4.10).

Ejemplo 2.2.3. Si X es un espacio topológico, entonces es claro que $\mathcal{C}(X)$ es una Φ-álgebra. Como ya se hizo notar en el ejemplo 1.2.8, las definiciones dadas anteriormente coinciden en $\mathcal{C}(X)$ con las nociones clásicas de "sucesión uniformemente de Cauchy", "sucesión uniformemente convergente", "conjunto uniformemente cerrado" y "conjunto uniformemente denso". Es bien conocido (y fácil de probar) que $\mathcal{C}(X)$ es una Φ-álgebra uniformemente cerrada. Además $\mathcal{C}(X)^*$ son las funciones de $\mathcal{C}(X)$ que están acotadas en el sentido usual, esto es, $\mathcal{C}(X)^* = \mathcal{C}^*(X)$; es claro que $\mathcal{C}^*(X)$ también es una Φ-álgebra uniformemente cerrada.

Teorema 2.2.4. *Sea A una f-álgebra y sea $\omega : A \to \mathbb{R}$ un morfismo de retículos vectoriales. Si $\omega \neq 0$, entonces existe un único $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para cualesquiera $a, b \in A$ se satisface*

$$\omega(ab) = \alpha\omega(a)\omega(b)\,.$$

Es claro que $\omega(1) \neq 0$ y $\alpha = \frac{1}{\omega(1)}$.

Demostración. Fijado $a \in A$, consideremos la forma lineal $\omega_a : A \to \mathbb{R}$, $b \mapsto \omega_a(b) := \omega(ab)$. Veamos que $\ker\omega \subseteq \ker\omega_a$: sea $b \in \ker\omega$, en cuyo caso $|b| \in \ker\omega$. Según 2.1.12 (v), para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$|ab| - |ab| \wedge n|b| \leq \frac{1}{n}\,|b|a^2 \;\Rightarrow\; |ab| \leq |ab| \wedge n|b| + \frac{1}{n}\,|b|a^2 \leq n|b| + \frac{1}{n}\,|b|a^2,$$

de modo que $|\omega(ab)| = \omega(|ab|) \leq \omega(n|b| + \frac{1}{n}\,|b|a^2) = \frac{1}{n}\,\omega(|b|a^2)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto $\omega(ab) = 0$. Se deduce pues que $\omega(ab) = \lambda_a\omega(b)$ para todo $b \in A$, para algún $\lambda_a \in \mathbb{R}$. Análogamente se prueba que $\omega(ab) = \lambda_b\omega(a)$ para todo $a \in A$ para algún $\lambda_b \in \mathbb{R}$.

Si $\omega(a) \neq 0$ y $\omega(b) \neq 0$, entonces $\omega(ab) = \lambda_a\omega(b) = \lambda_b\omega(a)$, y por tanto $\alpha = \frac{\lambda_a}{\omega(a)} = \frac{\lambda_b}{\omega(b)}$ es constante y satisface $\omega(ab) = \alpha\omega(a)\omega(b)$.

Si $\omega(a) = 0$ ú $\omega(b) = 0$, entonces $\omega(ab) = 0$ porque $\ker\omega \subseteq \ker\omega_a \cap \ker\omega_b$, y por lo tanto la igualdad $\omega(ab) = \alpha\omega(a)\omega(b)$ es trivial. $\square$

Definiciones 2.2.5. Sea A un álgebra y denotemos por $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A$ el conjunto de todos los morfismos de álgebras de A en $\mathbb{R}$. Llamaremos *espectro real* de A al conjunto $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A$ dotado de la topología inicial que definen las funciones $\{a : \operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto a(\omega) := \omega(a)\}_{a\in A}$; es claro que $\operatorname{Spec} A$ es un espacio topológico completamente regular Hausdorff (que puede ser vacío). Diremos que A es *real-semisimple* cuando el morfismo natural $A \to \mathcal{C}(\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A)$ sea inyectivo. Es claro que si A es real-semisimple entonces debe ser $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A \neq \varnothing$ (véase 1.2.26).

Un ideal maximal M de A se dice que es *real* si su cuerpo residual A/M es $\mathbb{R}$, en cuyo caso el morfismo de paso al cociente $A \to A/M = \mathbb{R}$ es obviamente un morfismo de álgebras. Además, si $\omega : A \to \mathbb{R}$ es un morfismo de álgebras, entonces su núcleo $\ker \omega$ es un ideal maximal real de A. Se sigue de lo anterior que existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A$ y el conjunto de todos los ideales maximales reales de A; en particular, cuando $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A \neq \varnothing$, el núcleo de la representación $A \to \mathcal{C}(\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A)$ es la intersección de todos los ideales maximales reales de A.

El corolario siguiente puede verse en [19, Lem. 2], [71, Th. 2] ó [14, Cor. 2.5 (a)].

Corolario 2.2.6. *Sea A una f-álgebra. Si $\omega : A \to \mathbb{R}$ es un morfismo de retículos vectoriales tal que $\omega(1) = 1$, entonces ω es morfismo de álgebras (y por tanto de l-álgebras). Como consecuencia, si A es una Φ-álgebra entonces* $\operatorname{Spec} A \subseteq \operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A$.

Corolario 2.2.7. *Si M es un subconjunto de una f-álgebra A, entonces M es un l-ideal maximal real si y sólo si M es un l-hiperplano.*

Demostración. Si M es un l-ideal maximal real entonces es evidente que M es un l-hiperplano. Recíprocamente, supongamos que M es un l-hiperplano y consideremos el morfismo de paso al cociente $\pi : A \to A/M = \mathbb{R}$, que debe ser un morfismo de retículos. Como $\pi(1) \neq 0$, si definimos $\omega = \frac{\pi}{\pi(1)}$, entonces ω es un morfismo de l-álgebras tal que $\ker \omega = \ker \pi = M$, de modo que M es un l-ideal maximal real. □

Corolario 2.2.8. *Si A es una Φ-álgebra, entonces todo l-ideal maximal de A^* es real. Como consecuencia, la intersección de todos los l-ideales maximales de A^* es nula.*

Demostración. Sea M^* un l-ideal maximal de A^*. De 1.1.17 y 1.1.20 se sigue que existe un l-hiperplano H^* en A^* tal que $M^* \subseteq H^*$, y del corolario 2.2.7 se

sigue que H^* es un l-ideal maximal real; por lo tanto $M^* = H^*$ y concluimos que M^* es un l-ideal maximal real. La consecuencia se obtiene del teorema 1.2.6. □

2.2.9. Sea A una Φ-álgebra y consideremos la representación $A \to \mathcal{D}(\operatorname{Spec} A^*)$, $a \mapsto \hat{a}$. En el teorema 1.2.19 se probó que $\widehat{A} = \{\hat{a} : a \in A\}$ es un subretículo de $\mathcal{D}(\operatorname{Spec} A^*)$ y es un espacio vectorial, y que $A \to \widehat{A}$ es un isomorfismo de retículos vectoriales. Ahora tenemos además:

Lema 2.2.10. *Dada una Φ-álgebra A, $\widehat{A}$ es una l-álgebra y $A \to \widehat{A}$ es un isomorfismo de l-álgebras.*

Demostración. Dadas $f, g \in \mathcal{D}(\operatorname{Spec} A^*)$, el producto fg está definido cuando para cada $\omega_0 \in \operatorname{Spec} A^*$ esté definido el límite

$$\lim_{\substack{\omega \to \omega_0 \\ \omega \in R(f) \cap R(g)}} (f(\omega)g(\omega)) .$$

El lema quedará demostrado si probamos que, para cualesquiera $a, b \in A$, el producto $\hat{a}\hat{b}$ está definido y satisface la igualdad $\widehat{ab} = \hat{a}\hat{b}$. Supongamos primero que $a, b \geq 0$, en cuyo caso es claro que el producto $\hat{a}\hat{b}$ está definido. Tenemos

$$\begin{aligned} ab &= \Big(\bigvee_n (a \wedge n)\Big) b = \bigvee_n \big((a \wedge n) b\big) \\ &= \bigvee_n \Big[(a \wedge n)\Big(\bigvee_k (b \wedge k)\Big)\Big] = \bigvee_{n,k} \big[(a \wedge n)(b \wedge k)\big], \end{aligned}$$

de modo que si vemos que sobre el abierto $U = R(\hat{a}) \cap R(\hat{b})$ el supremo puntual $f = \sup_{n,k}[\widehat{(a \wedge n)(b \wedge k)}]$ es una función real y continua, entonces será $f = \widehat{ab}$ sobre U en virtud del lema 1.4.5: dada $\omega \in U$ tenemos

$$f(\omega) = \sup_{n,k} \omega\big((a \wedge n)(b \wedge k)\big) \overset{(*)}{=} \sup_{n,k} \big[\omega(a \wedge n)\omega(b \wedge k)\big] = \hat{a}(\omega)\hat{b}(\omega) ,$$

donde en la igualdad $(*)$ hemos usado que, según el corolario 2.2.6, $\omega : A^* \to \mathbb{R}$ es morfismo de álgebras. De lo anterior se sigue además que $\widehat{ab} = \hat{a}\hat{b}$ sobre U, y como U es denso concluimos que $\widehat{ab} = \hat{a}\hat{b}$. El caso general se prueba argumentando como en la demostración de 1.2.19. □

Definición 2.2.11. Sea A una l-álgebra. Dado un elemento $a \in A$, es fácil comprobar que el conjunto $S(a) = \{c \in A : |c| \leq |ab| \text{ para algún } b \in A\}$ es un l-ideal de A, y que es el más pequeño de todos los l-ideales de A a los que pertenece a. Diremos que $S(a)$ es el *l-ideal generado* por a.

Lema 2.2.12. *Sea A una Φ-álgebra. Si M^* es un l-ideal maximal de A^*, entonces $M := \{a \in A : S(a) \cap A^* \subseteq M^*\}$ es un l-ideal maximal de A.*

Demostración. Dados $a, b \in M$, se satisface $S(a+b) \subseteq S(a) + S(b)$ porque $S(a)+S(b)$ es sólido en virtud del lema 2.1.10; además tenemos $S(a+b) \cap A^* \subseteq (S(a)+S(b)) \cap A^* = S(a) \cap A^* + S(b) \cap A^* \subseteq M^*$, y por lo tanto $a+b \in M$. Del mismo modo, dados $m \in M$ y $a \in A$ tenemos $S(am) \cap A^* \subseteq S(m) \cap A^* \subseteq M^*$, y por lo tanto $am \in M$. Ahora, si $m \in M$ y $a \in A$ son tales que $|a| \leq |m|$, entonces $S(a) \subseteq S(m)$ y por lo tanto $a \in M$. Todo lo anterior prueba que M es un l-ideal.

Como $1 \notin M$ porque $S(1) = A$, tenemos $M \neq A$. Por lo tanto para probar que el l-ideal M es maximal debemos ver que si $a \in A \backslash M$ entonces $S(a)+M = A$. Si $a \notin M$ se tiene $S(a) \cap A^* \nsubseteq M^*$, con lo que $S(a) \cap A^* + M^* = A^*$, es decir, $1 = m + b$ con $m \in M^*$, $b \in S(a) \cap A^*$, lo cual implica que $|b| \leq |ac|$ para algún $c \in A$. Según el corolario 2.2.7, existe un morfismo de l-álgebras $\omega^* : A^* \to \mathbb{R}$ tal que $M^* = \ker \omega^*$; como $\omega^*(1) = 1$, debe ser $\omega^*(b) = 1$ ya que $m \in M^*$. Como A^* es un subretículo vectorial de $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} A^*)$ (Teorema 1.2.6) la situación que tenemos es $b \in \mathcal{C}(\operatorname{Spec} A^*)$ y $\omega^* \in \operatorname{coz}(b)$, y por tanto existe un entorno cerrado F de ω^* en $\operatorname{Spec} A^*$ tal que $F \subseteq \operatorname{coz}(b)$. Según el corolario 1.2.12, existe $d \in A^*$, $0 \leq d \leq 1$ tal que $d(F) = 0$ y $d(\omega) = 1$ si $\omega \notin \operatorname{coz}(b)$. Veamos que $d \in M$, esto es, que $S(d) \cap A^* \subseteq M^*$. Si $u \in S(d) \cap A^*$, entonces existe $v \in A$ tal que $|u| \leq |vd|$, y como $\omega^* \in \overline{R(\hat{v}) \cap F}$ porque $R(\hat{v})$ es un abierto denso y $\omega^* \in F$, obtenemos

$$|\omega^*(u)| \leq \widehat{|vd|}(\omega^*) = \lim_{\substack{\omega \to \omega^* \\ \omega \in R(\hat{v})}} \big(|\hat{v}|(\omega) d(\omega)\big) = \lim_{\substack{\omega \to \omega^* \\ \omega \in R(\hat{v}) \cap F}} \big(|\hat{v}|(\omega) d(\omega)\big) = 0\,,$$

pues $d(F) = 0$; por lo tanto $u \in \ker \omega^* = M^*$. Ahora, como $d + |b| > 0$ y $\operatorname{Spec} A^*$ es compacto, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \lambda \leq d + |b|$, de modo que $1 \leq \frac{1}{\lambda}\, d + \frac{1}{\lambda}\, |b| \in M + S(a)$ y por lo tanto $1 \in M + S(a)$. □

Lema 2.2.13. *Sea A una f-álgebra. Todo l-ideal primo de A está contenido en un único l-ideal maximal de A.*

Demostración. Sea P un l-ideal primo de A y sea $\pi : A \to A/P$ el morfismo de paso al cociente. Veamos en primer lugar que A/P es una l-álgebra totalmente

ordenada. En efecto, para todo $a \in A$ tenemos $a^+a^- = 0 \in P$, luego $a^+ \in P$ ó $a^- \in P$ y por lo tanto $\pi(a) = \pi(a^+) \geq 0$ ó $\pi(a) = \pi(-a^-) \leq 0$.

Ahora, si probamos que los l-ideales de A/P constituyen una cadena para el orden definido por la inclusión, entonces tendremos que en A/P hay un único l-ideal maximal (véase 2.1.4), y por lo tanto en A hay un único l-ideal maximal que contiene a P. Consideremos en A/P l-ideales I y J, y supongamos que existe $\pi(a) \in I \setminus J$, donde podemos suponer $\pi(a) \geq 0$. Entonces para todo $b \in J$ debe ser $|b| \leq \pi(a)$, pues de lo contrario $\pi(a)$ estaría en J por ser J sólido, y por lo tanto $J \subseteq I$. □

Teorema 2.2.14. *Sea A una Φ-álgebra. Existe una correspondencia biunívoca entre los l-ideales maximales de A y los l-ideales maximales de A^*.*

Demostración. Según los corolarios 2.2.7 y 2.2.8, el conjunto de los l-ideales maximales de A^* es el conjunto de puntos de $\operatorname{Spec} A^*$. Denotemos $\mathcal{M}(A) = \{l$-ideales maximales de $A\}$; tenemos $\operatorname{Spec} A \subseteq \mathcal{M}(A)$, pero en general no se satisface la igualdad. Sea M un l-ideal maximal de A y veamos que M es primo, de modo que $M \cap A^*$ será un l-ideal primo de A^*: si $a, b \in A$ son tales que $ab \in M$ y $a \notin M$, entonces $S(a) + M = A$ y por lo tanto existen $c \in A$ y $m \in M$ satisfaciendo $1 \leq m + ac$; debe ser $b \in M$ porque $b \leq mb + cab \in M$.

Ahora, de acuerdo con 2.2.12 y 2.2.13 tenemos las aplicaciones

$$\begin{aligned}
\operatorname{Spec} A^* &\to \mathcal{M}(A) \\
M^* &\mapsto \{a \in A : S(a) \cap A^* \subseteq M^*\}, \\
\mathcal{M}(A) &\to \operatorname{Spec} A^* \\
M &\mapsto \{\text{único } l\text{-ideal maximal de } A^* \text{ que contiene a } M \cap A^*\},
\end{aligned}$$

que son inversa una de la otra. En efecto, consideremos $M \in \mathcal{M}(A)$ y sea M^* el único l-ideal maximal de A^* que contiene a $M \cap A^*$; si $M_1 = \{a \in A : S(a) \cap A^* \subseteq M^*\} \neq M$, entonces $M_1 + M = A$ y del lema 2.1.10 obtenemos $A^* = (M_1 + M) \cap A^* = M_1 \cap A^* + M \cap A^* \subseteq M^*$, lo cual es absurdo. Sean ahora $M^* \in \operatorname{Spec} A^*$ y $M = \{a \in A : S(a) \cap A^* \subseteq M^*\}$; como $M \cap A^* \subseteq M^*$, es obvio que M^* es el único l-ideal maximal de A^* que contiene a $M \cap A^*$. □

El siguiente corolario se debe a Johnson [36, Th. 2.11]. Para probarlo él utiliza la representación de una f-álgebra como producto subdirecto de álgebras totalmente ordenadas. Aquí proponemos una prueba directa apoyándonos en el teorema 2.2.14:

Corolario 2.2.15. *Sea A una Φ-álgebra. La intersección de todos los l-ideales maximales de A es nula.*

Demostración. Ya sabemos que la intersección de todos los l-ideales maximales de A^* es nula (Corolario 2.2.8). Si $a \in M$ para todo $M \in \mathcal{M}(A)$ entonces

$$|a| \wedge 1 \in \bigcap_{M \in \mathcal{M}(A)} (M \cap A^*) \subseteq \bigcap_{M^* \in \operatorname{Spec} A^*} M^* = \{0\},$$

y debe ser $a = 0$ porque 1 es una unidad débil en A. □

2.3 Φ-álgebras uniformemente cerradas

Definiciones 2.3.1. Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra. El conjunto de los elementos *invertibles* de A lo denotaremos por A^{-1}. Diremos que A es *estrictamente real* si para cada $a \in A$ se satisface $1 + a^2 \in A^{-1}$. Llamaremos *radical de Jacobson* de A, y lo denotaremos $\operatorname{rad}_J A$, a la intersección de todos los ideales maximales de A.

Definiciones 2.3.2. Sea A una l-álgebra. Diremos que A es *cerrada por inversión acotada* si para cada $a \in A$ tal que $a \geq 1$ se satisface $a \in A^{-1}$. Diremos que en A *existen raíces cuadradas* si para cada $a \in A_+$ existe un único $b \in A_+$ tal que $a = b^2$. Diremos que en A *existe descomposición multiplicativa* si para cualesquiera $a, b \in A_+$ se satisface $[0, ab] = [0, a] \cdot [0, b] := \{cd : c \in [0, a],\ d \in [0, b]\}$.

Nota. Sea A una Φ-álgebra. Se satisfacen las siguientes propiedades que utilizaremos en lo que sigue: (i) si $a \in A^{-1}$ es tal que $a \geq 0$, entonces $a^{-1} \geq 0$; (ii) si $a, b \in A^{-1}$ son tales que $0 \leq a \leq b$, entonces $b^{-1} \leq a^{-1}$.

La propiedad (ii) es consecuencia inmediata de (i), así que veamos esta última. Como $aa^{-1} = 1$ y la aplicación $A \to \widehat{A}$, $a \mapsto \hat{a}$, es un isomorfismo de l-álgebras, se satisfacen $\hat{a}\hat{a}^{-1} = 1$ y $\hat{a} \geq 0$; entonces debe ser $\hat{a}^{-1} \geq 0$ y por lo tanto $a^{-1} \geq 0$.

Demostraciones alternativas de los distintos apartados del teorema que presentamos a continuación pueden encontrarse en [31], [33] y [57]:

Teorema 2.3.3. *Sea A una Φ-álgebra uniformemente cerrada. Se satisfacen:*
(i) *A es cerrada por inversión acotada.*

(ii) *A es estrictamente real.*
(iii) *En A existen raíces cuadradas.*
(iv) *En A existe descomposición multiplicativa.*
(v) *Todo ideal primo de A es un l-ideal. Como consecuencia, "l-ideal maximal" e "ideal maximal" son nociones equivalentes en A.*
(vi) *El radical de Jacobson de A es nulo.*
(vii) *Todo ideal uniformemente cerrado de A es un l-ideal.*

Demostración. (i) Sea $a \in A$, $a \geq 1$, y consideremos $\hat{a} \in \widehat{A}$. Es claro que la función $\omega \in R(\hat{a}) \mapsto \frac{1}{\hat{a}(\omega)}$ es continua y acotada, y puede prolongarse por 0 a una función $\hat{b}$ de $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} A^*) = A^*$. Puesto que la representación $A \to \widehat{A}$ es un isomorfismo de l-álgebras y $\hat{a}\hat{b} = 1$, debe ser $ab = 1$, es decir $a \in A^{-1}$.

(ii) Es una consecuencia inmediata de (i).

(iii) Sea $a \in A_+$ y veamos que existe $b \in A_+$ tal que $b^2 = a$; la unicidad se sigue del corolario 2.1.15. Supongamos en primer lugar que existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, tal que $a \geq \lambda$. Si $d = (1/\lambda)a \geq 1$, entonces por (i) existe $d^{-1} \in A^*$ tal que $dd^{-1} = 1$. Según el corolario 2.2.6 tenemos $\operatorname{Spec} A \subseteq \operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A$, de modo que el isomorfismo de retículos vectoriales $A^* = \mathcal{C}(\operatorname{Spec} A^*)$ dado por el teorema 1.2.10 es también isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras. Por tanto, en A^*, como en $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} A^*)$, existen raíces cuadradas de elementos positivos. Sea $c \in A^*_+$ tal que $c^2 = d^{-1}$; es claro que c es invertible: $1 = dd^{-1} = (dc)c$. Entonces $1 = dd^{-1} = dc^2$, luego $d = (1/c)^2$ y por lo tanto $a = \lambda d = (\sqrt{\lambda}/c)^2$.

En general, sea $a \geq 0$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $a_n = a + 1/n \geq 1/n > 0$, entonces existe $b_n \in A_+$ tal que $b_n^2 = a_n$; $\{b_n\}_n$ es uniformemente de Cauchy: dados n, m se satisface $b_n + b_m \geq 1/\sqrt{n} + 1/\sqrt{m}$, por lo que $b_n + b_m$ es invertible porque $1/\sqrt{n} + 1/\sqrt{m}$ lo es; si $n \leq m$ tenemos

$$0 \leq b_n - b_m = \frac{a_n - a_m}{b_n + b_m} \leq \frac{1/n - 1/m}{1/\sqrt{n} + 1/\sqrt{m}} = 1/\sqrt{n} - 1/\sqrt{m}\,.$$

Sea $b \in A_+$ tal que $b_n \to b$ y veamos que $b^2 = a$, esto es, que $(-1/n) \to a - b^2$: dado $0 < \varepsilon < 1$ existe n_0 tal que $|b_n - b| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$, por lo tanto

$$\begin{aligned} |a - b^2 + 1/n| &= |b_n^2 - b^2| = |b_n - b||b_n + b| \\ &= |b_n - b||b_n - b + 2b| \leq \varepsilon(\varepsilon + 2b) \leq \varepsilon(1 + 2b)\,. \end{aligned}$$

(iv) Sean $a, b \in A_+$ y $c \in [0, ab]$, y veamos que existen $p \in [0, a]$ y $q \in [0, b]$ tales que $c = pq$. Según (iii), existe un único $d \in A_+$ tal que $c + \frac{1}{4}(a-b)^2 = d^2$. Definamos

$$p = \frac{1}{2}(a - b) + d\,, \qquad q = \frac{1}{2}(b - a) + d\,.$$

En virtud del corolario 2.1.15 tenemos $d \geq \frac{1}{2}|a-b|$, de modo que $p, q \geq 0$. Además

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}(a-b) + \sqrt{c + \frac{1}{4}(a-b)^2} \leq \frac{1}{2}(a-b) + \sqrt{ab + \frac{1}{4}(a-b)^2} \\ &= \frac{1}{2}(a-b) + \sqrt{ab + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}ab} = \frac{1}{2}(a-b) + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{2}ab} \\ &= \frac{1}{2}(a-b) + \sqrt{\frac{1}{4}(a+b)^2} = a\,; \end{aligned}$$

del mismo se prueba que $q \leq b$. Tenemos

$$pq = \left(d + \frac{1}{2}(a-b)\right)\left(d - \frac{1}{2}(a-b)\right) = d^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2 = c\,.$$

(v) Sean P un ideal primo de A y $a \in A$ tales que $|a| \leq b$ para algún $b \in P$, y veamos que $a \in P$. Como $a^2 = |a|^2$, se satisface $a \in P$ si y sólo si $|a| \in P$, de modo que podemos suponer $a \geq 0$. Veamos que la sucesión $\{a^2/(b + \frac{1}{n})\}$ es uniformemente de Cauchy ($b + \frac{1}{n}$ es invertible): si $n \geq k$ entonces

$$0 \leq \frac{a^2}{b+\frac{1}{n}} - \frac{a^2}{b+\frac{1}{k}} = \frac{(n-k)a^2}{(nb+1)(kb+1)} = \frac{n-k}{nk} \cdot \frac{na \cdot ka}{(nb+1)(kb+1)} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{n}\,.$$

Para obtener la última desigualdad basta tener en cuenta que por ser $0 \leq a \leq b$ se satisface $\frac{pa}{pb+1} \leq 1$ para todo $p \in \mathbb{N}$.

Sea $c \in A$ el límite uniforme de la sucsión $\{c_n = a^2/(b + \frac{1}{n})\}$. Fijado n, sea $m \geq n$ tal que $|c_m - c| \leq \frac{1}{n}$ y denotemos $b_m = b + \frac{1}{m}$; tenemos

$$|a^2 - bc| = |b_m c_m - bc| \leq b_m|c_m - c| + |c||b_m - b| \leq \frac{1}{n}b_m + \frac{1}{m}|c| \leq \frac{1}{n}(b + |c| + 1)\,,$$

lo que implica, por ser A arquimediana, que $a^2 = bc$.

(vi) Es consecuencia de (v) y del corolario 2.2.15.

(vii) Sea I un ideal uniformemente cerrado de A. Como A^* es una Φ-álgebra uniformemente cerrada tenemos $A^* = \mathcal{C}(\operatorname{Spec} A^*)$ (véase 1.2.10), y por lo tanto los ideales uniformemente cerrados de A^* son justamente los ideales de $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} A^*)$ que son cerrados para la topología del supremo. Probaremos más adelante en el lema 3.3.7 que todo ideal de $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} A^*)$ que sea cerrado para la topología del supremo es de la forma $\{f \in \mathcal{C}(\operatorname{Spec} A^*) : f(F) = 0\}$

para algún cerrado F de $\operatorname{Spec} A^*$, y por lo tanto es un l-ideal (véase 2.1.6). Como $I \cap A^*$ es un ideal uniformemente cerrado de A^*, de lo dicho se sigue que $I \cap A^*$ es un l-ideal de A^*. Sean $a \in A$ y $b \in I$ tales que $|a| \leq |b|$ y sea $c = \frac{1}{(1+|b|)} \in A^*$. Es claro que $|ac| \leq |bc|$ y que $bc \in I \cap A^*$, de modo que $ac \in I \cap A^*$; por lo tanto $a = ac(1 + |b|) \in I$. □

Lema 2.3.4. *Sean A y B Φ-álgebras uniformemente cerradas. Todo morfismo de álgebras $T : A \to B$ es un morfismo de l-álgebras.*

Demostración. Se sigue de 2.3.3 (iii). Sea $a \in A$. Por una parte, existe $b \in A$ tal que $|a| = b^2$ y por lo tanto $T(|a|) = T(b^2) = T(b)^2 \geq 0$; por otra parte $|T(a)|^2 = T(a)^2 = T(a^2) = T(|a|^2) = T(|a|)^2$. De todo se sigue $T(|a|) = |T(a)|$, lo que concluye la demostración. □

Corolario 2.3.5. *Si A es una Φ-álgebra uniformemente cerrada, entonces* $\operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A$.

Demostración. Es consecuencia del corolario 2.2.6 y del lema 2.3.4. □

Corolario 2.3.6. *Si A es una Φ-álgebra uniformemente cerrada, entonces la representación $A \to \mathcal{C}(\operatorname{Spec} A) = \mathcal{C}(\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A)$ es un morfismo de l-álgebras.*

2.3.7. Sea A una Φ-álgebra uniformemente cerrada. Una consecuencia del corolario 2.3.5 es que en A coinciden las nociones "1-semisimple" y "real-semisimple" (véanse 1.2.25 y 2.2.5). Otra consecuencia de dicho corolario es que el concepto de "1-cerrada por inversión" dada en 1.4.2 coincide para A con la noción clásica de "$\mathbb{R}$-álgebra cerrada por inversión", la cual aparece usualmente en la literatura del siguiente modo:

Definición 2.3.8. Una $\mathbb{R}$-álgebra A se dice que es *cerrada por inversión*, si sus elementos invertible son justamente aquellos elementos no nulos que no pertenecen a ningún ideal maximal real de A.

Observación 2.3.9. Si A es una Φ-álgebra cerrada por inversión, entonces debe satisfacerse $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A \neq \varnothing$. En efecto, si el espectro real de A es vacío, entonces todo elemento no nulo de A es invertible y por lo tanto A es un cuerpo. Es inmediato comprobar que dicho cuerpo es totalmente ordenado (véase [12, p. 57]), y como es arquimediano debe ser un subcuerpo de $\mathbb{R}$ (véase [25, 0.21]). Entonces $A = \mathbb{R}$ y $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A$ es un punto, lo cual es absurdo.

Corolario 2.3.10. *Sea A una Φ-álgebra uniformemente cerrada. Si A es cerrada por inversión, entonces A es real-semisimple.*

Demostración. Según 2.3.9 es $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A \neq \varnothing$. Sea $a \in A$, $a \neq 0$, y veamos que existe $\omega \in \operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A$ tal que $\omega(a) \neq 0$. En virtud de 2.3.3 (vi) tenemos $\operatorname{rad}_J A = 0$, así que existe un ideal maximal M en A tal que $a \notin M$, es decir, existen $b \in A$ y $c \in M$ tales que $1 = ab + c$; como $c \notin A^{-1}$ y A es cerrada por inversión, existe $\omega \in \operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A$ tal que $\omega(c) = 0$, esto es, $\omega(a)\omega(b) = 1$. □

Ejemplo 2.3.11. Puede suceder que una Φ-álgebra uniformemente cerrada sea real-semisimple y que no sea cerrada por inversión. Sea $A = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : |f| \leq P$ para alguna función polinómica $P\}$. Es claro que A es una subálgebra y es un subretículo de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, esto es, con el orden inducido por el de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, A es una Φ-álgebra. Si $\{f_n\}_n$ es una sucesión uniformemente de Cauchy en A, entonces también lo es en $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ y por lo tanto existe $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ tal que $f_n \to g$ uniformemente; en particular existe $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfaciendo $|g - f_{n_0}| \leq 1$, y si P es una función polinómica de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ tal que $|f_{n_0}| \leq P$, entonces $|g| \leq |g - f_{n_0}| + |f_{n_0}| \leq 1 + P$ y concluimos que $g \in A$. Por lo tanto A es uniformemente cerrada. Además, A es real-semisimple porque $\operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A$ y A es 1-semisimple (véanse 2.3.5 y lo dicho al comienzo de la sección 1.3). Sin embargo A no es cerrada por inversión: supuesto probada la igualdad $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A = \mathbb{R}$, es claro que $\mathrm{e}^x \wedge \mathrm{e}^{-x} \in A$ no está en ningún ideal maximal real de A y que $(\mathrm{e}^x \wedge \mathrm{e}^{-x})^{-1} \notin A$.

Veamos la igualdad $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A = \mathbb{R}$. La topología de $\mathbb{R}$ es la topología débil definida por las funciones de A (nótese que A contiene a la función identidad de $\mathbb{R}$), así que $\mathbb{R}$ es un subespacio topológico de $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A$, que es denso en $\operatorname{Spec} A^*$ (véase 1.3.5). Sea $\omega \in \operatorname{Spec} A^*$ tal que $\omega \notin \mathbb{R}$ y veamos que $\omega \notin \operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A$, esto es, que existe $a_0 \in A_+$ tal que $\hat{a}_0(\omega) = +\infty$ (véase el lema 1.2.22). Consideremos en A la función $a_0(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$; dado $n \in \mathbb{N}$, como $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq n\}$ es un compacto de $\operatorname{Spec} A^*$ que está contenido en $\mathbb{R}$ tenemos $\hat{a}_0(\omega) = \lim\limits_{\substack{x \to \omega \\ \{x \in \mathbb{R} : |x| > n\}}} a_0(x) \geq n$; por lo tanto $\hat{a}_0(\omega) = +\infty$.

Definiciones 2.3.12. Sea A un anillo. Llamaremos *espectro maximal* de A al conjunto $\operatorname{Spec}_m A$ de todos los ideales maximales de A. Si para cada ideal I de A escribimos $[I]_0 := \{M \in \operatorname{Spec}_m A : I \subseteq M\}$, entonces la colección $\{[I]_0 : I$ ideal de $A\}$ son los conjuntos cerrados para una topología sobre $\operatorname{Spec}_m A$, conocida como *topología de Zariski*: dada una familia $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de ideales de A es fácil ver la igualdad $\bigcap_\lambda [I_\lambda]_0 = \left[\sum_\lambda I_\lambda\right]_0$, y dados $I_1, \ldots, I_n$ ideales de A tenemos $[I_1]_0 \cup \cdots \cup [I_n]_0 = [I_1 \cap \cdots \cap I_n]_0$, pues si M es un ideal maximal de A tal que $M \notin [I_i]_0$ para todo i, entonces existen $a_1 \in I_1, \ldots, a_n \in I_n$ tales que $a_i \notin M$ para todo i y por tanto $a_1 \cdots a_n \notin M$ y $a_1 \cdots a_n \in \bigcap_i I_i$, lo cual

prueba la inclusión $\big[I_1 \cap \cdots \cap I_n\big]_0 \subseteq [I_1]_0 \cup \cdots \cup [I_n]_0$ (la otra inclusión es trivial); además tenemos $[A]_0 = \varnothing$ y $[0]_0 = \operatorname{Spec}_m A$.

Consideraremos siempre el espectro maximal de un anillo dotado de su topología de Zariski. Se satisface que $\operatorname{Spec}_m A$ es un espacio topológico compacto (no necesariamente Hausdorff): si $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de ideales de A tal que $\bigcap_\lambda [I_\lambda]_0 = \big[\sum_\lambda I_\lambda\big]_0 = \varnothing$, entonces debe ser $\sum_\lambda I_\lambda = A$ y por lo tanto existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ tales que $1 \in I_{\lambda_1} + \cdots + I_{\lambda_n}$, es decir, $[I_{\lambda_1}]_0 \cap \cdots \cap [I_{\lambda_n}]_0 = \varnothing$.

Si para cada $a \in A$ denotamos $[a]_0 := \{M \in \operatorname{Spec}_m A : a \in M\}$, entonces $\{[a]_0 : a \in A\}$ es una base de cerrados para la topología de $\operatorname{Spec}_m A$, pues para todo ideal I de A se satisface $[I]_0 = \bigcap_{a\in I} [a]_0$.

2.3.13. Supongamos que A es una Φ-álgebra uniformemente cerrada, en cuyo caso tenemos $\operatorname{Spec} A \subseteq \operatorname{Spec}_m A$ porque $\operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A$ (véase 2.3.5). Entonces sobre $\operatorname{Spec} A$ podemos considerar dos topologías: la débil (que es la que hemos venido utilizando hasta ahora) y la de Zariski (esto es, la inducida por la topología de $\operatorname{Spec}_m A$). Es fácil ver que ambas topologías coinciden: una base de abiertos para la primera es la colección $\{\operatorname{coz}(a) : a \in A\}$ (véase 1.2.17), una base de abiertos para la segunda es $\{\operatorname{Spec} A \setminus (\operatorname{Spec} A \cap [a]_0) : a \in A\}$, y es claro que dado $a \in A$ se satisface $\operatorname{coz}(a) = \operatorname{Spec} A \setminus (\operatorname{Spec} A \cap [a]_0)$.

Definición 2.3.14. Fijemos un anillo A. Sea S un *sistema multiplicativo* de A, esto es, un subconjunto de A que satisface: $1 \in S$, y si $a, b \in S$ entonces $ab \in S$. Se define una relación de equivalencia "$\sim$" sobre $A \times S$ como sigue:

$$(a, s) \sim (b, t) \quad \Longleftrightarrow \quad r(at - bs) = 0 \ \text{ para algún } r \in S\,.$$

Denotemos por $S^{-1}A$ el conjunto cociente $(A \times S)/\!\sim$ y por $\frac{a}{s}$ la clase de equivalencia de un elemento (a, s) de $A \times S$. Ahora, dotamos de estructura de anillo a $S^{-1}A$ definiendo la suma y la multiplicación de "fracciones" del modo usual:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{at + bs}{st}\,, \qquad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} := \frac{ab}{st}\,.$$

El "cero" y el "uno" de $S^{-1}A$ son $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{1}$, respectivamente, y es claro que se satisface la igualdad $\frac{0}{1} = \frac{1}{1}$ si y sólo si $0 \in S$, es decir, $S^{-1}A = 0$ si y sólo si $0 \in S$. El anillo $S^{-1}A$ se denomina *localización* de A por S.

Si en un anillo es $0 \neq 1$, entonces haciendo uso del lema de Zörn se obtiene que en dicho anillo hay ideales maximales y por lo tanto hay ideales primos; como consecuencia, si en $S^{-1}A$ no hay ideales primos, de lo dicho en el párrafo anterior se sigue que $0 \in S$.

Definición 2.3.15. Un anillo se dice que es de *Gelfand* si cada ideal primo suyo está contenido en un único ideal maximal.

Teorema 2.3.16. *Si A es un anillo de Gelfand entonces* $\operatorname{Spec}_m A$ *es Hausdorff. Cuando* $\operatorname{rad}_J A = 0$ *se satisface: A es de Gelfand si y sólo si* $\operatorname{Spec}_m A$ *es Hausdorff.*

Demostración. Supongamos que A es de Gelfand y sean $M_1, M_2 \in \operatorname{Spec}_m A$, $M_1 \neq M_2$. Consideremos el siguiente sistema multiplicativo de A:

$$S = \{ss' : s \in A \setminus M_1,\ s' \in A \setminus M_2\}.$$

Si probamos que en el anillo $S^{-1}A$ no hay ideales primos, entonces $0 \in S$, es decir, existirán $s_1 \in A \setminus M_1$ y $s_2 \in A \setminus M_2$ tales que $s_1 s_2 = 0$, y por lo tanto $U_1 = \operatorname{Spec}_m A \setminus [s_1]_0$ y $U_2 = \operatorname{Spec}_m A \setminus [s_2]_0$ son entornos abiertos de M_1 y M_2, respectivamente, tales que $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Supongamos entonces que hay un ideal primo I en $S^{-1}A$, en cuyo caso $J = \{a \in A : \frac{a}{1} \in I\}$ es un ideal primo de A. Si existiera $s \in J \cap S$, entonces $\frac{s}{1}$ es un elemento invertible de $S^{-1}A$ que pertenece a I, lo cual es absurdo; si fuera $J \cap S = \varnothing$ entonces tendríamos $J \subseteq M_1 \cap M_2$, lo cual contradice el que A es de Gelfand.

Supongamos ahora que $\operatorname{rad}_J A = 0$ y que $\operatorname{Spec}_m A$ es Hausdorff. Sean P, M y M' ideales de A tales que P es primo, M y M' son maximales distintos, y $P \subseteq M$; debemos probar que $P \nsubseteq M'$. Por hipótesis, existen $a, a' \in A$ tales que, si $U = \operatorname{Spec}_m A \setminus [a]_0$ y $U' = \operatorname{Spec}_m A \setminus [a']_0$, entonces $M \in U$, $M' \in U'$ y $\varnothing = U \cap U' = \operatorname{Spec}_m A \setminus [aa']_0$. La condición $[aa']_0 = \operatorname{Spec}_m A$ es equivalente a que se satisfaga $aa' \in \operatorname{rad}_J A = 0$, de modo que debe ser $aa' = 0$. Como $a \notin P$ (porque $a \notin M$) tenemos $a' \in P$; pero $a' \notin M'$, así que $P \nsubseteq M'$. □

Teorema 2.3.17. *Toda Φ-álgebra uniformemente cerrada es de Gelfand.*

Demostración. Basta aplicar el lema 2.2.13 porque, según 2.3.3 (v), en una Φ-álgebra uniformemente cerrada coinciden los términos "ideal primo" y "l-ideal primo", y coinciden los términos "ideal maximal" y "l-ideal maximal". □

Teorema 2.3.18. *Sea A una Φ-algebra uniformemente cerrada. Son equivalentes:*

(i) $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A = \operatorname{Spec}_m A$;

(ii) 1 *es una unidad fuerte.*

Demostración. (i)⇒(ii) La igualdad $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A = \operatorname{Spec}_m A$ es topológica (véase 2.3.13), así que la representación $A \to \mathcal{C}(\operatorname{Spec}_m A) = \mathcal{C}(\operatorname{Spec} A)$ es inyectiva porque $\operatorname{rad}_J A = 0$ (véase 2.3.3 (vi)); como, según el corolario 2.3.6, dicha representación es un morfismo de l-álgebras, podemos identificar A con una l-álgebra de funciones continuas sobre un espacio topológico compacto y por lo tanto $A^* = A$.

(ii)⇒(i) Tenemos $A^* = A$, y como $A^* = \mathcal{C}(\operatorname{Spec} A^*)$, concluimos que A es la Φ-álgebra de todas las funciones reales continuas sobre un espacio topológico compacto, en cuyo caso es conocido que todo ideal maximal de A es real (véanse, por ejemplo, 3.3.9 y 3.3.11 más adelante). □

Teorema 2.3.19. *Si A es una Φ-álgebra uniformemente cerrada, entonces* $\operatorname{Spec} A^* = \operatorname{Spec}_m A$ (*igualdad topológica*).

Demostración. Puesto que $\mathcal{M}(A) = \operatorname{Spec}_m A$, según 2.2.14 tenemos que las aplicaciones

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec} A^* &\to \operatorname{Spec}_m A \\ M^* &\mapsto \{a \in A : S(a) \cap A^* \subseteq M^*\}, \\ \operatorname{Spec}_m A &\to \operatorname{Spec} A^* \\ M &\mapsto \{\text{único } l\text{-ideal maximal de } A^* \text{ que contiene a } M \cap A^*\} \end{aligned}$$

son inversa una de la otra. Como ambos espacios topológicos son compactos Haussdorff, bastará ver que una de las dos anteriores aplicaciones es continua para probar que son homeomorfismos. Veamos que $\operatorname{Spec}_m A \to \operatorname{Spec} A^*$ es continua. Sean $M_0 \in \operatorname{Spec}_m A$ y $\omega_0 \in \operatorname{Spec} A^*$ tales que $M_0^* = \ker \omega_0$ es el único l-ideal maximal de A^* que contiene a $M_0 \cap A^*$. La familia $\{\operatorname{coz}(a) : a \in A_+^*,\ a \notin M_0^*\}$ constituye una base de entornos de M_0^*. Sea entonces $a \in A_+^*$ tal que $a \notin M_0^*$ y denotemos $r = \omega_0(a) > 0$. Consideremos en $\operatorname{Spec}_m A$ el abierto $U = \{M \in \operatorname{Spec}_m A : (a - r/2)^+ \notin M\}$. En primer lugar tenemos que $M_0 \in U$, pues si $(a - r/2)^+ \in M_0$, entonces $(a - r/2)^+ \in M_0 \cap A^* \subseteq M_0^*$ y por lo tanto $0 = \omega_0(a - r/2)^+ = r/2 \vee 0 > 0$, lo cual es absurdo. Dado $M \in U$, si M^* es el único l-ideal maximal de A^* que contiene a M, entonces debemos ver que $M^* \in \operatorname{coz}(a)$: puesto que $0 = (a - r/2)^+(a - r/2)^-$ tenemos $(a - r/2)^- \in M$, de lo que se deduce, al ser a acotado, que $(a - r/2)^- \in M^*$; entonces $r/2 - a \in M^*$ por ser M^* sólido y por lo tanto $a \notin M^*$. □

En el siguiente teorema se presenta la caracterización que dio Plank [57] de la Φ-álgebra $\mathcal{C}(X)$ cuando X es un espacio topológico Lindelöf. Aunque

la primera de estas caracterizaciones fue obtenida por Henriksen y Johnson [31, Th. 5.4], ésta fue mejorada posteriormente por Mrówka [51], Plank [57] y, más recientemente, por Stokke [67]. Una parte de la prueba que se da aquí de este teorema está tomada de Garrido y Montalvo [21].

Recordemos que un espacio topológico X se dice que es Lindelöf, si de cada recubrimiento abierto de X puede extraerse un recubrimiento numerable.

Teorema de Caracterización 2.3.20. *Una Φ-álgebra A uniformemente cerrada y cerrada por inversión es l-isomorfa a $\mathcal{C}(X)$ para algún espacio topológico Lindelöf X, si y sólo si, todo ideal propio uniformemente cerrado de A es intersección de ideales maximales reales.*

Demostración. Sea A una Φ-álgebra uniformemente cerrada y cerrada por inversión, en la que todo ideal propio uniformemente cerrado es intersección de ideales maximales reales. Empecemos probando que $\operatorname{Spec} A$ es Lindelöf, para lo cual consideremos un recubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de $\operatorname{Spec} A$. Sea I el conjunto de los elementos $a \in A$ para los que existe una subfamilia numerable $\mathcal{U}_a$ de $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{U}_a$ es un recubrimiento de $\operatorname{coz}(a)$. Es claro que I es un ideal: $I \neq \varnothing$ porque $0 \in I$; si $a, b \in I$ entonces $\mathcal{U}_a \cup \mathcal{U}_b$ es un recubrimiento de $\operatorname{coz}(a-b)$; si $a \in I$ y $b \in A$ entonces $\mathcal{U}_a$ es un recubrimiento de $\operatorname{coz}(ab)$. Veamos que I es uniformemente cerrado. Sea $\{a_n\}_n$ una sucesión de I que converge uniformemente a un elemento $a \in A$, y denotemos $\mathcal{V} = \cup_n \mathcal{U}_{a_n}$. Si probamos que $\mathcal{V}$ es un recubrimiento de $\operatorname{coz}(a)$ entonces será $a \in I$: sea $\{\varepsilon_n\}_n$ una sucesión decreciente de escalares positivos que converge a 0 tal que $|a_n - a| \leq \varepsilon_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; dada $\omega \in \operatorname{coz}(a) = \operatorname{coz}(|a|)$ tenemos

$$\omega(|a|) - \omega(|a_n|) \leq \omega(|a_n - a|) \leq \varepsilon_n \,,$$

luego $\omega(|a_m|) > 0$ para algún m, esto es, $\omega \in \operatorname{coz}(a_m)$.

Si $I \neq A$, entonces por hipótesis existe $M_0 \in \operatorname{Spec} A$ tal que $I \subseteq M_0$, de modo que si tomamos $U \in \mathcal{U}$ con la condición $M_0 \in U$, entonces existe $a \in A$ tal que $M_0 \in \{M \in \operatorname{Spec} A : a \notin M\} = \operatorname{coz}(a) \subseteq U$, es decir, existe $a \in I$ tal que $a \notin M_0$, lo cual es una contradicción. Así que debe ser $1 \in I = A$, y por lo tanto existe una subfamilia numerable $\mathcal{U}_1$ de $\mathcal{U}$ que es un recubrimiento de $\operatorname{coz}(1) = \operatorname{Spec} A$.

Veamos que cada cocero de $\operatorname{Spec} A$ es un cocero de A, es decir, sea $f \in \mathcal{C}(\operatorname{Spec} A)$ y veamos que existe $a \in A$ tal que $C = \{\omega \in \operatorname{Spec} A : f(\omega) \neq 0\}$ es igual a $\operatorname{coz}(a)$. Por una parte, como $\operatorname{Spec} A$ tiene la topología débil dada por A, se satisface $C = \bigcup_i C_i$ donde cada C_i es un cocero en A; por otra parte, C

es una unión numerable de cerrados, $C = \bigcup_n \{\omega \in \operatorname{Spec} A : |f|(\omega) \geq 1/n\}$, y por lo tanto es un subespacio de Lindelöf de $\operatorname{Spec} A$; de todo se sigue que existe una sucesión $\{a_n\}_n$ en A tal que $C = \bigcup_n \operatorname{coz}(a_n)$. Por ser A uniformemente cerrada la serie $\sum_n \frac{1}{2^n} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$ define un elemento a de A, y es claro que se satisface $C = \operatorname{coz}(a)$.

Probemos ahora la inclusión $\mathcal{C}^*(\operatorname{Spec} A) \subseteq A$. Fijemos $f \in \mathcal{C}^*(\operatorname{Spec} A)$ y sea $\varepsilon > 0$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, consideremos el cocero C_n de A definido como

$$\begin{aligned} C_n &= \{\omega \in \operatorname{Spec} A : |f(\omega) - n\varepsilon| < \varepsilon\} \\ &= \{\omega \in \operatorname{Spec} A : (n-1)\varepsilon < f(\omega) < (n+1)\varepsilon\} \\ &= \operatorname{coz}\Big(\big(f - (n-1)\varepsilon\big)^+ \vee \big((n+1)\varepsilon - f\big)^+\Big), \end{aligned}$$

y sea $a_n \in A_+$ tal que $C_n = \operatorname{coz}(a_n)$; como f es acotada tenemos $a_n = 0$ (esto es, $C_n = \varnothing$) salvo a lo sumo para un número finito de enteros n. Sea $a = \sum_n a_n \in A$ (es una suma finita); es claro que $\omega(a) > 0$ para todo $\omega \in \operatorname{Spec} A$, de modo que como A es cerrada por inversión tenemos $a \in A^{-1}$. Si definimos $b_n = a_n a^{-1}$, $n \in \mathbb{Z}$, entonces $\sum_n b_n = 1$. Dado $\omega \in C_k$ tenemos

$$\begin{aligned} \sum_n n\omega(b_n) &= (k-1)\omega(b_{k-1}) + k\omega(b_k) + (k+1)\omega(b_{k+1}) \\ &= -\omega(b_{k-1}) + \omega(b_{k+1}) + k\Big(\sum_n n\omega(b_n)\Big) \\ &= k + \omega(b_{k+1}) - \omega(b_{k-1}), \end{aligned}$$

luego $\big|\sum_n n\omega(b_n) - k\big| \leq 2$, es decir, $\big|\varepsilon \sum_n n\omega(b_n) - \varepsilon k\big| \leq 2\varepsilon$; por lo tanto

$$\left|\varepsilon \sum_n n\omega(b_n) - f(\omega)\right| \leq 3\varepsilon\,.$$

Hemos probado que existe $c = \varepsilon \sum_n n b_n \in A$ tal que $|c - f| < 3\varepsilon$, luego $f \in A$.

Veamos ya la igualdad $A = \mathcal{C}(\operatorname{Spec} A)$. Dada $f \in \mathcal{C}(\operatorname{Spec} A)$ denotemos $f_1 = (f^+ + 1)$ y $f_2 = (f^- + 1)$. Como $0 < 1/f_1 \leq 1$ y $0 < 1/f_2 \leq 1$ tenemos $1/f_1, 1/f_2 \in \mathcal{C}^*(\operatorname{Spec} A) \subseteq A$; por lo tanto $f_1, f_2 \in A$ y concluimos que $f = f_1 - f_2 \in A$.

Recíprocamente, sea X un espacio topológico Lindelöf, y supongamos que I es un ideal uniformemente cerrado de $\mathcal{C}(X)$ que no está contenido en ningún ideal maximal real. Entonces $\{\operatorname{coz}(f)\}_{f \in I}$ es un recubrimiento abierto de X, pues de lo contrario existiría $\omega \in X$ tal que el ideal maximal real $\{f \in \mathcal{C}(X) :$

$f(\omega) = 0\}$ contiene a I. Como X es Lindelöf existe una sucesión $\{f_n\}_n$ en I tal que $X = \bigcup_n \operatorname{coz}(f_n)$; podemos suponer $0 \leq f_n \leq 1$ para todo n porque, según 2.3.3 (vii), I es sólido. Por ser I uniformemente cerrado la serie $f = \sum_n \frac{f_n}{2^n}$ define un elemento de I; es claro que $f(\omega) \neq 0$ para todo $\omega \in X$, de modo que f es invertible y por lo tanto $I = A$, esto es, I no es propio. □

2.3.21. Terminaremos esta sección analizando el comportamiento de las Φ-álgebras uniformemente cerradas al pasar al cociente por un l-ideal. La mayor parte de los resultados están tomados del trabajo de Plank [57]. (Recuérdense las definiciones 2.2.1.)

Lema 2.3.22. *Para una l-álgebra A son equivalentes:*
(i) *A es una f-álgebra;*
(ii) *$a^+ \wedge ca^- = 0$ para cualesquiera $a \in A$, $c \in A_+$.*

Demostración. (i)⇒(ii) Es trivial porque $a^+ \wedge a^- = 0$ para todo $a \in A$.

(ii)⇒(i) Dados $a, b, c \in A_+$ tales que $a \wedge b = 0$ se satisface $a \wedge cb = (a - a \wedge b) \wedge c(b - a \wedge b) = (a - b)^+ \wedge c(a - b)^- = 0$. □

Proposición 2.3.23. *Sea $T : A \to B$ un morfismo epiyectivo de l-álgebras. Se satisfacen:*
(i) *Si A es f-álgebra, entonces B es f-álgebra.*
(ii) *Si A es uniformemente cerrada, entonces B es uniformemente cerrada.*

Demostración. (i) Sean $b, d \in B$ con $d \geq 0$, y veamos que se satisface $b^+ \wedge db^- = 0$, con lo cual terminaríamos si aplicamos el lema 2.3.22: consideremos $a, c \in A$ tales que $T(a) = b$ y $T(c) = d$; puesto que $T(|c|) = |T(c)| = |d| = d$, podemos suponer $c \geq 0$ y por lo tanto

$$b^+ \wedge db^- = T(a)^+ \wedge T(c)T(a)^- = T(a^+ \wedge ca^-) = T(0) = 0\,.$$

(ii) Observemos en primer lugar que si $a \in A$ y $\varepsilon > 0$ son tales que $|T(a)| \leq \varepsilon$, entonces $T(-\varepsilon \vee a \wedge \varepsilon) = -\varepsilon \vee T(a) \wedge \varepsilon = T(a)$. Sea $\{a_n\}_n$ una sucesión de A tal que $\{T(a_n)\}_n$ es uniformemente de Cauchy en B. Tomando (si fuese preciso) una subsucesión, podemos suponer que para todo $n \in \mathbb{N}$ se satisface

$$|T(a_{n+1}) - T(a_n)| = |T(a_{n+1} - a_n)| \leq \frac{1}{2^n}\,.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $b_n = \frac{-1}{2^n} \vee (a_{n+1} - a_n) \wedge \frac{1}{2^n}$, de modo que tenemos $|b_n| \leq \frac{1}{2^n}$ y $T(b_n) = T(a_{n+1}) - T(a_n)$. Si tomamos $c_n = b_0 + \cdots + b_n$ (donde

$b_0 = a_1$), entonces $\{c_n\}_n$ es uniformemente de Cauchy en A porque $|c_p - c_q| = |b_{p+1} + \cdots + b_q| \leq \frac{1}{2^p}$ cuando $q \geq p$, de modo que existe $a \in A$ tal que $c_n \to a$. Tenemos $T(c_n) = T(a_{n+1}) \to T(a)$. □

Definición 2.3.24. Sea a un elemento de una l-álgebra A. Se dice que a es *infinitesimal* si $|a| \leq 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Es obvio que cuando A es arquimediana se satisface: a es infinitesimal si y sólo si $a = 0$.

Lema 2.3.25. *Sea I un l-ideal propio de una Φ-álgebra A y sea $\pi : A \to A/I$ el morfismo de paso al cociente. Dado $a \in A$, son equivalentes:*
(i) *a está en la clausura uniforme de I;*
(ii) *$\pi(a)$ es infinitesimal en A/I.*

Demostración. (i)⇒(ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $a_n \in I$ tal que $|a_n - a| \leq 1/n$. Entonces

$$|\pi(a)| \leq |\pi(a - a_n)| + |\pi(a_n)| = \pi(|a - a_n|) \leq 1/n\,.$$

(ii)⇒(i) Supongamos que $|\pi(a)| \leq 1/n$ para todo n. Si definimos $b_n = \frac{-1}{n} \vee a \wedge \frac{1}{n}$ tenemos $|b_n| \leq 1/n$ y $\pi(b_n) = \pi(a)$; por lo tanto, si $a_n = a - b_n$, entonces $\{a_n\}_n$ es una sucesión de I que converge uniformemente a a. □

Proposición 2.3.26. *Sea I un l-ideal propio de una Φ-álgebra uniformemente cerrada A. Son equivalentes:*
(i) *I es uniformemente cerrado;*
(ii) *A/I es una Φ-álgebra.*

Demostración. Sea $\pi : A \to A/I$ el morfismo de paso al cociente. De acuerdo con (i) de la proposición 2.3.23 debemos probar: A/I es arquimediana si y sólo si I es uniformemente cerrado.

Supongamos que I es uniformemente cerrado y sean $a, b \in A$ tales que $\pi(a) \geq 0$ y $\pi(na) \leq \pi(b)$ para todo $n \in \mathbb{N}$; como $1 + |b|$ es invertible tenemos

$$\left|\pi\left(\frac{a}{1+|b|}\right)\right| \leq \frac{1}{n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}\,,$$

es decir, $\pi(a/(1+|b|))$ es infinitesimal; del lema 2.3.25 se sigue que $a/(1+|b|) \in I$ y por lo tanto $\pi(a) = 0$.

Recíprocamente, si A/I es arquimediana, entonces dado $a \in A$ tenemos: a está en la clausura uniforme de $I \Leftrightarrow \pi(a)$ es infinitesimal $\Leftrightarrow \pi(a) = 0 \Leftrightarrow a \in I$. □

Capítulo 3

Álgebras Topológicas

Comienza el capítulo con una sección preliminar en la que se presentan algunas definiciones y resultados previos bien conocidos de la teoría de Espacios Localmente Convexos. En la segunda sección se introduce el "espectro topológico" de un álgebra topológica y se estudian las álgebras localmente m-convexas, generalizándose para las $\mathbb{R}$-álgebras topológicas racionales algunas propiedades bien conocidas de las $\mathbb{C}$-álgebras topológicas simétricas. Finaliza el capítulo con una tercera sección donde se estudia el caso particular de $\mathcal{C}_k(X)$, el álgebra de todas las funciones reales y continuas sobre un espacio topológico completamente regular X, dotada de la topología de la convergencia compacta.

3.1 Preliminares

En esta sección daremos las nociones básicas de la teoría de espacios vectoriales topológicos localmente convexos, y recordaremos algunos resultados bien conocidos que no demostraremos y que necesitaremos para el desarrollo posterior de la Memoria. Dichos resultados pueden consultarse, por ejemplo, en el libro de Köthe [42] ó en el de Schaefer [64].

En adelante $\mathbb{K}$ denotará $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, y diremos "espacio vectorial" en lugar de "$\mathbb{K}$-espacio vectorial" cuando $\mathbb{K}$ sea indistintamente $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, ó cuando el cuerpo $\mathbb{K}$ esté claro en el contexto. Siempre que se considere una topología sobre $\mathbb{K}$ ésta será su topología usual. Por último, dado $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda|$ será el módulo del número complejo λ y $\overline{\lambda}$ denotará el complejo conjugado de λ; en particular, si $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $|\lambda|$ será, como en capítulos anteriores, el valor

absoluto de λ.

Definiciones 3.1.1. Sea E un espacio vectorial. Dados subconjuntos A y B de E, diremos que A *absorbe* a B si existe $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ tal que $B \subseteq \lambda A$ siempre que $|\lambda| \geq |\lambda_0|$, y diremos que A es *absorbente* si absorbe a todo subconjunto finito de E. Un subconjunto Q de E se dice que es *equilibrado* si $\lambda Q \subseteq Q$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| \leq 1$. Si Q es un subconjunto equilibrado de E, entonces es inmediato comprobar que Q es absorbente si y sólo si para todo $x \in E$ existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, tal que $\lambda x \in Q$. Diremos que un subconjunto C de E es *convexo* si $x, y \in C$ implica que $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$ para todo $\lambda \in [0,1]$, y diremos que C es *absolutamente convexo* si es convexo y equilibrado.

La familia de todos los subconjuntos absorbentes de E es cerrada por intersecciones finitas, y la familia de todos los subconjuntos convexos (equilibrados) de E es cerrada por intersecciones cualesquiera.

Definición 3.1.2. Un *espacio vectorial topológico* es un espacio vectorial E dotado de una topología para la cual son continuas las aplicaciones $E \times E \to E$, $(x, y) \mapsto x + y$, y $\mathbb{K} \times E \to E$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$.

Sea E un espacio vectorial topológico. Un subconjunto de E se dice que es *acotado* si es absorbido por todo 0-entorno. Es fácil comprobar que todo subconjunto finito de E es acotado, es decir, que todo 0-entorno es un conjunto absorbente.

3.1.3. Sea E un espacio vectorial topológico y sea $\mathcal{U}$ una base de 0-entornos en E. Dado $x \in E$, la traslación $E \to E$, $y \mapsto x + y$, es un homeomorfismo, por lo que una base de entornos de x es $x + \mathcal{U} = \{x + U : U \in \mathcal{U}\}$. Como consecuencia de lo anterior se sigue que la clausura de un subconjunto A de E es $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} (A + U)$. Otra consecuencia es que para que E sea Hausdorff basta con que para todo $x \in E$, $x \neq 0$, exista $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \notin U$, esto es, que $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = 0$. Lo anterior se expresa diciendo que E es Hausdorff si y sólo si el subespacio trivial 0 es cerrado.

Definiciones 3.1.4. Sea E un espacio vectorial topológico. Una red $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ en E se dice que es de *Cauchy* si para todo 0-entorno U existe $\alpha_0 \in I$ tal que $x_\alpha - x_\beta \in U$ si $\alpha, \beta \geq \alpha_0$. Se dice que E es *completo* si es Hausdorff y toda red de Cauchy de E es convergente.

Sea F un subespacio vectorial de E; en particular F con la topología de subespacio es también un espacio vectorial topológico. Si E es completo, entonces se satisface: F es completo si y sólo si F es cerrado en E.

3.1.5. Si E es un espacio vectorial topológico Hausdorff, entonces existe un espacio vectorial topológico completo $\overline{E}$, conocido como *compleción* de E, que está dotado de una aplicación lineal e inyectiva $E \hookrightarrow \overline{E}$ tal que (la imagen de) E es denso en $\overline{E}$ y la topología de E es la inducida por la de $\overline{E}$.

Definiciones 3.1.6. Llamaremos *espacio localmente convexo*, a todo espacio vectorial topológico en el que exista una base de 0-entornos formada por conjuntos convexos. Se satisface que la compleción de un espacio localmente convexo Hausdorff es también localmente convexo. En un espacio vectorial topológico, se denomina *tonel* a todo subconjunto que sea absorbente, absolutamente convexo y cerrado.

Sea E un espacio localmente convexo. Es fácil comprobar que en E existe una base de 0-entornos formada por toneles, aunque en general no es cierto que todo tonel sea un 0-entorno. Llamaremos *espacio tonelado* a todo espacio localmente convexo Hausdorff en el que todo tonel es un 0-entorno. Tampoco es cierto, en general, que todo subconjunto absolutamente convexo de E que absorbe a los acotados sea un 0-entorno. Llamaremos *espacio bornológico* a todo espacio localmente convexo Hausdorff en el que todo subconjunto absolutamente convexo que absorbe a los acotados es un 0-entorno.

3.1.7. Es claro que toda aplicación lineal y continua definida entre espacios vectoriales topológicos transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados. Si E es un espacio localmente convexo Hausdorff, entonces E es bornológico si y sólo si toda forma lineal $E \to \mathbb{K}$ que transforme acotados en acotados es continua. Otro resultado importante que no probaremos es el siguiente: todo espacio bornológico y completo es un espacio tonelado.

Definiciones 3.1.8. Sea E un espacio vectorial. Llamaremos *seminorma* sobre E a toda función $q : E \to \mathbb{R}$ que, para cualesquiera $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, satisfaga

$$q(x+y) \leq q(x) + q(y)\,, \qquad q(\lambda x) = |\lambda| q(x)\,;$$

en particular debe ser $q(x) \geq 0$ para todo $x \in E$ y $q(0) = 0$. Si además $q(x) = 0$ implica $x = 0$, entonces diremos que q es una *norma*.

Sea ahora B un subconjunto absorbente de E. Para cada $x \in E$ está definido el numero real no negativo $q_B(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda B\}$, de modo que tenemos una aplicación $q_B : E \to \mathbb{R}$ que se denomina *funcional de Minkowsky* de B; es claro que si B es además absolutamente convexo entonces q_B es una seminorma.

3.1.9. Sea E un espacio vectorial y sea Γ una familia de seminormas sobre E. Dado $x_0 \in E$, los conjuntos de la forma

$$\{x \in E \,:\, q_1(x - x_0) \leq \varepsilon, \ldots, q_n(x - x_0) \leq \varepsilon\} \qquad (q_1, \ldots, q_n \in \Gamma,\ \varepsilon > 0)$$

constituyen una base de entornos de x_0 para una topología sobre E que se dice que está definida por la familia Γ. De las propiedades de las seminormas se sigue inmediatamente que E dotado de dicha topología es un espacio localmente convexo; además, dada $q \in \Gamma$, si $B = \{x \in E \,:\, q(x) \leq 1\}$ es la *bola unidad cerrada* de q entonces B es un tonel tal que $q = q_B$.

Recíprocamente, supongamos que E es un espacio localmente convexo y sea $\mathcal{U}$ una base de 0-entornos en E formada por toneles. Entonces la topología de E coincide con la definida por la familia de seminormas $\Gamma = \{q_U : U \in \mathcal{U}\}$, y para cada $U \in \mathcal{U}$ se satisface que U es la bola unidad cerrada de q_U.

De todo lo anterior se sigue que una topología sobre un espacio vectorial lo dota de estructura de espacio localmente convexo, si y sólo si, dicha topología puede definirse por una familia de seminormas.

3.1.10. Sea E un espacio localmente convexo y sea Γ una familia de seminormas sobre E que definen su topología. Es inmediato comprobar que E es Hausdorff si y sólo si para todo $x \in E$, $x \neq 0$, existe $q \in \Gamma$ tal que $q(x) \neq 0$.

3.1.11. Sea V un subconjunto absorbente y absolutamente convexo de un espacio vectorial E y consideremos la seminorma q_V. Se satisfacen las inclusiones

$$\{x \in E : q_V(x) < 1\} \subseteq V \subseteq \{x \in E : q_V(x) \leq 1\}\,.$$

Como consecuencia, si E es un espacio vectorial topológico tenemos: V es un 0-entorno si y sólo si $q_V : E \to \mathbb{R}$ es continua.

Por otra parte, dado un subconjunto C de E, es claro que C es absorbido por V si y sólo si $q_V(C)$ es un acotado de $\mathbb{R}$. Como consecuencia, si E es un espacio localmente convexo y Γ es una familia de seminormas que definen su topología, entonces C es un acotado de E si y sólo si $q(C)$ es acotado para toda $q \in \Gamma$.

Definiciones 3.1.12. Diremos que un espacio vectorial topológico E es *metrizable*, si existe una distancia sobre E que define su topología. Se denomina *espacio de Fréchet* a todo espacio localmente convexo que sea metrizable y completo.

La compleción de un espacio vectorial topológico metrizable es también metrizable, de modo que la compleción de un espacio localmente convexo metrizable es un espacio de Fréchet.

3.1.13. Sea E un espacio vectorial topológico. Si E es completo entonces es *secuencialmente completo*, esto es, cada sucesión de Cauchy de E es convergente. En general no es cierto el recíproco. Si E es metrizable, tenemos entonces que E es completo si y sólo si E es secuencialmente completo.

3.1.14. Sea E un espacio vectorial topológico. Si E es metrizable, entonces es Hausdorff y cada punto suyo tiene una base numerable de entornos, como ocurre en todo espacio topológico metrizable. El "teorema fundamental de metrizabilidad" afirma que esas dos propiedades caracterizan a los espacios vectoriales topológicos que son metrizables, esto es, "E es metrizable si y sólo si E es Hausdorff y tiene una base numerable de 0-entornos".

Como consecuencia, si E es Hausdorff tenemos (véase 3.1.9): E es localmente convexo y metrizable si y sólo si la topología de E puede ser definida por una familia numerable de seminormas.

3.1.15. Sean E un espacio vectorial topológico, F un subespacio vectorial de E y $\pi : E \to E/F$ el morfismo de paso al cociente. La topología cociente sobre E/F (esto es, la topología final de la aplicación π), dota a E/F de estructura de espacio vectorial topológico para la cual el morfismo π es continuo y abierto. Como además E/F es Hausdorff si y sólo si F es cerrado, del teorema fundameneal de metrizabilidad se sigue que si E es metrizable y F es un subespacio cerrado de E, entonces E/F es también metrizable.

Además, si E es metrizable y completo, entonces E/F es completo para todo subespacio cerrado F de E.

Definición 3.1.16. Se denomina *par dual* a toda terna (E, F, B) formada por dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales E, F y una forma bilineal $B : E \times F \to \mathbb{K}$ con las siguientes propiedades:
(a) dado $x \in E \setminus \{0\}$ existe $y \in F$ tal que $B(x, y) \neq 0$;
(b) dado $y \in F \setminus \{0\}$ existe $x \in E$ tal que $B(x, y) \neq 0$.
Las propiedad (a) se resume diciendo que F "separa" puntos de E; análogamente para (b).

3.1.17. El par dual asociado de modo natural a un espacio vectorial E es la terna $(E, E^d, \langle -, - \rangle)$, donde E^d denota el *dual algebraico* de E (el espacio vectorial de las formas lineales sobre E), y donde dados $x \in E$, $u \in E^d$ es

$\langle x, u\rangle := u(x)$. Si (E, F, B) es un par dual, entonces tenemos definida la aplicación lineal $F \to E^d$, $y \mapsto B(-, y)$, que es inyectiva porque E separa puntos de F; de este modo se identifica F con un subespacio vectorial de E^d y B con la restricción de $\langle -, -\rangle$ al subespacio $E \times F$ de $E \times E^d$. Lo anterior justifica el nombre de "par dual".

Si F es un subespacio vectorial de E^d tal que $(E, F, \langle -, -\rangle)$ es un par dual, entonces diremos abreviadamente que "$\langle E, F\rangle$ es un par dual".

3.1.18. Un problema que se plantea de modo natural es el siguiente: dados un espacio vectorial E y un subespacio vectorial F de E^d, ¿es $\langle E, F\rangle$ un par dual?, es decir, ¿F separa puntos de E? (E siempre separa puntos de F). Veamos un caso particular muy importante. Sea E un espacio localmente convexo y sea $E' = \{u \in E^d : u \text{ continua}\}$ su *dual topológico*, que es un subespacio vectorial de E^d. Si E' separa puntos de E entonces es claro que E es Hausdorff, y del conocido teorema de Hahn-Banach se sigue que si E es Hausdorff entonces E' separa puntos de E. Resumiendo, $\langle E, E'\rangle$ es un par dual si y sólo si E es Hausdorff.

Definición 3.1.19. Dado un par dual $\langle E, F\rangle$, se define la *topología débil* sobre E asociada al par $\langle E, F\rangle$ como la topología inicial en E definida por las formas lineales de F; dicha topología se denota por $\sigma(E, F)$. Del mismo modo se define la topología débil $\sigma(F, E)$ sobre F asociada al par $\langle E, F\rangle$.

3.1.20. Sea $\langle E, F\rangle$ un par dual. Si para cada $u \in F$ consideramos la seminorma $q_u : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |u(x)|$, entonces $\sigma(E, F)$ es la topología definida por la familia $\{q_u : u \in F\}$ y por lo tanto $(E, \sigma(E, F))$ es un espacio localmente convexo Hausdorff. Además, dado $B \subseteq E$ tenemos: B es $\sigma(E, F)$-acotado si y sólo si $u(B)$ es un acotado de $\mathbb{K}$ para todo $u \in F$ (véase 3.1.11).

Definiciones 3.1.21. Sea $\langle E, F\rangle$ un par dual. Una topología τ sobre E se dice que es *compatible con el par dual* $\langle E, F\rangle$, si (E, τ) es un espacio localmente convexo tal que $(E, \tau)' = F$, en cuyo caso τ debe ser Hausdorff en virtud de lo dicho en 3.1.18. La topología débil $\sigma(E, F)$ es la menos fina topología sobre E que es compatible con el par dual $\langle E, F\rangle$. Se satisface que existe la más fina topología sobre E que es compatible con el par dual $\langle E, F\rangle$; dicha topología se denota por $\mu(E, F)$ y se denomina *topología de Mackey* sobre E asociada al par dual $\langle E, F\rangle$.

Definición 3.1.22. Sea $\langle E, F\rangle$ un par dual. Dado un subconjunto B de E se define su *polar* como el subconjunto B° de F dado por la igualdad

$$B^\circ = \{u \in F \,:\, |u(x)| \leq 1 \;\; \forall\, x \in B\}\,.$$

Del mismo modo, si C es un subconjunto de F entonces su polar es $C^\circ = \{x \in E : |u(x)| \leq 1 \ \forall\, u \in C\} \subseteq E$.

3.1.23. Sean $\langle E, F\rangle$ un par dual y $B \subseteq E$. Es claro que B° es un subconjunto absolutamente convexo de F que es $\sigma(F, E)$-cerrado, de modo que a B° sólo le falta ser absorbente para ser un $\sigma(F, E)$-tonel; además, de lo dicho en 3.1.11 se sigue que B es $\sigma(E, F)$-acotado si y sólo si B° es absorbente; como consecuencia tenemos que B° es $\sigma(F, E)$-tonel si y sólo si B es $\sigma(E, F)$-acotado. Por otra parte, el "teorema de la bipolar" afirma que $B^{\circ\circ}$ es el conjunto más pequeño absolutamente convexo y $\sigma(E, F)$-cerrado de E que contiene a B.

3.1.24. Sea $\langle E, F\rangle$ un par dual. Terminaremos esta sección dando dos importantes propiedades que se satisfacen para todo par dual, y enunciando algunas consecuencias suyas.
(a) Los conjuntos acotados son los mismos para todas las topologías sobre E compatibles con el par $\langle E, F\rangle$. En particular, si E es un espacio localmente convexo Hausdorff y E' es su dual topológico, entonces un subconjunto B de E es acotado si y sólo si $u(B)$ es acotado para todo $u \in E'$ (véase 3.1.20).
(b) Los conjuntos convexos cerrados son los mismos para todas las topologías sobre E compatibles con el par $\langle E, F\rangle$, y como consecuencia lo mismo ocurre con los toneles. En particular, si E es un espacio localmente convexo Hausdorff y consideramos el par dual $\langle E, E'\rangle$, entonces un subconjunto B de E es absolutamente convexo y cerrado si y sólo si $B = B^{\circ\circ}$ (véase 3.1.23).
(c) Todo espacio bornológico está dotado de su topología de Mackey. En efecto, si E es un espacio bornológico, entonces es Hausdorff y tenemos el par dual $\langle E, E'\rangle$ con el cual es compatible la topología de E; además, de lo dicho en (a) se sigue que todo 0-entorno absolutamente convexo para $\mu(E, E')$ es un 0-entorno en E.

3.2 Álgebras localmente m-convexas

Esta sección está dedicada a establecer algunas propiedades de las $\mathbb{R}$-álgebras localmente m-convexas que necesitaremos más adelante. Para ello seguiremos la presentación dada en [60, Cap. II], la cual se divide en los siguientes etapas: en primer lugar se dan las definiciones básicas de la teoría de álgebras topológicas; seguidamente se comprueba que el estudio de las $\mathbb{R}$-álgebras topológicas que nos interesan aquí, las racionales, es equivalente al estudio de

cierta clase bien conocida de $\mathbb{C}$-álgebras topológicas, las simétricas; a continuación se dan algunas propiedades fundamentales de las $\mathbb{C}$-álgebras de Banach y se trasladan, mediante la equivalencia mencionada, a las $\mathbb{R}$-álgebras de Banach racionales; para terminar extendemos, en lo posible, dichas propiedades a las $\mathbb{R}$-álgebras localmente m-convexas racionales.

Se debe a Gelfand, con la publicación de su importante trabajo [23], el impulso que tuvo en los años cuarenta el estudio de las álgebras de Banach. Arens [4, 5, 6] introdujo las álgebras localmente m-convexas como una generalización de las álgebras normadas, aunque fue Michael en su memoria [45] quien más aportó en la generalización para las $\mathbb{C}$-álgebras localmente m-convexas de los resultados fundamentales de las $\mathbb{C}$-álgebras de Banach.

A los tres autores mencionados se deben, esencialmente, los resultados que probaremos en esta sección.

Definición 3.2.1. Llamaremos *anillo topológico* a todo anillo A dotado de una topología que haga continuas sus operaciones:

$$A\times A \xrightarrow{+} A \text{ (suma)}\,,\quad A\times A \xrightarrow{\cdot} A \text{ (producto)}\,,\quad A^{-1} \xrightarrow{\text{inv}} A \text{ (paso al inverso)}\,.$$

Lema 3.2.2. *Si B es un anillo topológico y $\{\tau_i\}_{i\in I}$ es una familia no vacía de topologías sobre B tal que (B,τ_i) es un anillo topológico para todo $i \in I$, entonces la topología unión $\tau = \cup_{i\in I}\tau_i$ satisface que (B,τ) es un anillo topológico.*

Demostración. Si para cada $i \in I$ denotamos $B_i = (B,\tau_i)$ e $I_i : B \to B_i$ es el morfismo identidad correspondiente, entonces $\tau = \cup_{i\in I}\tau_i$ es, por definición, la topología inicial definida por las aplicaciones $\{I_i : B \to B_i\}_{i\in I}$. Por lo tanto, la demostración se sigue del hecho de que para cada $i \in I$ los cuadrados

$$\begin{array}{ccc} B\times B & \xrightarrow{I_i\times I_i} & B_i\times B_i \\ {\scriptstyle +}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle +} \\ B & \xrightarrow{I_i} & B_i \end{array}\,,\qquad \begin{array}{ccc} B\times B & \xrightarrow{I_i\times I_i} & B_i\times B_i \\ {\scriptstyle \cdot}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \cdot} \\ B & \xrightarrow{I_i} & B_i \end{array}\,,\qquad \begin{array}{ccc} B^{-1} & \xrightarrow{I_i} & B_i^{-1} \\ {\scriptstyle \text{inv}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \text{inv}} \\ B & \xrightarrow{I_i} & B_i \end{array}$$

son conmutativos. □

Corolario 3.2.3. *Si $T : A \to B$ es un morfismo de anillos y A es un anillo topológico, entonces existe sobre el anillo B la más fina topología que lo dota de estructura de anillo topológico para la cual T es continuo. Dicha topología tiene la siguiente propiedad universal: "cualesquiera que sean el*

anillo topológico C y el morfismo de anillos $\varphi : B \to C$, φ es continuo si y sólo si $\varphi \circ T$ es continuo".

Demostración. Basta aplicar el lema 3.2.2, teniendo en cuenta que la colección de todas las topologías sobre B que hacen de B un anillo topológico tal que $T : A \to B$ es continuo es no vacía (la topología trivial está en ella). □

Observación 3.2.4. Sea A un anillo topológico y sea I un ideal de A. Si $\pi : A \to A/I$ es el morfismo de paso al cociente, no sabemos si la topología final que define π sobre A/I (la topología cociente) dota a A/I de estructura de anillo topológico, pues no sabemos si para dicha topología es continuo el "paso al inverso" (con la suma y el producto no hay problemas). Por dicho motivo, cuando hablemos del "anillo topológico A/I", debe quedar claro que no nos referimos al anillo A/I dotado de su topología cociente, sino a la topología definida por π según el corolario 3.2.3.

Veremos en el teorema 3.2.14 que ambas topologías coinciden cuando A es un álgebra localmente m-convexa.

Definición 3.2.5. Una $\mathbb{K}$-*álgebra topológica* es una $\mathbb{K}$-álgebra A dotada de una topología con la cual es un anillo topológico y el morfismo estructural $\mathbb{K} \hookrightarrow A$ es continuo. Es claro que toda $\mathbb{K}$-álgebra topológica es de modo natural un $\mathbb{K}$-espacio vectorial topológico. Un *morfismo de* $\mathbb{K}$-*álgebras topológicas* es un morfismo de $\mathbb{K}$-álgebras entre $\mathbb{K}$-álgebras topológicas que es continuo. Dadas $\mathbb{K}$-álgebras topológicas A y B, con $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A, B)$ denotaremos el conjunto de todos los morfismos de $\mathbb{K}$-álgebras topológicas de A en B.

En adelante diremos "álgebra" en lugar de "$\mathbb{K}$-álgebra" cuando el cuerpo $\mathbb{K}$ esté claro por el contexto, ó cuando sea indistintamente $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Definiciones 3.2.6. Sea A un álgebra. Un subconjunto U de A se dice que es *idempotente* si $UU \subseteq U$. Diremos que un subconjunto de A es (*absolutamente*) *m-convexo* si es (absolutamente) convexo e idempotente. Llamaremos *m-seminorma* (*m-norma*) sobre A a toda seminorma (norma) $q : A \to \mathbb{R}$ que satisfaga $q(ab) \leq q(a)q(b)$ para cualesquiera $a, b \in A$.

Definición 3.2.7. Llamaremos *álgebra localmente m-convexa* a toda álgebra dotada de una topología con la que es un espacio localmente convexo en el que existe una base de 0-entornos formada por conjuntos absolutamente m-convexos.

3.2.8. Sea A un álgebra. Si $q : A \to \mathbb{R}$ es una seminorma y U es la bola unidad cerrada de q, entonces es fácil comprobar que q es m-seminorma si y sólo si

U es idempotente. Por lo tanto, una topología sobre A la dota de estructura de álgebra localmente m-convexa, si y sólo si, dicha topología puede definirse por una familia de m-seminormas (véase 3.1.9).

Teorema 3.2.9. *Toda álgebra localmente m-convexa es un álgebra topológica.*

Demostración. Sea A un álgebra localmente m-convexa, y sea Γ una familia de m-seminormas que definen su topología. De las propiedades de las m-seminormas se sigue inmediatamente que la suma, el producto y el morfismo estructural son continuos. Para ver que la aplicación $A^{-1} \to A$ de paso al inverso es continua, basta comprobar que es continua para la topología que define cada $q \in \Gamma$, comprobación que basaremos en la demostración dada en [62, Th. 1.4.8] cuando q es una m-norma.

Sea entonces $q \in \Gamma$ y sea $u \in A^{-1}$; dado $a \in A$ tal que $u + a \in A^{-1}$, existe $b \in A$ satisfaciendo que $(u + a)^{-1} = u^{-1} + b$. Veamos que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $q(a) < \delta$ entonces $q(b) < \varepsilon$. Si $q(u^{-1}) = 0$, entonces $q(1) = 0$ y por tanto $q = 0$. Supongamos que $q(u^{-1}) > 0$. Tenemos

$$1 = (u^{-1} + b)(u + a) = 1 + u^{-1}a + bu + ab\,,$$

por lo tanto $u^{-1}a + ub + ab = 0$, de donde obtenemos

$$q(b) \leq (q(u^{-1}))^2 q(a) + q(a)q(b)q(u^{-1})\,,$$

es decir,

$$q(b)\{1 - q(a)q(u^{-1})\} \leq (q(u^{-1}))^2 q(a)\,. \qquad (*)$$

Sea $0 < \varepsilon < q(u^{-1})$ y tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{2(q(u^{-1}))^2}$; si $q(a) < \delta$ entonces

$$q(a)q(u^{-1}) < \delta q(u^{-1}) = \frac{\varepsilon}{2q(u^{-1})} < 1/2\,,$$

por lo tanto $1/2 < \{1 - q(a)q(u^{-1})\}$ y de la desigualdad $(*)$ obtenemos $q(b) < 2(q(u^{-1}))^2 q(a) < 2(q(u^{-1}))\delta = \varepsilon$. □

Definiciones 3.2.10. Llamaremos *álgebra normable* a toda álgebra localmente m-convexa Hausdorff cuya topología pueda definirse con sólo una m-seminorma (que debe ser m-norma según lo dicho en 3.1.10).

Diremos que un álgebra topológica es metrizable (completa), si como espacio vectorial topológico es metrizable (completo).

Llamaremos *álgebra de Fréchet* a toda álgebra localmente m-convexa que sea metrizable y completa, y llamaremos *álgebra de Banach* a toda álgebra normable que sea completa.

Observaciones 3.2.11. (a) En la literatura sobre álgebras topológicas, es usual que un álgebra localmente m-convexa sea Hausdorff por definición.

(b) Normalmente, un "álgebra de Banach" se define como un par $(A, \| \ \|)$ donde A es un álgebra topológica completa y $\| \ \|$ es una m-norma sobre A que define su topología, de modo que la m-norma $\| \ \|$ forma parte de la estructura del álgebra de Banach. El motivo de nuestra definición es que de las álgebras de Banach sólo nos van a interesar sus propiedades topológicas.

3.2.12. Dada un álgebra localmente m-convexa Hausdorff A, su compleción $\overline{A}$ (construida considerando A como un espacio vectorial topológico) resulta ser también un álgebra localmente m-convexa tal que la inyección natural $A \to \overline{A}$ es un morfismo de álgebras; además, si A es un álgebra normable (metrizable) entonces, $\overline{A}$ es un álgebra de Banach (Fréchet) (véase [44, p. 22]).

3.2.13. Sea A un álgebra localmente m-convexa y sea Γ una familia de m-seminormas que definen su topología. En Γ tenemos el siguiente orden: dadas $q_1, q_2 \in \Gamma$, $q_1 \leq q_2$ cuando $q_1(a) \leq q_2(a)$ para todo $a \in A$. Además, si $q_1, \ldots, q_n \in \Gamma$ entonces la función $\max\{q_1, \ldots, q_n\}$ es también una m-seminorma, y es claro que la familia $\big\{ \max\{q_1, \ldots, q_n\} : q_1, \ldots, q_n \in \Gamma,\ n \in \mathbb{N}\big\}$ define sobre A la misma topología que Γ. Por lo tanto podemos suponer siempre que la familia Γ es *dirigida superiormente*, esto es, que satisface: dados $q_1, q_2 \in \Gamma$ existe $q_0 \in \Gamma$ tal que $\max\{q_1, q_2\} \leq q_0$. Cuando Γ es dirigida superiormente, una base de entornos de $a_0 \in A$ la forman los conjuntos de la forma $\{a \in A : q(a_0 - a) \leq \varepsilon\}$ con $q \in \Gamma$ y $\varepsilon > 0$.

Si el álgebra localmente m-convexa A es metrizable, entonces podemos suponer que su topología está definida por una "sucesión creciente" de m-seminormas $q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq q_n \leq \cdots$.

Teorema 3.2.14. *Si I es un ideal propio de un álgebra localmente m-convexa A, entonces el álgebra A/I dotada de su topología cociente es un álgebra localmente m-convexa (y en particular es un anillo topológico). Es claro que A/I es Hausdorff si y sólo si I es cerrado.*

Demostración. Sea $\pi : A \to A/I$ el morfismo de paso al cociente, y denotemos por τ la topología cociente de A/I. Veamos en primer lugar que la aplicación $\pi : A \to (A/I, \tau)$ es abierta: si U es un abierto de A, $\pi(U)$ es abierto de $(A/I, \tau)$ si y sólo si $\pi^{-1}(\pi(U))$ es un abierto de A (por definición de topología cociente); pero $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{a \in I}(a + U)$, por lo que terminamos si tenemos en cuenta que para cada $a \in A$ la traslación $b \in A \mapsto a + b \in A$ es un homeomorfismo.

Consideremos ahora una familia dirigida superiormente de m-seminormas Γ sobre A que definen su topología, y para cada $q \in \Gamma$ definamos $\overline{q} : A/I \to \mathbb{R}$ por la igualdad

$$\overline{q}(\pi(a)) = \inf\{q(a+c) \,:\, c \in I\} \qquad (a \in A)\,.$$

Dada $q \in \Gamma$, la función $\overline{q}$ está bien definida y satisface $\overline{q}(\pi(a)) \geq 0$, $\overline{q}(\lambda\pi(a)) = |\lambda|\overline{q}(\pi(a))$ para cualesquiera $a \in A$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Sean ahora $a, b \in A$ y $\varepsilon > 0$. Por definición de $\overline{q}$, existen $c, d \in I$ tales que $q(a+c) \leq \overline{q}(\pi(a)) + \varepsilon$, $q(b+d) \leq \overline{q}(\pi(b)) + \varepsilon$, y por lo tanto

$$\overline{q}(\pi(a) + \pi(b)) \leq q(a+b+c+d) \leq \overline{q}(\pi(a)) + \overline{q}(\pi(b)) + 2\varepsilon\,,$$

$$\overline{q}(\pi(a)\pi(b)) \leq \overline{q}(\pi(a))\overline{q}(\pi(b)) + \left[\overline{q}(\pi(a)) + \overline{q}(\pi(b))\right]\varepsilon + \varepsilon^2\,;$$

con esto se prueba que $\overline{q}$ es una m-seminorma sobre A/I.

Denotemos por $\bar{\tau}$ la topología definida por la familia $\overline{\Gamma} := \{\overline{q} : q \in \Gamma\}$ en A/I. Puesto que π es una aplicación abierta para τ y Γ es dirigida superiormente, los entornos básicos de cero para τ son de la forma $\pi(\{a \in A : q(a) < \varepsilon\})$ con $q \in \Gamma$ y $\varepsilon > 0$. Si consideramos un 0-entorno básico para $\bar{\tau}$,

$$V = \{\pi(a) \in A/I \,:\, \max\{\overline{q}_1(\pi(a)), \ldots, \overline{q}_n(\pi(a))\} < \varepsilon\}$$

con $q_1, \ldots, q_n \in \Gamma$ y $\varepsilon > 0$, basta tomar en Γ una m-seminorma q que domine a la familia $\{q_1, \ldots, q_n\}$ y obtenemos

$$\pi(\{a \in A \,:\, q(a) < \varepsilon\}) \subseteq V\,,$$

lo que prueba $\bar{\tau} \leq \tau$. Para la otra desigualdad veamos que dados $\varepsilon > 0$ y $q \in \Gamma$ se satisface

$$\{\pi(a) \in A/I \,:\, \overline{q}(\pi(a)) < \varepsilon\} \subseteq \pi(\{a \in A : q(a) < \varepsilon\})\,;$$

en efecto, si $\pi(a)$ es tal que $\overline{q}(\pi(a)) < \varepsilon$, entonces existe $c \in I$ tal que $q(a+c) < \varepsilon$, de modo que para $\overline{a} = a + c$ tenemos $\pi(\overline{a}) = \pi(a)$ y $q(\overline{a}) < \varepsilon$. □

Corolario 3.2.15. *Sea I un ideal cerrado propio de un álgebra localmente m-convexa A. Si A es metrizable (normable, Fréchet, Banach), entonces A/I también es metrizable (normable, Fréchet, Banach).*

Demostración. Con la notación de la última demostración, si A es metrizable (normable) entonces A/I es metrizable (normable) porque las familias Γ y $\overline{\Gamma}$ tienen el mismo cardinal; para concluir la demostración basta tener en cuenta que, según 3.1.15, si A es metrizable y completa entonces A/I es completa. □

Definiciones 3.2.16. Sea A un álgebra topológica. Cada elemento $a \in A$ define una función $a : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $\omega \mapsto a(\omega) := \omega(a)$. Llamaremos *espectro topológico* de A al conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A, \mathbb{K})$ dotado de la topología inicial definida por dichas funciones, la cual se conoce como *topología de Gelfand*. De la definición se sigue que dicho espacio topológico, que denotaremos por $\mathrm{Spec}_t\, A$, es completamente regular Hausdorff; nótese que puede ser $\mathrm{Spec}_t\, A = \varnothing$ (pónganse $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $A = \mathbb{C}$). El morfismo natural de $\mathbb{K}$-álgebras $A \to \mathcal{C}(\mathrm{Spec}_t\, A)$ se conoce como *representación espectral* de A. Diremos que A es *semisimple* cuando su representación espectral sea inyectiva, en cuyo caso, razonando como en 1.2.26 tenemos que debe ser $\mathrm{Spec}_t\, A \neq \varnothing$. Dado $a \in A$, llamaremos *ceros* de a al conjunto $(a)_0 := \{\omega \in \mathrm{Spec}_t\, A : a(\omega) = 0\}$, que es un cerrado de $\mathrm{Spec}_t\, A$, y dado un ideal I de A, los ceros de I es el conjunto $(I)_0 := \cap_{a \in I} (a)_0 = \{\omega \in \mathrm{Spec}_t\, A : a(\omega) = 0 \text{ para todo } a \in I\}$.

Veamos que $\mathrm{Spec}_t\, A$ se identifica de modo natural con los ideales maximales cerrados de A cuyo cuerpo residual es $\mathbb{K}$. Por una parte, cada $\omega \in \mathrm{Spec}_t\, A$ es el morfismo de paso al cociente por el ideal maximal $\ker \omega$, que es cerrado por ser ω continua. Por otra parte, si M es un ideal maximal cerrado de A tal que $A/M = \mathbb{K}$, entonces A/M es Hausdorff y por tanto $A/M = \mathbb{K}$ topológicamente (un conocido teorema de Riesz afirma que la única topología que dota a $\mathbb{K}$ de estructura de espacio vectorial topológico Hausdorff es la usual); por lo tanto el morfismo de paso al cociente $A \to A/M$ es continuo.

Supongamos que $\mathrm{Spec}_t\, A \neq \varnothing$. Según el párrafo anterior, podemos definir el *radical* de A como la intersección de todos los ideales maximales cerrados de A de cuerpo residual $\mathbb{K}$, resultando que el núcleo de la representación espectral es justamente $\mathrm{rad}\, A$, es decir, A es semisimple si y sólo si $\mathrm{rad}\, A = 0$.

Puesto que $\mathrm{Spec}_t\, A$ es una parte del espectro maximal de A, sobre $\mathrm{Spec}_t\, A$ podemos considerar la topología inducida por la topología de Zariski de $\mathrm{Spec}_m\, A$ (véase 2.3.12). Dicha topología será siempre menos fina que la topología de Gelfand porque sus cerrados son los conjuntos de la forma $\mathrm{Spec}_t\, A \cap [I]_0 = (I)_0$ con I un ideal de A. Diremos que A es *regular* si sobre $\mathrm{Spec}_t\, A$ coinciden las topologías de Gelfand y de Zariski. Trivialmente, si $\mathrm{Spec}_t\, A = \varnothing$ entonces A es regular.

Definición 3.2.17. Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra y consideremos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $A_{\mathbb{C}} := A \times A$. Podemos dotar de modo natural a $A_{\mathbb{C}}$ de estructura de $\mathbb{C}$-álgebra, con el morfismo estructural $\mathbb{C} \to A_{\mathbb{C}}$, $\alpha + \beta\,\mathrm{i} \mapsto (\alpha, \beta)$, y con el siguiente producto: dados $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in A \times A$,

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) := (a_1 b_1 - a_2 b_2\,,\, a_1 b_2 + a_2 b_1)\,.$$

Es claro que $A_{\mathbb{C}}$ es una $\mathbb{R}$-álgebra que está dotada de un morfismo natural de $\mathbb{R}$-álgebras $A \to A_{\mathbb{C}}$, $a \mapsto (a, 0)$, que es inyectivo. Llamaremos a $A_{\mathbb{C}}$ la *complejificación* de A.

Teorema 3.2.18. (Propiedad universal de la complejificación)
Dadas una $\mathbb{R}$-álgebra A y una $\mathbb{C}$-álgebra B, todo morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $T : A \to B$ factoriza de modo único a través de $A \to A_{\mathbb{C}}$ por un morfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $\hat{T} : A_{\mathbb{C}} \to B$.

Demostración. La aplicación $\hat{T} : A_{\mathbb{C}} \to B$, $\hat{T}(a_1, a_2) = T(a_1) + \mathrm{i}\, T(a_2)$ es el único morfismo de $\mathbb{C}$-álgebras buscado. $\square$

Definición 3.2.19. Llamaremos $*$-*álgebra* (*estrella álgebra*) a toda $\mathbb{C}$-álgebra B dotada de un morfismo involutivo de anillos $B \xrightarrow{*} B$, $b \mapsto b^*$, que satisface $\lambda^* = \overline{\lambda}$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

La complejificación $A_{\mathbb{C}}$ de una $\mathbb{R}$-álgebra A es de modo natural una $*$-álgebra con la involución $(a_1, a_2)^* = (a_1, -a_2)$.

Definiciones 3.2.20. Llamaremos *álgebra racional* a toda $\mathbb{R}$-álgebra A que carezca de puntos complejos no reales en $\operatorname{Spec}_m A$, esto es, que satisfaga: si $\omega : A \to \mathbb{C}$ es un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras entonces $\operatorname{Im} \omega = \mathbb{R}$.

Llamaremos *álgebra simétrica* a toda $*$-álgebra B tal que $\varphi(b^*) = \overline{\varphi(b)}$ para todo morfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $\varphi : B \to \mathbb{C}$ y todo $b \in B$.

Proposición 3.2.21. *Una $\mathbb{R}$-álgebra A es racional si y sólo si la $\mathbb{C}$-álgebra $A_{\mathbb{C}}$ es simétrica.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que A es racional y sea $\varphi : A_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ un morfismo de $\mathbb{C}$-álgebras. De acuerdo con el teorema 3.2.18, si $\omega : A \to \mathbb{C}$ es la composición $A \to A_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}$, entonces $\varphi = \hat{\omega}$, esto es, $\varphi(a_1, a_2) = \omega(a_1) + \mathrm{i}\,\omega(a_2)$; por hipótesis debe ser $\operatorname{Im} \omega = \mathbb{R}$, de modo que $\omega(a_1) - \mathrm{i}\,\omega(a_2) = \overline{\omega(a_1) + \mathrm{i}\,\omega(a_2)}$, es decir, $\varphi((a_1, a_2)^*) = \overline{\varphi(a_1, a_2)}$.

Recíprocamente, supongamos que $A_{\mathbb{C}}$ es simétrica y sea $\omega : A \to \mathbb{C}$ un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras. Dado $a \in A$ tenemos $(a, 0)^* = (a, 0)$, de modo que $\omega(a) = \hat{\omega}(a, 0) = \hat{\omega}((a, 0)^*) = \overline{\omega(a)}$ y por tanto $\omega(a) \in \mathbb{R}$. $\square$

Ejemplo 3.2.22. Toda $\mathbb{R}$-álgebra estrictamente real es racional (véase 2.3.1). En efecto, supongamos que A es una $\mathbb{R}$-álgebra estrictamente real y sea $\omega : A \to \mathbb{C}$ un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras. Como $\operatorname{Im} \omega$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}$ que contiene a $\mathbb{R}$, debe ser $\operatorname{Im} \omega = \mathbb{R}$ ó $\operatorname{Im} \omega = \mathbb{C}$. Si ocurriera lo segundo

existiría $a \in A$ tal que $\omega(a) = \mathrm{i}$, esto es, $\omega(1 + a^2) = 0$, lo cual contradice el que $1 + a^2$ sea un elemento invertible de A; por lo tanto debe ser $\operatorname{Im} \omega = \mathbb{R}$.

Como consecuencia de lo anterior se sigue que las álgebras usuales de funciones reales (continuas, continuas y acotadas, diferenciables) son racionales.

Definiciones 3.2.23. Llamaremos *álgebra topológica racional* a toda $\mathbb{R}$-álgebra topológica que sea un álgebra racional. Llamaremos *álgebra topológica simétrica* a toda $\mathbb{C}$-álgebra topológica que sea un álgebra simétrica cuya involución es continua.

Teorema 3.2.24. *Para cada $\mathbb{R}$-álgebra topológica A tenemos que $A_{\mathbb{C}} = A \times A$ dotada de su topología producto es una $\mathbb{C}$-álgebra topológica cuya involución es continua. Es claro que el morfismo canónico de $\mathbb{R}$-álgebras $A \to A_{\mathbb{C}}$ es continuo e induce en A su topología. Además tenemos:*

(i) *A es un álgebra topológica racional si y sólo si $A_{\mathbb{C}}$ es un álgebra topológica simétrica;*

(ii) *A es Hausdorff si y sólo si $A_{\mathbb{C}}$ es Hausdorff;*

(iii) *A es completa si y sólo si $A_{\mathbb{C}}$ es completa.*

Demostración. Es fácil ver que la suma y el producto de $A_{\mathbb{C}}$ y el morfismo estructural $\mathbb{C} \to A_{\mathbb{C}}$ son continuos. Como la involución de $A_{\mathbb{C}}$ es un morfismo de anillos, es claro que un elemento $(a_1, a_2) \in A_{\mathbb{C}}$ es invertible si y sólo si $a_1^2 + a_2^2$ es invertible en A, en cuyo caso $(a_1, a_2)^{-1} = (a_1^2 + a_2^2)^{-1}(a_1, a_2)^*$; por lo tanto el paso al inverso en $A_{\mathbb{C}}$ es continuo porque la involución $A_{\mathbb{C}} \xrightarrow{*} A_{\mathbb{C}}$ es, trivialmente, continua. La afirmación (i) se sigue de la proposición 3.2.21. Por último, dados espacios vectoriales topológicos E y F, es conocido que el espacio producto $E \times F$ es Hausdorff (completo) si y sólo si E y F son Hausdorff (completos), de modo que se satisfacen (ii) y (iii). $\square$

Teorema 3.2.25. *Si A es un álgebra topológica racional, entonces el espectro topológico de A es canónicamente homeomorfo al espectro topológico de $A_{\mathbb{C}}$. Como consecuencia tenemos:*

(i) *A es regular si y sólo si $A_{\mathbb{C}}$ es regular;*

(ii) *A es semisimple si y sólo si $A_{\mathbb{C}}$ es semisimple.*

Demostración. Por una parte, cada morfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $\varphi : A_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ compuesto con el morfismo canónico $A \xrightarrow{i} A_{\mathbb{C}}$ nos da un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $A \xrightarrow{\varphi \circ i} \mathbb{C}$ que valora en $\mathbb{R}$ por ser A racional; por otra parte, cada morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $\omega : A \to \mathbb{R}$ define el morfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $\hat{\omega}$:

$A_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, $(a_1, a_2) \mapsto \omega(a_1) + \mathrm{i}\,\omega(a_2)$. Del teorema 3.2.18 se sigue que dicha correspondencia es biunívoca. Como además es claro que ω es continua si y sólo si $\hat{\omega}$ es continua, concluimos que la aplicación $\operatorname{Spec}_t A \to \operatorname{Spec}_t A_{\mathbb{C}}$, $\omega \mapsto \hat{\omega}$, es biyectiva. Para concluir que esta biyección es un homeomorfismo basta tener en cuenta que las funciones complejas $\{a + \mathrm{i}\, b : a, b \in A\}$ definen sobre $\operatorname{Spec}_t A$ la misma topología inicial que la funciones de A.

El que A sea regular significa que una base de cerrados en $\operatorname{Spec}_t A$ es la colección $\{(a)_0 : a \in A\}$, por lo que (i) se sigue de la igualdad $((a_1, a_2))_0 = (a_1)_0 \cap (a_2)_0$. Para ver (ii) basta tener en cuenta que el que A sea semisimple significa que para cada $a \in A$, $a \neq 0$, existe $\omega \in \operatorname{Spec}_t A$ tal que $\omega(a) \neq 0$. □

Lema 3.2.26. *Sea B una $\mathbb{C}$-álgebra y sea $q : B \to \mathbb{R}$ una m-seminorma real, es decir, tal que dados $b \in B$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se satisface $q(\lambda b) = |\lambda| q(b)$. La función*

$$p(b) = \sup\{q(\lambda b) \,:\, \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| = 1\} \qquad (b \in B)$$

es una m-seminorma compleja que define sobre B la misma topología que q.

Demostración. Veamos que qp está bien definida. Si para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, se satisface $q(\lambda) = 0$, entonces $q = 0$ (por ser λ invertible) y no hay nada que probar. Supongamos entonces que $q \neq 0$, con lo que q define una m-norma real sobre $\mathbb{C}$ que la dota de estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial topológico Hausdorff, y por tanto q define sobre $\mathbb{C}$ su topología usual. Ahora, fijado $b \in B$, la aplicación $\lambda \in \mathbb{C} \mapsto q(\lambda b) \in \mathbb{R}$, es continua porque $q(\lambda b) \leq q(\lambda) q(b)$, y por lo tanto está acotada sobre el compacto $\{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, |\lambda| = 1\}$.

Es claro que cualesquiera que sean $b, b' \in B$ se satisfacen $p(b + b') \leq p(b) + p(b')$ y $p(bb') \leq p(b)p(b')$; además, si $b \in B$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, y tomamos $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ con $|\lambda_0| = 1$ y $\alpha = |\alpha|\lambda_0$, entonces

$$p(\alpha b) \;=\; \sup\{q(\lambda\alpha b) \,:\, |\lambda| = 1\} \;= \sup\{|\alpha| q(\lambda_0 \lambda b) \,:\, |\lambda| = 1\} \;=\; |\alpha| p(b)\,,$$

con lo que queda probado que p es una m-seminorma compleja. Ahora, por una parte $p \geq q$, y por otra parte tenemos $p \leq p(1)q$. Por lo tanto p y q definen la misma topología . □

Teorema 3.2.27. *Una $\mathbb{R}$-álgebra topológica A es localmente m-convexa si y sólo si la $\mathbb{C}$-álgebra topológica $A_{\mathbb{C}}$ es localmente m-convexa.*

Demostración. Si $A_{\mathbb{C}}$ es localmente m-convexa, entonces es claro que A con la topología inducida por la de $A_{\mathbb{C}}$ es también localmente m-convexa. Supongamos ahora que Γ es una familia de m-seminormas sobre A que definen su

topología. Para cada $q \in \Gamma$ definimos la función $q^+ : A_{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$ por la igualdad

$$q^+(a_1, a_2) = q(a_1) + q(a_2) \qquad \big((a_1, a_2) \in A_{\mathbb{C}}\big).$$

Es fácil ver que la familia $\{q^+ : q \in \Gamma\}$ está formada por m-seminormas reales que definen la topología producto de $A_{\mathbb{C}} = A \times A$, por lo que aplicando el lema 3.2.26 obtenemos que $A_{\mathbb{C}}$ es localmente m-convexa. □

Del anterior teorema (y su demostración) y de los apartados (ii) y (iii) del teorema 3.2.24 obtenemos:

Corolario 3.2.28. *Una $\mathbb{R}$-álgebra localmente m-convexa A es metrizable (Fréchet, normable, Banach) si y sólo si la $\mathbb{C}$-álgebra localmente m-convexa $A_{\mathbb{C}}$ es metrizable (Fréchet, normable, Banach).*

De los siguientes resultados relativos a las álgebras de Banach no probaremos el conocido teorema de Gelfand-Mazur (Teorema 3.2.31), ya que su demostración (que puede verse en [24]) hace uso de herramientas que se salen del ámbito de esta memoria.

Lema 3.2.29. *Los elementos invertibles de un álgebra de Banach forman un abierto. Como consecuencia, todos los ideales maximales de un álgebra de Banach son cerrados.*

Demostración. Sea A un álgebra de Banach y sea $\| \ \|$ una m-norma sobre A que define su topología. Si definimos $U = \{a \in A : \|1 - a\| < 1\}$, entonces es claro que U es un entorno de 1 contenido en A^{-1}, ya que para cada $a \in U$ la serie $1 + (1 - a) + (1 - a)^2 + \cdots$ converge a a^{-1}. Ahora, dado $b \in A^{-1}$ tenemos $bb^{-1} = 1$, y de la continuidad del producto se sigue que existe un entorno V de b tal que $b^{-1}V \subseteq U$. Bastará probar que $V \subseteq A^{-1}$. Si $c \in V$, entonces $cb^{-1} \in U$ y por lo tanto cb^{-1} es invertible, de lo que se sigue que c es invertible.

Para obtener la consecuencia basta observar que la clausura de un ideal de un álgebra topológica es también un ideal. □

Corolario 3.2.30. *Sea A un álgebra normable y sea $\| \ \|$ una m-norma sobre A que define su topología. Para cualesquiera $a \in A$ y $\omega \in \operatorname{Spec}_t A$ tenemos $|\omega(a)| \leq \|a\|$. Como consecuencia se siguen:*

(i) *el espectro topológico de A es canónicamente homeomorfo al de su compleción;*

(ii) *si A es regular entonces también lo es su compleción.*

Demostración. Puesto que la norma de la compleción de A extiende a la norma de A, y dado que todo morfismo continuo de $\mathbb{K}$-álgebras $\omega : A \to \mathbb{K}$ se extiende de modo único a la compleción, es claro que para probar la primera parte del enunciado podemos suponer que A es un álgebra de Banach. Sean $a \in A$ y $\omega \in \operatorname{Spec}_t A$; si fuera $|\omega(a)| > \|a\| \geq 0$ entonces

$$\left\| 1 - \left(1 - \frac{a}{\omega(a)} \right) \right\| = \left\| \frac{a}{\omega(a)} \right\| < 1 \,,$$

y según se probó en el lema anterior tendríamos que $1 - \frac{a}{\omega(a)}$ es invertible; en particular será

$$0 \neq \omega \left(1 - \frac{a}{\omega(a)} \right) = 1 - \frac{\omega(a)}{\omega(a)} = 0 \,,$$

lo cual es absurdo; por lo tanto debe ser $|\omega(a)| \leq \|a\|$.

Denotemos ahora por $\overline{A}$ la compleción de A. La inclusión $i : A \hookrightarrow \overline{A}$ induce una aplicación continua $\operatorname{Spec}_t \overline{A} \to \operatorname{Spec}_t A$, $\omega \mapsto \omega \circ i = \omega_{|A}$, que es biyectiva. Veamos que es abierta, esto es, dado $a \in \overline{A}$ y el abierto $U = \{\omega \in \operatorname{Spec}_t \overline{A} : a(\omega) > 0\}$ de $\operatorname{Spec}_t \overline{A}$, veamos que $U = i(U)$ también es abierto de $\operatorname{Spec}_t A$. Sean $\omega_0 \in U$ y $\alpha = \omega_0(a)$; consideremos $a' \in A$ tal que $\|a - a'\| < \frac{\alpha}{4}$ y veamos que el entorno abierto $V = \left\{\omega \in \operatorname{Spec}_t A : |a'(\omega) - \alpha| < \frac{\alpha}{4}\right\}$ de ω_0 en $\operatorname{Spec}_t A$ satisface $V \subseteq U$: si $\omega \in V$ entonces

$$|\omega(a) - \alpha| \leq |\omega(a - a')| + |\omega(a') - \alpha| \leq \|a - a'\| + \frac{\alpha}{4} \leq \frac{\alpha}{2} \,,$$

por lo que debe ser $\omega(a) > 0$, esto es, $\omega \in U$.

Por último, si A es regular una base de la topología de $\operatorname{Spec}_t A$ es $\{\omega \in \operatorname{Spec}_t A : a(\omega) \neq 0\}_{a \in A}$, de modo que una base de la topología de $\operatorname{Spec}_t \overline{A}$ es $\{\omega \in \operatorname{Spec}_t \overline{A} : a(\omega) \neq 0\}_{a \in A}$ y por lo tanto $\overline{A}$ también es regular. □

Teorema 3.2.31 (Gelfand-Mazur)**.** *Si A es una $\mathbb{C}$-álgebra de Banach que es cuerpo, entonces A es isomorfa (y por tanto homeomorfa) a $\mathbb{C}$.*

Corolario 3.2.32. *Todo ideal maximal de una $\mathbb{C}$-álgebra de Banach tiene a $\mathbb{C}$ por cuerpo residual. Como consecuencia, el espectro topológico de toda $\mathbb{C}$-álgebra de Banach es no vacío.*

Demostración. Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Banach y sea M un ideal maximal de A. Como M es cerrado en virtud de 3.2.29, del corolario 3.2.15 se sigue que A/M es una $\mathbb{C}$-álgebra de Banach que es cuerpo, y aplicando el teorema de Gelfand-Mazur obtenemos $A/M = \mathbb{C}$.

Ahora, utilizando el argumento clásico que hace uso del lema de Zörn obtenemos que en $A_{\mathbb{C}}$ hay ideales maximales, de modo que de la primera parte se sigue que el espacio topológico $\operatorname{Spec}_t A$ es no vacío. □

Teorema 3.2.33 (Gelfand-Mazur versión real)**.** *Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra de Banach que es cuerpo. Tenemos:*
(i) *si A es racional entonces es isomorfa (y homeomorfa) a $\mathbb{R}$;*
(ii) *si A no es racional entonces es isomorfa (y homeomorfa) a $\mathbb{C}$.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que A es racional, en cuyo caso $\operatorname{Spec}_t A = \operatorname{Spec}_t A_{\mathbb{C}}$ (véase el teorema 3.2.25). Como, según 3.2.28, $A_{\mathbb{C}}$ es una $\mathbb{C}$-álgebra de Banach, del corolario 3.2.32 se sigue que $\operatorname{Spec}_t A$ es no vacío. Para concluir la demostración basta tener en cuenta que el único ideal maximal de A es el ideal trivial 0.

Supongamos ahora que A no es racional. La demostración de este caso es algebraica. Por hipótesis existe un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $\omega : A \to \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Im}\omega = \mathbb{C}$, de modo que basta tener en cuenta que ω es inyectivo porque A es cuerpo, para concluir que ω es un isomorfismo. □

Corolario 3.2.34. *Todo ideal maximal de un álgebra de Banach racional es real. Como consecuencia, el espectro topológico de toda álgebra de Banach racional es no vacío.*

Demostración. Análoga a la de 3.2.32, utilizando ahora la versión real del teorema de Gelfand-Mazur. □

A continuación extendemos a las álgebras localmente m-convexas racionales los resultados que acabamos de ver para las álgebras de Banach racionales. Dichas extensiones (en el caso complejo) se deben a Arens [6] y a Michael [45], quienes las dieren en un contexto más general. Nosotros sólo consideramos el caso conmutativo y unitario, y daremos las demostraciones que aparecen en [52]. En el teorema 3.2.36 enunciamos el conocido como "principio de invertibilidad" de Arens (véase [6, Th. 7.1]), el cual no probaremos; una demostración de este resultado puede verse en [9, p. 199] ó en [52].

3.2.35. Sean A un álgebra localmente m-convexa y Γ una familia de m-seminormas que definen su topología. Dada $q \in \Gamma$, si $N_q = \{a \in A : q(a) = 0\}$ es el *ideal de nulidades* de q, entonces sobre A/N_q está definida la m-norma $\|\pi_q(a)\|_q := q(a)$, donde $\pi_q : A \to A/N_q$ es el morfismo de paso al cociente (podemos suponer $q \neq 0$ para que el ideal N_q sea propio y A/N_q sea un

álgebra). Si denotamos $A_q = (A/N_q, \| \|_q)$, la topología de A es justamente la topología inicial definida por la familia de morfismos de álgebras $\{\pi_q : A \to A_q\}_{q\in\Gamma}$. Dado un ideal I de A, para cada $q \in \Gamma$ tenemos que $I_q = \pi_q(I)$ es un ideal en A_q porque π_q epiyectiva, y si J es otro ideal en A, de lo dicho se sigue que I es denso en J si y sólo si I_q es denso en J_q para todo $q \in \Gamma$; en particular, I es cerrado en A si y sólo si I_q es cerrado en A_q para todo $q \in \Gamma$.

Teorema 3.2.36. *Sea A un álgebra localmente m-convexa Hausdorff y completa, y sea Γ una familia dirigida superiormente de m-seminormas que definen la topología de A. Con la notación de* 3.2.35*, si para cada $q \in \Gamma$ denotamos por $\overline{A}_q$ la compleción de A_q, entonces un elemento $a \in A$ es invertible, si y sólo si, para cada $q \in \Gamma$ es invertible el elemento $a_q := \pi_q(a) \in \overline{A}_q$.*

Corolario 3.2.37. *Si A es un álgebra localmente m-convexa Hausdorff y completa, entonces en A no hay ideales principales que sean propios y densos.*

Demostración. Supongamos que existe $a \in A$ tal que el ideal principal $a \cdot A$ es denso, y veamos que entonces $a \cdot A = A$. Sea Γ una familia dirigida superiormente de m-seminormas que definen la topología de A y utilicemos la notación del teorema 3.2.36. Para toda $q \in \Gamma$ tenemos que $a_q \cdot \overline{A}_q$ es un ideal denso en $\overline{A}_q$ porque $a_q \cdot A_q$ es denso en A_q ; como según el lema 3.2.29 en $\overline{A}_q$ no hay ideales propios y densos, concluimos que debe ser $a_q \cdot \overline{A}_q = \overline{A}_q$, es decir, a_q es invertible en $\overline{A}_q$. Aplicando el pricipio de invertibilidad de Arens obtenemos que a es invertible en A. □

Teorema 3.2.38. *Sea A un álgebra localmente m-convexa Hausdorff racional. Se satisfacen:*
(i) *todo ideal no denso de A está contenido en algún ideal maximal cerrado;*
(ii) *todo ideal maximal cerrado de A tiene a $\mathbb{R}$ por cuerpo residual;*
(iii) *el espacio topológico* $\operatorname{Spec}_t A$ *es no vacío.*

Demostración. Cuando A es de Banach la demostración es consecuencia del lema 3.2.29 y del corolario 3.2.34.

Supongamos ahora que A es normable y sea $\overline{A}$ su compleción, que también es racional. En efecto, dado un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $\omega : \overline{A} \to \mathbb{C}$, ω es continuo porque su núcleo es cerrado en virtud del lema 3.2.29, y como $\omega(A) = \mathbb{R}$ y A es denso en $\overline{A}$, concluimos que $\omega(\overline{A}) = \mathbb{R}$. Sea ahora I un ideal no denso de A (como por ejemplo un ideal maximal cerrado), y denotemos por $\overline{I}$ la clausura de I en $\overline{A}$. Dado $a \in A$, por la continuidad del producto tenemos $a \cdot \overline{I} \subseteq \overline{I}$; como consecuencia, si $b \in \overline{I}$ entonces $b \cdot A \subseteq \overline{I}$, y por lo tanto $b \cdot \overline{A} \subseteq \overline{I}$.

Lo anterior prueba que $\overline{I}$ es un ideal de $\overline{A}$. Además tenemos que la clausura de I en A es $\overline{I} \cap A$, de modo que $\overline{I}$ es un ideal propio de $\overline{A}$. Aplicando el teorema a $\overline{A}$ tenemos que existe un ideal maximal en $\overline{A}$ (que debe ser cerrado) de cuerpo residual $\mathbb{R}$ y que contiene a $\overline{I}$, esto es, existe un morfismo de álgebras topológicas $\omega : \overline{A} \to \mathbb{R}$ que se anula sobre $\overline{I}$. Es claro que $\ker(\omega_{|A})$ es un ideal maximal cerrado de A de cuerpo residual $\mathbb{R}$ que contiene a I. Esto demuestra las partes (i) y (ii) del teorema en el caso normable.

Veamos el caso general. Sea Γ una familia de m-seminormas que definen la topología de A y sea I un ideal no denso de A. Con la notación de 3.2.35, existe una m-seminorma $q \in \Gamma$ tal que I_q es un ideal no denso del álgebra normable A_q. Es inmediato comprobar que el cociente por un ideal de un álgebra racional es también racional, por lo que podemos aplicar el caso anterior a A_q y obtenemos que existe un ideal maximal cerrado en A_q de cuerpo residual $\mathbb{R}$ que contiene a I_q, esto es, existe un morfismo de álgebras topológicas $\omega : A_q \to \mathbb{R}$ que se anula sobre I_q. Es claro que $\ker(\omega \circ \pi_q)$ es un ideal maximal cerrado de A de cuerpo residual $\mathbb{R}$ que contiene a I. Esto demuestra completamente las partes (i) y (ii) del teorema.

Para probar (iii) basta tener en cuenta que en A hay ideales no densos (el ideal 0 es cerrado por ser A Hausdorff), de modo que de (i) y (ii) se sigue que en A existen ideales maximales cerrados de cuerpo residual $\mathbb{R}$. □

Corolario 3.2.39. *Sea A un álgebra localmente m-convexa Hausdorff racional. Si A es completa se dan las siguientes propiedades:*

(i) *un elemento $a \in A$ es invertible si y sólo si $\omega(a) \neq 0$ para todo $\omega \in \operatorname{Spec}_t A$;*

(ii) *el núcleo de la representación espectral de A es su radical de Jacobson, esto es,* $\operatorname{rad} A = \operatorname{rad}_J A$.

Demostración. (i) Sea $a \in A$. Si a es invertible entonces es obvio que $\omega(a) \neq 0$ para todo $\omega \in \operatorname{Spec}_t A$. Recíprocamente, si $\omega(a) \neq 0$ para todo $\omega \in \operatorname{Spec}_t A$, esto es, si a no está contenido en ningún ideal maximal cerrado, entonces $a \cdot A$ es denso en virtud de 3.2.38 (i), y del corolario 3.2.37 se sigue que $a \cdot A = A$, es decir a es invertible.

(ii) Es claro que $\operatorname{rad}_J A \subseteq \operatorname{rad} A$. Supongamos que existe un ideal maximal M_0 en A tal que $\operatorname{rad} A$ no está contenido en M_0; entonces existen $a \in \operatorname{rad} A$ y $b \in M_0$ tales que $1 = a + b$. De acuerdo con (i), existe un ideal maximal cerrado M en A tal que $b \in M$, y como $a \in M$ se sigue que $1 \in M$, lo cual es una contradicción. □

Corolario 3.2.40. *Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra localmente m-convexa Hausdorff y completa. Son equivalentes:*
(i) *A es estrictamente real;*
(ii) *A es racional.*

Demostración. Siempre es cierto que (i) implica (ii) (véase el ejemplo 3.2.22). Recíprocamente, si A es racional y $a \in A$, entonces basta aplicar de (i) del corolario anterior para obtener que $1 + a^2$ es invertible. □

Vamos a terminar esta sección viendo que para toda álgebra normable racional A, el espacio topológico $\operatorname{Spec}_t A$ es compacto y la representación espectral $A \to \mathcal{C}(\operatorname{Spec}_t A)$ es continua si se considera $\mathcal{C}(\operatorname{Spec}_t A)$ dotada de su topología de la convergencia compacta. Por simplificar lo probamos en el caso regular, que es el que necesitaremos más adelante. Una demostración del caso general (en su versión compleja) puede verse en [24, §4 y §5].

Teorema 3.2.41. *Si A es un álgebra normable racional y regular, entonces el espacio topológico $\operatorname{Spec}_t A$ es compacto y la representación espectral $A \to \mathcal{C}_k(\operatorname{Spec}_t A)$ es continua.*

Demostración. Según hemos visto en la demostración del teorema 3.2.38, la compleción de A también es racional, por lo tanto, de (i) y (ii) del corolario 3.2.30 se sigue que es suficiente demostrar el teorema cuando A es un álgebra de Banach.

Supongamos entonces que A es un álgebra de Banach. En virtud de 3.2.29 y 3.2.38 (ii) tenemos que todo ideal maximal de A es real y cerrado, de modo que por ser A regular tenemos la igualdad topológica $\operatorname{Spec}_t A = \operatorname{Spec}_m A$, y por lo tanto el espectro topológico de A es compacto. La continuidad de la representación espectral de A es una consecuencia inmediata de la desigualdad probada en el corolario 3.2.30. □

3.3 El álgebra localmente m-convexa $\mathcal{C}_k(X)$

La última sección de este capítulo la dedicaremos al estudio del álgebra topológica $\mathcal{C}_k(X)$, que será nuestro ejemplo de referencia a lo largo de toda la memoria. Nos centraremos aquí en las relaciones que hay entre las propiedades topológicas de X y las de $\mathcal{C}_k(X)$.

3.3.1. Sea X un espacio topológico y consideremos el álgebra $\mathcal{C}(X)$ de todas las funciones reales y continuas definidas sobre X. Para cada subconjunto compacto K de X denotaremos por q_K la m-seminorma definida por la igualdad $q_K(f) = \max\{|f(x)| : x \in K\}$ $(f \in \mathcal{C}(X))$; la familia $\{q_K : K$ compacto en $X\}$ define sobre $\mathcal{C}(X)$ la denominada *topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos compactos de* X (abreviadamente, *topología de la convergencia compacta*); dicha topología la denotaremos por τ_k y escribiremos $\mathcal{C}_k(X) = (\mathcal{C}(X), \tau_k)$.

Cuando X es compacto Hausdorff, q_X es la norma del supremo en $\mathcal{C}(X)$, que generalmente denotaremos $\| \ \|_\infty$; es claro que en este caso la topología de $\mathcal{C}_k(X)$ está definida por esa norma, y es bien conocido que dicha topología es completa; por lo tanto $\mathcal{C}_k(X)$ es un álgebra de Banach.

Es inmediato comprobar que la topología de la convergencia compacta es funtorial en el siguiente sentido: si $X \xrightarrow{h} Y$ es una aplicación continua entre espacios topológicos, entonces el morfismo de álgebras $\mathcal{C}_k(Y) \xrightarrow{\circ h} \mathcal{C}_k(X)$ es continuo.

3.3.2. Sea X un espacio topológico Hausdorff. Para cada subconjunto Y de X tenemos el morfismo de restricción $\mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$, $f \mapsto f_{|Y}$, que es un morfismo de álgebras cuyo núcleo es el ideal $I_Y = \{f \in \mathcal{C}(X) : f(Y) = 0\}$. El bien conocido teorema de extensión de Tietze afirma que si X es normal e Y es cerrado entonces dicho morfismo es epiyectivo, en cuyo caso $\mathcal{C}(Y) = \mathcal{C}(X)/I_Y$, siendo el morfismo de restricción justamente el morfismo de paso al cociente $\mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(X)/I_Y$.

Una generalización del teorema de extensión de Tietze afirma que si X es completamente regular e Y es compacto, entonces $\mathcal{C}(Y) = \mathcal{C}(X)/I_Y$; además, dada $g \in \mathcal{C}(Y)$, su extensión $f \in \mathcal{C}(X)$ puede tomarse de modo que se satisfaga $\sup\{|f(x)| : x \in X\} = \sup\{|g(y)| : y \in Y\}$. En efecto, como todo compacto de un espacio topológico Hausdorff es cerrado, tenemos que Y es un cerrado de βX y por lo tanto existe $h \in \mathcal{C}(\beta X)$ tal que $h_{|Y} = g$; si $\alpha = \max\{|g(y)| : y \in Y\}$ y $\bar{h} = -\alpha \vee h \wedge \alpha$, entonces $f = \bar{h}_{|X} \in \mathcal{C}(X)$.

3.3.3. Sea K un subconjunto compacto de un espacio topológico completamente regular Hausdorff X. Sobre $\mathcal{C}(K) = \mathcal{C}(X)/I_K$ tenemos tres topologías: la de la convergencia compacta τ_k, la cociente (considerando sobre $\mathcal{C}(X)$ la topología de la convergencia compacta) que denotaremos por τ_c, y la de álgebra normada descrita en 3.2.35: $I_K = N_{q_K}$, $(\mathcal{C}(X)/I_K, \| \ \|_{q_K})$; denotemos esta última por τ_{q_K}. Veamos que $\tau_k = \tau_c = \tau_{q_K}$. La topología τ_k viene definida

por la norma del supremo $\| \|_\infty$ en $\mathcal{C}(K)$. La topología τ_c está definida por la familia de m-seminormas $\{\overline{q}_{K'} : K' \text{ compacto en } X\}$, donde dada $g \in \mathcal{C}(K)$ es

$$\overline{q}_{K'}(g) = \inf\{q_{K'}(f) : f \in \mathcal{C}(X),\ f_{|K} = g\}$$

y $q_{K'}(f) = \sup\{|f(x)| : x \in K'\}$ (véase la demostración del teorema 3.2.14).

Es inmediato que $\| \|_{q_K} = \overline{q}_K = \| \|_\infty$, de modo que se satisface $\tau_k = \tau_{q_K}$. De la funtorialidad de la topología de la convergencia compacta se sigue que el morfismo de restricción $\mathcal{C}_k(X) \to \mathcal{C}_k(K)$ es continuo, por lo que aplicando el corolario 3.2.3 obtenemos que el morfismo identidad $(\mathcal{C}(K), \tau_c) \to \mathcal{C}_k(K)$ es continuo, esto es, $\tau_k \leq \tau_c$. Para ver la desigualdad $\tau_c \leq \tau_k$, comprobemos que para todo compacto K' de X se satisface $\overline{q}_{K'} \leq \| \|_\infty$: dada $g \in \mathcal{C}(K)$ existe una extensión $h \in \mathcal{C}(K' \cup K)$ de g tal que

$$\sup\{|h(x)| : x \in K' \cup K\} = \sup\{|g(x)| : x \in K\}\,;$$

sea ahora $f \in \mathcal{C}(X)$ tal que $f_{|K' \cup K} = h$, y por tanto $f_{|K} = g$; tenemos

$$\begin{aligned}\overline{q}_{K'}(g) &\leq q_{K'}(f) \leq q_{K' \cup K}(f) = \sup\{|f(x)| : x \in K' \cup K\} \\ &= \sup\{|h(x)| : x \in K' \cup K\} = \sup\{|g(x)| : x \in K\} = \|g\|_\infty\,.\end{aligned}$$

Lema 3.3.4. *Sea X un espacio topológico normal Hausdorff, y sea C un subconjunto cerrado de X. Sobre $\mathcal{C}(C) = \mathcal{C}(X)/I_C$ coinciden la topología cociente y la topología de la convergencia compacta.*

Demostración. Denotemos por τ la topología cociente. Es claro que la identidad

$$(\mathcal{C}(C), \tau) \to \mathcal{C}_k(C)$$

es continua (puesto que el morfismo de restricción $\mathcal{C}_k(X) \to \mathcal{C}_k(C)$ es continuo). Para probar que la identidad en el otro sentido es continua tenemos que ver: dado un compacto K de X, existen $\lambda > 0$ y un compacto K' de C tales que $\bar{q}_K \leq \lambda p_{K'}$, donde $p_{K'}$ es la m-seminorma sobre $\mathcal{C}(C)$ definida por el compacto K' y

$$\bar{q}_K(g) = \inf\{q_K(f) : f \in \mathcal{C}(X),\ f_{|C} = g\} \qquad (g \in \mathcal{C}(C))\,,$$

siendo q_K la m-seminorma sobre $\mathcal{C}(X)$ definida por el compacto K.

Si $K \cap C = \varnothing$, entonces $\bar{q}_K = 0$ y no hay nada que probar. Supongamos que $K' = K \cap C$ es un compacto no vacío. Dada $g \in \mathcal{C}(C)$, sea $f \in \mathcal{C}(X)$ tal

que $f_{|C} = g$ y denotemos $\alpha = q_K(f)$, $\beta = p_{K'}(g)$, de modo que $\beta \leq \alpha$. Si $\beta = \alpha$ no hay nada que probar. Supongamos que $\beta < \alpha$ y sea $\varepsilon > 0$ tal que $\beta + \varepsilon < \alpha$; $C' = f^{-1}([\beta + \varepsilon, \alpha]) \cap K$ es un cerrado de K disjunto de K', de modo que $C' \cap C = \varnothing$. Sea $h \in \mathcal{C}(X)$ tal que $h(C') = 0$, $h(C) = 1$ y $0 \leq h \leq 1$; entonces $g' = hf$ es tal que $g'_{|C} = f_{|C} = g$ y $q_K(g') \leq \beta + \varepsilon = p_{K'}(g) + \varepsilon$. Hemos probado que para todo $\varepsilon > 0$ se satisface $\bar{q}_K(g) \leq p_{K'}(g) + \varepsilon$, y por lo tanto $\bar{q}_K \leq p_{K'}$. □

3.3.5. Sea X un espacio topológico Hausdorff. Dado un punto $x \in X$, la aplicación $\mathcal{C}_k(X) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(x)$, es un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras continuo y epiyectivo cuyo núcleo es $M_x = \{f \in \mathcal{C}(X) : f(x) = 0\}$, de modo que M_x es un ideal maximal cerrado de cuerpo residual $\mathbb{R}$. Como consecuencia, si Y es un subconjunto de X e $I_Y = \{f \in \mathcal{C}(X) : f(Y) = 0\}$, entonces $I_Y = \bigcap_{x \in Y} M_x$ es un ideal cerrado de $\mathcal{C}_k(X)$. Por otra parte, para cada subconjunto A de $\mathcal{C}(X)$ tenemos en X el cerrado $(A)_0 := \{x \in X : f(x) = 0$ para todo $f \in A\} = \bigcap_{f \in A} (f)_0$.

Los dos siguientes resultados nos servirán para demostrar que X es completamente regular si y sólo si hay una correspondencia biunívoca, vía la aplicación $C \mapsto I_C$, entre los subconjuntos cerrados de X y los ideales cerrados de $\mathcal{C}_k(X)$. Entre los ideales cerrados de $\mathcal{C}_k(X)$ se encuentra $\mathcal{C}_k(X)$ (el ideal no propio), para el que se satisface $(\mathcal{C}_k(X))_0 = \varnothing$; dicho ideal se corresponderá con el cerrado $\varnothing$ de X, motivo por el cual supondremos la igualdad $I_\varnothing = \mathcal{C}_k(X)$.

Nota. Dado un espacio topológico Hausdorff X, para cada $f \in \mathcal{C}_k(X)$ tenemos dos conjuntos distintos que hemos denotado del mismo modo: por una parte el cerrado $(f)_0 = \{\omega \in \operatorname{Spec}_t \mathcal{C}_k(X) : f(\omega) = 0\}$ de $\operatorname{Spec}_t \mathcal{C}_k(X)$ (véase 3.2.16), y por otra parte el cerrado $(f)_0 = \{x \in X : f(x) = 0\}$ de X. Veremos en la proposición 3.3.10 que cuando X es completamente regular existe un homeomorfismo natural entre los espacio topológicos X y $\operatorname{Spec}_t \mathcal{C}_k(X)$, mediante el cual ambos conjuntos cerrados coinciden.

Lema 3.3.6. *Sea K un espacio topológico compacto Hausdorff. Todo ideal cerrado I de $\mathcal{C}_k(K)$ es un z-ideal, es decir, si $f \in I$, $g \in \mathcal{C}(K)$ y $(f)_0 = (g)_0$, entonces $g \in I$.*

Demostración. Veamos que si $g, f \in \mathcal{C}(K)$ son tales que $g \notin I$ y $(f)_0 = (g)_0$, entonces $f \notin I$. Como $g \notin I$ e I es cerrado, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\{h \in \mathcal{C}(K) : \|g - h\|_\infty < \varepsilon\} \cap I = \varnothing$. Sea $f \in \mathcal{C}(K)$ tal que $(f)_0 = (g)_0$, y consideremos los

cerrados disjuntos

$$F_1 = \{x \in K \,:\, |g(x)| \leq \varepsilon/3\}\,, \qquad F_2 = \{x \in K \,:\, |g(x)| \geq \varepsilon/2\}\,;$$

sea $\varphi \in \mathcal{C}(K)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi(F_1) = 0$ y $\varphi(F_2) = 1$. Sobre el abierto $K \setminus (g)_0$ está definida la función continua $h = \frac{g+\varepsilon/2}{f}$, y como $(g)_0$ está en el interior de F_1, la función φh que está definida en $K \setminus (g)_0$ podemos extenderla continuamente a todo K definiéndola como cero en $(g)_0$. Para terminar, es decir, para probar que $f \notin I$, bastará ver que $\varphi h f \notin I$. En efecto, si $x \in F_1$ entonces $|g(x) - (\varphi h f)(x)| = |g(x)| \leq \varepsilon/3$; si $\varepsilon/3 < |g(x)| < \varepsilon/2$ entonces $g - \varphi h f = g - \varphi(g + \varepsilon/2) = g(1-\varphi) - \varphi\varepsilon/2$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} |g(x) - (\varphi h f)(x)| &= |g(x)(1-\varphi(x)) - \varphi(x)\varepsilon/2| \\ &\leq |g(x)||1-\varphi(x)| + |\varphi(x)|\varepsilon/2 \leq |g(x)| + \varepsilon/2 < \varepsilon\,; \end{aligned}$$

finalmente, si $x \in F_2$ entonces $|g(x) - (\varphi h f)(x)| = |g(x) - (hf)(x)| = \varepsilon/2$. $\square$

Lema 3.3.7. *Sea K un espacio topológico compacto Hausdorff. Si I es un ideal cerrado de $\mathcal{C}_k(K)$, entonces $I = I_C$, donde $C = (I)_0$.*

Demostración. Es claro que $I \subseteq I_C$ por la definición de C. Sea ahora $g \in \mathcal{C}(K)$ tal que $C \subseteq (g)_0$ y veamos que existe $\varphi \in I$ tal que $(g)_0 = (\varphi)_0$, de modo que aplicando el lema 3.3.6 concluiríamos que $g \in I$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $C_n = \{x \in K \,:\, |g(x)| \geq 1/n\}$. Dado n, como $\bigcap_{f\in I}(f)_0 = C \subseteq (g)_0$ debe ser $C_n \subseteq \bigcup_{f\in I} \operatorname{coz}(f)$, y por compacidad concluimos que existen $f_1, \ldots, f_m \in I$ tales que

$$C_n \subseteq \operatorname{coz}(f_1) \cup \cdots \cup \operatorname{coz}(f_m) = \operatorname{coz}(f_1^2 + \cdots + f_m^2)\,;$$

es decir, existe $g_n \in I$ tal que $(g_n)_0 \subseteq K \setminus C_n$. Por lo tanto $\bigcap_n (g_n)_0 \subseteq \bigcap_n (K \setminus C_n) = (g)_0$. Además, la serie $\sum_n \frac{1}{2^n}\frac{g_n^2}{1+g_n^2}$ es de Cauchy en $\mathcal{C}_k(K)$ y por lo tanto converge a una función $h \in \mathcal{C}(K)$ tal que $(h)_0 = \bigcap_n (g_n)_0 \subseteq (g)_0$; como $h \in I$ por ser I cerrado, hemos terminado porque $(hg)_0 = (g)_0$ y $hg \in I$. $\square$

Teorema 3.3.8 (Morris-Wulbert [50])**.** *Sea X un espacio topológico Hausdorff. Los ideales cerrados de $\mathcal{C}_k(X)$ están en correspondencia biunívoca con los subconjuntos cerrados de X, vía la aplicación $C \mapsto I_C$, si y sólo si X es completamente regular.*

Demostración. Es claro que X es completamente regular si y sólo si la aplicación $C \mapsto I_C$ es inyectiva. Por lo tanto, debemos probar que dicha aplicación es epiyectiva cuando X es completamente regular.

Supongamos que X es completamente regular y sea I un ideal cerrado de $\mathcal{C}_k(X)$; denotemos $C = (I)_0$ y veamos la igualdad $I_C = I$. Como la inclusión $I \subseteq I_C$ es evidente bastará probar que I es denso en I_C. Sea K un subconjunto compacto de X, de modo que en virtud de la generalización del teorema de extensión de Tietze se satisface la igualdad $\mathcal{C}(K) = \mathcal{C}(X)/I_K$ (véase 3.3.2). De la anterior igualdad se sigue que si denotamos $I' = \{$restricción a K de las funciones de $I\}$ e $I'_C = \{$restricción a K de las funciones de $I_C\}$, entonces I' e I'_C son ideales de $\mathcal{C}(K)$, y según lo dicho en 3.2.35 y 3.3.3 concluimos la demostración si probamos que I' es denso en I'_C. Es fácil ver que $C \cap K = (I')_0$, de modo que si denotamos $J = \{g \in \mathcal{C}(K) : g(C \cap K) = 0\}$, entonces del lema 3.3.7 se sigue que la clausura de I' en $\mathcal{C}_k(K)$ es J, y por lo tanto I' es denso en I'_C porque $I' \subseteq I'_C \subseteq J$. □

Corolario 3.3.9. *Si X es un espacio topológico completamente regular Hausdorff, entonces hay una correspondencia biunívoca entre los puntos de X y los ideales maximales cerrados de $\mathcal{C}_k(X)$, que serán todos de cuerpo residual real. Como consecuencia, todo ideal cerrado de $\mathcal{C}_k(X)$ es intersección de ideales maximales cerrados.*

Proposición 3.3.10. *Sea X un espacio topológico completamente regular Hausdorff. El álgebra topológica $\mathcal{C}_k(X)$ es regular y semisimple, y su espectro topológico es canónicamente homeomorfo a X.*

Demostración. Como ya dijimos en 3.3.5, para cada $x \in X$ la aplicación $\delta_x : \mathcal{C}_k(X) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(x)$, es un morfismo de álgebras topológicas, y por lo tanto tenemos la aplicación natural $i : X \to \operatorname{Spec}_t \mathcal{C}_k(X)$, $i(x) = \delta_x$, que es una biyección en virtud del corolario 3.3.9. Por una parte, que X sea completamente regular significa que la topología de X es (a través de i) la topología de Zariski de $\operatorname{Spec}_t \mathcal{C}_k(X)$; por otra parte, X es completamente regular si y sólo si su topología es la débil definida por las funciones de $\mathcal{C}_k(X)$, es decir, la topología de Gelfand de $\operatorname{Spec}_t \mathcal{C}_k(X)$; por lo tanto i es un homeomorfismo y el álgebra topológica $\mathcal{C}_k(X)$ es regular. Por último, es claro que la representación espectral $\mathcal{C}_k(X) \to \mathcal{C}(\operatorname{Spec}_t \mathcal{C}_k(X)) = \mathcal{C}(X)$ es la identidad, y como consecuencia tenemos que $\mathcal{C}_k(X)$ es semisimple. □

Teorema 3.3.11. *Sea X un espacio topológico completamente regular Hausdorff. Son equivalentes:*

(i) *X es compacto;*
(ii) *el conjunto de los elementos invertibles es un abierto de $\mathcal{C}_k(X)$;*
(iii) *todo ideal maximal de $\mathcal{C}_k(X)$ es cerrado.*

Demostración. Si X es compacto entonces $\mathcal{C}_k(X)$ es un álgebra de Banach y del lema 3.2.29 se sigue que (i) implica (ii). Es inmediato que (ii) implica (iii) porque la clausura de un ideal es un ideal. Veamos que (iii) implica (i): si todo ideal maximal de $\mathcal{C}_k(X)$ es cerrado, y por lo tanto real en virtud del corolario 3.3.9, entonces, como $\mathcal{C}_k(X)$ es regular según la proposición 3.3.10, tenemos la igualdad topológica $\operatorname{Spec}_t \mathcal{C}_k(X) = \operatorname{Spec}_m \mathcal{C}_k(X)$, de modo que aplicando de nuevo la mencionada proposición concluimos que X es compacto. □

Corolario 3.3.12. *Sea X un espacio topológico completamente regular Hausdorff. Para cada compacto K de X se satisface que el conjunto $\{f \in \mathcal{C}(X) : 0 \notin f(K)\}$ es abierto de $\mathcal{C}_k(X)$.*

Demostración. Basta tener en cuenta que el morfismo de restricción $\mathcal{C}_k(X) \to \mathcal{C}_k(K)$ es continuo y aplicar el teorema anterior. □

Definiciones 3.3.13. Sea X un espacio topológico Hausdorff. Diremos que X es *hemicompacto*, si existe una sucesión $\{K_n\}_n$ de subconjuntos compactos de X tal que para todo compacto K de X se tiene $K \subseteq K_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Es claro que de existir dicha sucesión de compactos se puede suponer que satisface $K_n \subseteq K_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Diremos que X es un *k_r-espacio*, si es continua toda función real $f : X \to \mathbb{R}$ cuya restricción a todo subconjunto compacto de X es continua.

Diremos que X es un *k-espacio*, si es cerrado todo subconjunto C de X cuya intersección con todo subconjunto compacto de X es cerrado.

Es fácil comprobar que si X es un k-espacio entonces X es un k_r-espacio. Tenemos:

Lema 3.3.14. *Sea X un k_r-espacio. Si X es hemicompacto y completamente regular, entonces X es un k-espacio.*

Demostración. Sea $\{K_n\}_n$ una sucesión de compactos de X tal que $K_n \subseteq K_{n+1}$ para todo n, y tal que cada subconjunto compacto de X está contenido en alguno de los compactos de la sucesión. Consideremos un subconjunto Y de X tal que $Y \cap K_n$ es cerrado para todo $n \in \mathbb{N}$, y sea $x_0 \in X \setminus Y$; podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_0 \in K_1$. Consideremos una sucesión $\{\alpha_n\}_n$ del intervalo abierto $(\frac{1}{2}, 1)$ tal que $\alpha_n > \alpha_{n+1}$ para todo n. Puesto

que K_1 es un espacio normal, podemos elegir $f_1 \in \mathcal{C}(K_1)$ tal que $0 \leq f_1 \leq 1$, $f_1(x_0) = 0$ y $f_{1|Y\cap K_1} = 1$. Supongamos que tenemos construidas funciones $f_1, \ldots, f_{n-1}$ tales que para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ se satisfacen: $f_i \geq 0$, $f_{i|Y\cap K_i} \geq \alpha_i$ y $f_{i|K_{i-1}} = f_{i-1}$. Veamos que existe $f_n \in \mathcal{C}(K_n)$ tal que $f_n \geq 0$, $f_{n|Y\cap K_n} \geq \alpha_n$ y $f_{n|K_{n-1}} = f_{n-1}$. En virtud del teorema de extensión de Tietze, existe $f \in \mathcal{C}(K_n)$, $f \geq 0$, tal que $f_{|K_{n-1}} = f_{n-1}$. Si $f_{|Y\cap K_n} \geq \alpha_n$ entonces ponemos $f_n = f$. En otro caso, K_{n-1} e $Y \cap \{x \in K_n : f(x) \leq \alpha_n\}$ son cerrados no vacíos y disjuntos (porque $\alpha_{n-1} > \alpha_n$), por lo que existe $g \in \mathcal{C}(K_n)$, $0 \leq g \leq 1$, tal que $g_{|K_{n-1}} = 0$ y $g = 1$ sobre $Y \cap \{x \in K_n : f(x) \leq \alpha_n\}$, y ponemos $f_n = f + g$. Ahora, la aplicación $h : X \to \mathbb{R}$, $h(x) = f_n(x)$ si $x \in K_n$, está bien definida, y es continua porque X es un k_r-espacio y $h_{|K_n} = f_n \in \mathcal{C}(K_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $h(x_0) = 0$ y $h(y) \geq 1/2$ para todo $y \in Y$, se sigue que $\{x \in X : h(x) < 1/4\}$ es un entorno abierto de x_0 que no corta a Y, y concluimos que Y es cerrado porque x_0 se tomó arbitrariamente. □

Teorema 3.3.15 (Arens [4]). *Si X es un espacio topológico completamente regular Hausdorff, entonces $\mathcal{C}_k(X)$ es metrizable si y sólo si X es hemicompacto.*

Demostración. Supuesto que X es hemicompacto, sea $\{K_n\}_n$ una sucesión de compactos de X tal que cada compacto de X está contenido en algún compacto de la familia. Entonces es claro que la topología de $\mathcal{C}_k(X)$ está definida por la familia de m-seminormas $\{q_{K_n}\}_n$, de modo que $\mathcal{C}_k(X)$ es metrizable.

Supongamos ahora que $\mathcal{C}_k(X)$ es metrizable. Entonces existen una sucesión $\{K_n\}_n$ de subconjuntos compactos de X y una sucesión $\{\varepsilon_n\}_n$ de números reales positivos tales que

$$\Big\{V_n = \{f \in \mathcal{C}(X) \,:\, q_{K_n}(f) < \varepsilon_n\}\Big\}_n$$

es una base de 0-entornos en $\mathcal{C}_k(X)$. Sea K un subconjunto compacto de X y denotemos $U = \{f \in \mathcal{C}(X) : q_K(f) < 1\}$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $V_n \subseteq U$. Si existiera $x \in K$ tal que $x \notin K_n$, entonces tendríamos una función $g \in \mathcal{C}(X)$ tal que $g(x) = 1$ y $g_{|K_n} = 0$, de modo que $g \in V_n$ y $g \notin U$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto debe ser $K \subseteq K_n$. □

Teorema 3.3.16. *Si X es un espacio topológico completamente regular Hausdorff, entonces $\mathcal{C}_k(X)$ es completo si y sólo si X es un k_r-espacio.*

Demostración. Supongamos que X es un k_r-espacio y sea $\{f_i\}_{i\in I}$ una red de Cauchy en $\mathcal{C}_k(X)$. Fijado un subconjunto compacto K en X es fácil ver que $\{f_{i|K}\}_{i\in I}$ es una red de Cauchy en el álgebra de Banach $\mathcal{C}_k(K)$, por lo que existe $f^K \in \mathcal{C}_k(K)$ tal que $f_{i|K} \to f^K$. Obtenemos así una familia $\{f^K \in \mathcal{C}_k(K) : K \text{ compacto de } X\}$ tal que si K_1, K_2 son compactos de X con $K_1 \subseteq K_2$ entonces ${f^{K_2}}_{|K_1} = f^{K_1}$, pues el morfismo de restricción $\mathcal{C}_k(K_2) \to \mathcal{C}_k(K_1)$ es continuo y transforma la red $\{f_{i|K_2}\}_{i\in I}$ en la red $\{f_{i|K_1}\}_{i\in I}$. La aplicación $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = f^K(x)$ si $x \in K$ compacto de X, está bien definida, y f es continua porque $f_{|K} = f^K \in \mathcal{C}(K)$ para todo subconjunto compacto K de X; es fácil comprobar que la red $\{f_i\}_{i\in I}$ converge a f.

Supongamos ahora que $\mathcal{C}_k(X)$ es completo y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una aplicación tal que $f_{|K} \in \mathcal{C}(K)$ para todo subconjunto compacto K de X. Denotemos $\mathcal{K} = \{\text{compactos de } X\}$, y para cada $K \in \mathcal{K}$ sea $f^K \in \mathcal{C}(X)$ tal que ${f^K}_{|K} = f_{|K}$. Es sencillo comprobar que $\{f^K\}_{K\in\mathcal{K}}$ es una red de Cauchy en $\mathcal{C}_k(X)$, por lo que existe $g \in \mathcal{C}(X)$ tal que $f^K \to g$; es claro que $g = f$ y por lo tanto $f \in \mathcal{C}(X)$. □

Como consecuencia de los resultados anteriores tenemos:

Teorema 3.3.17 (Warner [69]). *Si X es un espacio topológico completamente regular Hausdorff, entonces son equivalentes:*

(i) *X es un k-espacio hemicompacto;*

(ii) *X es un k_r-espacio hemicompacto;*

(iii) *$\mathcal{C}_k(X)$ es un álgebra de Fréchet.*

Capítulo 4

Topologías Compatibles con el Orden

En los capítulos precedentes, sobre un espacio vectorial o un álgebra se han considerado separadamente cuestiones relativas a una estructura de orden y a una estructura topológica. En este capítulo, y en el siguiente, contaremos con la presencia de ambas estructuras, la de orden y la topológica, y como consecuencia de las relaciones entre ellas obtendremos los principales resultados de esta memoria.

Comenzamos este capítulo estableciendo diversas formas de entender la compatibilidad de una topología con la estructura de retículo vectorial. En particular definimos, siguiendo básicamente el libro de Schaefer [64], el concepto de "espacio localmente sólido" y estudiamos sus propiedades. En la segunda sección introducimos la "topología del orden" sobre un retículo vectorial, topología localmente convexa asociada de modo natural a la estructura de espacio vectorial ordenado, y se la compara con la inducida por la topología de la convergencia compacta del espacio de funciones continuas sobre su espectro. La tercera sección se desarrolla en el marco de las $l$álgebras. Probamos que, en general, la topología del orden sobre una l-álgebra no es localmente m-convexa. Proponemos algunas posibles definiciones para una "topología del orden localmente m-convexa" sobre l-álgebras, y probamos que para las Φ-álgebras uniformemente cerradas todas ellas coinciden entre sí, y para las que además son cerradas por inversión coinciden también con la clásica topología del orden y con la inducida por la topología de la convergencia compacta del espacio de funciones continuas sobre el espectro. Este último resultado nos

permitirá obtener al final del capítulo un teorema de caracterización de $\mathcal{C}_k(X)$ como Φ-álgebra localmente m-convexa.

4.1 Retículos localmente sólidos

Definiciones 4.1.1. Sea E un espacio vectorial ordenado y sea E^d el dual algebraico de E (formas lineales sobre E). Se llama *dual acotado* de E al subespacio vectorial E^b de E^d definido por la igualdad:

$$E^b := \{u \in E^d : u \text{ es acotado sobre los intervalos cerrados de } E\}\,.$$

Diremos que una forma lineal sobre E es una *forma positiva* si manda el cono positivo de E al cono positivo de $\mathbb{R}$; es decir, las formas positivas son las formas lineales que conservan el orden. El conjunto de todas las formas positivas de E^d lo denotaremos por E^d_+. Llamaremos *dual de E según el orden* al subespacio vectorial E^+ de E^d generado por el conjunto E^d_+ de todas las formas positivas.

4.1.2. Sea E un espacio vectorial ordenado. Sobre el dual algebráico E^d hay un orden definido de modo natural por el orden de E, el "orden puntual" sobre E_+: dadas $u, v \in E^d$, $u \leq v$ si y sólo si $u(x) \leq v(x)$ para todo $x \in E_+$. Es fácil comprobar que E^d con dicho orden tiene estructura de espacio vectorial ordenado, y que su cono positivo es E^d_+ (recuérdense en 1.1.1 las definiciones anteriores). En particular, si $u \in E^d_+$ y $\lambda \in \mathbb{R}_+$, entonces $\lambda u \in E^d_+$, y como consecuencia obtenemos la igualdad $E^+ = E^d_+ - E^d_+$.

4.1.3. Dado un retículo vectorial E, en adelante consideraremos E^b con el orden inducido por el de E^d. Si $u \in E^d_+$, entonces $u([x, y]) \subseteq [u(x), u(y)]$ para cualesquiera $x, y \in E$, lo que prueba la inclusión $E^d_+ \subseteq E^b$. De lo anterior se sigue que el cono positivo de E^b es $E^b_+ = E^b \cap E^d_+ = E^d_+$, esto es, el espacio vectorial ordenado E^d y su subespacio E^b tienen el mismo cono positivo; como consecuencia obtenemos $E^+ \subseteq E^b$.

Proposición 4.1.4. *Si E es un retículo vectorial, entonces E^b es un retículo vectorial y $E^b = E^+$.*

Demostración. Sea $u \in E^b$. Para ver que E^b es retículo es suficiente comprobar que $u \vee 0$ existe en E^b. Para cada $x \in E_+$ definimos

$$r(x) = \sup\{u(z) : 0 \leq z \leq x\} \geq 0\,;$$

el anterior supremo existe porque u es acotada. Si $x, y \in E_+$ y $\lambda \in \mathbb{R}_+$ se satisfacen $r(\lambda x) = \lambda r(x)$ y $r(x+y) = r(x) + r(y)$; en efecto, la primera igualdad es trivial, y para ver la segunda basta tener en cuenta que $[0, x+y] = [0, x] + [0, y]$ y que

$$\begin{aligned}\sup\left\{u(z_1) + u(z_2) : z_1 \in [0,x], z_2 \in [0,y]\right\} \\ = \sup\left\{u(z_1) : z_1 \in [0,x]\right\} + \sup\{u(z_2) : z_2 \in [0,y]\}\,.\end{aligned}$$

En general, dado $x \in E$ definimos $r(x) = r(x^+) - r(x^-)$; es fácil comprobar que cualquiera que sea la expresión $x = z_1 - z_2$ con $z_1, z_2 \in E_+$ se satisface $r(z_1) - r(z_2) = r(x^+) - r(x^-)$. Ahora, dados $x, y \in E$, como $x + y = (x^+ + y^+) - (x^- + y^-)$ tenemos

$$\begin{aligned}r(x+y) &= r(x^+ + y^+) - r(x^- + y^-) \\ &= r(x^+) + r(y^+) - r(x^-) - r(y^-) = r(x) + r(y)\,,\end{aligned}$$

y si $\lambda \in \mathbb{R}$ es fácil ver (distinguiendo los casos $\lambda \geq 0$ y $\lambda < 0$) que $r(\lambda x) = \lambda r(x)$. Por lo tanto $r \in E^d$ con $r \geq 0$ y $r \geq u$; en particular $r \in E^+ \subseteq E^b$. Sea ahora $v \in E^d$ tal que $v \geq 0$ y $v \geq u$; dado $x \in E_+$, por ser $v \geq 0$ tenemos $\sup\{v(z) : z \in [0,x]\} = v(x)$, y de la desigualdad $v \geq u$ se sigue que $r(x) \leq \sup\{v(z) : z \in [0,x]\}$. De todo concluimos que $r = u \vee 0$ en E^b.

Para terminar la demostración nos falta ver la inclusión $E^b \subseteq E^+$: dada $u \in E^b$, por ser E^b un retículo tenemos $u = u^+ - u^-$ con $u^+, u^- \in E^b_+ \subseteq E^+$, y por lo tanto $u \in E^+$. □

Cuando E es un retículo vectorial (ó más generalmente un espacio vectorial ordenado) y también un espacio vectorial topológico, se pueden considerar algunas relaciones ó formas de compatibilidad entre el orden y la topología.

Definición 4.1.5. Un subconjunto U de un retículo vectorial E se dice que es *saturado* si $[x, y] \subseteq U$ cualesquiera que sean $x, y \in U$. Para cada subconjunto U de E denotaremos $\operatorname{sat} U = \bigcup_{x,y \in U} [x, y]$. Es claro $\operatorname{sat} U$ es el más pequeño conjunto saturado de E que contiene a U; en particular tenemos que U es saturado si y sólo si $U = \operatorname{sat} U$.

Lema 4.1.6. *Sea E un retículo vectorial y un espacio vectorial topológico (espacio localmente convexo). Si E admite una base de 0-entornos saturados (convexos y saturados), entonces E admite una base de 0-entornos equilibrados y saturados (absolutamente convexos y saturados).*

Demostración. Supongamos en primer lugar que E es un espacio vectorial topológico en el que hay una base de 0-entornos saturados. Como en todo espacio vectorial topológico, en E podemos considerar una base $\mathcal{B}$ de 0-entornos equilibrados. Entonces, por hipótesis, la familia $\{\operatorname{sat} U : U \in \mathcal{B}\}$ es base de 0-entornos. Bastará ver que cada $\operatorname{sat} U$ es equilibrado. Sean $z \in \operatorname{sat} U$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \leq 1$. Existen $x, y \in U$ tales que $z \in [x, y]$, y como U es equilibrado tenemos $\lambda x, \lambda y \in U$; si $\lambda \geq 0$ entonces

$$z \in [x, y] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z - x \in E_+ \\ y - z \in E_+ \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda z - \lambda x \in E_+ \\ \lambda y - \lambda z \in E_+ \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda z \in [\lambda x, \lambda y]\,,$$

y si $\lambda < 0$ se prueba del mismo modo que $\lambda z \in [\lambda y, \lambda x]$; en cualquier caso obtenemos $\lambda z \in \operatorname{sat} U$.

Supuesto ahora que E es un espacio localmente convexo en el que hay una base de 0-entornos convexos y saturados, podemos considerar en E una base $\mathcal{B}$ de 0-entornos absolutamente convexos, en cuyo caso la familia $\{\operatorname{sat} U : U \in \mathcal{B}\}$ es base de 0-entornos por hipótesis. Dado $U \in \mathcal{B}$, ya se ha probado en el caso anterior que $\operatorname{sat} U$ es equilibrado porque U es equilibrado, de modo que nos falta ver que por ser U convexo es también $\operatorname{sat} U$ convexo, lo cual se demuestra fácilmente. □

Definiciones 4.1.7. Llamaremos *retículo localmente sólido*, a todo retículo vectorial dotado de una topología que lo dote de estructura de espacio vectorial topológico en el que exista una base de 0-entornos formada por conjuntos sólidos. Un *retículo localmente convexo-sólido* es un retículo localmente sólido que es también un espacio localmente convexo.

Nota. Sea E un retículo vectorial. Es fácil ver, y lo utilizaremos en lo que sigue, que todo subconjunto sólido S de E es también equilibrado. En efecto, si $s \in S$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ con $|\lambda| \leq 1$, entonces $|\lambda s| = |\lambda||s| \leq |s|$ y por lo tanto $\lambda s \in S$.

Como consecuencia, en E, los conjuntos convexos y sólidos son justamente los conjuntos absolutamente convexos y sólidos.

Proposición 4.1.8. *Si E es un retículo localmente convexo-sólido, entonces en E existe una base de 0-entornos formada por conjuntos convexos y sólidos.*

Demostración. Claramente, es suficiente demostrar que la envolvente convexa de un conjunto sólido es un conjunto sólido. Sea S un subconjunto sólido de

E y sea $\mathrm{c}(S)$ la envolvente convexa de S. Consideremos $y \in \mathrm{c}(S)$ y $z \in E$ tales que $|z| \leq |y|$ y veamos que $z \in \mathrm{c}(S)$:

$$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\,, \qquad x_1, \ldots, x_n \in S\,, \qquad 0 < \lambda_i \leq 1\,, \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\,;$$

$$z^+, z^- \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i| \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z^+ = u_1' + \cdots + u_n'\,, & 0 \leq u_i' \leq \lambda_i |x_i|\,, \\ z^- = v_1' + \cdots + v_n'\,, & 0 \leq v_i' \leq \lambda_i |x_i|\,; \end{cases}$$

si para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ definimos $u_i = \frac{1}{\lambda_i} u_i'$, $v_i = \frac{1}{\lambda_i} v_i'$, entonces tenemos

$$z = z^+ - z^- = \sum_{i=1}^{n} (u_i' - v_i') = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (u_i - v_i)\,;$$

como $|u_i - v_i| \leq |x_i|$ porque $u_i, v_i \in [0, |x_i|]$, debe ser $u_i - v_i \in S$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y por lo tanto $z \in \mathrm{c}(S)$. □

Proposición 4.1.9. *Sea E un retículo vectorial y un espacio vectorial topológico. Cada una de las condiciones expresadas a continuación implica la siguiente:*
(i) *E es localmente sólido;*
(ii) *E admite una base de 0-entornos saturados;*
(iii) *cada intervalo cerrado de E es acotado;*
(iv) *$E' \subseteq E^+$.*

Demostración. (i)⇒(ii) Sea U un 0-entorno; por hipótesis existe un 0-entorno sólido S tal que $S + S \subseteq U$. Consideremos un 0-entorno equilibrado W tal que $W + W \subset S$ y veamos que $\operatorname{sat} W$, que es un 0-entorno saturado, está contenido en U. Sea $z \in \operatorname{sat} W$ y sean $x, y \in W$ tales que $z \in [x, y]$, es decir, $0 \leq z - x \leq y - x$; como $y - x \in W + W \subseteq S$ ($-x \in W$ porque W es equilibrado), por ser S sólido tenemos $z - x \in S$ y por lo tanto $z \in x + S \subseteq S + S \subseteq U$.

(ii)⇒(iii) Consideremos un intervalo cerrado $[x, y]$ en E y sea U un 0-entorno saturado de E, que podemos suponer equilibrado (Lema 4.1.6); entonces existe $\lambda > 0$ satisfaciendo $x, y \in \lambda U$, y como λU también es saturado obtenemos $[x, y] \in \lambda U$, es decir, $[x, y]$ es acotado.

(iii)⇒(iv) Sea $u \in E'$ y consideremos un intervalo cerrado $[x, y]$. Puesto que $u^{-1}([-1, 1])$ es un 0-entorno, según (iii) existe $\lambda > 0$ tal que $[x, y] \subseteq \lambda u^{-1}([-1, 1])$. Si $x \leq z \leq y$, entonces $\frac{1}{\lambda} z \in u^{-1}([-1, 1])$ y por lo tanto $\frac{1}{\lambda} u(z) \in [-1, 1]$, es decir, $u([x, y]) \subseteq [-\lambda, \lambda]$. Lo anterior prueba que $u \in E^b = E^+$ (véase 4.1.4). □

En todo lo que resta de sección veremos que, con ciertas hipótesis adicionales, algunas de las propiedades enumeradas en la proposición 4.1.9 son equivalentes.

Proposición 4.1.10. *Sea E un retículo vectorial y un espacio localmente convexo Hausdorff. Son equivalentes:*
(i) *cada intervalo cerrado de E es acotado;*
(ii) $E' \subseteq E^+$.

Demostración. Puesto que la topología de E es localmente convexa Hausdorff, del teorema de Hahn-Banach se sigue que $\langle E, E' \rangle$ es un par dual, en cuyo caso tenemos que un subconjunto B de E es acotado si y sólo si B es $\sigma(E, E')$-acotado, si y sólo si $u(B)$ es acotado para todo $u \in E'$ (véanse 3.1.18 y 3.1.20). Por lo tanto, la demostración de la proposición se obtiene inmediatamente de la igualdad $E^+ = E^b$. □

Proposición 4.1.11. *Sea E un retículo vectorial y un espacio vectorial topológico. Son equivalentes:*
(i) *E es localmente sólido;*
(ii) *E admite una base de 0-entornos saturados y las operaciones de retículo "$\vee$" y "$\wedge$" son continuas.*

Demostración. (i)⇒(ii) En virtud de la proposición 4.1.9, sólo tenemos que probar que las operaciones de retículo son continuas, para lo cual es suficiente ver que lo es una de ellas. Teniendo en cuenta además la igualdad $x \vee y = x + 0 \vee (y - x)$, la continuidad de "$\vee$" es equivalente a la continuidad de la aplicación $x \in E \mapsto x^+ \in E$. Dado $x_0 \in E$, sea S un 0-entorno sólido y probemos que si $x \in x_0 + S$, entonces $x^+ \in x_0^+ + S$. Puesto que $x^+ = [x_0 + (x - x_0)]^+ \leq x_0^+ + (x - x_0)^+$ tenemos $x^+ - x_0^+ \leq |x - x_0|$; del mismo modo se prueba la desigualdad $x_0^+ - x^+ \leq |x - x_0|$ y por tanto $|x^+ - x_0^+| \leq |x - x_0|$; por ser S sólido concluimos que $x^+ \in x_0^+ + S$.

(ii)⇒(i) Del lema 4.1.6 se sigue que en E hay una base $\mathcal{B}$ de 0-entornos formada por conjuntos equilibrados y saturados. Como la aplicación $x \in E \mapsto |x| \in E$ es continua, dado $U \in \mathcal{B}$ existe un 0-entorno W tal que si $x \in W$ entonces $|x| \in U$. Si definimos $V = \{y \in E : |y| \leq |x| \text{ para algún } x \in W\}$, es claro que V es un 0-entorno (pues $W \subseteq V$) y que V es sólido. Además $V \subseteq U$, pues si $x \in W$ e $y \in E$ son tales que $|y| \leq |x|$, entonces $y \in [-|x|, |x|] \subseteq U$. □

Corolario 4.1.12. *Si E es un retículo localmente sólido Hausdorff, entonces el cono positivo E_+ es cerrado. Como consecuencia E es arquimediano.*

Demostración. Puesto que el subespacio trivial 0 es cerrado y, según la proposición anterior, la aplicación $x \mapsto x \wedge 0$ es continua, concluimos que $E_+ = \{x \in E : x \wedge 0 = 0\}$ es cerrado. Sean ahora $x, y \in E_+$ tales que $nx \leq y$ para todo $n \in \mathbb{N}$; entonces $\{\frac{1}{n}\, y - x\}_n$ es una sucesión de E_+ que converge a $-x$, luego $-x \geq 0$ y por lo tanto $x = 0$. □

Lema 4.1.13. *En todo retículo vectorial E se satisfacen:*

(i) $|u|(x) = \sup\big\{u(y) \,:\, y \in [-x, x]\big\}$ *para cualesquiera* $u \in E^+$, $x \in E_+$;

(ii) $u(|x|) = \sup\big\{v(x) \,:\, v \in [-u, u]\big\}$ *para cualesquiera* $u \in E_+^b$, $x \in E$.

Demostración. (i) Sean $u \in E^+$ y $x \in E_+$. Como $|u| = u^+ + u^- = u \vee 0 + (-u \vee 0)$ tenemos (véase la demostración de la proposición 4.1.4)

$$\begin{aligned} |u|(x) &= u^+(x) + u^-(x) = \sup\big\{u(y) : y \in [0, x]\big\} + \sup\big\{ - u(y) : y \in [0, x]\big\} \\ &= \sup\big\{u(y) : y \in [0, x]\big\} + \sup\big\{u(y) : y \in [-x, 0]\big\}\,, \end{aligned}$$

y para concluir la demostración de esta parte basta tener en cuenta la igualdad $[-x, 0] + [0, x] = [-x, x]$.

(ii) Sean $u \in E_+^b$ y $x \in E$. Veamos en primer lugar que $u(x^+) = \sup\{v(x) : 0 \leq v \leq u\}$. Puesto que $x \leq x^+$ tenemos $v(x) \leq v(x^+) \leq u(x^+)$ cuando $0 \leq v \leq u$; luego $\sup\{v(x) : 0 \leq v \leq u\} \leq u(x^+)$. Para ver la otra desigualdad consideremos el conjunto $P = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+} [0, \lambda x^+]$ y definamos $u_1 : E_+ \to \mathbb{R}$ por la igualdad $u_1(y) = \sup\big\{u(z) \,:\, z \in [0, y] \cap P\big\}$. Es fácil probar que dados $y, z \in E_+$ y $\lambda \geq 0$ se satisfacen

$$u_1(y + z) = u_1(y) + u_1(z)\,, \qquad u_1(\lambda y) = \lambda u_1(y)\,.$$

Si para cada $y \in E$ definimos $u_1(y) = u_1(y^+) - u_1(y^-)$, entonces $u_1 : E \to \mathbb{R}$ es una forma lineal tal que $u_1 \in [0, u]$ (véase de nuevo la demostración de la proposición 4.1.4); además es claro que $u_1(x^+) = u(x^+)$. Veamos que $u_1(x) = u_1(x^+)$, es decir, que $u_1(x^-) = 0$: sea $z \in [0, x^-]$ tal que existe $\lambda \geq 0$ con $z \in [0, \lambda x^+]$; si $\lambda \leq 1$ entonces $z \in [0, x^+]$ y por tanto $0 \leq z \leq x^+ \wedge x^- = 0$, y si $\lambda > 1$ entonces $z \in [0, \lambda x^-]$ y por tanto $0 \leq z \leq \lambda x^+ \wedge \lambda x^- = 0$. De todo lo anterior obtenemos $u(x^+) = u_1(x) \leq \sup\big\{v(x) : v \in [0, u]\big\}$.

Probemos ya el apartado (ii):

$$\begin{aligned} u(|x|) &= u(x^+) + u(x^-) = \sup\big\{v(x) : v \in [0, u]\big\} + \sup\big\{v(x) : v \in [-u, 0]\big\} \\ &= \sup\big\{v(x) : v \in [-u, u]\big\}\,, \end{aligned}$$

ya que $u(x^-) = u((-x)^+) = \sup\big\{ - v(x) : v \in [0, u]\big\}$. □

Teorema 4.1.14. *Sea E un retículo vectorial y un espacio tonelado. Son equivalentes:*
(i) *E es localmente sólido;*
(ii) *E admite una base de 0-entornos saturados;*
(iii) *cada intervalo cerrado de E es acotado;*
(iv) *$E' \subseteq E^+$.*

Demostración. De acuerdo con la proposición 4.1.9 sólo hay que probar la implicación (iv)⇒(i). Sea $U = U^{\circ\circ}$ un tonel en E y consideremos

$$B = \left\{u \in E' \,:\, |u| \leq |v| \text{ para algún } v \in U^\circ\right\};$$

es obvio que B es sólido y $U^\circ \subseteq B$. Veamos que B es $\sigma(E', E)$-acotado. Puesto que $E = E_+ - E_+$, la topología débil definida por E sobre E' coincide con la topología débil definida por E_+, por lo que fijado $x \in E_+$ bastará probar que el conjunto $\{u(x) : u \in B\}$ es acotado. Según la proposición 4.1.10, $E' \subseteq E^+$ implica que el intervalo $[-x, x]$ es acotado, luego existe $\alpha > 0$ tal que $[-x, x] \subseteq \alpha U$; si $u \in B$, entonces $|u| \leq |v|$ para algún $v \in U^\circ$ y aplicando el lema anterior obtenemos $|u(x)| \leq |u|(x) \leq |v|(x) = \sup\left\{v(y) : y \in [-x, x]\right\} \leq \alpha$.

Como B es acotado, B° es un tonel y por tanto un 0-entorno; además $B^\circ \subseteq U^{\circ\circ} = U$. Sólo falta probar que B° es sólido. Sean $x, y \in E$ tales que $|y| \leq |x|$ con $x \in B^\circ$, y dado $u \in B$ veamos que $|u(y)| \leq 1$: según el lema anterior tenemos $|u(y)| \leq |u|(|y|) \leq |u|(|x|) = \sup\left\{v(x) : v \in [-|u|, |u|]\right\}$, por lo que debe ser $|u(y)| \leq 1$, ya que si $|v| \leq |u|$ entonces $v \in B$ porque B es sólido, y por lo tanto $v(x) \leq 1$ por ser $x \in B^\circ$. □

Definición 4.1.15. Sea q una seminorma sobre un retículo vectorial E. Diremos que q es *reticular* si satisface:

$$x, y \in E,\ |x| \leq |y| \quad \Rightarrow \quad q(x) \leq q(y)\,.$$

Proposición 4.1.16. *Una seminorma q sobre un retículo vectorial E es reticular si y sólo si su bola unidad cerrada $B = \{x \in E : q(x) \leq 1\}$ es un conjunto sólido.*

Demostración. Supongamos que q es una seminorma reticular y sean $x, y \in E$ tales que $|x| \leq |y|$, en cuyo caso tenemos $q(x) \leq q(y)$. Si $q(y) \leq 1$ entonces $q(x) \leq 1$ y por tanto B es sólido.

Recíprocamente, supongamos que B es sólido y sean de nuevo $x, y \in E$ tales que $|x| \leq |y|$. Si $q(y) = 0$ entonces $q(ny) = 0 \leq 1$ para todo n; como

$|nx| \leq |ny|$ obtenemos $q(nx) \leq 1$ para todo n y por tanto $q(x) = 0$. Si $q(y) \neq 0$, entonces $\left|\frac{x}{q(y)}\right| \leq \left|\frac{y}{q(y)}\right|$ con $q\left(\frac{y}{q(y)}\right) = 1$ y por lo tanto $q(x) \leq q(y)$. □

Corolario 4.1.17. *Un retículo vectorial que sea además un espacio vectorial topológico es un retículo localmente convexo-sólido, si y sólo si su topología está determinada por una familia de seminormas reticulares.*

Demostración. Se sigue de las proposiciones 4.1.8 y 4.1.16. □

4.2 La topología del orden

En todo retículo vectorial la estructura de orden da lugar a diversas topologías (no todas compatibles con la estructura vectorial, como puede verse en [11]). De entre todas ellas estamos interesados en una que es localmente convexa, compatible con la estructura vectorial, y que, como veremos más adelante, es la topología con la que están dotados muchos retículos vectoriales que se presentan en análisis. La presente sección se ocupa del estudio de las principales propiedades de esta topología (como referencias generales pueden verse [15], [26], [34], [55], [56] y [64]).

Definición 4.2.1. Sea E un espacio vectorial ordenado. Definimos la *topología del orden* en E, y la denotamos por τ_o, como la topología localmente convexa (no necesariamente Hausdorff) más fina para la cual todos los intervalos cerrados de E son acotados.

4.2.2. La topología del orden τ_o sobre un espacio vectorial ordenado E existe. En efecto, la familia $\Gamma = \{$seminormas sobre E que son acotadas sobre los intervalos cerrados$\}$ es no vacía (la seminorma nula está en Γ), y τ_o es la topología definida por Γ. Por lo tanto una base de 0-entornos para τ_o es

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{c} \text{subconjuntos de } E \text{ absolutamente convexos} \\ \text{que absorben a todos los intervalos cerrados} \end{array} \right\}.$$

Como consecuencia, de la definición de espacio bornológico se sigue que a τ_o sólo le falta ser Hausdorff para que (E, τ_o) sea un espacio bornológico.

Ejemplo 4.2.3. Es obvio que en $\mathbb{R}$ la topología del orden coincide con la topología usual.

La topología del orden es funtorial, esto es, se satisface:

Proposición 4.2.4. *Si $T : E \to F$ es un morfismo de espacios vectoriales ordenados (esto es, una aplicación lineal entre espacios vectoriales ordenados que conserva el orden), entonces T es continua si E y F se consideran dotados de sus respectivas topologías de orden.*

Demostración. Basta tener en cuenta que si V es un subconjunto absolutamente convexo de F que absorbe a los intervalos cerrados, entonces $T^{-1}(V)$ es absolutamente convexo y absorbe a los intervalos cerrados de E. □

Proposición 4.2.5. *Si E es un retículo vectorial entonces $(E, \tau_o)' = E^+$. Como consecuencia, τ_o es Hausdorff si y sólo si $\langle E, E^+\rangle$ es un par dual, en cuyo caso $\tau_o = \mu(E, E^+)$.*

Demostración. De la funtorialidad de la topología del orden se sigue que toda forma lineal de E^d_+ es continua para τ_o, de modo que $E^+ = E^d_+ - E^d_+ \subseteq (E, \tau_o)'$. Sea ahora $u \in (E, \tau_o)'$ y consideremos $x, y \in E$. Existe un 0-entorno V para τ_o tal que $u(V) \subseteq [-1, 1]$, y existe $\lambda > 0$ tal que $[x, y] \subseteq \lambda V$, de modo que $u([x, y]) \subseteq [-\lambda, \lambda]$ y por lo tanto $u \in E^b = E^+$.

Del teorema de Hahn-Banach se sigue que τ_o es Hausdorff si y sólo si $\langle E, E^+\rangle$ es un par dual. Por último, si τ_o es Hausdorff, entonces, como ya hemos dicho en 4.2.2, (E, τ_o) es un espacio bornológico, por lo que basta tener en cuenta que todo espacio bornológico está dotado de su topología de Mackey para obtener la igualdad $\tau_o = \mu(E, E^+)$. □

Proposición 4.2.6. *Para cada retículo vectorial E, la topología τ_o es localmente convexo-sólida. Concretamente: la colección de todos los conjuntos convexos y sólidos de E que absorben a los intervalos cerrados forman una base de 0-entornos para τ_o.*

Demostración. Sea U un conjunto absolutamente convexo de E que absorbe a los intervalos cerrados y sea

$$V = \left\{x \in E : [0, |x|] \in U\right\}.$$

Para demostrar la proposición bastará ver que V es sólido, convexo y 0-entorno para τ_o, y que existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha V \subseteq U$.

Que V es sólido es trivial. Veamos que V es convexo: dados $x, y \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ tales que $\alpha + \beta = 1$, queremos ver que $\alpha x + \beta y \in V$, es decir, que

$z \in U$ cuando $z \in E$ con $0 \le z \le |\alpha x + \beta y|$; si $0 \le z \le \alpha|x| + \beta|y|$, entonces existen $z', z'' \in E_+$ tales que $z' \le \alpha|x|$, $z'' \le \beta|y|$ y $z = z' + z''$, de modo que

$$\frac{1}{\alpha}\, z' \in [0, |x|] \subset U\,, \qquad \frac{1}{\beta}\, z'' \in [0, |y|] \subset U\,,$$

y por lo tanto

$$z = \alpha\Big(\frac{1}{\alpha}\, z'\Big) + \beta\Big(\frac{1}{\beta}\, z''\Big) \in \alpha U + \beta U\,;$$

concluimos porque al ser U convexo se satisface $\alpha U + \beta U = (\alpha + \beta)U = U$.

Veamos ahora que V es un 0-entorno para τ_o. Como todo intervalo de E está contenido en uno de la forma $[-x, x]$ con $x \in E_+$, y como V es equilibrado (por ser sólido), bastará probar que, dado $x \in E_+$, existe $\lambda > 0$ tal que $[-x, x] \subseteq \lambda V$: como U absorbe a los intervalos existe $\lambda > 0$ tal que $[0, x] \subset \lambda U$, de modo que $\frac{1}{\lambda}\, x \in V$ y por lo tanto $[\frac{-1}{\lambda}\, x, \frac{1}{\lambda}\, x] \subseteq V$ porque V es sólido, es decir, $[-x, x] \subseteq \lambda V$.

Para terminar probemos que $\frac{1}{2}\, V \subseteq U$: si $x \in V$ entonces $[0, |x|] \subseteq U$; en particular $x^+, x^- \in U$ y obtenemos $x = x^+ - x^- \in U + U = 2U$. □

Corolario 4.2.7. *En todo retículo vectorial, las operaciones de retículo son continuas para su topología del orden.*

Demostración. Se sigue de las proposiciones 4.1.11 y 4.2.6. □

Proposición 4.2.8. *En todo retículo vectorial E se satisfacen:*

(i) *La topología del orden τ_o es la más fina topología localmente convexo-sólida sobre E.*

(ii) *La topología del orden τ_o es la más fina topología localmente convexa sobre E que admite una base de 0-entornos saturados.*

(iii) *La topología del orden τ_o está definida por la familia de todas las seminormas reticulares que pueden definirse sobre E.*

Demostración. (i) Se sigue de las proposiciones 4.1.8 y 4.2.6.

(ii) Es consecuencia de la proposición 4.1.9: τ_o admite una base de 0-entornos saturados porque es localmente sólida, y si τ es otra topología localmente convexa sobre E que admite una base de 0-entornos saturados, entonces todos los intervalos cerrados de E son acotados para τ y por tanto debe ser $\tau \le \tau_o$.

(iii) Basta aplicar el corolario 4.1.17 y tener en cuenta el apartado (i). □

El siguiente teorema (tomado de [64]) junto con el teorema 4.2.14 debido a Buskes [13] nos permitirán obtener en la próxima sección algunos de los principales resultados de esta memoria:

Teorema 4.2.9. *Sea E un retículo vectorial. Si τ es una topología sobre E tal que (E,τ) es un espacio bornológico y completo en el que todo intervalo cerrado de E es acotado, entonces $\tau = \tau_o$.*

Demostración. Por una parte, $\tau = \mu(E, E')$ porque todo espacio bornológico está dotado de su topología de Mackey; por otra parte, como τ_o es Hausdorff porque $\tau_o \geq \tau$, de la proposición 4.2.5 obtenemos $\tau_o = \mu(E, E^+)$. Por lo tanto bastará probar la igualdad $E' = E^+$ para garantizar que $\tau = \tau_o$.

La inclusión $(E,\tau)' \subseteq E^+$ se probó en la proposición 4.1.9. Supongamos que existe $\omega \in E^+$ tal que ω no es continua y llegaremos a una contradicción. Como E^+ es un retículo tenemos $\omega = \omega^+ - \omega^-$, por lo que podemos suponer que ω es una forma positiva. Sea B un subconjunto de E que es τ-acotado y tal que $\omega(B)$ no es acotado. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que B es sólido, pues si no tomaríamos el conjunto $B_1 = \{x \in E : |x| \leq |y| \text{ para algún } y \in B\}$ que, obviamente, es sólido, contiene a B (luego $\omega(B_1)$ es no acotado) y también es τ-acotado; esto último se deduce de que todo espacio bornológico y completo es tonelado, y por lo tanto τ es localmente sólida en virtud del teorema 4.1.14. Sea $\{x_n\}_n \subseteq B$ tal que $|\omega(x_n)| > n$, para todo $n \in \mathbb{N}$; como B es sólido y ω es una forma positiva, podemos suponer $x_n \geq 0$ y $\omega(x_n) > n$ para todo n. Veamos que la serie $\sum_n \frac{1}{n^2} x_n$ es sumable. Sea U un 0-entorno convexo para τ y sea $\alpha > 0$ tal que $\{x_n\}_n \subseteq \alpha U$; existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n \geq \nu} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{\alpha}$, de modo que si $p, q \geq \nu$ entonces

$$\sum_{n=p}^{q} \frac{1}{n^2} x_n \in \sum_{n=p}^{q} \frac{\alpha}{n^2} U = \left(\sum_{n=p}^{q} \frac{\alpha}{n^2} \right) U \subseteq U \,,$$

donde la última igualdad y la última inclusión se satisfacen porque $\sum_{n=p}^{q} \frac{\alpha}{n^2} \leq 1$ y U es convexo. Sea $x = \sum_n \frac{1}{n^2} x_n$. Fijado $k \in \mathbb{N}$, la sucesión de elementos positivos

$$\left\{ \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^2} x_n - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} x_n \right\}_{p \geq k}$$

τ-converge al elemento $x - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} x_n$, que es positivo porque E_+ es τ-cerrado (Corolario 4.1.12). Entonces tenemos $\omega(x) \geq \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} \omega(x_n) > \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$ para todo k, lo cual es absurdo. $\square$

Definiciones 4.2.10. Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e y consideremos su representación de Riesz $E \to \mathcal{C}(\operatorname{Spec} E)$. Diremos que una seminorma q sobre E está *centralizada* en un compacto K de $\operatorname{Spec} E$, si dado $x \in E$ tenemos $q(x) = 0$ si y sólo si $\omega(x) = 0$ para todo $\omega \in K$.

Dado un compacto K de $\operatorname{Spec} E$, el ejemplo claro de seminorma sobre E centralizada en K es la seminorma $q_K : E \to \mathbb{R}$ definida por la igualdad $q_K(x) = \sup\{|\omega(x)| : \omega \in K\}$ $(x \in E)$; denotaremos por τ_o^k la topología sobre E que define la familia de seminormas $\{q_K : K \text{ compacto de } \operatorname{Spec} E\}$. Es claro que τ_o^k es la topología inicial definida en E por la representación $E \to \mathcal{C}_k(\operatorname{Spec} E)$. También es claro que para cada compacto K de $\operatorname{Spec} E$ la seminorma q_K es reticular, por lo que tenemos $\tau_o^k \leq \tau_o$ (véase el apartado (iii) de la proposición 4.2.8).

La topología τ_o^k definida sobre retículos vectoriales arquimedianos con unidad débil es funtorial:

Proposición 4.2.11. *Sean E y F retículos vectoriales arquimedianos con unidad débil. Si $T : E \to F$ es un morfismo de retículos vectoriales que manda la unidad débil de E en la unidad débil de F, entonces T es continua si E y F se consideran dotados de sus respectivas topologías τ_o^k.*

Demostración. Por una parte, la topología de la convergencia compacta es funtorial, es decir, si $h : X \to Y$ es una aplicación continua entre espacios topológicos, entonces $\mathcal{C}_k(Y) \to \mathcal{C}_k(X)$, $f \mapsto f \circ h$, es un morfismo de álgebras topológicas. Por otra parte, el espectro de un retículo vectorial arquimediano con unidad débil también es funtorial, esto es, la aplicación $T^* : \operatorname{Spec} F \to \operatorname{Spec} E$, $\omega \mapsto \omega \circ T$, es continua. Como además el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}_k(\operatorname{Spec} E) & \xrightarrow{\circ T^*} & \mathcal{C}_k(\operatorname{Spec} F) \end{array}$$

es conmutativo, concluimos que T es continua para las topologías en E y F inducidas por sus respectivas representaciones de Riesz. □

4.2.12. Dado un retículo vectorial arquimediano E con unidad débil e, en el último teorema de esta sección se dan condiciones necesarias y suficientes para que en E se satisfaga $\tau_o^k = \tau_o$. Para probar dicho teorema es necesario caracterizar las seminormas reticulares sobre E que están centralizadas en

un compacto de $\operatorname{Spec} E$, lo cual se hará en el siguiente lema. En adelante utilizaremos la siguiente propiedad: si q es una seminorma reticular sobre E y $x \in E_+$ es tal que existe $n \in \mathbb{N}$ satisfaciendo $q((x-ne)^+) = 0$, entonces $q(x) = \sup_m q(x \wedge me)$. En efecto, si $m \geq n$ entonces $0 \leq (x-me)^+ \leq (x-ne)^+$ y por lo tanto $q((x-me)^+) = 0$, de modo que teniendo en cuenta la igualdad $(x-me)^+ = x - x \wedge me$ concluimos que $q(x) = q(x \wedge me)$ para todo $m \geq n$.

Lema 4.2.13 (Buskes [13]). *Sea q una seminorma reticular no nula sobre un retículo vectorial arquimediano E con unidad débil e. Son equivalentes:*
(i) *para todo $x \in E_+$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $q((x-ne)^+) = 0$;*
(ii) *q está centralizada en un compacto K_q de* $\operatorname{Spec} E$.

Demostración. (ii)⇒(i) Es trivial, puesto que si $x \in E_+$ y $n \in \mathbb{N}$ es tal que $\omega(x) \leq n$, para todo $\omega \in K_q$, entonces $\omega((x-ne)^+) = 0$ para todo $\omega \in K_q$ y por lo tanto $q((x-ne)^+) = 0$.

(i)⇒(ii) Sea $\mathcal{Q}$ la familia de todos los subconjuntos compactos no vacíos K de $\operatorname{Spec} E^*$ tales que para cada $x \in E^*_+$ se satisface:

$$\omega(x) = 0 \quad \forall\, \omega \in K \qquad \Rightarrow \qquad q(x) = 0\,.$$

La familia $\mathcal{Q}$ es no vacía porque $\operatorname{Spec} E^* \in \mathcal{Q}$: si $\omega(x) = 0$ para todo $\omega \in \operatorname{Spec} E^*$, entonces $x = 0$ y por lo tanto $q(x) = 0$. Veamos que si $K_1, K_2 \in \mathcal{Q}$ entonces $K_1 \cap K_2 \neq \varnothing$. Si $K_1 \cap K_2 = \varnothing$ entonces existe $x \in E^*$, $0 \leq x \leq e$, tal que $\omega(x) = 1$ para todo $\omega \in K_1$ y $\omega(x) = 0$ para todo $\omega \in K_2$; entonces $q(e) \leq q(e-x) + q(x) = 0$. Dado $y \in E_+$, por hipótesis existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $q((y-ne)^+) = 0$ y por lo tanto $q(y) \leq q(y - (ne \wedge y)) + q(ne \wedge y) = q((y-ne)^+) + q(ne \wedge y) \leq q(ne) = nq(e) = 0$; de lo anterior se sigue que $q = 0$, lo cual contradice nuestras hipótesis.

Veamos que la familia $\mathcal{Q}$ es cerrada por intersecciones finitas. Sean K_1, $K_2 \in \mathcal{Q}$ y consideremos $x \in E^*_+$ tal que $\omega(x) = 0$ para todo $\omega \in K_1 \cap K_2$. Dado $\varepsilon > 0$, el conjunto $\{\omega \in \operatorname{Spec} E^* : \omega(x) \leq \varepsilon\} = \{\omega \in \operatorname{Spec} E^* : \omega((x-\varepsilon e)^+) = 0\}$ contiene un 0-entorno abierto U que contiene a $K_1 \cap K_2$. Dado que $K_1 \cap U^c$ y K_2 son compactos disjuntos en $\operatorname{Spec} E^*$, existe $y \in E^*_+$, $0 \leq y \leq e$, tal que $\omega(y) = 0$ para todo $\omega \in K_1 \cap U^c$ y $\omega(y) \geq \sup\{\varphi((x-\varepsilon e)^+) : \varphi \in K_2\}$ para todo $\omega \in K_2$. Si $z = y \wedge (x-\varepsilon e)^+$ entonces $\omega(z) = 0$ para todo $\omega \in K_1$, pues $\omega(z) \leq \omega(y) = 0$ para todo $\omega \in K_1 \cap U^c$ y $\omega(z) \leq \omega((x-\varepsilon e)^+) = 0$ para todo $\omega \in K_1 \cap U$. Dado que $K_1 \in \mathcal{Q}$ tenemos $q(z) = 0$. Además, si $\omega \in K_2$ entonces $\omega(z) = \omega((x-\varepsilon e)^+)$, luego $\omega((x-\varepsilon e)^+ - z) = 0$ para todo $\omega \in K_2$. De la definición de K_2 obtenemos $q((x-\varepsilon e)^+ - z) = 0$, con lo que

$q(x-(x\wedge\varepsilon e))=q((x-\varepsilon e)^+)\leq q((x-\varepsilon e)^+-z)+q(z)=q(z)=0$ y por lo tanto $q(x)=q(x\wedge\varepsilon e)\leq\varepsilon q(e)$. Como ε es arbitrario concluimos que $q(x)=0$.

Consideremos el compacto $K_q=\bigcap_{K\in\mathcal{Q}}K$, que es no vacío, pues si fuera $K_q=\varnothing$ existirían $K_1,\ldots,K_r$ en $\mathcal{Q}$ tales que $\varnothing=K_1\cap\cdots\cap K_r\in\mathcal{Q}$, lo cual no puede ocurrir. Además $K_q\in\mathcal{Q}$: sea $x\in E_+^*$ tal que $\omega(x)=0$ para todo $\omega\in K_q$; dado $\varepsilon>0$ el abierto $U=\{\omega\in\operatorname{Spec}E^*:\omega(x)<\varepsilon\}$ contiene a K_q y por lo tanto existen $K_1,\ldots,K_r$ en $\mathcal{Q}$ tales que $K_1\cap\cdots\cap K_r\subseteq U$; como además $\omega((x-\varepsilon e)^+)=0$ para todo $\omega\in U$, concluimos que $q((x-\varepsilon e)^+)=0$; procediendo como en el párrafo anterior obtenemos $q(x)=0$.

Veamos que si $x\in E_+^*$ es tal que $q(x)=0$, entonces $\omega(x)=0$ para todo $\omega\in K_q$. Supongamos que existe $\omega_0\in K_q$ tal que $\omega_0(x)=\lambda>0$ y sea $W=\{\omega\in\operatorname{Spec}E^*:\omega(x)>\frac{\lambda}{2}\}$. Consideremos $y\in E_+^*$ tal que $\omega(y)=0$ para todo $\omega\in\operatorname{Spec}E^*\setminus W$ ($W\neq\operatorname{Spec}E^*$, pues si $\omega(x)>\frac{\lambda}{2}$ para todo ω, entonces $x\geq\frac{\lambda}{2}e$ y por lo tanto $q(x)>0$). Si $\omega\in W$ entonces $\omega(x)\omega(y)\geq\frac{\lambda}{2}\omega(y)$; si $\omega\in\operatorname{Spec}E^*\setminus W$ entonces $0=\omega(x)\omega(y)=\frac{\lambda}{2}\omega(y)$. En cualquier caso tenemos

$$\omega(y)\leq\frac{2}{\lambda}\|y\|_e\omega(x)$$

y por lo tanto $y\leq\frac{2}{\lambda}\|y\|_e x$, es decir, $q(y)\leq\frac{2}{\lambda}\|y\|_e q(x)=0$. Así pues $W^c\in\mathcal{Q}$ y en consecuencia $\omega_0\in K_q\subseteq W^c$, lo cual es una contradicción porque $\omega_0\in W$.

Probemos ahora la inclusión $K_q\subseteq\operatorname{Spec}E$, para lo cual debemos ver que dado $x\in E_+$ se satisface $\hat{x}(\omega)\in\mathbb{R}$ para todo $\omega\in K_q$ (véanse 1.2.18 y el lema 1.2.22). Dado $x\in E_+$ sea $n\in N$ tal que $q((x-ne)^+)=0$; si $m\geq n$ entonces

$$\begin{aligned}(x-ne)^+&=x-x\wedge ne\geq x\wedge me-(x\wedge ne)\geq((x\wedge me)-ne)\vee 0\\&=((x\wedge me)-ne)^+\in E^*\end{aligned}$$

y por lo tanto $q(((x\wedge me)-ne)^+)=0$; lo anterior implica que $\omega(((x\wedge me)-ne)^+)=0$ para todo $\omega\in K_q$, es decir, $\omega((x\wedge me)-ne)\leq 0$ para todo $\omega\in K_q$, de lo que se sigue $\hat{x}(\omega)=\sup_m\omega(x\wedge me)\leq\omega(ne)=n$ para todo $\omega\in K_q$.

Veamos finalmente que dado $x\in E$ se satisface $q(x)=0$ si y sólo si $\omega(x)=0$ para todo $\omega\in K_q$. Es claro que $q(x)=0$ si y sólo si $q(x^+)=q(x^-)=0$ y que, dada $\omega\in\operatorname{Spec}E$, $\omega(x)=0$ si y sólo si $\omega(x^+)=\omega(x^-)=0$ (lo primero porque la seminorma q es reticular y lo segundo porque lo forma lineal ω es morfismo de retículos); por lo tanto podemos suponer $x\in E_+$, en cuyo caso tenemos $q(x)=\sup_m q(x\wedge me)$ (véase 4.2.12); aplicando lo ya probado

obtenemos

$$\begin{aligned} q(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad q(x \wedge ne) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \\ &\Longleftrightarrow \quad \omega(x \wedge ne) = 0 \quad \forall\, \omega \in K_q,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \\ &\Longleftrightarrow \quad \omega(x) = 0 \quad \forall\, \omega \in K_q\,, \end{aligned}$$

con lo que concluye la demostración. □

Teorema 4.2.14 (Buskes [13]). *Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. Son equivalentes:*

(i) *para toda seminorma reticular no nula q sobre E y para cada $x \in E_+$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $q((x - ne)^+) = 0$;*

(ii) $\tau_o = \tau_o^k$.

Demostración. (i)⇒(ii) Tenemos que probar la desigualdad $\tau_o \leq \tau_o^k$, esto es, que si q es una seminorma reticular no nula sobre E, entonces existen un subconjunto compacto K de $\operatorname{Spec} E$ y $\lambda \geq 0$ tales que $q \leq \lambda q_K$. Por hipótesis, del lema 4.2.13 se sigue que existe un compacto K en $\operatorname{Spec} E$ tal que q está centralizada en K; veamos que $q \leq q(e)q_K$. Sea $x \in E$; dada $\omega \in K$ es claro que $\omega(|x|) = |\omega(x)| \leq q_K(x)$, es decir, $\omega((|x| - q_K(x)e)^+) = 0$; luego $q((|x| - q_K(x)e)^+) = 0$; como $|x| = (|x| - q_K(x)e) + q_K(x)e \leq (|x| - q_K(x)e)^+ + q_K(x)e$, concluimos que $q(x) = q(|x|) \leq q_K(x)q(e)$.

(ii)⇒(i) Sea q es una seminorma reticular no nula sobre E y sea $x \in E_+$. Por hipótesis, existen un compacto K en $\operatorname{Spec} E$ y $\lambda \geq 0$ tales que $q \leq \lambda q_K$. Si tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sup\{\omega(x) : \omega \in K\} = q_K(x) \leq n$, entonces $q_K((x - ne)^+) = \sup\{\omega((x - ne)^+) : \omega \in K\} = 0$ y por lo tanto $q((x - ne)^+) = 0$. □

4.3 Topologías sobre Φ-álgebras compatibles con el orden

En la sección anterior se ha probado que para la topología del orden τ_o sobre un retículo vectorial E existen varias definiciones posibles, todas ellas equivalentes: de entre todas las topologías localmente convexas sobre E, τ_o es la más fina de las que son localmente sólidas, τ_o es la más fina de las que hacen acotados a todos los intervalos cerrados, y τ_o es la más fina de las que pueden

definirse por una familia de seminormas reticulares. Esta sección, que es esencialmente el trabajo [46], la comenzamos adaptando las tres definiciones anteriores para topologías localmente m-convexas sobre una l-álgebra.

Definición 4.3.1. Dada una l-álgebra A, denotaremos por τ_o^b a la más fina topología localmente m-convexa sobre A para la que son acotados todos los intervalos cerrados de A. La familia $\Gamma = \{$m-seminormas sobre A que son acotadas sobre los intervalos cerrados$\}$ es no vacía y τ_o^b es la topología definida por Γ. Una base de 0-entornos para τ_o^b es

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{subconjuntos de } A \text{ absolutamente m-convexos} \\ \text{que absorben a todos los intervalos cerrados} \end{array} \right\}.$$

Definición 4.3.2. Dada una l-álgebra A, denotaremos por τ_o^m a la más fina topología sobre A que es localmente m-convexa y localmente sólida. Dado que la intersección de conjuntos m-convexos (sólidos) de A es un conjunto m-convexo (sólido) de A, se sigue que el supremo de una familia de topologías localmente m-convexas (localmente sólidas) sobre A es una topología localmente m-convexa (localmente sólida). Como consecuencia, τ_o^m existe porque es el supremo de la familia de todas las topologías sobre A que son localmente m-convexas y localmente sólidas (dicha familia es no vacía porque la topología trivial está en ella).

Definición 4.3.3. Dada una l-álgebra A, denotaremos por τ_o^s la topología localmente m-convexa sobre A definida por la familia de todas las m-seminormas reticulares que existen sobre A. Es claro que una base de 0-entornos para τ_o^s es la colección de todos los subconjuntos de A que son m-convexos, sólidos y absorbentes.

Las topologías que hemos definido sobre una l-álgebra son funtoriales:

Proposición 4.3.4. *Si $T : A \to B$ es un morfismo de l-álgebras, entonces las aplicaciones $T : (A, \tau_o^\alpha) \to (B, \tau_o^\alpha)$ $(\alpha = s, m, b)$ son continuas.*

Demostración. Análoga a la de la proposición 4.2.4. □

4.3.5. Sea A una l-álgebra. Además de las topologías τ_o^b, τ_o^m y τ_o^s definidas sobre A, como A es un retículo vectorial podemos considerar también su topología del orden τ_o. En general tenemos $\tau_o^s \leq \tau_o^m \leq \tau_o^b \leq \tau_o$. En efecto, $\tau_o^s \leq \tau_o^m$ porque τ_o^s es localmente m-convexa y localmente sólida, $\tau_o^m \leq \tau_o^b$ porque toda topología localmente sólida hace acotados a los intervalos

cerrados (véase 4.1.9), y $\tau_o^b \leq \tau_o$ trivialmente. Sería interesante conocer condiciones necesarias ó suficientes para que alguna de las desigualdades anteriores sea una igualdad. En particular, nos preguntamos cuándo la topología del orden τ_o es localmente m-convexa ($\Leftrightarrow \tau_o^m = \tau_o$), y en ese caso cuándo la topología del orden se puede definir por una familia de m-seminormas reticulares ($\Leftrightarrow \tau_o^s = \tau_o$).

El resultado fundamental utilizado en la proposición 4.2.8 para obtener la equivalencia de las tres definiciones de τ_o es la proposición 4.2.6, cuyo enunciado análogo para la l-álgebra A sería: *la colección de todos los conjuntos m-convexos, sólidos y absorbentes de A es una base de* 0*-entornos para* τ_o^b. En la proposición 4.3.10 probaremos que dicho enunciado es válido cuando A es una Φ-álgebra uniformemente cerrada, y como consecuencia obtendremos que en ese caso se dan las igualdades $\tau_o^s = \tau_o^m = \tau_o^b$.

Lema 4.3.6. *Sea A una Φ-álgebra uniformemente cerrada. Si A es real-semisimple* (*en particular, según* 2.3.10*, si A es cerrada por inversión*)*, entonces τ_o es Hausdorff* (*y por tanto* (A, τ_o) *es un espacio bornológico*)*.*

Demostración. El que A sea real-semisimple significa que $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A$ (visto dentro del dual algebraico A^d) separa puntos de A. Según el lema 2.3.4 tenemos $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A \subseteq E_+^d$, de modo que $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A \subseteq (A, \tau_o)'$ en virtud de la proposición 4.2.4 y por lo tanto $(A, \tau_o)'$ separa puntos de A. Basta aplicar el teorema de Hahn-Banach para concluir que τ_o es Hausdorff. □

4.3.7. Fijada una l-álgebra A, es claro que la igualdad $\tau_o^m = \tau_o^b$ equivale a que τ_o^b sea localmente sólida. Como consecuencia se sigue que para que se satisfagan las igualdades $\tau_o^m = \tau_o^b = \tau_o$ es suficiente con que sea $\tau_o^b = \tau_o$. En el siguiente ejemplo mostramos que las topologías τ_o^s, τ_o^m y τ_o^b pueden ser iguales entre sí y distintas de τ_o.

Ejemplo 4.3.8. Sea $A = \mathbb{R}[x]$ el álgebra de los polinomios en una indeterminada con coeficientes reales. Definimos sobre A la relación de orden "$\leq$" siguiente: dados $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots$ y $Q(x) = b_0 + b_1 x + \dots$,

$$P(x) \leq Q(x) \iff a_0 \leq b_0\,,\ a_1 \leq b_1\,,\ \dots\,.$$

Es inmediato comprobar que la anterior es una relación de orden que dota a A de estructura de l-álgebra, satisfaciéndose

$$(a_0 + a_1 x + \dots) \vee (b_0 + b_1 x + \dots) = (a_0 \vee b_0) + (a_1 \vee b_1)x + \dots\,,$$
$$(a_0 + a_1 x + \dots) \wedge (b_0 + b_1 x + \dots) = (a_0 \wedge b_0) + (a_1 \wedge b_1)x + \dots\,,$$

donde $a_i \vee b_i$ $(a_i \wedge b_i)$ es el supremo (ínfimo) de los números reales a_i y b_i. En particular el valor absoluto de $a_0 + a_1 x + \dots$ es $|a_0| + |a_1| x + \dots$.

Como espacio vectorial A es la suma directa de $\mathbb{R}$ consigo mismo una cantidad numerable de veces, $A = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \mathbb{R} \oplus x\,\mathbb{R} \oplus x^2\,\mathbb{R} \oplus \cdots$, y es conocido que la topología suma directa τ sobre A es la más fina topología sobre $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ que lo dota de estructura de espacio vectorial topológico. Una base de entornos de cero para ella son los conjuntos de la forma

$$[-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \oplus [-\varepsilon_1, \varepsilon_1] \oplus \cdots := ([-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \times [-\varepsilon_1, \varepsilon_1] \times \cdots) \cap \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$$

con $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots)$ sucesión de números reales estrictamente positivos. Es claro que para τ no existe una base numerable de 0-entornos y que τ es una topología localmente convexa para la que los intervalos cerrados de A son acotados: dados polinomios $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots$, $Q(x) = b_0 + b_1 x + \dots$ tenemos $[P(x), Q(x)] = [a_0, b_0] \oplus [a_1, b_1] \oplus \cdots \oplus [a_n, b_n] \oplus 0 \oplus 0 \oplus \cdots$, donde n es el máximo entre los grados de $P(x)$ y $Q(x)$. Por lo tanto $\tau_o = \tau$.

Sea ahora $q : A \to \mathbb{R}$ una m-seminorma y sean $\alpha = q(x)$, $\beta = q(1)$; dado $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ tenemos

$$\begin{aligned} q(P(x)) &\leq |a_0|\beta + |a_1|\alpha + |a_2|\alpha^2 + \cdots + |a_n|\alpha^n \\ &\leq \max\{1, \beta\}(|a_0| + |a_1|\alpha + |a_2|\alpha^2 + \cdots + |a_n|\alpha^n)\,. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Para cada $\alpha \geq 0$ la aplicación $q_\alpha : A \to \mathbb{R}$, definida por la igualdad

$$q_\alpha(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = |a_0| + |a_1|\alpha + |a_2|\alpha^2 + \cdots + |a_n|\alpha^n\,,$$

es una m-seminorma reticular, y las desigualdades $(*)$ prueban que para toda m-seminorma q sobre A existen constantes no negativas C, α tales que $q \leq C q_\alpha$. Hemos probado que la topología localmente m-convexa más fina que existe sobre A está definida por una familia de m-seminormas reticulares, de modo que se satisfacen las igualdades $\tau_o^s = \tau_o^m = \tau_o^b$. Como $q_{\alpha_1} \leq q_{\alpha_2}$ cuando $\alpha_1 \leq \alpha_2$, la familia $\{q_n\}_n$ define la topología τ_o^m y como consecuencia tenemos que dicha topología tiene una base numerable de 0-entornos. Por lo tanto debe ser $\tau_o^m < \tau_o$.

4.3.9. Si A es una Φ-álgebra, entonces A es un retículo vectorial arquimediano en el que 1 es unidad débil de orden y podemos considerar sobre A la topología τ_o^k, esto es, la topología inicial definida en A por la representación de Riesz $A \to \mathcal{C}_k(\operatorname{Spec} A)$ (véase 4.2.10). La representación anterior es un morfismo de l-álgebras en virtud del corolario 2.2.6, de modo que las seminormas reticulares

que definen la topología τ_o^k son m-seminormas y por lo tanto tenemos $\tau_o^k \leq \tau_o^s \leq \tau_o^m \leq \tau_o^b \leq \tau_o$, es decir, $A \to \mathcal{C}_k(\operatorname{Spec} A)$ es continua para todas las topologías que estamos considerando sobre A.

Proposición 4.3.10. *Sea A una Φ-álgebra uniformemente cerrada. La colección de todos los conjuntos m-convexos, sólidos y absorbentes de A es una base de 0-entornos para τ_o^b. Es decir, tenemos $\tau_o^s = \tau_o^m = \tau_o^b$.*

Demostración. Sea U un conjunto absolutamente m-convexo que es 0-entorno para τ_o^b, esto es, que absorbe a los intervalos cerrados, y consideremos

$$V = \{a \in A : [0, |a|] \subseteq U\}.$$

Que V es un conjunto convexo y sólido que absorbe a los intervalos cerrados y satisface $V \subseteq 2U$ se prueba como en la demostración de la proposición 4.2.6. Para terminar veamos la inclusión $VV \subseteq V$, esto es, que si $a, b \in V$ entonces $[0, |ab|] \subseteq U$: dado $c \in [0, |ab|]$, como $|ab| = |a||b|$, de 2.3.3 (iv) se sigue que existen $p \in [0, |a|]$ y $q \in [0, |b|]$ tales que $c = pq$; en particular tenemos $p, q \in U$, y como U es m-convexo concluimos que $c = pq \in U$. □

Ejemplos 4.3.11. (a) La l-álgebra del ejemplo 4.3.8 es uniformemente cerrada pero no es una Φ-álgebra (es arquimediana pero no es f-álgebra), lo cual prueba que las hipótesis de la proposición anterior no son condiciones necesarias para que se den las igualdades $\tau_o^s = \tau_o^m = \tau_o^b$.

(b) (Buskes [13, Exa. 4.5]) Veamos un ejemplo de Φ-álgebra uniformemente cerrada en la que se satisface $\tau_o^k \neq \tau_o$. Sea $A = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : |f| \leq P$ para alguna función polinómica $P\}$, que como se vio en 2.3.11 es una Φ-álgebra uniformemente cerrada. Dada $f \in A$ tenemos las integrales definidas $\int_{-\infty}^0 |f(x)|\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$, $\int_0^\infty |f(x)|\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$, y por lo tanto tenemos el número real no negativo

$$q(f) := \int_{-\infty}^0 |f(x)|\mathrm{e}^x \mathrm{d}x + \int_0^\infty |f(x)|\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^\infty |f(x)|(\mathrm{e}^x \wedge \mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x\,;$$

de las propiedades de la integral definida se sigue que la función $q : A \to \mathbb{R}$, $f \mapsto q(f)$, es una seminorma reticular. Es fácil comprobar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se satisface $q((x-n)^+) = \mathrm{e}^{-n} > 0$, de modo que aplicando el teorema 4.2.14 obtenemos la desigualdad estricta $\tau_o^k < \tau_o$.

Lema 4.3.12. *Sea X un conjunto y sea E un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^X$. Si E es uniformemente cerrado y contiene a las funciones constantes, entonces son equivalentes:*

(i) *E es un retículo satisfaciendo: si $x \in E$ es tal que $x(\omega) \neq 0$ para todo $\omega \in X$, entonces la función $y(\omega) = \frac{1}{x(\omega)}$ pertenece a E;*

(ii) *E es un anillo satisfaciendo: si $x \in E$ es tal que $x(\omega) \neq 0$ para todo $\omega \in X$, entonces la función $y(\omega) = \frac{1}{x(\omega)}$ pertenece a E;*

(iii) *E es cerrado respecto a la composición con funciones reales y continuas definidas sobre intervalos abiertos de $\mathbb{R}$.*

Demostración. (i)⇒(ii) Hemos de ver que si $x \in E$ entonces $x^2 \in E$:

$$x^2 = |x|^2 = (1 + |x|)^2 - 2|x| - 1\,.$$

Como $\frac{1}{1+|x|} \in E^* = \mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*)$, entonces $\frac{1}{(1+|x|)^2} \in E^*$ por ser $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} E^*)$ un anillo, de modo que $(1 + |x|)^2 \in E$.

(ii)⇒(iii) Veamos en primer lugar que E es cerrado por composición con funciones de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. Consideremos

$$\mathcal{L} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \,:\, f \circ x \in E \;\; \forall\, x \in E\}\,.$$

Es fácil ver que $\mathcal{L}$ hereda de E la propiedad de ser un anillo uniformemente cerrado que contiene a las funciones constantes y que satisface (ii). Tenemos que E es un retículo (luego $\mathcal{L}$ también), pues si $x \in E$ entonces

$$\frac{x}{1+x^2} \in E^* \quad \Rightarrow \quad \frac{|x|}{1+x^2} \in E^* \quad \Rightarrow \quad |x| = \frac{|x|}{1+x^2}(1+x^2) \in E\,.$$

Además $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{L}$ (viendo $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{R}})$ como las funciones $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ para las que los límites $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ existen y son finitos). En efecto, las poligonales acotadas constituyen un retículo vectorial que contiene a las funciones constantes y separa puntos de $\overline{\mathbb{R}}$, luego según el teorema clásico de Kakutani-Stone son uniformemente densas en $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{R}})$, y es claro que dichas poligonales están en $\mathcal{L}$. Veamos ahora que cada $f \in \mathcal{C}^*(\mathbb{R})$ está en $\mathcal{L}$. Como $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{1+t^2} = 0$ tenemos que $g(t) = \frac{f(t)}{1+t^2}$ es una función de $\mathcal{L}$, luego $f(t) = g(t)(1 + t^2)$ también pertenece a $\mathcal{L}$. Por último $\mathcal{C}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}$, pues si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ entonces

$$g = \frac{1}{1/(f^+ + 1)} - \frac{1}{1/(f^- + 1)} \in \mathcal{L}\,.$$

Sea ahora $f \in \mathcal{C}^*(I)$, donde I es un intervalo abierto que contiene a $x(X)$ ($x \in E$). Definamos $f_1(t) = \inf\{|t-\lambda| : \lambda \in I^c\}$ y $f_2(t) = f(t)f_1(t)$, donde I^c denota el complementario de I en $\mathbb{R}$; podemos suponer $I^c \neq \varnothing$ porque el caso $I = \mathbb{R}$ ya lo hemos tratado. Es fácil ver que f_1 y f_2 se extienden continuamente a $\mathbb{R}$, luego $f_1 \circ x, f_2 \circ x \in E$. Como $x(\omega) \in I$ para cada $\omega \in X$, tenemos

$$f_1(x(\omega)) = \inf\{|x(\omega)-\lambda| : \lambda \in I^c\} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad f \circ x = \frac{f_2 \circ x}{f_1 \circ x} \in E\,.$$

Finalmente $\{f \in \mathcal{C}(I) : f \circ x \in E\}$ coincide con $\mathcal{C}(I)$, pues dicho conjunto, como antes $\mathcal{L}$, hereda las propiedades de E, luego es un anillo uniformemente cerrado y cerrado por inversión que contiene a $\mathcal{C}^*(I)$.

(iii)$\Rightarrow$(i) Componiendo con la función "valor absoluto", que está definida en todo intervalo abierto de $\mathbb{R}$, obtenemos que E es un retículo y como consecuencia que es un anillo. Ahora, si $x \in E$ es tal que $x(\omega) \neq 0$ para todo $\omega \in X$, entonces componiendo con la función $\varphi(t) = \frac{1}{t}$ de $\mathcal{C}((0,\infty))$ obtenemos que $\frac{1}{x^2} \in E$, y por lo tanto $\frac{1}{x} = x\frac{1}{x^2} \in E$ $\square$

Teorema 4.3.13. *Si A es una Φ-álgebra uniformemente cerrada y cerrada por inversión, entonces $\tau_o^k = \tau_o^s = \tau_o^m = \tau_o^b = \tau_o$.*

Demostración. Supongamos que $\tau_o^k \neq \tau_o$, en cuyo caso, según el teorema 4.2.14, deben existir una seminorma reticular q sobre A y algún $a \in A_+$ tales que $q((a-n)^+) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces la función

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto f(t) = \sup_n \frac{n}{q((a-n)^+)}\,(t-n)^+ \in \mathbb{R}$$

es continua, pues dado $t_0 \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $t_0 < n$, y por tanto $f(t) = \sup\{\frac{k}{q((a-k)^+)}\,(t-k)^+ : 1 \leq k \leq n\}$ para cada t del entorno $(-\infty, n)$ de t_0. Puesto que A es uniformemente cerrada y cerrada por inversión, podemos aplicar el lema anterior a A vista como subálgebra de $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} A)$ (nótese que A es real-semisimple en virtud del corolario 2.3.10), y obtenemos

$$b = f \circ a = \bigvee_n \frac{n}{q((a-n)^+)}\,(a-n)^+ \in A\,.$$

Finalmente, $q(b) \geq \frac{n}{q((a-n)^+)}\,q((a-n)^+) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual es absurdo. $\square$

Una consecuencia del teorema anterior es el siguiente importante resultado debido a Feldman y Porter [19]:

Corolario 4.3.14. *Si X es un espacio topológico completamente regular, entonces $(\mathcal{C}(X), \tau_o) = \mathcal{C}_k(\upsilon X)$. Como consecuencia, X es realcompacto si y sólo si en $\mathcal{C}(X)$ coinciden la topología del orden y la topología de la convergencia compacta.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(\upsilon X)$, $f \mapsto f^{\upsilon}$, la representación de Riesz de la Φ-álgebra $\mathcal{C}(X)$, que es un morfismo de l-álgebras; como X es denso en υX y cada f^{υ} extiende a f, concluimos que dicha representación es un l-isomorfismo (consúltese la sección 1.3 para verificar las afirmaciones hechas). Para obtener la igualdad topológica $(\mathcal{C}(X), \tau_o) = \mathcal{C}_k(\upsilon X)$, basta aplicar el teorema 4.3.13 teniendo en cuenta que $\mathcal{C}(X)$ es una Φ-álgebra uniformemente cerrada y cerrada por inversión.

Ahora, si X es realcompacto entonces $X = \upsilon X$ y por lo tanto $\tau_o^k = \tau_o$ es la topología de la convergencia compacta de $\mathcal{C}(X)$. Recíprocamente, si $(\mathcal{C}(X), \tau_o) = \mathcal{C}_k(X)$ entonces

$$X = \operatorname{Spec}_t \mathcal{C}_k(X) = \operatorname{Spec}_t(\mathcal{C}(X), \tau_o) = \operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} \mathcal{C}(X) = \upsilon X$$

y por lo tanto X es realcompacto (para ver la penúltima de las anteriores igualdades, téngase en cuenta que todo morfismo de álgebras de $\mathcal{C}(X)$ en $\mathbb{R}$ conserva el orden (2.3.4) y por lo tanto es continuo para τ_o (4.2.4)). □

El siguiente resultado fue probado independientemente por Nachbin [53] y Shirota [66], y caracteriza los espacios realcompactos en términos de la topología de la convergencia compacta.

Teorema 4.3.15. *Si X es un espacio completamente regular Hausdorff, entonces $\mathcal{C}_k(X)$ es bornológico si y sólo si X es realcompacto.*

Demostración. Si X es realcompacto, entonces $\mathcal{C}_k(X) = (\mathcal{C}(X), \tau_o)$ y basta aplicar el lema 4.3.6 para concluir que $\mathcal{C}_k(X)$ es bornológico.

Supongamos ahora que $\mathcal{C}_k(X)$ es bornológico. Si existe $x_0 \in \upsilon X \setminus X$, entonces la forma lineal $\mathcal{C}_k(X) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f^{\upsilon}(x_0)$, no es continua, y por lo tanto existe un conjunto acotado B en $\mathcal{C}_k(X)$ y existe una sucesión $\{f_n\}_n \subseteq B$ tal que $f_n^{\upsilon}(x_0) \to \infty$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $V_n = \{x \in \upsilon X : f_n^{\upsilon}(x) > f_n^{\upsilon}(x_0) - 1\}$, entonces $\bigcap_n V_n$ es un conjunto G_δ de υX que es no vacío porque x_0 está en él, y por lo tanto $(\bigcap_n V_n) \cap X \neq \varnothing$ (véase la proposición 1.3.7 (i)). Dado $x \in (\bigcap_n V_n) \cap X$ tenemos $f_n(x) \to \infty$, lo cual es una contradicción porque la forma lineal $\mathcal{C}_k(X) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(x)$ es continua. □

La última parte de este capítulo la dedicaremos a dar una caracterización del álgebra topológica $\mathcal{C}_k(X)$ con X un k_r-espacio realcompacto (véase en 3.2.16 la definición de "álgebra topológica regular"). Comenzaremos dando unas importantes propiedades de las Φ-álgebras uniformemente cerradas.

Lema 4.3.16. *Si A es un álgebra topológica y es una Φ-álgebra uniformemente cerrada, entonces A es regular.*

Demostración. Dados $a \in A$ y $\omega \in \operatorname{Spec}_t A$ debe ser $\omega(a^+) = 0$ ú $\omega(a^-) = 0$ porque $a^+a^- = 0$, es decir, $\omega(a) = \omega(a^+)$ ú $\omega(a) = -\omega(a^-)$; como en virtud del lema 2.3.4 tenemos que ω es un morfismo de l-álgebras concluimos que se satisface: $\omega(a) > 0$ si y sólo si $\omega(a^+) \neq 0$.

Ahora, si para cada $a \in A$ denotamos por $\operatorname{coz}(a)$ el complementario de $(a)_0 = \{\omega \in \operatorname{Spec}_t A : \omega(a) = 0\}$ en $\operatorname{Spec}_t A$, entonces debemos probar que una base de abiertos en $\operatorname{Spec}_t A$ es la colección $\{\operatorname{coz}(a) : a \in A\}$. Por definición de la topología de Gelfand, una base de abiertos en $\operatorname{Spec}_t A$ está formada por las intersecciones finitas de conjuntos de la forma $\{\omega \in \operatorname{Spec}_t A : \omega(a) \in (\alpha, \beta)\}$ con $a \in A$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; tenemos

$$\begin{aligned} \alpha < \omega(a) < \beta \quad &\Longleftrightarrow \quad \omega(a-\alpha) > 0 \ \text{ y } \ \omega(\beta - a) > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \omega((a-\alpha)^+) \neq 0 \ \text{ y } \ \omega((\beta-a)^+) \neq 0\,, \end{aligned}$$

es decir $\{\omega \in \operatorname{Spec}_t A : \omega(a) \in (\alpha, \beta)\} = \operatorname{coz}((a-\alpha)^+) \cap \operatorname{coz}((\beta - a)^+)$. Para concluir la demostración es suficiente tener en cuenta que, dados $a_1, \ldots, a_n \in A$, se satisface $\operatorname{coz}(a_1) \cap \cdots \cap \operatorname{coz}(a_n) = \operatorname{coz}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)$. □

Lema 4.3.17. *Si A es una Φ-álgebra uniformemente cerrada y cerrada por inversión, entonces (A, τ_o) es un álgebra localmente m-convexa Hausdorff que satisface:*

(i) $\operatorname{Spec}_t(A, \tau_o) = \operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A = \operatorname{Spec} A$;

(ii) (A, τ_o) *es regular y semisimple.*

Demostración. Según el teorema 4.3.13, la topología τ_o^k es localmente m-convexa y $\tau_o^k = \tau_o$; además, τ_o es Hausdorff en virtud del lema 4.3.6. La igualdad $\operatorname{Spec}_t(A, \tau_o) = \operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A$ se prueba razonando como en la última parte de la demostración del corolario 4.3.14, y de ella se sigue inmediatamente que A es semisimple porque A es real-semisimple (2.3.10). La igualdad $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A = \operatorname{Spec} A$ es el corolario 2.3.5. Por último, en el lema 4.3.16 se ha probado que (A, τ_o) es regular. □

Lema 4.3.18. *Sea A una f-álgebra. Si el espacio localmente convexo (A, τ_o) es completo, entonces A es una Φ-álgebra uniformemente cerrada.*

Demostración. Como τ_o es Hausdorff (por definición de topología completa), del corolario 4.1.12 se sigue que A_+ es cerrado y que A es arquimediana. Nos falta probar que A es uniformemente cerrada. Sea $\{a_n\}_n$ una sucesión uniformemente de Cauchy en A. Sea U un 0-entorno para τ_o y sea $\lambda > 0$ tal que $[-1, 1] \subseteq \lambda U$; si $n_0 \in \mathbb{N}$ satisface $|a_n - a_m| \leq \frac{1}{\lambda}$ cuando $n, m \geq n_0$, entonces $a_n - a_m \in [\frac{-1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}] \subseteq U$ si $n, m \geq n_0$. Esto prueba que $\{a_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy para τ_o y que por lo tanto existe $a \in A$ tal que $a_n \to a$ en (A, τ_o). Dado $\varepsilon > 0$, sea $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$ si $n, m \geq \nu$; como las operaciones de retículo son continuas para τ_o (Corolario 4.2.7), fijado n tenemos que la sucesión $\big\{|a_n - a_m|\big\}_m$ converge a $|a_n - a|$, y como A_+ es cerrado obtenemos que $|a_n - a| \leq \varepsilon$ si $n \geq \nu$, lo cual prueba que A es uniformemente cerrada. □

Teorema 4.3.19. *Sea A una f-álgebra tal que el espacio localmente convexo (A, τ_o) es completo. Son equivalentes:*
(i) *A es cerrada por inversión;*
(ii) *τ_o es localmente m-convexa.*

Demostración. En virtud del lema 4.3.18 tenemos que A es una Φ-álgebra uniformemente cerrada. Si A es cerrada por inversión entonces del lema 4.3.17 se sigue que τ_o es localmente m-convexa.

Supongamos ahora que τ_o es localmente m-convexa. Entonces (A, τ_o) es un álgebra localmente m-convexa, estrictamente real y completa (2.3.3 (ii)), e igual que en la demostración del lema 4.3.17 se prueba que $\mathrm{Spec}_t(A, \tau_o) = \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}} A$. Aplicando 3.2.39 (i) concluimos que A es cerrada por inversión (véase el ejemplo 3.2.22). □

Observación 4.3.20. Dada una f-álgebra A, en el lema 4.3.17 se probó que si A es arquimediana, uniformemente cerrada y cerrada por inversión entonces τ_o es localmente m-convexa, y el teorema 4.3.19 afirma que el recíproco es cierto cuando τ_o es completa.

Teorema de Caracterización 4.3.21 (M-P-R [46])**.** *Si A es una f-álgebra dotada de una topología localmente m-convexa, entonces A es l-isomorfa y homeomorfa a $\mathcal{C}_k(X)$, con X un k_r-espacio realcompacto, si y sólo si:*
(i) *A es bornológica y completa;*
(ii) *cada intervalo cerrado de A es acotado.*

Demostración. Si X es un k_r-espacio realcompacto, entonces ya hemos visto en los teoremas 3.3.16 y 4.3.15 que el álgebra localmente m-convexa $\mathcal{C}_k(X)$ es bornológica y completa; además, es inmediato comprobar que en $\mathcal{C}_k(X)$ todo intervalo cerrado es acotado.

Supongamos ahora que A es una f-álgebra dotada de una topología localmente m-convexa, que es bornológica y completa, y para la que todo intervalo cerrado es acotado. Del teorema 4.2.9 se sigue que la topología de A es la topología del orden τ_o, por lo que del lema 4.3.18 y del teorema 4.3.19 obtenemos que A es una Φ-álgebra uniformemente cerrada y cerrada por inversión. Del lema 4.3.17 se sigue entonces que la representación espectral $A \to \mathcal{C}(\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A)$ es inyectiva y por lo tanto, identificando A con su imagen, podemos suponer que A es una subálgebra de $\mathcal{C}(\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A)$ tal que, según el teorema 4.3.13, la topología de A es la inducida por la de $\mathcal{C}_k(\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A)$. Como A separa puntos de $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A$, el conocido teorema de Kakutani-Stone asegura que A es densa en $\mathcal{C}_k(\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A)$, y como A es completa concluimos que $A = \mathcal{C}_k(\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A)$. Para terminar, $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A$ es un espacio realcompacto, y debe ser k_r-espacio porque $\mathcal{C}_k(\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A)$ es completo (Teorema 3.3.16). $\square$

Teniendo en cuenta que todo espacio metrizable es bornológico, del teorema 3.3.17 se sigue el siguiente caso particular del teorema anterior:

Teorema de Caracterización 4.3.22 (Pulgarín [58]). *Si A es una f-álgebra que está dotada de una topología localmente m-convexa, entonces A es l-isomorfa y homeomorfa a $\mathcal{C}_k(X)$ con X un k-espacio hemicompacto, si y sólo si:*

(i) *A es de Fréchet;*

(ii) *cada intervalo cerrado de A es acotado.*

Nota. En los dos últimos teoremas, la condición (i) implica que A es tonelada y por lo tanto la condición (ii) "cada intervalo cerrado de A es acotado" puede cambiarse por: "A es localmente sólida" (véase 4.1.14).

Capítulo 5

Φ-Álgebras Topológicas

El resultado principal de este último capítulo es una caracterización de la Φ-álgebra localmente m-convexa $\mathcal{C}_k(X)$ con X un espacio topológico normal Hausdorff. Para llegar a ese resultado, en la primera sección estudiamos distintas propiedades que pueden satisfacer los ideales cerrados de un álgebra topológica, traduciéndolas a propiedades del espectro topológico y de la representación espectral, y en la segunda sección, donde se establece el teorema de caracterización mencionado, investigamos cuándo una topología localmente convexa sobre el álgebra $\mathcal{C}(X)$ es su topología de la convergencia compacta. En la tercera sección damos una versión del resultado principal en el caso normal y realcompacto. Puesto que X es realcompacto si y sólo si la topología de $\mathcal{C}_k(X)$ coincide con su topología del orden, parece natural en este caso expresar algunas de las hipótesis del teorema de caracterización en términos del orden.

5.1 Ideales cerrados en un álgebra topológica

Véanse en 3.2.16 las nociones y notaciones que utilizaremos en lo que sigue.

5.1.1. Sea A un álgebra topológica y sea $\operatorname{Spec}_t A$ su espectro topológico. Para cada subconjunto S de A tenemos en $\operatorname{Spec}_t A$ el conjunto cerrado $(S)_0 := \{\omega \in \operatorname{Spec}_t A : a(\omega) = 0 \text{ para todo } a \in S\}$ (donde $a(\omega) := \omega(a)$), y para todo subconjunto Y de $\operatorname{Spec}_t A$ tenemos en A el ideal cerrado $I_Y := \{a \in A : a(\omega) = 0 \text{ para todo } \omega \in Y\}$. De este modo, si denotamos $\mathcal{I} = \{\text{ideales cerrados de } A\}$ y $\mathcal{C} = \{\text{subconjuntos cerrados de } \operatorname{Spec}_t A\}$, entonces tenemos

las aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I} & \xrightarrow{h} & \mathcal{C} \\ I & \longmapsto & (I)_0 \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{k} & \mathcal{I} \\ F & \longmapsto & I_F \end{array},$$

donde $(A)_0 = \varnothing$ e $I_\varnothing = A$; dados $I \in \mathcal{I}$ y $F \in \mathcal{C}$, diremos que $(I)_0$ son los *ceros* del ideal I y que I_F es el *ideal asociado* al cerrado F. Es fácil ver que se satisfacen:
(a) $I \subseteq I_{(I)_0}$ y $F \subseteq (I_F)_0$ para cualesquiera $I \in \mathcal{I}$ y $F \in \mathcal{C}$;
(b) si I_1, $I_2 \in \mathcal{I}$ tales que $I_1 \subseteq I_2$, entonces $(I_2)_0 \subseteq (I_1)_0$; como consecuencia, de (a) se sigue que para todo $F \in \mathcal{C}$ se satisface $I_F = I_{(I_F)_0}$;
(c) si F_1, $F_2 \in \mathcal{C}$ tales que $F_1 \subseteq F_2$, entonces $I_{F_2} \subseteq I_{F_1}$; como consecuencia, de (a) se sigue la igualdad $(I)_0 = (I_{(I)_0})_0$ para todo $I \in \mathcal{I}$.

5.1.2. Sea A un álgebra topológica. Que A sea regular significa que los conjuntos cerrados de $\operatorname{Spec}_t A$ son todos de la forma $(I)_0$ con I ideal de A, es decir, que la colección $\{(a)_0 : a \in A\}$ sea una base de cerrados de la topología de $\operatorname{Spec}_t A$. Es claro entonces que el que A sea regular es equivalente a que A *separe puntos y cerrados* en el siguiente sentido: dados en $\operatorname{Spec}_t A$ un cerrado F y punto ω_0 tales que $\omega_0 \notin F$, existe $a \in A$ tal que $a(\omega_0) = 1$ y $a(\omega) = 0$ para todo $\omega \in F$.

Lema 5.1.3. *Un álgebra topológica A es regular si y sólo si se satisface alguna de las siguientes afirmaciones equivalentes:*
(i) *k es inyectiva;*
(ii) *h es epiyectiva;*
(iii) *$h \circ k$ es la aplicación identidad de $\mathcal{C}$.*

Demostración. La condición (ii) es equivalente a que A sea regular: para cada ideal I de A se satisface $(I)_0 = (\bar{I})_0$, donde $\bar{I}$ denota la clausura de I en A, por lo tanto A es regular si y sólo si h es epiyectiva. La condición (iii) es equivalente a que A separe puntos y cerrados: dado un cerrado F de $\operatorname{Spec}_t A$, como siempre se satisface $F \subseteq (I_F)_0$, será $F = (I_F)_0$ si y sólo si para cada $\omega \in \operatorname{Spec}_t A$, $\omega \notin F$, existe $a \in I_F$ tal que $a(\omega) = 1$. Como es inmediato que (iii) implica (i), terminamos la demostración si vemos que (i) implica (iii): para cada $F \in \mathcal{C}$ tenemos $I_F = I_{(I_F)_0}$, de modo que si k es inyectiva se satisface $F = (I_F)_0$. □

5.1.4. Dado que será habitual que hagamos cociente de un álgebra topológica por un ideal, es importante que en adelante se tenga en cuenta lo que digamos

a continuación. Si A es un álgebra topológica e I es un ideal propio de A, hemos dotado el álgebra cociente A/I con la más fina topología para la cual A/I es un álgebra topológica y el morfismo de paso al cociente $\pi : A \to A/I$ es continuo (véase 3.2.4). Cuando A es un álgebra localmente m-convexa esta topología coincide con la topología cociente (véase 3.2.14), en cuyo caso, de las propiedades de la topología cociente y de la conocida correspondencia entre los ideales de A que contienen a I y los ideales de A/I, se sigue que existe una biyección entre los ideales cerrados de A que contienen a I y los ideales cerrados de A/I. Si A no es localmente m-convexa esta biyección puede no existir. En cualquier caso, sí existe una correspondencia biunívoca entre los ideales maximales reales cerrados de A que contienen a I y los ideales maximales reales cerrados de A/I, esto es, un morfismo de álgebras $\omega : A/I \to \mathbb{R}$ es continuo si y sólo si es continua la composición $\omega \circ \pi : A \to \mathbb{R}$.

Proposición 5.1.5. *Sea A un álgebra topológica. Tenemos:*

(i) *dado un ideal propio I de A,* $\operatorname{Spec}_t(A/I) = (I)_0$ (*igualdad topológica*) *y A/I es regular si lo es A;*

(ii) *A/I_F es semisimple para todo cerrado no vacío F de* $\operatorname{Spec}_t A$.

Demostración. El apartado (i) se sigue de la funtorialidad del espectro topológico. Si $f : A \to B$ es un morfismo de álgebras topológicas, entonces la aplicación $f^* : \operatorname{Spec}_t B \to \operatorname{Spec}_t A$, $\omega \mapsto \omega \circ f$, es continua, y el morfismo natural "componer con f^*" hace que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{C}(\operatorname{Spec}_t A) \arrow[d, "\circ f^*"] \\ B \arrow[r] & \mathcal{C}(\operatorname{Spec}_t B) \end{tikzcd}$$

sea conmutativo, porque para cada $a \in A$ se satisface $a \circ f^* = f(a)$ (esto es, el elemento a representado como función sobre $\operatorname{Spec}_t A$ y compuesto con f^* es igual a la representación de $f(a)$ como función sobre $\operatorname{Spec}_t B$). Como consecuencia, si el morfismo f es epiyectivo, entonces la aplicación f^* es inyectiva y la topología de $\operatorname{Spec}_t B$ es la topología inicial de f^* (es decir, f^* hace de $\operatorname{Spec}_t B$ un subespacio topológico de $\operatorname{Spec}_t A$). Como caso particular de lo anterior, es claro que la igualdad conjuntista $\operatorname{Spec}_t(A/I) \overset{\pi^*}{=} (I)_0$ mencionada en 5.1.4 es también igualdad topológica; además, es fácil ver que la topología de Zariski de $\operatorname{Spec}_t A$ induce sobre $\operatorname{Spec}_t(A/I)$ su topología de Zariski, por lo que concluimos que A/I es regular cuando lo es A.

Veamos (ii). El ideal I_F es propio porque F es no vacío, y como $F \subseteq (I_F)_0$, por (i) tenemos $\operatorname{Spec}_t(A/I_F) \neq \varnothing$. Ahora, los ideales maximales reales cerrados de A/I_F se corresponden con los ideales maximales reales cerrados de A que contienen a I_F, y como la intersección de estos últimos es $I_{(I_F)_0} = I_F$ concluimos que A/I_F es semisimple. □

Corolario 5.1.6. *Si A es un álgebra topológica regular, entonces para cada cerrado no vacío F de $\operatorname{Spec}_t A$ se satisface que A/I_F es un álgebra topológica regular y semisimple cuyo espectro topológico es F.*

Definición 5.1.7. Diremos que un álgebra topológica A tiene la propiedad I_1 si todo ideal cerrado propio de A es intersección de ideales maximales reales cerrados, es decir, si la aplicación $k : \mathcal{C} \to \mathcal{I}$ es epiyectiva.

Lema 5.1.8. *Un álgebra topológica A tiene la propiedad I_1 si y sólo si se satisface alguna de las siguientes afirmaciones equivalentes:*
(i) *k es epiyectiva;*
(ii) *h es inyectiva;*
(iii) *$k \circ h$ es la aplicación identidad de $\mathcal{I}$.*

Demostración. (i)⇒(iii) Dado $I \in \mathcal{I}$ existe $F \in \mathcal{C}$ tal que $I = I_F$, de modo que $F \subseteq (I_F)_0 = (I)_0$ y por lo tanto $I_{(I)_0} \subseteq I_F = I$; como según lo dicho en 5.1.1 siempre se satisface la otra inclusión, concluimos que $I_{(I)_0} = I$.

(iii)⇒(ii) Es trivial.

(ii)⇒(i) Dado $I \in \mathcal{I}$ tenemos $(I)_0 = (I_{(I)_0})_0$ (véase 5.1.1 (c)), de modo que si h es inyectiva debe ser $I = I_{(I)_0}$, es decir, I es la imagen por k del cerrado $(I)_0$. □

Corolario 5.1.9. *Un álgebra topológica A es regular y tiene la propiedad I_1, si y sólo si, las aplicaciones h y k establecen una biyección entre los ideales cerrados de A y los subconjuntos cerrados de $\operatorname{Spec}_t A$.*

Ejemplo 5.1.10. Sea X un espacio topológico completamente regular Hausdorff, en cuyo caso sabemos que $\operatorname{Spec}_t \mathcal{C}_k(X) = X$ (Proposición 3.3.10). Del teorema 3.3.8 se sigue que $\mathcal{C}_k(X)$ es regular y tiene la propiedad I_1.

Observación 5.1.11. Sea A un álgebra topológica. Si A es semisimple (lo cual implica que el espacio topológico $\operatorname{Spec}_t A$ es no vacío), entonces el ideal 0 de A es cerrado y por tanto A es Hausdorff. El recíproco es válido cuando A tiene la propiedad I_1: si A es Hausdorff y tiene la propiedad I_1, entonces el ideal 0 debe ser intersección de ideales maximales reales cerrados, en cuyo caso $\operatorname{Spec}_t A \neq \varnothing$ y A es semisimple.

Aunque en los enunciados de los resultados se especificarán claramente las hipótesis de los espacios topológicos que aparecerán en ellos, en los comentarios que siguen supondremos, para simplificar, que X es un espacio topológico completamente regular Hausdorff.

Como ya dijimos al comienzo de este capítulo, estamos interesados en la caracterización del álgebra topológica $\mathcal{C}_k(X)$ cuando X es normal; por este motivo, seguidamente expresaremos la normalidad de X en términos de los ideales cerrados de $\mathcal{C}_k(X)$.

Definiciones 5.1.12. Sea A un álgebra topológica. Diremos que A tiene la propiedad I_3 si en A no existen dos ideales cerrados cuya suma sea densa y propia. Diremos que A es *normal* si separa cerrados de $\operatorname{Spec}_t A$ en el siguiente sentido: si F, G son cerrados no vacíos y disjuntos de $\operatorname{Spec}_t A$, entonces existe $a \in A$ tal que $a(\omega) = 0$ para todo $\omega \in F$ y $a(\omega) = 1$ para todo $\omega \in G$.

Es claro que si A es normal entonces A es regular, y el lema de Urysonh afirma que X es normal si y sólo si $\mathcal{C}_k(X)$ es normal.

Lema 5.1.13. *Si X es un espacio topológico completamente regular Hausdorff, entonces $\mathcal{C}_k(X)$ es normal si y sólo si tiene la propiedad* I_3.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{C}_k(X)$ es normal y sean I y J ideales cerrados de A tales que $I + J$ es denso, en cuyo caso tenemos $(I + J)_0 = \varnothing$. Si F y G son cerrados de X tales que $I = I_F$ y $J = I_G$, entonces $F \cap G = (I)_0 \cap (J)_0 = (I + J)_0 = \varnothing$ y por lo tanto existe $f \in \mathcal{C}_k(X)$ tal que $f(F) = 0$ y $f(G) = 1$; como $f \in I$, $g = 1 - f \in J$ y $f + g = 1$, debe ser $I + J = \mathcal{C}_k(X)$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{C}_k(X)$ satisface la propiedad I_3 y sean F y G cerrados no vacíos y disjuntos de X. Tenemos $(I_F + I_G)_0 = F \cap G = \varnothing$, por lo que $I_F + I_G$ no está contenido en ningún ideal maximal real cerrado de $\mathcal{C}_k(X)$; como, según 3.2.38 (i), todo ideal no denso de $\mathcal{C}_k(X)$ está contenido en algún ideal maximal real cerrado, obtenemos que $I_F + I_G$ es denso y por lo tanto $I_F + I_G = \mathcal{C}(X)$, es decir, existen $f \in I_F$ y $g \in I_G$ tales que $f + g = 1$; es claro que $f(F) = 0$ y $f(G) = 1$. $\square$

Observación 5.1.14. Para un álgebra topológica A no es cierta, en general, la equivalencia del anterior lema. Nótese que en su demostración se ha utilizado que $\mathcal{C}_k(X)$ tiene la propiedad I_1, que es regular, y que cada ideal no denso suyo está contenido en algún ideal maximal real cerrado.

Lo dicho en el anterior párrafo justifica la siguiente definición, y un análisis de la demostración del último lema hace que sea inmediata la demostración del teorema posterior, que generaliza al mencionado lema.

Definición 5.1.15. Sea A un álgebra topológica. Diremos que A tiene la propiedad I_2 si todo ideal no denso suyo está contenido en algún ideal maximal real cerrado.

Es claro que si A tiene la propiedad I_1 entonces A tiene la propiedad I_2. Según el teorema 3.2.38 (i), toda álgebra localmente m-convexa Hausdorff racional (en particular $\mathcal{C}_k(X)$) tiene la propiedad I_2.

Teorema 5.1.16. *Para toda álgebra topológica A tenemos:*
(i) *si A es normal y tiene la propiedad I_1, entonces A tiene la propiedad I_3;*
(ii) *si A es regular y tiene las propiedades I_2 e I_3, entonces A es normal.*
Como consecuencia, si A es regular y tiene la propiedad I_1 (esto es, si hay una biyección entre los subconjuntos cerrados de $\mathrm{Spec}_t\, A$ y los ideales cerrados de A), entonces A es normal si y sólo si A tiene la propiedad I_3.

Observación 5.1.17. Si A es un álgebra topológica con la propiedad I_2, entonces es claro que todo ideal maximal cerrado de A es real (como ocurre en $\mathcal{C}_k(X)$), es decir, las nociones "ideal maximal real cerrado" e "ideal maximal cerrado" son equivalentes en A.

En el siguiente lema queda reflejado el buen comportamiento al pasar al cociente de todas las propiedades que hemos definido (recuérdese lo dicho en 5.1.4):

Lema 5.1.18. *Sea I un ideal propio de un álgebra topológica A. Tenemos:*
(i) *si A es regular, entonces A/I es regular;*
(ii) *si A es normal, entonces A/I es normal;*
(iii) *si A tiene la propiedad I_1, entonces A/I tiene la propiedad I_1;*
(iv) *si A tiene la propiedad I_2, entonces A/I tiene la propiedad I_2;*
(v) *si A es localmente m-convexa y tiene la propiedad I_3, entonces A/I tiene la propiedad I_3.*

Demostración. Denotemos por $\pi : A \to A/I$ el morfismo de paso al cociente. El apartado (i) se probó en la proposición 5.1.5 (i), donde también se vió que el espectro topológico de A/I es el subespacio topológico $(I)_0$ de $\mathrm{Spec}_t\, A$, y que la función que $\pi(a) \in A/I$ $(a \in A)$ define sobre $\mathrm{Spec}_t(A/I)$ es la restricción a $(I)_0$ de la función que a define sobre $\mathrm{Spec}_t\, A$. En particular, dado un cerrado C de $\mathrm{Spec}_t\, A$ contenido en $(I)_0$, si $I_C = \{a \in A : a(C) = 0\}$ y $J_C = \{\pi(a) \in A/I : \pi(a)(C) = 0\}$, entonces tenemos $J_C = \pi(I_C)$.

Supongamos que A es normal, esto es, que para cada par de cerrados disjuntos F, G de $\mathrm{Spec}_t\, A$ se satisface $I_F + I_G = A$. Si ahora F, G son cerrados

disjuntos de $(I)_0$ tenemos $J_F + J_G = \pi(I_F) + \pi(I_G) = \pi(I_F + I_G) = \pi(A) = A/I$. Por lo tanto A/I es normal.

Supongamos que A tiene la propiedad I_1. Si J es un ideal cerrado propio de A/I, entonces $\pi^{-1}(J)$ es un ideal cerrado propio de A y por lo tanto existe un cerrado C en $\operatorname{Spec}_t A$ tal que $I_C = \pi^{-1}(J)$; nótese que $C \subseteq (I)_0$ porque $I \subseteq I_C$. Tenemos $J_C = \pi(I_C) = \pi(\pi^{-1}(J)) = J$, de modo que A/I tiene la propiedad I_1.

Supongamos que A tiene la propiedad I_2. Sea J un ideal no denso de A/I y denotemos $I_0 = \pi^{-1}(J)$. Por la continuidad de π tenemos $\pi(\bar{I}_0) \subseteq \overline{\pi(I_0)} = \bar{J} \neq A/I$, y por tanto I_0 no es denso en A. Entonces existe un ideal maximal real cerrado M en A tal que $I_0 \subseteq M$, y como $I \subseteq I_0$ concluimos que $\pi(M)$ es un ideal maximal real cerrado de A/I que contiene a J, lo que prueba que A/I tiene la propiedad I_2.

Por último, supongamos que A es localmente m-convexa y que A/I no tiene la propiedad I_3, y veamos que entonces A no tiene la propiedad I_3. Existen ideales cerrados J_1, J_2 en A/I tales que $J_1 + J_2 \neq A/I$ y $\overline{J_1 + J_2} = A/I$. Si denotamos $I_1 = \pi^{-1}(J_1)$, $I_2 = \pi^{-1}(J_2)$, entonces I_1 e I_2 son ideales cerrados de A tales que $I_1 + I_2 \neq A$. Como el álgebra A/I está dotada de su topología cociente y $\overline{I_1 + I_2}$ es un ideal cerrado de A que contiene a I, tenemos que $\pi(\overline{I_1 + I_2})$ es un ideal cerrado de A/I, y como $\pi(\overline{I_1 + I_2})$ contiene a $J_1 + J_2$ debe ser $A/I = \overline{J_1 + J_2} \subseteq \pi(\overline{I_1 + I_2})$, es decir, $\overline{I_1 + I_2} = A$. $\square$

5.1.19. Dada un álgebra topológica A tal que $\operatorname{Spec}_t A \neq \varnothing$, nos planteamos la cuestión de expresar en términos de ideales cerrados el que se satisfaga la siguiente propiedad (que cuando $A = \mathcal{C}_k(X)$ es bien conocida): un elemento $a \in A$ es invertible si y sólo si $a(\omega) \neq 0$ para todo $\omega \in \operatorname{Spec}_t A$. Puesto que "$a(\omega) \neq 0$ para todo $\omega \in \operatorname{Spec}_t A$" significa "$a$ no pertenece a ningún ideal maximal real cerrado de A", es claro cómo probar el siguiente lema (véase la demostración de 3.2.39 (i)):

Lema 5.1.20. *Sea A un álgebra topológica con la propiedad I_2 y tal que $\operatorname{Spec}_t A \neq \varnothing$. Son equivalentes:*
(i) *en A no existen ideales principales que sean propios y densos;*
(ii) *$a \in A$ es invertible si y sólo si $a(\omega) \neq 0$ para todo $\omega \in \operatorname{Spec}_t A$.*

5.1.21. Consideremos ahora la representación espectral $A \to \mathcal{C}(\operatorname{Spec}_t A)$ de un álgebra topológica A, e investiguemos cuándo es continua si consideramos el álgebra $\mathcal{C}(\operatorname{Spec}_t A)$ dotada de su topología de la convergencia compacta. Según el corolario 3.3.12, para cada subconjunto compacto K de $\operatorname{Spec}_t A$ tenemos

que $\{f \in \mathcal{C}(\operatorname{Spec}_t A) : 0 \notin f(K)\}$ es un abierto de $\mathcal{C}_k(\operatorname{Spec}_t A)$, de modo que si denotamos $S_K = \{a \in A : 0 \notin a(K)\}$ y la representación espectral es continua, entonces S_K es un abierto de A. Se satisface:

Proposición 5.1.22. *Sea A un álgebra topológica cuya topología es localmente convexa. Son equivalentes:*
(i) *la representación espectral de A es continua;*
(ii) *S_K es abierto para todo compacto K de $\operatorname{Spec}_t A$.*

Demostración. Según lo dicho antes de esta proposición, sólo debemos demostrar que (ii) implica (i), así que supongamos que se satisface (ii). Dado un compacto K de $\operatorname{Spec}_t A$ y dado $\varepsilon > 0$, debemos probar que $U = \{a \in A : |a(\omega)| < \varepsilon$ para todo $\omega \in K\}$ es un entorno de 0. Como S_K es un entorno abierto de $\varepsilon \in A$, si $V = S_K - \varepsilon$ entonces $W = V \cap (-V)$ es un entorno de 0, y es claro para todo $a \in W$ se satisface $\pm\varepsilon \notin a(K)$. Si W' es un entorno convexo de 0 contenido en W, entonces $W' \subseteq U$, ya que cada $\omega \in K$ es una aplicación continua de A en $\mathbb{R}$ que aplica el conjunto conexo W' en un intervalo de $\mathbb{R}$ que contiene a 0 y no contiene a $\pm\varepsilon$. □

Si queremos dar un enunciado de la anterior proposición en términos de los ideales cerrados del álgebra topológica, esto es, sin hacer referencia a los subconjuntos compactos del espectro topológico, entonces necesitamos caracterizar de algún modo dichos compactos. Veamos primero qué ocurre en las álgebras de funciones continuas e intentemos después generalizar dicha situación para un álgebra topológica arbitraria.

Lema 5.1.23. *Sea X un espacio topológico completamente regular Hausdorff y sea C un subconjunto cerrado de X. Son equivalentes:*
(i) *C es compacto;*
(ii) *cada ideal maximal de $\mathcal{C}_k(X)$ que contiene a I_C es cerrado (y por lo tanto real).*

Demostración. Para $C = \varnothing$ se satisfacen trivialmente (i) y (ii), así que hagamos la demostración en el caso $C \neq \varnothing$, esto es, cuando el ideal I_C es propio.

Supongamos en primer lugar que C es compacto. Hay un isomorfismo natural $\mathcal{C}_k(X)/I_C = \mathcal{C}_k(C)$ de álgebras topológicas, siendo el morfismo de paso al cociente $\mathcal{C}_k(X) \to \mathcal{C}_k(X)/I_C$ igual al morfismo de restricción $\mathcal{C}_k(X) \to \mathcal{C}_k(C)$ (véase 3.3.2). Como los ideales maximales de $\mathcal{C}_k(X)$ que contienen a I_C se identifican con los ideales maximales de $\mathcal{C}_k(X)/I_C$, y además por dicha

identificación los ideales cerrados se corresponden, para obtener (ii) basta tener en cuenta que todo ideal maximal de $\mathcal{C}_k(C)$ es cerrado (Teorema 3.3.11).

Supongamos ahora que cada ideal maximal de $\mathcal{C}_k(X)$ que contiene a I_C es cerrado. Según el lema 5.1.18 (i), $\mathcal{C}_k(X)/I_C$ es regular porque lo es $\mathcal{C}_k(X)$, de modo que la topología de $C = \operatorname{Spec}_t(\mathcal{C}_k(X)/I_C)$ coincide con la inducida por la topología de Zariski de $\operatorname{Spec}_m(\mathcal{C}_k(X)/I_C)$; puesto que en $\mathcal{C}_k(X)$ todo ideal maximal cerrado es real obtenemos $\operatorname{Spec}_t(\mathcal{C}_k(X)/I_C) = \operatorname{Spec}_m(\mathcal{C}_k(X)/I_C)$, y por lo tanto C es compacto. □

5.1.24. Dados un álgebra topológica A y un cerrado no vacío C de su espectro topológico (el caso vacío es trivial), la cuestión que surge ahora es cuándo la equivalencia del lema anterior es cierta para el cerrado C, esto es, cuándo son equivalentes las condiciones "C es compacto" y "cada ideal maximal de A que contiene a I_C es real y cerrado". Analizando la demostración del último lema es fácil ver que si A es regular entonces es cierto que (ii) implica (i). Sin embargo, para que sea cierto que (i) implica (ii) necesitaremos añadir algunas hipótesis.

Nótese que A/I_C es semisimple y que sus ideales maximales (ideales maximales reales cerrados) están en correspondencia con los ideales maximales (ideales maximales reales cerrados) de A que contienen a I_C, por lo que si nos fijamos en el caso particular $C = \operatorname{Spec}_t A$, entonces podemos suponer que A es semisimple y la cuestión planteada la enunciamos con la siguiente pregunta: ¿es cierto que si $\operatorname{Spec}_t A$ es compacto entonces todo ideal maximal de A es real y cerrado?, es decir, ¿si $\operatorname{Spec}_t A$ es compacto entonces se satisface la igualdad conjuntista $\operatorname{Spec}_t A = \operatorname{Spec}_m A$? Es claro que si encontramos hipótesis sobre A que impliquen que $\operatorname{Spec}_m A$ sea una compactificación de $\operatorname{Spec}_t A$, entonces bajo dichas hipótesis tendremos una respuesta afirmativa a la última pregunta, y si además dichas hipótesis se conservan para los cocientes de la forma A/I_C, entonces tendremos una respuesta afirmativa para el caso general.

Investiguemos cómo debe ser A, además de semisimple, para que $\operatorname{Spec}_m A$ sea una compactificación de $\operatorname{Spec}_t A$, esto es, para que se satisfagan: (i) la topología de $\operatorname{Spec}_t A$ es la inducida por la de Zariski de $\operatorname{Spec}_m A$; (ii) $\operatorname{Spec}_t A$ es un subconjunto denso de $\operatorname{Spec}_m A$; (iii) $\operatorname{Spec}_m A$ es Hausdorff. La propiedad (i) es la definición de que A sea regular, y como A es semisimple la propiedad (iii) es equivalente a que A sea de Gelfand (véase el teorema 2.3.16), esto es, que cada ideal primo de A esté contenido en un único ideal maximal; por último, dado un subconjunto Z de $\operatorname{Spec}_m A$, es fácil ver que Z es denso en $\operatorname{Spec}_m A$ si y sólo si se satisface la igualdad $\cap_{M\in Z} M = \operatorname{rad}_J A$ (= radical

de Jacobson de A, véase 2.3.1), y por lo tanto $\operatorname{Spec}_t A$ es denso en $\operatorname{Spec}_m A$ porque A es semisimple.

Como los cocientes de la forma A/I_C son semisimples (aunque no lo sea A, véase la proposición 5.1.5 (ii)), concluimos que las hipótesis que necesitamos son ser "regular" y "Gelfand", propiedades que se conservan al hacer cociente por un ideal cualquiera.

Teorema 5.1.25. *Sea A un álgebra topológica regular y de Gelfand. Para todo cerrado no vacío C de $\operatorname{Spec}_t A$ se satisface que $\operatorname{Spec}_m(A/I_C)$ es una compactificación de $\operatorname{Spec}_t(A/I_C)$. Como consecuencia son equivalentes:*
(i) *C es compacto;*
(ii) *cada ideal maximal de A que contiene a I_C es real y cerrado.*

Demostración. Se ha hecho a lo largo de la discusión 5.1.24. □

Definición 5.1.26. Diremos que un ideal I de un álgebra topológica A es un C-*ideal*, si I es cerrado y todo ideal maximal de A que contiene a I es real y cerrado.

5.1.27. Sea A un álgebra topológica regular y de Gelfand.

Si cada ideal cerrado propio de A es intersección de ideales maximales reales cerrados (propiedad I_1), entonces hay una correspondencia biunívoca entre los ideales cerrados de A y los subconjuntos cerrados de $\operatorname{Spec}_t A$; como consecuencia, el último teorema establece una biyección entre los C-ideales de A y los subconjuntos compactos de $\operatorname{Spec}_t A$.

En general, habrá más ideales cerrados en A que los de la forma I_F con F cerrado de $\operatorname{Spec}_t A$, y por tanto pueden existir C-ideales que no estén en la familia $\{I_K : K \text{ compacto de } \operatorname{Spec}_t A\}$. En cualquier caso, si I es un C-ideal de A entonces $(I)_0$ es compacto, pues $I_{(I)_0}$ también es un C-ideal porque se satisface la inclusión $I \subseteq I_{(I)_0}$.

Ya estamos en condiciones de dar una versión de la proposición 5.1.22 es términos de ideales cerrados. Para cada ideal propio I de un álgebra A, $\pi_I : A \to A/I$ será el morfismo de paso al cociente y $(A/I)^{-1}$ denotará el conjunto de los elementos invertible de A/I.

Teorema 5.1.28. *Sea A un álgebra topológica regular y de Gelfand cuya topología es localmente convexa. La representación espectral de A es continua si y sólo si para todo* C-*ideal propio I de A se satisface que $\pi_I^{-1}\big((A/I)^{-1}\big)$ es abierto en A.*

Demostración. Si I es un C-ideal propio de A y denotamos $K = (I)_0$, entonces $\pi_I^{-1}((A/I)^{-1}) = \{a \in A : a(\omega) \neq 0 \text{ para todo } \omega \in K\} = S_K$. En efecto, dado $a \in A$, $\pi_I(a)$ es invertible en A/I si y sólo si $\pi(a)$ no está contenido en ningún ideal maximal de A/I, si y sólo si a no está contenido en ningún ideal maximal de A que contenga a I, si y sólo si a no está contenido en ningún ideal maximal real cerrado de A que contenga a I, si y sólo si $a \in S_K$.

Después de lo dicho en el párrafo anterior, la demostración se sigue de aplicar la proposición 5.1.22 sin más que tener en cuenta, según 5.1.25 y 5.1.27, que si I es un C-ideal de A entonces $(I)_0$ es compacto, y que si C es un subconjunto compacto de $\operatorname{Spec}_t A$ entonces I_C es un C-ideal. □

5.2 Caracterización de $\mathcal{C}_k(X)$ con X normal

Como paso previo para obtener el resultado anunciado al comienzo de este capítulo, vamos a caracterizar la topología de la convergencia compacta sobre $\mathcal{C}(X)$ cuando X es normal. Para esto último utilizaremos sin demostrar los dos próximos teoremas (véase en 1.2.11 la noción de "S^1-separación").

Teorema 5.2.1 (Tietze [68])**.** *Sea X un espacio topológico completamente regular Hausdorff y sea E un subespacio vectorial de $\mathcal{C}^*(X)$ que contiene a las funciones constantes. Si E S^1-separa cerrados de X, entonces E es uniformemente denso en $\mathcal{C}^*(X)$.*

Definición 5.2.2. Dada una función continua f definida sobre un espacio topológico X, llamaremos *soporte* de f a la clausura del abierto $\operatorname{coz}(f)$.

Teorema 5.2.3 (Bade-Curtis [8])**.** *Sean K un espacio topológico compacto Hausdorff y $\| \ \|$ una m-norma sobre $\mathcal{C}(K)$, y denotemos por $\mathcal{O}$ la familia de los abiertos U de K para los que existe $\lambda > 0$ satisfaciendo:*

$$\|f\| \leq \lambda \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

para todo $f, g \in \mathcal{C}(K)$ tal que $K \setminus U \subseteq (f)_0 \cap (g)_0$ y $fg = f$. Si $O = \bigcup_{U \in \mathcal{O}} U$ y $\mathcal{F} = K \setminus O$, entonces $\mathcal{F}$ es finito (ó vacío) y la inclusión $(\mathcal{L}(\mathcal{F}), \| \ \|_\infty) \to (\mathcal{C}(K), \| \ \|)$ es continua, donde $\mathcal{L}(\mathcal{F}) = \{f \in \mathcal{C}(K) : f$ es constante en un entorno de cada punto de $\mathcal{F}\}$.

Lema 5.2.4. *Sea K un espacio topológico compacto Hausdorff y sea $\| \ \|$ una m-norma sobre $\mathcal{C}(K)$. Dados $f \in \mathcal{C}(K)$, $\lambda > 0$ y U abierto de K, son equivalentes las afirmaciones:*

(i) *si* $g \in \mathcal{C}(K)$ *es tal que* $K \setminus U \subseteq (f)_0 \cap (g)_0$ *y* $fg = f$, *entonces* $\|f\| \leq \lambda \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ *;*
(ii) *si* $\operatorname{supp}(f) \subseteq U$, *entonces* $\|f\| \leq \lambda \|f\|_\infty$.

Demostración. Supondremos que $f \neq 0$, pues el caso $f = 0$ es trivial.

(i)⇒(ii) Si $\operatorname{supp}(f) \subseteq U$, entonces $\operatorname{supp}(f)$ y $K \setminus U$ son disjuntos y por lo tanto existe $g \in \mathcal{C}(K)$ tal que $g = 1$ sobre $\operatorname{supp}(f)$, $g = 0$ sobre $K \setminus U$ y $\|g\|_\infty = 1$; en particular $fg = f$ y $K \setminus U \subseteq (f)_0 \cap (g)_0$. Aplicando (i) obtenemos $\|f\| \leq \lambda \|f\|_\infty \|g\|_\infty = \lambda \|f\|_\infty$.

(ii)⇒(i) Sea $g \in \mathcal{C}(K)$ tal que $fg = f$ y $K \setminus U \subseteq (f)_0 \cap (g)_0$. Entonces

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in K : f(x) \neq 0\}} \subseteq \{x \in K : g(x) = 1\} \subseteq U\,.$$

Como además $1 \leq \|g\|_\infty$, de (ii) obtenemos $\|f\| \leq \lambda \|f\|_\infty \leq \lambda \|f\|_\infty \|g\|_\infty$. □

Teorema 5.2.5 (Requejo [61]). *Sea X un espacio topológico completamente regular Hausdorff y sea $\| \ \|$ una m-norma sobre $\mathcal{C}(X)$. Si para todo ideal cerrado I en $(\mathcal{C}(X), \| \ \|)$ existe un subconjunto cerrado C de X tal que $I = I_C$, entonces X es compacto y $(\mathcal{C}(X), \| \ \|) = \mathcal{C}_k(X)$.*

Demostración. Por una parte, de las hipótesis se sigue que todo ideal maximal cerrado de $(\mathcal{C}(X), \| \ \|)$ es de la forma I_x para algún $x \in X$, por lo que $\operatorname{Spec}_t(\mathcal{C}(X), \| \ \|)$ es de modo natural un subconjunto de X; es fácil ver que la topología de $\operatorname{Spec}_t(\mathcal{C}(X), \| \ \|)$ es la inducida por la de X (porque X es completamente regular). Por otra parte, sea $x \in X$ y veamos que el ideal maximal I_x es cerrado en $\operatorname{Spec}_t(\mathcal{C}(X), \| \ \|)$. Sea C el subconjunto cerrado de X que satisface que I_C es igual a la clausura del ideal $\eta_x = \{f \in \mathcal{C}(X) : f$ se anula en algún entorno de $x\}$. Si C es vacío, entonces η_x es denso en $(\mathcal{C}(X), \| \ \|)$ y por lo tanto existe $f \in \eta_x$, $f \neq 0$, tal que $\|1 - f\| \leq 1/2$. Si consideramos $g \in \mathcal{C}(X)$ tal que $g(x) \neq 0$ y $g = 0$ sobre $\operatorname{supp}(f)$, entonces $gf = 0$ y por tanto

$$\|g\| = \|g(1-f)\| \leq \|g\| \|1 - f\| \leq 1/2 \|g\|\,;$$

como consecuencia obtenemos $g = 0$, lo que es una contradicción. Luego C debe ser no vacío. Además, si $y \in X - \{x\}$ entonces $y \notin C$ porque existe $h \in \eta_x$ tal que $h(y) \neq 0$. Por lo tanto $C = \{x\}$ y el ideal maximal I_x es cerrado.

Hemos probado la igualdad $\operatorname{Spec}_t(\mathcal{C}(X), \| \ \|) = X$, y como consecuencia obtenemos que X es compacto y que la aplicación identidad $(\mathcal{C}(X), \| \ \|) \to$

$\mathcal{C}_k(X)$ (= representación espectral de $(\mathcal{C}(X), \| \ \|)$) es continua (véase el teorema 3.2.41). Para terminar la demostración vamos a ver que, en este caso, el conjunto $\mathcal{F}$ definido en el teorema 5.2.3 es vacío y por lo tanto $\mathcal{L}(\mathcal{F}) = \mathcal{C}(X)$. Como consecuencia de dicho teorema resultará entonces que la aplicación identidad $\mathcal{C}_k(X) \to (\mathcal{C}(X), \| \ \|)$ es continua.

Sea $\lambda > 0$ tal que $\|g\| \leq \lambda \|g\|_\infty$ para toda $g \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$. Con las notaciones del teorema 5.2.3, si existe $x \in \mathcal{F}$, entonces el abierto $U_x = O \cup \{x\}$ no está en $\mathcal{O}$, por lo que el lema 5.2.4 asegura que existe $f \in \mathcal{C}(X)$ tal que $x \in \operatorname{supp}(f) \subset U_x$, $\|f\| > \lambda$ y $\|f\|_\infty = 1$. Sea $\alpha = f(x)$ y consideremos el conjunto

$$H = \alpha + \eta_x = \{h \in \mathcal{C}(X) : h = \alpha \text{ en un entorno de } x\};$$

es claro que f está en la clausura de H porque I_x es la clausura de η_x y $f - \alpha \in I_x$. Sea $\{h_n\}_n \subset H$ una sucesión tal que $h_n \xrightarrow{\| \ \|} f$. Como los cerrados $\operatorname{supp}(f)$ y $\mathcal{F} - \{x\}$ son disjuntos, existe $h \in \mathcal{C}(X)$ que se anula en un entorno de $\mathcal{F} - \{x\}$ y que toma el valor 1 en un entorno de $\operatorname{supp}(f)$; en particular tenemos $hh_n \xrightarrow{\| \ \|} hf = f$, con lo que podemos suponer que $\{h_n\}_n \subset \mathcal{L}(\mathcal{F})$ y por lo tanto $\|h_n\| \leq \lambda \|h_n\|_\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, $\|h_n\|_\infty \to \|f\|_\infty = 1$ porque la aplicación $(\mathcal{C}(X), \| \ \|) \to \mathcal{C}_k(X)$ es continua, por lo que considerando $g_n = h_n / \|h_n\|_\infty$ obtenemos $g_n \xrightarrow{\| \ \|} f$. Pero la sucesión $\{g_n\}_n$ satisface $\|g_n\| \leq \lambda$ para todo n, en contradicción con $\|f\| > \lambda$. $\square$

En todo lo que sigue, y siguiendo la notación utilizada en el capítulo 3, la topología de $\mathcal{C}_k(X)$ la denotaremos por τ_k.

Teorema 5.2.6 (Requejo [61]). *Sea X un espacio topológico normal Hausdorff y sea τ una topología localmente m-convexa Hausdorff sobre $\mathcal{C}(X)$. Si para cada ideal cerrado I de $(\mathcal{C}(X), \tau)$ existe un subconjunto cerrado C en X tal que $I = I_C$, entonces $\tau \leq \tau_k$.*

Demostración. Hay que probar que la aplicación identidad $\mathcal{C}_k(X) \to (\mathcal{C}(X), \tau)$ es continua, esto es, que para cada m-seminorma continua (no nula) $q : (\mathcal{C}(X), \tau) \to \mathbb{R}$ el morfismo

$$\mathcal{C}_k(X) \to (\mathcal{C}(X)/N_q, \| \ \|_q)$$

es continuo (véase 3.2.35 para la notación). Si C es el cerrado (no vacío) de X tal que $N_q = I_C$, entonces por ser X normal tenemos $\mathcal{C}(X)/N_q =$

$\mathcal{C}(X)/I_C = \mathcal{C}(C)$, con lo que terminamos la demostración si vemos que la aplicación identidad

$$\mathcal{C}_k(C) \to (\mathcal{C}(C), \| \ \|_q)$$

es continua (pues el morfismo de restricción $\mathcal{C}_k(X) \to \mathcal{C}_k(C)$ es continuo).

Veamos la igualdad $\mathcal{C}_k(C) = (\mathcal{C}(C), \| \ \|_q)$ comprobando que el álgebra topológica $(\mathcal{C}(C), \| \ \|_q)$ satisface las hipótesis del teorema 5.2.5. Si J es un ideal cerrado de $(\mathcal{C}(C), \| \ \|_q)$, entonces $\pi_q^{-1}(J)$ es un ideal cerrado de $(\mathcal{C}(X), \tau)$ que contiene a I_C. Por lo tanto existe un subconjunto cerrado D en X tal que $D \subset C$ y $\pi_q^{-1}(J) = I_D$. Esto es, existe un subconjunto cerrado D en C tal que $J = \{g \in \mathcal{C}(C) : g(D) = 0\}$. □

Teorema 5.2.7. *Sea X un espacio topológico normal Hausdorff y sea τ una topología localmente m-convexa Hausdorff sobre $\mathcal{C}(X)$ tal que:*

(i) *para cada ideal cerrado de $(\mathcal{C}(X), \tau)$ existe un subconjunto cerrado C en X tal que $I = I_C$;*

(ii) *$S_K = \{f \in \mathcal{C}(X) : 0 \notin f(K)\}$ es τ-abierto para todo subconjunto compacto K de X.*

Entonces τ es la topología de la convergencia compacta de $\mathcal{C}(X)$.

Demostración. Por una parte, en virtud del teorema anterior tenemos $\tau \leq \tau_k$. Por otra parte, dados $\varepsilon > 0$ y un subconjunto compacto K de X, razonando como en la demostración de la proposición 5.1.22 se demuestra que el conjunto $\{f \in \mathcal{C}(X) : |f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in K\}$ es un entorno de 0 para τ, y como consecuencia obtenemos $\tau_k \leq \tau$. □

Como al final de la sección anterior, dado un ideal propio I de un álgebra A, π_I denota el morfismo de paso al cociente $A \to A/I$ y $(A/I)^{-1}$ es el conjunto de los elementos invertibles de A/I.

Teorema de Caracterización 5.2.8 (M-P-R [47])**.** *Sea A una Φ-álgebra uniformemente cerrada dotada de una topología localmente m-convexa Hausdorff. A es l-isomorfa y homeomorfa a $\mathcal{C}_k(X)$ para algún espacio topológico normal y Hausdorff X, si y sólo si:*

(i) *todo ideal cerrado propio de A es intersección de ideales maximales cerrados;*

(ii) *en A no existen ideales principales que sean propios y densos;*

(iii) *en A no existen dos ideales cerrados cuya suma sea propia y densa;*

(iv) *si I es un ideal cerrado propio de A tal que todo ideal maximal que contiene a I es cerrado, entonces $\pi_I^{-1}((A/I)^{-1})$ es abierto de A.*

Demostración. Si X es un espacio topológico normal y Hausdorff, entonces hemos comprobado a lo largo de toda la primera sección de este capítulo que el álgebra localmente m-convexa Hausdorff $\mathcal{C}_k(X)$ satisface las condiciones (i), (ii), (iii) y (iv); además, $\mathcal{C}(X)$ es una Φ-álgebra uniformemente cerrada .

Recíprocamente, sea A una Φ-álgebra uniformemente cerrada dotada de una topología localmente m-convexa Hausdorff que satisface las propiedades (i), (ii), (iii) y (iv). Dado que A es estrictamente real (Teorema 2.3.3), del teorema 3.2.38 se sigue que A tiene la propiedad I_2 y por lo tanto todo ideal maximal cerrado de A es real; luego la condición (i) nos dice precisamente que A tiene la propiedad I_1, y en consecuencia $\operatorname{Spec}_t A \neq \varnothing$ y A es semisimple (véase la observación 5.1.11). Además, como A es regular (Lema 4.3.16), la condición (iii) implica que A es normal (Teorema 5.1.16 (ii)).

Según el lema 2.3.4 la representación espectral $A \to \mathcal{C}(\operatorname{Spec}_t A)$ es un morfismo de l-álgebras, así que identificando A con su imagen obtenemos que A es una l-subálgebra uniformemente cerrada de $\mathcal{C}(\operatorname{Spec}_t A)$ que separa cerrados de $\operatorname{Spec}_t A$. Entonces A^* S^1-separa cerrados de $\operatorname{Spec}_t A$, pues si $a \in A$ es tal que $a(F) = 0$ y $a(G) = 1$ (F y G cerrados disjuntos no vacíos de $\operatorname{Spec}_t A$), entonces lo mismo sucede para $|a| \wedge 1 \in A^*$. Del teorema 5.2.1 se sigue que A^* es uniformemente densa en $\mathcal{C}^*(\operatorname{Spec}_t A)$, y como A^* es uniformemente cerrada (por serlo A) concluimos que $A^* = \mathcal{C}^*(\operatorname{Spec}_t A)$. Ahora, si $f \in \mathcal{C}(\operatorname{Spec}_t A)$ entonces $f_1 = 1/(f^+ + 1)$ y $f_2 = 1/(f^- + 1)$ son funciones de A^* que no se anulan en ningún punto de $\operatorname{Spec}_t A$ y tales que $f = 1/f_1 - 1/f_2$. Pero según el lema 5.1.20, la propiedad (ii) implica que $1/f_1, 1/f_2 \in A$, de modo que $f \in A$ y concluimos que $A = \mathcal{C}(\operatorname{Spec}_t A)$, es decir, la representación espectral de A es un isomorfismo de l-álgebras.

Finalmente, veamos que la representación espectral de A es un homeomorfismo. De una parte, es claro que $\operatorname{Spec}_t A$ es normal, así que de la propiedad (i) y del teorema 5.2.6 se sigue que la topología de A es menos fina que la de $\mathcal{C}_k(\operatorname{Spec}_t A)$. De otra parte, puesto que A es un álgebra de Gelfand (Teorema 2.3.10 (i)), del teorema 5.1.28 se sigue que la propiedad (iv) es equivalente a que la representación espectral de A sea continua, es decir, la topología de A es más fina que la de $\mathcal{C}_k(\operatorname{Spec}_t A)$. □

5.3 Caracterización de la topología del orden

Como ya anunciamos al comienzo del capítulo, en esta sección daremos una versión del teorema 5.2.8 en el caso normal y realcompacto de modo que su

enunciado esté expresado en términos del orden. La parte algebraica que necesitamos para nuestro propósito la obtenemos con el próximo teorema. Para completar el enunciado que buscamos, en el teorema 5.3.4 damos una caracterización de la topología del orden.

Teorema 5.3.1. *Si A es una Φ-álgebra uniformemente cerrada, entonces A es l-isomorfa a $\mathcal{C}(X)$ para algún espacio topológico normal y realcompacto X (en cuyo caso (A, τ_o) es además homeomorfa a $\mathcal{C}_k(X)$), si y sólo si:*
(i) *A es cerrada por inversión;*
(ii) *(A, τ_o) es normal.*

Demostración. Supongamos que A satisface (i) y (ii). Según el lema 4.3.17, (A, τ_o) es un álgebra localmente m-convexa Hausdorff regular y semisimple, y su espectro topológico es el espacio topológico realcompacto $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A$, que es también normal porque la condición (ii) significa que A separa cerrados de $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A$. Entonces, procediendo como en la demostración del teorema 5.2.8, es fácil ver que las condiciones (i) y (ii) implican que la representación $A \to \mathcal{C}(\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} A)$ es un isomorfismo de l-álgebras.

Recíprocamente, sea $A = \mathcal{C}(X)$ con X un espacio topológico normal y realcompacto, en cuyo caso sabemos que A es una Φ-álgebra uniformemente cerrada y cerrada por inversión. Según el teorema 4.3.13 se satisface la igualdad $(A, \tau_o) = \mathcal{C}_k(X)$, luego (A, τ_o) es normal. □

Lema 5.3.2. *Sea A una Φ-álgebra uniformemente cerrada que es también un espacio vectorial topológico. Si los intervalos cerrados de A son acotados, entonces todo subconjunto cerrado de A es uniformemente cerrado.*

Demostración. Sea F un subconjunto cerrado de A. Si $\{a_n\}_n$ es una sucesión uniformemente de Cauchy en F y $a \in A$ es el límite uniforme de $\{a_n\}_n$, entonces tenemos que probar que $a \in F$. Sea V un 0-entorno en A. Existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tal que $[-1, 1] \subseteq \lambda V$, es decir, $[-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}] \subseteq V$; además existe algún entero no negativo n tal que $a_m - a \in [-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}]$ para todo $m \geq n$. Por lo tanto $a_n \to a$ para la topología de A y concluimos que $a \in F$. □

Corolario 5.3.3. *Sea A una Φ-álgebra uniformemente cerrada que es también un álgebra topológica. Supongamos que los intervalos cerrados de A son acotados y que todo ideal maximal real de A es cerrado. Entonces, un ideal cerrado propio I de A es un* C*-ideal si y sólo si la unidad de A/I es una unidad fuerte de orden.*

Demostración. Según el lema anterior, el ideal I es uniformemente cerrado por ser cerrado, de modo que del teorema 2.3.3 (vii) se sigue que I es un l-ideal y tenemos la l-álgebra cociente A/I; además, de las proposiciones 2.3.23 y 2.3.26 se sigue que A/I es una Φ-álgebra uniformemente cerrada. Para terminar la demostración basta tener en cuenta que, según el teorema 2.3.18, la unidad de A/I es unidad fuerte de orden si y sólo si $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A/I) = \mathrm{Spec}_m(A/I)$. □

Teorema 5.3.4. *Sea A una Φ-álgebra uniformemente cerrada y cerrada por inversión. Si τ es una topología sobre A tal que (A, τ) es un álgebra localmente m-convexa, entonces $\tau = \tau_o$ si y sólo si:*

(i) *los intervalos cerrados de A son τ-acotados;*

(ii) *todo ideal maximal real de A es τ-cerrado;*

(iii) *si I es un ideal τ-cerrado propio de A tal que la unidad de A/I es una unidad fuerte de orden, entonces $\pi_I^{-1}((A/I)^{-1})$ es τ-abierto.*

Demostración. Según el lema 4.3.17 tenemos que (A, τ_o) es un álgebra localmente m-convexa que es regular y satisface la condición (ii), y los intervalos cerrados de A son acotados para τ_o por definición de topología del orden. Como además A es un álgebra de Gelfand (Teorema 2.3.10 (i)) y la representación espectral de (A, τ_o) es continua (Teorema 4.3.13), concluimos que τ_o satisface (iii) (Corolario 5.3.3 y Teorema 5.1.28).

Recíprocamente, sea (A, τ) un álgebra localmente m-convexa satisfaciendo las condiciones (i), (ii) y (iii). Por una parte, de la definición de τ_o se sigue la desigualdad $\tau \leq \tau_o$. Por otra parte, A es un álgebra de Gelfand y (A, τ) es regular, así que del corolario 5.3.3 y del teorema 5.1.28 se sigue que la representación espectral $(A, \tau) \to \mathcal{C}_k(\mathrm{Spec}_t\, A)$ es continua; dado que, de acuerdo con la condición (ii), se satisface la igualdad $\mathrm{Spec}_t\, A = \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}\, A$, aplicando el teorema 4.3.13 obtenemos que τ_o es la topología inicial definida en A por la aplicación $A \to \mathcal{C}_k(\mathrm{Spec}_t\, A)$; por lo tanto $\tau_o \leq \tau$. □

Teorema de Caracterización 5.3.5 (M-P-R [48])**.** *Sea A una Φ-álgebra uniformemente cerrada y cerrada por inversión, dotada de una topología localmente m-convexa. A es l-isomorfa y homeomorfa a $\mathcal{C}_k(X)$ para algún espacio topológico normal y realcompacto X, si y sólo si:*

(i) *los intervalos cerrados de A son acotados;*

(ii) *todo ideal maximal real de A es cerrado;*

(iii) *si I es un ideal τ-cerrado propio de A tal que la unidad de A/I es una unidad fuerte de orden, entonces $\pi_I^{-1}((A/I)^{-1})$ es τ-abierto;*

(iv) *en A no existen dos ideales cerrados cuya suma sea propia y densa.*

Demostración. Después de todo lo dicho a lo largo de esta memoria, es claro que si X es un espacio topológico normal y realcompacto, entonces $\mathcal{C}_k(X)$ es una Φ-álgebra uniformemente cerrada y cerrada por inversión dotada de una topología localmente m-convexa que se satisface (i), (ii), (iii) y (iv).

Supongamos ahora que A es una Φ-álgebra uniformemente cerrada y cerrada por inversión, dotada de una topología localmente m-convexa para la que se satisfacen las propiedades (i), (ii), (iii) y (iv). Del teorema anterior se sigue que A está dotada de su topología del orden, de modo que en virtud del corolario 4.3.17 tenemos que A es Hausdorff y regular. Como A es estrictamente real (Teorema 2.3.3), del teorema 3.2.38 se sigue que A tiene la propiedad I_2, y como por hipótesis A tiene la propiedad I_3, el teorema 5.1.16 (ii) implica que A es normal. Para terminar la demostración basta aplicar el teorema 5.3.1. $\square$

Bibliografía

[1] F.W. Anderson, Approximation in systems of real-valued continuous functions, *Trans. AMS* **103** (1962), 249 – 271.

[2] F.W. Anderson and R.L. Blair, Characterization of the algebra of all real-valued continuous functions on a completely regular space, *Illinois J. Math.* **3** (1959), 121 – 133.

[3] M. Anderson and P. Conrad, The hulls of $\mathcal{C}(Y)$, *Rocky Mountains J. Math.*, **12** (1982), 7 – 22.

[4] R. Arens, A topology for spaces of transformations, *Ann. Math.* **47** (1946), 480 – 495.

[5] R. Arens, The space L^{ω} and convex topological rings, *Bull. AMS* **52** (1946), 931 – 935.

[6] R. Arens, A generalitation of normed rings, *Pacific J. Math.*, **2** (1952), 455 – 471.

[7] M.F. Atiyah and I.G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra* (Addison-Wesley, Massachusetts, 1969).

[8] W.G. Bade and P.C. Curtis Jr., Homomorphism of commutative Banach algebras, *Amer. J. Math.* **82** (1960), 589 – 608.

[9] E. Beckenstein, L. Narici and C. Suffel, *Topological Algebras* (North-Holland Math. Stud. Vol. 24, Amsterdam, 1977).

[10] A. Bigard, K. Keimel and S. Wolfenstein, *Groupes et Anneaux Réticulés* (Lecture Notes in Math. 608, Springer-Verlag, Berlin, 1977).

[11] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, 3rd ed. (AMS Coll. Publ. Vol. 25, Providence, 1967).

[12] G. Birkhoff and R.S. Pierce, Lattice-ordered rings, *An. Acad. Brasil Ci.* **28** (1956), 41 – 69.

[13] G.J. Buskes, The support of certain Riesz pseudo-norms and the order-bound topology, *Rocky Mountain J. Math.* **18** (1988), 167 – 178.

[14] G.J. Buskes, B. de Pagter and A. van Rooj, Functional calculus on Riesz spaces, *Indag. Mathem.* N.S. **2** (4) (1991), 423 – 436.

[15] C. Constantinescu, *Some Properties of Spaces of Measures* (Supplement, Atti. Sem. Mat. e Fis. Univ. di Modena Vol. 35, 1989).

[16] R. Engelking, *General Topology* (PWN-Polish Scientific, Warsaw, 1977).

[17] K. Fan, Partially ordered additive groups of continuous functions, *Ann. Math.* **51** (1950), 409 – 427.

[18] W.A. Feldman, A characterization of the topology of compact convergence on $\mathcal{C}(X)$, *Pacific J. Math.* **51** (1974), 109 – 119.

[19] W.A. Feldman and J.F. Porter, The order topology for function lattices and realcompactness, *Internat. J. Math. and Math. Sci.* **4** (2) (1981), 289 – 304.

[20] H. Freudenthal, Teilweise geordnete Moduln, *Akad. Wetensch. Amsterdam Proc.* **39** (1936), 641 – 651.

[21] I. Garrido and F. Montalvo, Algebraic properties of the uniform closure of spaces of continuous functions, *Annals New York Acad. Sci.* **788** (1996), 101 – 107.

[22] I. Garrido and F. Montalvo, Generation of uniformly closed algebras of functions, *Positivity* (aparecerá).

[23] I.M. Gelfand, Normierte ringe, *Rec. Math.* **9** (1941), 3 – 24.

[24] I.M. Gelfand, D.A. Raikov and G.E. Chilov, *Lex Anneaux Normés Commutatifs* (Gauthier-Villars, Paris, 1964).

[25] L. Gillman and M. Jerison, *Rings of Continuous Functions* (Springer-Verlag, GTM 43, New York, 1968).

[26] H. Gordon, Topologies and projections on Riesz spaces, *Trans. AMS* **94** (1960), 529 – 551.

[27] A.W. Hager, On inverse-closed subalgebras of $\mathcal{C}(X)$, *Proc. London Math. Soc.* III Ser. **19** (1969), 233 – 257.

[28] A.W. Hager, A class of function algebras (and compactifications, and uniform spaces), *Symposia Math.* **17** (1976), 11 – 23.

[29] M. Henriksen, *Unsolved Problems on Algebraic Aspects of* $\mathcal{C}(X)$*, in Rings of Continuous Functions* (Lecture Notes in Math. 95, Springer-Verlag, New York, 1968).

[30] M. Henriksen, A survey of f-rings and some of their generalizations, *Ordered Algebraic Structures*, (Kluwer Academic Publishers, 1997), 1 – 26.

[31] M. Henriksen and D.G. Johnson, On the structure of a class of archimedean lattice-ordered algebras, *Fund. Math.* **50** (1961), 73 – 94.

[32] E. Hewitt, Certain generalization of the Wierstrass aproximation theorem, *Duke Math. J.* **14** (1947), 419 – 427.

[33] C.B. Huijsmans and B. de Pagter, Ideal theory in f-algebras, *Trans. AMS* **269** (1982), 225 – 245.

[34] G. Jameson, *Ordered Linear Spaces* (Lectures Notes in Math. 141, Springer-Verlag, CIUDAD?, ANO?.

[35] G.A. Jensen, A note on complete separation in the Stone topology, *Proc. AMS* **21** (1969), 113 – 116.

[36] D.G. Johnson, A structure theory for a class of lattice-ordered rings, *Acta Math.* **104** (1960), 163 – 215.

[37] S. Kakutani, Concrete representation of abstract (M)-spaces, *Ann. Math.* **42** (1941), 994 – 1024.

[38] L.V. Kantorovitch, Linear operations in semiordered spaces, *Mat. Sb.* **7** (49) (1940), 209 – 284.

[39] I. Kaplansky, Topological rings, *Amer. J. Math.* **69** (1947), 153 – 183.

[40] I. Kaplansky, Normed algebras, *Duke Math. J.* **16** (1949), 399 – 418.

[41] C.W. Kohls, Ideals in rings of continuous functions, *Fund. Math.* **45** (1957), 28 – 50.

[42] G. Köthe, *Topological Vector Spaces I* (Springer-Verlag, Grund. Math. Wiss. 159, Berlin, 1969).

[43] W.A.J. Luxemburg and A.C. Zaanen, *Riesz Spaces I* (North Holland, Amsterdam, 1971).

[44] A. Mallios, *Topological Algebras. Selected Topics* (North-Holland Math. Studies 124, Amsterdam, 1986).

[45] A. Michael, *Locally Multiplicatively-Convex Topological Algebras* (Memoirs AMS 11, Providence, 1952).

[46] F. Montalvo, A. Pulgarín and B. Requejo, Order topologies in l-algebras, *Topol. Appl.* (aparecerá).

[47] F. Montalvo, A. Pulgarín and B. Requejo, Closed ideals in topological algebras (preprint).

[48] F. Montalvo, A. Pulgarín and B. Requejo, On the characterization of $\mathcal{C}_k(X)$ (preprint).

[49] F. Montalvo, A. Pulgarín and B. Requejo, A note on 2-universally complete Riesz spaces (preprint).

[50] P.D. Morris and D.E. Wulbert, Functional representation of topological algebras, *Pacific J. Math.* **22** (1967), 323 – 337.

[51] S.G. Mrówka, On some approximation theorems, *Nieuw Archief voor Wiskunde* **16** (1968), 94 – 111.

[52] J. Muñoz y J.M. Ortega, Sobre las álgebras localmente convexas, *Collect. Math.* **20** (1969), 127 – 149.

[53] L. Nachbin, Topological vector spaces of continuous functions, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **40** (1954), 471 – 474.

[54] H. Nakano, Teilweise geordnete Algebra, *Jap. J. Math.* **17** (1941), 425 – 511.

[55] I. Namioka, *Partially Ordered Linear Topological Spaces* (Memoirs AMS 24, Providence, 1957).

[56] A.L. Peressini, On topologies in ordered vector spaces, *Math. Ann.* **144** (1961), 199 – 223.

[57] D. Plank, Closed l-ideals in a class of lattice-ordered algebras, *Illinois J. Math.* **15** (1971), 515 – 524.

[58] A. Pulgarín, A characterization of $\mathcal{C}_k(X)$ as a Fréchet f-algebra, *Acta Math. Hungar.*, **88** (2) (2000), 133 – 138.

[59] A. Pulgarín, Solid subrings in $\mathcal{C}(X)$, *Intern. Math. Journal* **5** (1) (2002), 529 – 531.

[60] B. Requejo, *Localización Topológica* (Publ. Dpto. Mat. Unex no. 62, Badajoz, 1996).

[61] B. Requejo, A characterization of the topology of compact convergence on $\mathcal{C}(X)$, *Topol. Appl.* **77** (1997), 213 – 219.

[62] C.E. Rickart, *General Theory of Banach Algebras* (Van Nostrand, Providence, 1960).

[63] F. Riesz, Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires, *Ann. Math.* **41** (1940), 174 – 206.

[64] H.H. Schaefer, *Topological Vector Spaces* (Spinger-Verlag, New York, 1971).

[65] Z. Semadeni, *Banach Spaces of Continuous Functions* (Polish Scientific Publishers 55, Warszawa, 1971).

[66] T. Shirota, On locally convex vector spaces of continuous functions, *Proc. Japan Acad.* **30** (1954), 294 – 298.

[67] R. Stokke, Closed ideals in $\mathcal{C}(X)$ and Φ-algebras, *Topol. Proc.* **22** (1997), 501 – 528.

[68] H. Tietze, Uber functionen die anf einer abgeschlossenen menge stetig sind, *Journ. Math.* **145** (1915), 9 – 14.

[69] S. Warner, The topology of compact convergence on continuous function spaces, *Duke Math. J.* **25** (1958), 265 – 282.

[70] S. Willard, *General Topology* (Addison-Wesley, Massachusetts, 1970).

[71] H.Y. Xiong, A characterization of Riesz spaces wich are Riesz isomorphic to $\mathcal{C}(X)$ for some completely regular space X, *Indag. Math.* **51** (1) (1989), 87 – 95.

[72] K. Yosida, On the representation of the vector lattices, *Proc. Imp. Akad. Tokyo* **18** (1942), 339 – 342.