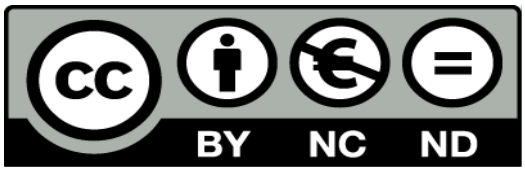
UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TESIS DOCTORAL

Título
Estudio de la dinámica del método de Newton amortiguado
Autor/es
Ángel Alberto Magreñ§n Ruiz
Director/es
José Manuel Gutiérrez Jiménez y Natalia Romero Alvarez
Facultad
Facultad de Ciencias, Estudios Agroalimentarios e Informática
Titulación
Departamento
Matemáticas y Computación
Curso Académico
2012-2013



Estudio de la dinámica del método de Newton amortiguado, tesis doctoral de Ángel Alberto Magreñán Ruiz, dirigida por José Manuel Gutiérrez Jiménez y Natalia Romero Alvarez (publicada por la Universidad de La Rioja), se difunde bajo una Licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 Unported. Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden solicitarse a los titulares del copyright.

© El autor
© Universidad de La Rioja, Servicio de Publicaciones, 2013
publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es
ISBN 978-84-695-8985-4

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

FACULTAD DE CIENCIAS, ESTUDIOS AGROALIMENTARIOS
E INFORMÁTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

TESIS DOCTORAL

Estudio de la dinámica del método de Newton amortiguado

Memoria presentada por

Ángel Alberto Magreñán Ruiz
para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas
por la Universidad de La Rioja

Dirigida por los Doctores

José Manuel Gutiérrez Jiménez
y
Natalia Romero Álvarez.

Logroño 2013

Dedicatoria

A mis padres

Agradecimientos

La realización de esta memoria ha sido posible gracias al inconmensurable trabajo en cuanto a disponibilidad, predisposición, motivación y entrega de los Doctores *José Manuel Gutiérrez Jiménez* y *Natalia Romero Álvarez*, a quienes agradezco todo cuánto han hecho para llevar a cabo esta tesis.

Agradezco también a los miembros del grupo PRIENOL, por todas las jornadas de trabajo, por la ayuda y por acogerme en el seno de la gran familia que forman: *Míguel Ángel Hernández Verón*, director del grupo, y con el que he tenido el privilegio de trabajar codo con codo, *José Manuel Gutiérrez Jiménez* y *Natalia Romero Álvarez*, mis directores y con los que he compartido esta aventura de escribir mi tesis, *María Jesús Rubio*, *José Antonio Ezquerro* y *Daniel González*, con los que he pasado innumerables ratos, en viajes, congresos o simplemente en el trabajo diario que han hecho tan ameno.

Agradezco también al personal docente y administrativo del Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de la Rioja, por su entera disposición siempre que lo he necesitado.

Valoro el apoyo recibido durante toda la tesis por todos los becarios con los que he tenido el placer de compartir experiencias, inquietudes y tantos ratos acompañado por *Claudia Vela* y *Mara Mataveli*, que han sido compañeras de café y tertulia diaria durante todo este tiempo y *Martín García Olivo*, mi compañero de fatigas, durante espacios de tiempo interrumpidos, y con el que he pasado en esta etapa final de la tesis casi más tiempo que conmigo mismo, y que además, ha sido un apoyo enorme llegando a convertirse en mi hermano dominicano, con el que espero seguir trabajando y disfrutando.

También quiero agradecer de forma especial a mis compañeros de carrera y, amigos, que espero que lo sean para siempre, *César Martínez* y *Gadea Mata*, que desde el comienzo de la carrera, cuando entablamos una amistad que aún hoy perdura, me han ayudado en todo lo que he necesitado sin importar horarios ni situaciones.

Por supuesto, no podía olvidar agradecer a mis amigos *Ignacio Glera*, *Raúl Jiménez*, *Juan Ochoa*, *Raquel Gómez*, *Miguel Carrera*, *Rubén Cabezón*, *Jorge Anguiano*, *Carlos Calvo*, *Víctor Barahona*, *Víctor San Martín*, *Ángel Díez*, *Guillermo Garrido*, *Jesús Palacios*, *Iván Alduán*, *Diego Adán*, y al resto, por tantas horas, vivencias y diversión.

Caso especial, el de mis profesores de secundaria, y ya amigos, *Pilar Aretio* y *Santiago Ramírez*, agradecerles por su tutela durante mis años de instituto, por haberme hecho disfrutar de las matemáticas y por dirigir, en cierta medida, mi camino hacia la rama matemática.

Agradezco muy profundamente a *Lara Orcos Palma*, el haber sabido sacarme una sonrisa cuando más lo necesitaba, el amor, el cariño, el apoyo, el haberme regalado su tiempo y el conseguir hacerme feliz durante todo este tiempo, sabiendo entenderme y apreciarme tal como soy, por todo ello, y una infinidad de

motivos más, gracias.

Por último, agradecer a mis padres Don *Alberto Magreñán Furundarena* y Doña *Mercedes Ruiz Gárate*, el amor, el apoyo, el esfuerzo, el sacrificio, el saber aguantar mis malos momentos y saber darme ese cariño, tan necesario, a veces. A ellos les debo, que me inculcaran infinidad de valores y el gusanillo por las matemáticas que empezó en un largo viaje vacacional, como un juego, y ha terminado con la culminación de esta tesis. A mi hermana: *María Yolanda Magreñán*, por el trato y la compresión mostrada durante este tiempo y por acompañarme fielmente durante este periodo. Mención especial también merece mi abuela *Ascensión Gárate*, por demostrarme que en la vida siempre hay que levantarse, tener una sonrisa para todo el mundo e intentar buscarle el lado positivo a todas las cosas y por la infinidad de cariño que me demuestra siempre.

A toda mi familia y amigos en general, muchas gracias.

La Rioja, España, 12 de junio de 2013.

Prólogo

La vida es un continuo estado de toma de decisiones, unas más sencillas, otras más complicadas, unas más acertadas en un determinado momento, otras acertadas en un momento diferente al que se toman e incluso, malas decisiones. Si miramos atrás en el tiempo, es difícil recordar qué es lo que nos impulsa o motiva a tomar una decisión. Multitud de ocasiones, el tomar una opción u otra, depende de un mínimo detalle, de una sensación o simplemente de coincidir en el tiempo y espacio con ese «no se qué» que nos hace actuar. Así pues, la redacción de esta memoria sería la culminación de una toma de decisiones tras otra, hasta el día de hoy, al menos...

Siendo sincero, la redacción de esta memoria, supuso un reto desde el primer momento para mí, ya que suponía enfrentarme a algo nuevo en la vida del estudiante que era la autonomía. A pesar de contar, con la inagotable fuente de ayuda que han sido los directores de esta Tesis, llegado un momento tienes que plantarte frente a un folio, con tu bolígrafo y tratar de vencer problemas reales, no académicos, aprender técnicas nuevas, probar mecanismos de ataque diferentes y, sobre todo, no desesperar. Pero una vez llegas a tu objetivo, aún queda lo más laborioso, que es plasmar con palabras dichos logros de forma que la gente entienda lo que tú tienes en tu cabeza.

El contenido de esta Tesis Doctoral abarca de una manera longitudinal, un tema tan utilizado en el área de la matemática aplicada, como es el hecho de la resolución de ecuaciones. Concretamente, se ha estudiado una modificación del método por excelencia para resolver ecuaciones no lineales como es el método de Newton. A lo largo de los años se ha ido nombrando a esa modificación de muchísimas maneras diferentes, pero, en esta memoria, se ha optado por utilizar la nomenclatura de *Método de Newton amortiguado*. Durante los 5 capítulos de los que consta la presente Tesis doctoral, se ha estudiado dicho método de una manera diferente, dándole un toque personal desde el estudio en la recta real, hasta el estudio sobre espacios de Banach, pasando por el estudio en el plano complejo. Durante la elaboración de esta memoria, se ha intentado construir un argumento híbrido que combine ideas, tanto antiguas como recientes, con ténicas novedosas y herramientas informáticas, que permitan la automatización y verificación de resultados.

El ser humano, por su carácter racional, siempre ha sentido curiosidad por resolver los problemas que se le iban planteando. Esta curiosidad va en aumento

con la dificultad del problema. Este carácter curioso es el que lleva al hombre a querer modelizar matemáticamente todo tipo de situaciones, llegando a encontrarse con ecuaciones para nada triviales. Es más, hay situaciones en las que no se conocía el número de soluciones, ni cuál es la mejor o incluso, si dicha situación tenía solución. A raíz de esta congregación de dificultades, es cuando nace la aproximación numérica de ecuaciones y, por ende, los métodos iterativos. Los métodos iterativos producen, a partir de un punto inicial, una sucesión de aproximaciones a la solución que, puede converger o no a la solución. Existen infinidad de métodos iterativos, cada uno con diferentes propiedades y que, bajo ciertas condiciones, garantizan que su utilización nos va a conducir a la obtención de solución en nuestro problema.

Esta Tesis Doctoral, trata sobre el método de Newton amortiguado para resolver ecuaciones no lineales, es decir, dada una ecuación no lineal de la forma

$$f(x) = 0,$$

donde f es una función, de variable real, compleja o incluso definida en un espacio de Banach, aplicaremos el método de Newton amortiguado para intentar llegar a la solución de $f(x) = 0$.

La simpleza de este método añadido a la bondad de sus resultados, hacen que este método haya llamado la atención de infinidad de autores matemáticos a lo largo de la historia.

En el Capítulo 1 se han ido introducido los conceptos básicos que se irán utilizando a lo largo de la presente Tesis Doctoral. Así bien, para el plano complejo, se definen conceptos tales como puntos fijos, puntos periódicos y críticos, que serán de gran utilidad en el estudio que realizaremos. En las siguientes subsecciones se dan definiciones para la recta real y para espacios de Banach, así como una ligera idea de lo que es la dimensión fractal.

Ya en el Capítulo 2 se realiza un estudio en profundidad de la dinámica real del método de Newton amortiguado, que tiene la siguiente forma

$$x_{n+1} = x_n - \lambda \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

donde $f(x)$ es una función de variable real.

Después de una breve introducción, se comienza estudiando polinomios de grado 2, ya que el Teorema del Escalado, reduce su estudio a los polinomios

$$f_0(x) = x^2,$$

$$f_-(x) = x^2 - 1$$

y

$$f_+(x) = x^2 + 1.$$

En el estudio de estos polinomios ya destacan resultados sorprendentes al introducir el parámetro. En la sección siguiente, se sigue una estrategia similar

para polinomios cúbicos, ya que de nuevo, el Teorema del Escalado reduce el estudio a los 3 polinomios siguientes:

$$f_0(x) = x^3,$$
$$f_-(x) = x^3 - x$$

y

$$f_+(x) = x^3 + x,$$

junto con la familia uniparamétrica $f_\gamma(x) = x^3+\gamma x+1$, que, como ya se intuía, es la que mayor juego da. A la vista de los resultados obtenidos para polinomios de grados 2 y 3, se decidió estudiar, en las siguientes secciones, polinomios de grados mayores y para ello, se seleccionaron algunos tanto cuárticos, como quínticos. Todo el estudio de este capítulo, estará ilustrado con gráficos y figuras que harán la lectura más intuitiva. De los estudios realizados sobre la dinámica en la recta real, surgió el artículo publicado en la revista *Abstract and Applied Analysis* [2].

En el Capítulo 3, se estudia el método de Newton amortiguado en el plano complejo, que consiste en la introducción de un parámetro λ de la siguiente manera

$$z_{n+1} = z_n - \lambda \frac{p(z_n)}{p'(z_n)}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

siendo ahora $p(z)$, una función de variable compleja.

En este capítulo se divide el estudio de los polinomios según el número de raíces que tengan y la multiplicidad de las mismas. Así pues, en la Sección 3.1 se realiza un estudio del método de Newton en el plano complejo para después en la Sección 3.2, comparar los resultados obtenidos para el método de Newton amortiguado con los del método de Newton. Cabe destacar, que también se ilustran en este capítulo los resultados con figuras, tales como planos de parámetros, fractales y cuencas de atracción. De los estudios realizados sobre la dinámica en el plano complejo, surgió el artículo publicado en la revista *Applied Mathematics and Computation* [52].

Como no podía ser de otra manera tratándose de una Tesis elaborada en el marco de la Universidad de La Rioja, uno de los capítulos tenía que estar vinculado a espacios de Banach. Este es el caso del Capítulo 4, en el que el método tiene la siguiente forma

$$x_{n+1} = x_n - \lambda F'(x_n)^{-1} F(x_n),\ n \geq 0$$

donde $F : X \to Y$ es un operador definido entre dos espacios de Banach X e Y, siendo $F'(x_n)$ la derivada Fréchet del operador $F(x)$ en el punto x_n y $F'(x_n)^{-1}$ su operador inverso. Se realizan en este capítulo tanto estudios relacionados con la convergencia local, como semilocal, involucrando la γ-teoría y la α-teoría. De los estudios realizados en este ámbito surgieron los artículos publicados en la

revista *Applied Mathematics and Computation* [4] y [51], el publicado en la revista *Journal of Applied Mathematics and Computation* [13] y los aceptados en las revistas *Journal of the Korean Mathematical Society* [9] y *Journal of Complexity* [70].

Por último, en el Capítulo 5 se muestran algunos de los programas utilizados durante la realización de la tesis, utilizando el programa de cálculo científico MATHEMATICA.

Índice general

1. Preliminares **1**

1.1. Nociones básicas de dinámica compleja 1

1.1.1. Puntos fijos, puntos periódicos y puntos críticos 1

1.1.2. Caos 6

1.1.3. Conjugación topológica 7

1.1.4. Conjuntos de Julia y Fatou 9

1.2. Nociones básicas de iteración de funciones reales 16

1.3. Dimensión fractal 22

1.4. Nociones básicas de operadores definidos en espacios de Banach . 31

2. Dinámica real del método de Newton amortiguado **39**

2.1. Introducción 39

2.2. El método de Newton amortiguado para polinomios cuadráticos . 42

2.2.1. El método de Newton amortiguado aplicado a $f_0(x) = x^2$. 45

2.2.2. El método de Newton amortiguado aplicado a $f_-(x) = x^2 - 1$ 47

2.2.3. El método de Newton amortiguado aplicado a $f_+(x) = x^2 + 1$ 51

2.3. El método de Newton amortiguado para polinomios cúbicos . . . 55

2.3.1. El método de Newton amortiguado aplicado a $f_0(x) = x^3$. 59

2.3.2. El método de Newton amortiguado aplicado a $f_+(x) = x^3 + x$ 61

2.3.3. El método de Newton amortiguado aplicado a $f_-(x) = x^3 - x$ 70

2.3.4. El método de Newton amortiguado aplicado a la familia $f_\gamma(x) = x^3 + \gamma x + 1$ 86

2.4. El método de Newton amortiguado para polinomios cuárticos . . . 114

2.4.1. El método de Newton amortiguado aplicado a $f(x) = x^4$. 114

2.4.2. El método de Newton amortiguado aplicado a $f(x) = x^4 - 1$ 114

2.4.3. El método de Newton amortiguado aplicado a $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$ 116

2.5. El método de Newton amortiguado para polinomios quínticos . . . 121

2.5.1. El método de Newton amortiguado aplicado a $f_0(x) = x^5$. 123

2.5.2. El método de Newton amortiguado aplicado a $f_+(x) = x^5 + x$ 125
2.5.3. El método de Newton amortiguado aplicado a $f_-(x) = x^5 - x$ 130

3. Dinámica compleja del método de Newton amortiguado 135
3.1. Dinámica compleja del método de Newton 135
3.1.1. Propiedades del método de Newton en el plano complejo ampliado 137
3.1.2. El método de Newton aplicado a ecuaciones polinómicas . 143
3.2. Dinámica compleja del método de Newton amortiguado 149
3.2.1. El caso $p(z) = (z-a)^m, m \geq 1$ 153
3.2.2. El caso $p(z) = (z-a)^n(z-b)^m$ 156
3.2.3. El caso $p(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$ 187

4. El método de Newton amortiguado en espacios de Banach 195
4.1. El método de Newton-Kantorovich 195
4.2. Convergencia local del método de Newton amortiguado 202
4.2.1. Convergencia local del método de Newton amortiguado con las condiciones de Kantorovich 202
4.2.2. Convergencia local del método de Newton amortiguado con condiciones centradas 205
4.2.3. γ-teoría para el método de Newton amortiguado 208
4.3. Convergencia semilocal del método de Newton amortiguado . . . 216
4.3.1. Convergencia semilocal del método de Newton amortiguado con las condiciones de Kantorovich 217
4.3.2. Convergencia semilocal del método de Newton amortiguado con condiciones centradas 227
4.3.3. α-teoría para el método de Newton amortiguado 235

5. Anexos: Códigos Mathematica utilizados 245

Bibliografía 265

Índice de figuras

1.1. Cuencas de atracción asociadas a las raíces del polinomio $p(z) = z^3 - 1$ al aplicarle el método de Newton. En amarillo aparece la cuenca de $z = 1$, en azul la cuenca de $z = e^{2\pi i/3}$ y en rojo la cuenca de $z = e^{4\pi i/3}$. 5

1.2. Diagrama resultante de una conjugación topológica. 8

1.3. Cuencas de atracción asociadas a las raíces del polinomio $p(z) = z^4-1$, al aplicarle el conocido método de Halley $\left(H_f(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)} \frac{2}{2-L_f(z)}\right)$. En verde la cuenca de $z = -1$, en amarillo la de $z = 1$, en azul la cuenca de $z = i$ y en rojo la de $z = -i$. 12

1.4. Cuencas de atracción asociadas a la función $p(z) = z^2-1$ que tiene una órbita periódica superatractora de periodo 2, dicha órbita es $\{0, -1\}$. En amarillo aparece la cuenca de la órbita periódica, mientras que en rojo aparece la cuenca de infinito. 13

1.5. Cuencas de atracción asociadas a la función $p(z) = z^2 + 0.25$ que tiene en $z_0 = 0.5$ un punto fijo parabólico. En amarillo aparece la cuenca de $z_0 = 0.5$, mientras que en rojo aparece la cuenca de infinito. 13

1.6. En la imagen aparecen los conjuntos de Julia universales asociados al método de Newton, al método de Halley y al método de super-Halley aplicados a un polinomio cuadrático con dos raíces diferentes. Notemos que son idénticos y coinciden con la circunferencia unidad. En la imagen derecha aparece el conjunto de Julia universal asociado al método de Chebyshev aplicado a un polinomio cuadrático con dos raíces diferentes. 15

1.7. Aplicación del algoritmo de estudio gráfico de la dinámica con uno y dos pasos. 17

1.8. Aplicación del algoritmo de estudio gráfico de la dinámica con tres y cincuenta pasos. 17

1.9. Órbita de $x_0 = 0.75$ bajo la función $f(x) = -x^3 + x$, donde puede verse que el 0 es un punto fijo con multiplicador $\mu = 1$, pero con comportamiento atractor. 18

1.10. Órbita de $x_0 = 0.1$, bajo la función $f(x) = x^3 + x$, donde puede verse que el 0 es un punto fijo con multiplicador asociado $\mu = 1$, pero con comportamiento repulsor. 19

1.11. Diagrama de Feigenbaum que se obtiene al aplicar el método de Newton de dos pasos a la familia $f(x) = x^3 + \gamma x + 1$, donde se observa que para algunos valores de $\gamma \in (0.94, 1.01)$ se producen bifurcaciones. 21

1.12. Exponentes de Lyapunov asociados al punto $\frac{1}{3}$ en función del valor del parámetro $c \in [0, 4]$ para la función logística. 23

1.13. Ejemplo de algunas iteraciones de la curva de Koch. 24

1.14. Cuencas de atracción asociadas a los métodos de Newton (izquierda), Whittaker (centro) y Jarrat libre de inversa (derecha) (con su correspondiente dimensión fractal, d, calculada utilizando el algoritmo del Box-counting) aplicados al polinomio $p(z) = z^2 - 1$ en la región $[2.5, 2.5] \times [2.5, 2.5]$. 29

1.15. Cuencas de atracción asociadas a los métodos de Newton (izquierda), Whittaker (centro) y Jarrat libre de inversa (derecha) (con su correspondiente dimensión fractal, d, calculada utilizando el algoritmo del Box-counting) aplicados al polinomio $p(z) = z^3 - z$ en la región $[2.5, 2.5] \times [2.5, 2.5]$. 30

1.16. Cuencas de atracción asociadas a los métodos de Newton (izquierda), Whittaker (centro) y Jarrat libre de inversa (derecha) (con su correspondiente dimensión fractal, d, calculada utilizando el algoritmo del Box-counting) aplicados al polinomio $p(z) = z^4 - 1$ en la región $[2.5, 2.5] \times [2.5, 2.5]$. 31

2.1. En la parte izquierda aparece el gráfico del método de Newton aplicado al polinomio $f_0(x) = x^2$, mientras que en la parte derecha aparece la compactificación del mismo. En la parte izquierda se ha tomado $x_0 = -2$ y en la derecha $x_0 = 0.9$. En ambos casos, se observa cómo las órbitas convergen hacia el único punto fijo. . . . 46

2.2. En la parte izquierda se muestra el gráfico del método de Newton amortiguado, con $\lambda = 0.5$, aplicado al polinomio $f_0(x) = x^2$. En la parte derecha aparece el gráfico de la compactificación del método de Newton amortiguado, también con $\lambda = 0.5$. Tomando en la parte izquierda $x_0 = -2$ y en la derecha $x_0 = 0.9$, se observa, en ambos casos, que las órbitas convergen hacia el único punto fijo. . 47

2.3. En la parte izquierda se muestra el gráfico del método de Newton amortiguado, con $\lambda = 4$, aplicado al polinomio $f_0(x) = x^2$. En la parte derecha aparece el gráfico de la compactificación del método de Newton amortiguado, también con $\lambda = 4$. Tomando en la parte izquierda $x_0 = 1$ y en la derecha $x_0 = 0.1$, se observa, que las órbitas son 2-ciclos. 47

2.4. Gráfico del método de Newton amortiguado (izquierda) y de su compactificación (derecha), con $\lambda = 7$, aplicado al polinomio $f_0(x) = x^2$. En ambos casos se observa que para valores cercanos al punto fijo, las iteraciones divergen. En la parte izquierda se ha tomado $x_0 = 0.25$ y en la derecha $x_0 = 0.49$. 48

2.5. En la parte izquierda aparece el gráfico del método de Newton aplicado al polinomio $f_-(x) = x^2 - 1$ junto con la identidad, tomando $x_0 = 4$, mientras que en la derecha aparece la compactificación del mismo junto con la identidad tomando $x_0 = 0.49$. En ambos casos se observa que las iteraciones convergen hacia el punto fijo más cercano. 49

2.6. Gráfico del método de Newton amortiguado (izquierda) y de su compactificación (derecha), aplicado al polinomio $f_-(x) = x^2 - 1$, con $\lambda = 0.2$, donde se observa que las iteraciones convergen a los puntos fijos más cercanos. En la parte izquierda, se toma $x_0 = 5$ y en la derecha $x_0 = 0.49$. 49

2.7. En la parte izquierda aparecen los exponentes de Lyapunov asociados a $N_{\lambda,f_-}(x)$, tomando $x_0 = 5$, para distintos valores de $\lambda \in (2, 4]$, mientras que en la derecha vemos las iteraciones de $N_{3,f_-}(x)$, tomando $x_0 = 0.1$, donde se observa la aparición de caos. 50

2.8. En la parte izquierda aparece el gráfico del método de Newton amortiguado, con $\lambda = 5$, aplicado al polinomio $f_-(x) = x^2 - 1$ junto con la identidad, tomando $x_0 = 2$, mientras que en la derecha aparece la compactificación del mismo, junto con la identidad, tomando un valor inicial cercano al punto fijo positivo. En ambos casos se observa cómo las iteraciones se alejan del punto fijo más cercano. 50

2.9. Gráfico de los exponentes de Lyapunov asociados al método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f(x) = x^2 + 1$, tomando $x_0 = 5$, para valores de $\lambda \in (-1, 5)$. 51

2.10. Diagrama de Feigenbaum asociado al método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f(x) = x^2 + 1$, tomando $x_0 = 1$, para valores de $\lambda \in (0, 4)$, donde se observa la existencia de caos y además que se producen bifurcaciones. 52

2.11. En la parte izquierda aparece el gráfico del método de Newton aplicado al polinomio $f_+(x) = x^2 + 1$ junto con la identidad, mientras que en la derecha aparece la compactificación del mismo junto con la identidad. En ambos casos se observa que las órbitas no convergen y tienen un comportamiento caótico. 53

2.12. En la parte izquierda aparece el gráfico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_+(x) = x^2 + 1$, con $\lambda = 2.5$, donde se observa que las iteraciones de $x_0 = 2$, convergen hacia el 2-ciclo aproximado $\{-1.73205,\ 1.73205\}$. En la parte derecha aparece el gráfico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_+(x) = x^2 + 1$, con $\lambda = 3.0$, donde se observa que las iteraciones de $x_0 = 1$, convergen hacia el 2-ciclo aproximado $\{-1.29099,\ 1.29099\}$. 54

2.13. En la parte izquierda aparece el gráfico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_+(x) = x^2 + 1$, con $\lambda = -5$, donde se observa que las iteraciones, comenzando en $x_0 = -1$, divergen de forma monótona hacia infinito. En la parte derecha aparece el gráfico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_+(x) = x^2 + 1$, con $\lambda = 8$, donde se observa que las iteraciones de $x_0 = 1$, divergen de forma alterna hacia infinito. . . 55

2.14. En la parte izquierda aparece el gráfico del método de Newton aplicado al polinomio $f_0(x) = x^3$, tomando $x_0 = 4$, mientras que en la derecha aparece la compactificación del mismo tomando $x_0 = 0.1$. En ambos casos se observa cómo las iteraciones convergen al único punto fijo. 59

2.15. En la parte izquierda aparece el gráfico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_0(x) = x^3$ con $\lambda = 6$, en la derecha aparece la compactificación del mismo. Se observa que las iteraciones, de $x_0 = 4$ en la izquierda y de $x_0 = 0.1$ en la derecha, son 2-ciclos. 60

2.16. En la parte izquierda aparece el gráfico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_0(x) = x^3$ con $\lambda = 10$, mientras que en la derecha aparece la compactificación del mismo. La función identidad aparece en cada gráfico. Se observa como las iteraciones de puntos cercanos al punto fijo se alejan del mismo. . 60

2.17. Valores que toman los puntos críticos de $N_{\lambda,f_+}(x)$, definida en (2.3.4), para los distintos valores del parámetro $\lambda \in [1, 4]$. En rojo aparece C_1, en azul C_2, en verde C_3 y en amarillo C_4. 62

2.18. En la parte izquierda aparece el gráfico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_+(x) = x^3 + x$ con $\lambda = -3$, mientras que en la derecha aparece la compactificación del mismo. La función identidad aparece en cada uno de los gráficos. Se observa que las órbitas de puntos iniciales cercanos al punto fijo se alejan de él. 64

2.19. En la parte izquierda aparece el gráfico del método de Newton aplicado al polinomio $f_+(x) = x^3 + x$, mientras que en la derecha aparece la compactificación del mismo. La función identidad aparece en cada uno de los gráficos. Se observa cómo las órbitas de puntos alejados del punto fijo ($x_0 = 4$ en la parte derecha y $x_0 = 0.1$ en la parte izquierda) convergen hacia él. 66

2.20. En la parte izquierda aparece el gráfico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_+(x) = x^3 + x$ con $\lambda = 2.0$, tomando $x_0 = 4$, mientras que en la derecha aparece la compactificación del mismo, tomando $x_0 = 0.1$. La función identidad aparece en cada uno de los gráficos y se observa cómo las órbitas convergen hacia el único punto fijo. 67

2.21. Gráfica de $N_{2,f_+}(x) = \frac{x^3-x}{3x^2+1}$, en la que se observan algunos de los puntos eventualmente fijos. 67

2.22. En la parte izquierda aparece el gráfico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_+(x) = x^3 + x$ con $\lambda = 5.0$, en la derecha aparece la compactificación del mismo. En ambos casos, se observa cómo las iteraciones convergen a 2-ciclos. 69

2.23. Gráfico del método de Newton amortiguado aplicado 2 veces al polinomio $f_+(x) = x^3 + x$ con $\lambda = 5.0$ junto con la identidad, donde se observa que aparece un 2-ciclo. 70

2.24. En la parte izquierda aparece el gráfico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_+(x) = x^3 + x$ con $\lambda = 7.0$, en la derecha aparece la compactificación del mismo. En ambos casos se observa cómo las órbitas de puntos cercanos al punto fijo se alejan de él. 71

2.25. En la parte izquierda aparecen los exponentes de Lyapunov asociados al método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_+(x) = x^3 + x$, tomando $x_0 = C_2$, para distintos valores de $\lambda \in (-10, 10)$, en la derecha aparece un zoom de la zona de convergencia a 2-ciclos. 71

2.26. Diagrama de bifurcaciones asociado al método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_+(x) = x^3 + x$, tomando $x_0 = C_1$, para distintos valores de λ, donde se observa que para $\lambda \in (2, 6)$ aparece un 2-ciclo. 72

2.27. Valores que toman los puntos críticos de $N_{\lambda,f_-}(x)$, definida en (2.3.5), para los distintos valores del parámetro $\lambda \in (0, 3)$. En amarillo aparece C_1, en verde C_2, en azul C_3 y en magenta C_4. . . 74

2.28. Exponentes de Lyapunov asociados a la función de iteración $N_{\lambda,f_-}(x)$, definida en (2.3.5), tomando $x_0 = 1.1$, para valores de $\lambda \in (-2, 8)$. 76

2.29. Exponentes de Lyapunov asociados a la función de iteración $N_{\lambda,f_-}(x)$, definida en (2.3.5), tomando $x_0 = 1.1$, para valores de $\lambda \in (-6, 0)$. 76

2.30. Gráfico del polinomio $f_-(x) = x^3 - x$ donde se observa que tiene 3 raíces en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$, y dos puntos críticos en $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. 77

2.31. Gráfico de $N_{2,f_-}(x) = \frac{x^3+x}{3x^2-1}$, junto con la identidad. 80

2.32. Exponentes de Lyapunov asociados a la función de iteración $N_{\lambda,f_-}(x)$, definida en (2.3.5), tomando $x_0 = 1.1$, para valores de $\lambda \in (2, 3)$. . 82

2.33. Multiplicador asociado a los 4-ciclos de $N_{\lambda,f_-}(x)$, definida en (2.3.5), para valores de $\lambda \in (2.7221, 2.76)$ junto con las rectas $y = 1$ e $y = -1$. Obsérvese que, para $\lambda \in (2.72220, 2.75256)$, existen 4-ciclos atractores, pero para valores fuera de ese rango, los 4-ciclos son repulsores. 83

2.34. Exponentes de Lyapunov asociados a la función de iteración $N_{\lambda,f_-}(x)$, definida en (2.3.5), tomando $x_0 = 1.1$, para valores de $\lambda \in (3, 6)$. . 85

2.35. Exponentes de Lyapunov asociados a la función de iteración $N_{\lambda,f_-}(x)$, definida en (2.3.5), tomando $x_0 = 1.1$, para valores de $\lambda \in (6, 15)$. 85

2.36. En la parte izquierda aparece el gráfico del polinomio $f_\gamma(x) = x^3 + \gamma x + 1$ con $\gamma = -2$, en el centro con $\gamma = \gamma_*$ y en la derecha con $\gamma = 2$. 87

2.37. Exponentes de Lyapunov asociados a la función de iteración $N_{\lambda,f_{-2}}(x)$, tomando $x_0 = 1.1$, para valores de $\lambda \in (-1, 8)$. 88

2.38. Puntos críticos reales de la función $N_{\lambda,f_{-2}}(x)$ para los distintos valores de $\lambda \in [0, 3]$. 88

2.39. Valores que toman los puntos críticos de $N_{\lambda,f_{\gamma_*}}(x)$ para los distintos valores del parámetro $\lambda \in (0, 3)$. En magenta aparece C_1 y en azul C_2. Además, en amarillo aparece la asíntota $a_1 = -\sqrt[3]{-4}$, que es el eje sobre el que son simétricos los puntos críticos. 89

2.40. Gráficos de los exponentes de Lyapunov asociados a la función (2.3.9) para valores de $\lambda \in (-5, 0)$. A la izquierda se parte del punto inicial $x_0 = -0.85$ y a la derecha de $x_0 = 1$. 91

2.41. Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_{\gamma_*}(x)$ con $\lambda = -1.0$. En la parte izquierda aparecen las órbitas de $x_0 = -1.5$ y se observa cómo se alejan de la raíz $r_1 = \sqrt[3]{-4}$, en la parte derecha las órbitas de $x_0 = 1$, donde se observa que se alejan de $r_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. 91

2.42. Gráficos de los exponentes de Lyapunov asociados a la función (2.3.9) para valores de $\lambda \in (0, 2]$. En la parte izquierda se itera el punto crítico C_1 y en la derecha C_2. 92

2.43. Gráficos del método de Newton aplicado al polinomio $f_{\gamma_*}(x)$. En la parte izquierda aparecen las órbitas de un punto a la izquierda de la asíntota y vemos cómo las iteraciones convergen a la raíz $r_1 = \sqrt[3]{-4}$ mientras que, en la parte derecha aparecen las órbitas de un punto a la derecha de la asíntota y, se observa, que convergen a $r_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. 92

2.44. Gráficos de los exponentes de Lyapunov asociados a la función (2.3.9) para valores de $\lambda \in (2, 3)$. En la parte izquierda se itera el punto crítico C_1 y en la derecha C_2. 93

2.45. Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_{\gamma_*}(x)$ con $\lambda = 2.5$. En la parte izquierda aparecen las órbitas de $x_0 = -0.7$ y en la parte derecha las de $x_0 = 10$. En ambos casos se observa que convergen a $r_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. 93

2.46. Valores de los 2-ciclos atractores que aparecen para $\lambda \in (2, \alpha_1)$ donde $\alpha_1 \approx 2.41259$. 94

2.47. Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_{\gamma_*}(x)$ con $\lambda = 2.3$. En la parte izquierda aparecen las órbitas de $x_0 = -5$ y en la parte derecha las de $x_0 = 10$. En la parte izquierda las iteraciones convergen al 2-ciclo aproximado $\{-3.05527, -1.14001\}$ y en la parte derecha se observa que convergen a $r_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. 95

2.48. Diagrama de Feigenbaum asociado a la función (2.3.9), tomando $x_0 = C_1$, para $\lambda \in (\alpha_1, 2.66666)$, donde $\alpha_1 \approx 2.41259$. 95

2.49. Zoom de las dos ramas que aparecen en el diagrama de Feigenbaum asociado a la función (2.3.9), tomando $x_0 = C_1$, para $\lambda \in (\alpha_1, 2.66666)$, donde $\alpha_1 \approx 2.41259$. 96

2.50. Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_{\gamma_*}(x)$ con $\lambda = 2.7$. En la parte izquierda aparecen las órbitas de $x_0 = -5$ y en la parte derecha las de $x_0 = 10$. En ambos casos se observa que convergen a $r_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. 96

2.51. Gráficos de los exponentes de Lyapunov asociados a la función (2.3.9) para valores de $\lambda \in (3, 4)$. A la izquierda se parte del punto inicial $x_0 = -5$ y a la derecha de $x_0 = 5$. 96

2.52. Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_{\gamma_*}(x)$ con $\lambda = 3.5$. En la parte izquierda aparecen las órbitas del punto $x_0 = -5$ y en la parte derecha del punto $x_0 = 5$. En ambos casos se observa cómo convergen hacia la raíz $r_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. 97

2.53. Gráficos de los exponentes de Lyapunov asociados a la función (2.3.9) para valores de $\lambda \in [4, 6]$. En la parte izquierda se itera el punto inicial $x_0 = -5$ y en la derecha $x_0 = 5$. 97

2.54. Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_{\gamma_*}(x)$ con $\lambda = 5.0$. En la parte izquierda aparecen las órbitas del punto $x_0 = -1$ y en la parte derecha las órbitas de $x_0 = 1$. En ambos casos, se observa el comportamiento caótico. 98

2.55. Gráficos de los exponentes de Lyapunov asociados a la función (2.3.9) para valores de $\lambda \in (6, 10)$. En la parte izquierda se itera el punto inicial $x_0 = -5$ y en la derecha $x_0 = 5$. 98

2.56. Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_{\gamma_*}(x)$ con $\lambda = 7.0$. En la parte izquierda aparecen las órbitas de $x_0 = -1$ y se observa cómo se alejan de $r_1 = \sqrt[3]{-4}$. En la parte derecha las órbitas de $x_0 = 1.5$ y, de nuevo, se observa que se alejan de $r_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. 98

2.57. Zoom de los diagramas de Feigenbaum asociados al método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_{\gamma_*}(x)$, tomando $x_0 = C_1$, donde se aprecia la aparición de caos. 99

2.58. Puntos críticos que aparecen en la función $N_{\lambda,f_{-1.26}}(x)$ para $\lambda \in (0, 1)$ y $x \in (-1.5, 0)$. 100

2.59. Gráfico del método de Newton amortiguado para $\lambda = 0.99$, aplicado al polinomio $f_{-1.26}(x)$, donde se observa que, para ciertos puntos iniciales, las iteraciones convergen hacia 2-ciclos. 100

2.60. Puntos críticos que aparecen en la función $N_{\lambda,f_{-1}}(x)$ para $\lambda \in (0, 1)$ y $x \in (-1.5, 0)$. 101

2.61. Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_{-1}(x)$, para $\lambda = -1$ y $\lambda = 1$. 102

2.62. 2-ciclos que aparecen en $N_{\lambda,f_{-1}}(x)$ para valores de $\lambda \in (-1.2, 0.75)$ y de $x \in (-1, 1)$. 102

2.63. 2-ciclos que aparecen en $N_{\lambda,f_{-1}}(x)$ para valores de $\lambda \in (0, 1)$ y de $x \in (-1, 1)$. 103

2.64. Gráfica de la curva $(3 - \lambda)x^3 + 2\lambda$, con $\lambda \in [-5, 5]$ y $x \in [-6, 6]$. . 104

2.65. Exponentes de Lyapunov asociados a la función de iteración $N_{\lambda,f_0}(x)$, tomando como punto inicial el punto crítico, para valores de $\lambda \in (-10, 3)$. 104

2.66. Exponentes de Lyapunov asociados a la función de iteración $N_{\lambda,f_0}(x)$, tomando como punto inicial el punto crítico, para valores de $\lambda \in (3, 8)$. 105

2.67. Diagramas de Feigenbaum asociados a la iteración del punto crítico de $N_{\lambda,f_0}(x)$ para valores de $\lambda \in (2, 6)$. 105

2.68. Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_0(x)$ con $\lambda = -2.0$. En la parte izquierda aparecen las órbitas de un punto cercano al punto fijo, pero menor, y se observa cómo se alejan de él, en la parte derecha las órbitas de un punto cercano al punto fijo pero mayor que él, y se observa que también se alejan de él. 106

2.69. Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_0(x)$ con $\lambda = 1.5$. Se observa que las iteraciones de puntos lejanos, tanto negativos como positivos, convergen al punto fijo. 106

2.70. Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_0(x)$ con $\lambda = 2.5$ y $\lambda = 2.6$. El punto inicial tomado es $x_0 = 1$ y se observa que en el primer caso las iteraciones convergen a un 2-ciclo y en el segundo a un 4-ciclo. 107

2.71. Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_0(x)$ con $\lambda = 3.5$ y $\lambda = 4.5$. El punto inicial tomado es $x_0 = 1$. En ambos casos se observa el comportamiento caótico de las iteraciones.107

2.72. Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_0(x)$ con $\lambda = 5.25$ y $\lambda = 5.8$. En ambos casos el punto inicial tomado es $x_0 = 1$ y se observa que para $\lambda = 5.25$ las iteraciones convergen a un 4-ciclo y para $\lambda = 5.8$ las iteraciones convergen a un 2-ciclo. 108

2.73. Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_0(x)$ con $\lambda = 7.0$. En la parte izquierda aparecen las órbitas de un punto cercano al punto fijo, pero menor, y se observa cómo se alejan de él, en la parte derecha las órbitas de un punto cercano al punto fijo pero mayor que él, donde se observa que las órbitas también se alejan de dicho punto fijo. 108

2.74. Curva de puntos críticos de $N_{\lambda,f_1}(x)$, para $x \in (-5, 5)$ y $\lambda \in (-5, 5)$.110

2.75. Zoom de la zonas donde se muestran los puntos críticos que aparecen en $N_{\lambda,f_1}(x)$ para $x \in (-20, 0.3)$ y $\lambda \in (0, 3.1)$. 110

2.76. Exponentes de Lyapunov asociados a la función de iteración $N_{\lambda,f_1}(x)$, tomando $x_0 = 1.1$, para valores de $\lambda \in (-1, 8)$. 111

2.77. Diagrama de Feigenbaum asociado a la función de iteración $N_{\lambda,f_1}(x)$, tomando $x_0 = 0$, para valores de $\lambda \in (0, 6)$. 111

2.78. Gráfico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_1(x) = x^3 + x + 1$, con $\lambda = -2.0$. Aparecen las órbitas de un punto cercano al punto fijo, y se observa cómo las iteraciones se alejan de él. 112

2.79. Gráfico del método de Newton aplicado al polinomio $f_1(x) = x^3 + x + 1$, donde se observa la convergencia de las iteraciones al punto fijo. 112

2.80. Gráfico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_1(x) = x^3 + x + 1$, con $\lambda = 5.0$. Vemos cómo la órbita de $x_0 = 0.5$ converge a un 2-ciclo. 113

2.81. Gráfico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_1(x) = x^3 + x + 1$, con $\lambda = 7.0$. Se observa cómo las órbitas de un punto cercano al punto fijo se alejan de él. 113

2.82. Gráfico de los puntos críticos que se obtienen al aplicar el método de Newton amortiguado a $f(x) = x^4 - 1$. En azul aparece C_1 y en magenta C_2. 115

2.83. Exponentes de Lyapunov asociados a la función de iteración $N_{\lambda,f}(x) = \frac{(4-\lambda)x^4+\lambda}{4x^3}$, tomando $x_0 = 5$, para valores de $\lambda \in (-1, 9)$. 117

2.84. Zoom de los exponentes de Lyapunov asociados a la función de iteración $N_{\lambda,f}(x) = \frac{(4-\lambda)x^4+\lambda}{4x^3}$, tomando en la parte izquierda $x_0 = 2$, en la parte central $x_0 = C_1$ y en la parte derecha $x_0 = 5$, para distintos valores de λ en cada una de las regiones importantes. . . 117

2.85. Diagramas de Feigenbaum asociados a la función de iteración $N_{\lambda,f}(x) = \frac{(4-\lambda)x^4+\lambda}{4x^3}$, tomando $x_0 = 5$, para distintos valores de λ, donde se observa la aparición de ciclos y caos. Notemos que existe un intervalo que incluye a 3.5 en el que aparece una ventana donde se encuentran además 3-ciclos. 117

2.86. Valores que toman los puntos críticos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$ para valores del parámetro $\lambda \in [0, 4]$. 118

2.87. Exponentes de Lyapunov asociados a $N_{\lambda,f}(x)$ definida en (2.4.1), tomando en la parte izquierda $x_0 = 2$, en la parte central $x_0 = 5$ y en la parte derecha $x_0 = 5$, para distintos valores de λ. 120

2.88. Diagrama de Feigenbaum asociado a $N_{\lambda,f}(x)$ definida en (2.4.1), tomando $x_0 = 5$, para valores de $\lambda \in (1.5, 8.1)$. 120

2.89. Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_0(x) = x^5$ con $\lambda = -1$, con puntos iniciales cerca del punto fijo, donde se observa que las iteraciones divergen de forma monótona hacia infinito en valor absoluto. 124

2.90. Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_0(x) = x^5$ con $\lambda = 2$, donde se observa que las iteraciones de puntos iniciales lejanos al punto fijo, convergen hacia él. 124

2.91. Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_0(x) = x^5$, con $\lambda = 10$, para diferentes puntos de partida, donde se observa que las iteraciones constituyen un 2-ciclo. 125

2.92. Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_0(x) = x^5$ con $\lambda = 11$. Para valores cercanos al punto fijo, se observa que las iteraciones divergen hacia infinito en valor absoluto.125

2.93. Valores que toman los puntos críticos de $N_{\lambda,f_+}(x)$ para distintos valores del parámetro $\lambda \in [-10, 10]$. En azul aparece C_1, en magenta C_2, en amarillo C_3 y en verde C_4. 128

2.94. Exponentes de Lyapunov asociados a $N_{\lambda,f_+}(x)$, definida en (2.5.1), tomando en la parte izquierda $x_0 = C_1$ y en la parte derecha $x_0 = 5.0$, para distintos valores de λ. 129

2.95. Exponentes de Lyapunov asociados a $N_{\lambda,f_+}(x)$, definida en (2.5.1), tomando en la parte izquierda $x_0 = C_1$ y en la parte derecha $x_0 = C_2$, para distintos valores de λ. 129

2.96. Diagramas de Feigenbaum asociados a $N_{\lambda,f_+}(x)$, definida en (2.5.1), tomando en la parte izquierda $x_0 = -1.1$ y en la parte derecha $x_0 = C_1$, para distintos valores de λ. 129

2.97. Valores que toman los puntos críticos de $N_{\lambda,f_-}(x)$ para los distintos valores del parámetro $\lambda \in (0, 5)$. En azul aparece C_1, en magenta C_2, en amarillo C_3 y en verde C_4. 132

2.98. Exponentes de Lyapunov asociados a $N_{\lambda,f_-}(x)$, definida en (2.5.2), tomando $x_0 = 5$, para distintos valores de λ. 133

2.99. Exponentes de Lyapunov asociados a $N_{\lambda,f_-}(x)$, definida en (2.5.2), tomando $x_0 = 5$, para distintos valores de λ. 133

2.100Diagrama de Feigenbaum asociado a $N_{\lambda,f_-}(x)$, definida en (2.5.2), tomando $x_0 = 5$, para distintos valores de $\lambda \in (2, 5)$. 134

2.101Diagrama de Feigenbaum asociado a $N_{\lambda,f_-}(x)$, definida en (2.5.2), tomando $x_0 = 5$, para distintos valores de $\lambda \in (5, 11)$. 134

3.1. Artículo original en *De Analysis Per Æquationes Numero Terminorum INFINITAS* donde Newton presenta su método. 136

3.2. El artículo original de Sir Arthur Cayley de 1879 titulado *The Newton-Fourier Imaginary Problem*. 138

3.3. Artículo de Sir Arthur Cayley titulado *On The Newton-Fourier Imaginary Problem* publicado en 1880. 139

3.4. Cuencas de atracción asociadas al método de Newton aplicado al polinomio $p(z) = z^2 - 1$. En amarillo los puntos que convergen a $z = -1$ y en rojo los que convergen a $z = 1$. 140

3.5. Cuencas de atracción asociadas al método de Newton aplicado al polinomio $p(z) = z^3 - 1$. En amarillo los puntos que convergen a $z = 1$, en rojo los que convergen a $z = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ y en azul los puntos que convergen a $z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$. 140

3.6. En la parte izquierda aparecen las cuencas de atracción de $N_p(z)$ aplicada a $p(z) = z^2 - 1$ y en el de la derecha las cuencas de atracción de $S_p(z)$, definida en (3.1.8). 147

3.7. En la parte izquierda aparecen las cuencas de atracción asociadas a $R_p(z)$ definida en (3.1.12) y en la parte derecha las cuencas de atracción asociadas a $S_p(z)$, definida en (3.1.10). 148

3.8. Galería Newton. Cuencas de atracción asociadas a $R_p(z)$ definida en (3.1.13) para diferentes valores de m. En rojo aparece la cuenca de $z = 1$, la raíz múltiple, y en amarillo la cuenca de $z = -1$, la raíz simple. Además, se observa cómo a medida que aumenta m la cuenca de la raíz múltiple «invade» más la de la raíz simple. . . 150

3.9. Conjuntos de tipo Cantor asociados al conjunto de Julia de $S_\alpha(z)$ definida en (3.2.9), para valores de $\alpha \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$. En la parte izquierda se muestran dichos conjuntos para valores de $\alpha > 1$ mientras que en la parte derecha para valores de $\alpha < -3$. . 164

3.10. Regiones donde los puntos fijos cambian de carácter: En negro la zona en la que los tres puntos son repulsores, en cian $z = -1$ y $z = 1$ son atractores, mientras que $z = \infty$ es repulsor y en amarillo la zona en la que $z = \infty$ es atractor y los otros dos repulsores. En azul oscuro vemos la región en la que existen 2-ciclos atractores. . 169

3.11. Plano de parámetros asociado al punto crítico PC_1. En negro aparece la zona de no convergencia. En cian aparece la convergencia hacia la raíz $z = -1$, en magenta aparece la convergencia hacia la raíz $z = 1$ y en amarillo la convergencia hacia el infinito. La convergencia a 2-ciclos aparece en azul oscuro, mientras que la convergencia a 3-ciclos aparece en verde y a 4-ciclos en rojo. El resto de colores se corresponden con la convergencia a n-ciclos de diferentes órdenes. 171

3.12. Plano de parámetros asociado al punto crítico PC_2. En negro aparece la zona de no convergencia. En cian aparece la convergencia hacia la raíz $z = -1$, en magenta aparece la convergencia hacia la raíz $z = 1$ y en amarillo la convergencia hacia el infinito. La convergencia a 2-ciclos aparece en azul oscuro, mientras que la convergencia a 3-ciclos aparece en verde y a 4-ciclos en rojo. El resto de colores se corresponden con la convergencia a n-ciclos de diferentes órdenes. 172

3.13. Galería I. Cuencas de atracción asociadas a los puntos fijos $z = -1$ (en magenta) y $z = 1$ (en cian) de la función $R_\lambda(x)$, definida en (3.2.10), para diferentes valores de λ y distintas regiones. 173

3.14. Galería II. Cuencas de atracción asociadas a los puntos fijos de $R_\lambda(z)$, definida en (3.2.12) para diferentes valores de λ. La cuenca de $z = -1$ aparece en amarillo, mientras que la cuenca de $z = 1$ se muestra en rojo. 176

3.15. Galería III. Cuencas de atracción asociadas a los puntos fijos de $S_\lambda(z)$, definida en (3.2.11) para diferentes valores de λ. En negro se muestra la cuenca de $z = \infty$ y en rojo la de $z = 0$. 177

3.16. Regiones donde los puntos fijos cambian de carácter. En cian, $z = -1$ y $z = 1$ son atractores mientras que $z = \infty$ es repulsor, en magenta vemos la región en la que $z = 1$ es atractor mientras que $z = -1$ y $z = \infty$ son repulsores y en negro la zona en la que los tres puntos son repulsores. Por otro lado, en amarillo vemos la zona en la que $z = \infty$ es atractor y los otros dos repulsores. 179

3.17. Plano de parámetros asociado al punto crítico PC_1. En negro aparece la zona de no convergencia. En cian aparece la convergencia hacia la raíz $z = -1$, en magenta aparece la convergencia hacia la raíz $z = 1$, en amarillo la convergencia hacia el infinito. La convergencia a 2-ciclos aparece en azul oscuro, mientras que la convergencia a 3-ciclos aparece en verde y a 4-ciclos en rojo. El resto de colores se corresponden con la convergencia a n-ciclos de diferentes órdenes. 181

3.18. Zoom del plano de parámetros asociado al punto crítico PC_1. En negro aparece la zona de no convergencia. En cian aparece la convergencia hacia la raíz $z = -1$, en magenta aparece la convergencia hacia la raíz $z = 1$, en amarillo la convergencia hacia el infinito. La convergencia a 2-ciclos aparece en azul oscuro, mientras que la convergencia a 3-ciclos aparece en verde y a 4-ciclos en rojo. El resto de colores se corresponden con la convergencia a n-ciclos de diferentes órdenes. 182

3.19. Zoom del plano de parámetros asociado al punto crítico PC_1. En negro aparece la zona de no convergencia. En cian aparece la convergencia hacia la raíz $z = -1$, en magenta aparece la convergencia hacia la raíz $z = 1$, en amarillo la convergencia hacia el infinito. La convergencia a 2-ciclos aparece en azul oscuro, mientras que la convergencia a 3-ciclos aparece en verde y a 4-ciclos en rojo. El resto de colores se corresponden con la convergencia a n-ciclos de diferentes órdenes. 183

3.20. Plano de parámetros asociado al punto crítico PC_2. En negro aparece la zona de no convergencia. En cian aparece la convergencia hacia la raíz $z = -1$, en magenta aparece la convergencia hacia la raíz $z = 1$, en amarillo la convergencia hacia el infinito. La convergencia a 2-ciclos aparece en azul oscuro, mientras que la convergencia a 3-ciclos aparece en verde y a 4-ciclos en rojo. El resto de colores se corresponden con la convergencia a n-ciclos de diferentes órdenes. 184

3.21. Galería IV. Cuencas de atracción asociadas a los puntos fijos de $R_\lambda(z)$, definida en (3.2.12) para diferentes valores del parámetro $\lambda \in \mathbb{C}$. La cuenca de $z = -1$ aparece en magenta, mientras que la cuenca de $z = 1$ se muestra en cian. 185

3.22. Galería V. Cuencas de atracción asociadas a los puntos fijos de $R_\lambda(z)$, definida en (3.2.12) para diferentes valores del parámetro $\lambda \in \mathbb{C}$. La cuenca de $z = -1$ aparece en magenta, mientras que la cuenca de $z = 1$ se muestra en cian. Además, las zonas de no convergencia a raíces se muestran en negro. 186

3.23. Plano de parámetros asociado al punto crítico PC_1. En negro aparece la zona de no convergencia. En cian aparece la convergencia hacia la raíz $z = -1$, en magenta aparece la convergencia hacia la raíz $z = 1$, en amarillo la convergencia hacia la raíz $z = 0$ y en azul oscuro la convergencia hacia el infinito. La convergencia a 2-ciclos aparece en verde, mientras que a 3-ciclos aparece en rojo. El resto de colores se corresponden con la convergencia a n-ciclos de diferentes órdenes. 189

3.24. Plano de parámetros asociado al punto crítico PC_2. En negro aparece la zona de no convergencia. En cian aparece la convergencia hacia la raíz $z = -1$, en magenta aparece la convergencia hacia la raíz $z = 1$, en amarillo la convergencia hacia la raíz $z = 0$ y en azul oscuro la convergencia hacia el infinito. La convergencia a 2-ciclos aparece en verde, mientras que a 3-ciclos aparece en rojo. El resto de colores se corresponden con la convergencia a n-ciclos de diferentes órdenes. 190

3.25. Plano de parámetros asociado al punto crítico PC_3. En negro aparece la zona de no convergencia. En cian aparece la convergencia hacia la raíz $z = -1$, en magenta aparece la convergencia hacia la raíz $z = 1$, en amarillo la convergencia hacia la raíz $z = 0$ y en azul oscuro la convergencia hacia el infinito. La convergencia a 2-ciclos aparece en verde, mientras que a 3-ciclos aparece en rojo. El resto de colores se corresponden con la convergencia a n-ciclos de diferentes órdenes. 191

3.26. Plano de parámetros asociado al punto crítico PC_4. En negro aparece la zona de no convergencia. En cian aparece la convergencia hacia la raíz $z = -1$, en magenta aparece la convergencia hacia la raíz $z = 1$, en amarillo la convergencia hacia la raíz $z = 0$ y en azul oscuro la convergencia hacia el infinito. La convergencia a 2-ciclos aparece en verde, mientras que a 3-ciclos aparece en rojo. El resto de colores se corresponden con la convergencia a n-ciclos de diferentes órdenes. 192

3.27. Galería VI. Cuencas de atracción asociadas al método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $p(z) = z(z-1)(z+1)$ para diferentes valores del parámetro $\lambda \in \mathbb{C}$. La cuenca de $z = 1$ aparece en magenta, mientras que la cuenca de $z = -1$ se muestra en cian y en amarillo aparece la cuenca de $z = 0$. 193

3.28. Galería VII. Cuencas de atracción asociadas al método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $p(z) = z(z-1)(z+1)$ para diferentes valores del parámetro $\lambda \in \mathbb{C}$. La cuenca de $z = 1$ aparece en magenta, mientras que la cuenca de $z = -1$ se muestra en cian y en amarillo aparece la cuenca de $z = 0$. 194

4.1. Gráfica de la función $G(\theta)$ junto con la identidad, en el intervalo $[0, 2.5]$ donde se observan los 3 puntos fijos en $\theta = 0$, $\theta = 0.5$ y $\theta = 2$. 199

4.2. Regiones de accesibilidad a la solución. En azul la zona de accesibilidad que se obtiene al utilizar únicamente la condición de Lipschitz $B\left(1, \frac{1}{6}\right)$. En amarillo aparece la mejora que se obtiene al utilizar además, la condición de Lipschitz centrada, en este caso la región de accesibilidad es $B\left(1, \frac{1}{5}\right)$. 209

4.3. Gráfica de la función $F(\lambda) = \frac{\lambda+4-\sqrt{\lambda^2+16}}{4}$, donde se observa que $F(0) = 0 < F(\lambda) < F(1) = \frac{5-\sqrt{17}}{4}$, $\forall \lambda \in (0, 1)$. 210

4.4. Radios de accesibilidad que se obtienen para distintos valores de α en el Ejemplo 4.4. 216

4.5. Gráfica del polinomio mayorizante $p(r) = \frac{b}{2}r^2 - r + a$. 218

4.6. Gráfica del polinomio mayorizante $p(r) = \frac{b}{2}r^2 - r + a$, con $r^* = r^{**}$. 222

4.7. Gráfica de la función $\phi(t) = \beta - t + \frac{\gamma t^2}{1-\gamma t}$. 237

Índice de tablas

1.1. Procedimiento del conteo de cajas, donde N_m representa el número de cajas en la malla y d_m la dimensión que se obtiene al aplicar el método del conteo de cajas en cada paso m, a la curva de Koch. . 26

2.1. Valores aproximados de algunos de los puntos eventualmente fijos p_k que aparecen en $N_{\lambda,f_+}(x)$ para $\lambda \in (1,2]$. 68
2.2. Valores aproximados de algunos de los 2-ciclos atractores que aparecen en $N_{\lambda,f_-}(x)$ para $\lambda \in (2,\alpha_1)$. 81
2.3. Valores aproximados de algunos de los 4-ciclos atractores que aparecen en $N_{\lambda,f_-}(x)$ para $\lambda \in (2.72220, 2.75256)$. 83
2.4. Valores aproximados de algunos de los ciclos que aparecen en $N_{\lambda,f_{-1}}(x)$ para $\lambda \in (0.715, 0.746)$. 103

3.1. Caracteres de los puntos fijos de $S_\alpha(z)$ para distintos valores reales de α. 165
3.2. Valores aproximados de algunos de los ciclos que aparecen al aplicar el método de Newton amortiguado a un polinomio con dos raíces simples. 170
3.3. Caracteres de los puntos fijos de $S_\lambda(z)$ para distintos valores reales de λ. 174
3.4. Dimensiones fractales asociadas a $S_\lambda(z)$, definido en (3.2.11), para distintos valores reales de λ. 175
3.5. Valores aproximados de algunos de los ciclos que aparecen al aplicar el método de Newton amortiguado a un polinomio con una raíz simple y una doble. 180

4.1. Estimaciones del error $\|\mathbf{x_n} - \mathbf{x}^*\|$ que se obtienen al aplicar el método de Newton amortiguado con $\lambda = 0.9$ y $\lambda = 1$ (Newton), para resolver el sistema (4.3.9). 227

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Nociones básicas de dinámica compleja

En este apartado introductorio presentaremos algunas de las definiciones y resultados relacionados con las funciones de variable compleja, restringidas a aplicaciones racionales. Sea $R : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ una función racional sobre la esfera de Riemann, $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, entonces $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ con $P(z)$, $Q(z)$ polinomios complejos sin factores comunes.

Nótese que en $\bar{\mathbb{C}}$, un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces contadas con la multiplicidad. Por esta razón, los polinomios en el plano complejo se van a distinguir según el número de raíces que tengan. Debido a que el objetivo principal de la presente tesis es el estudio del método de Newton amortiguado aplicado a ecuaciones polinómicas, haremos especial hincapié en ellas. Un estudio más extenso de estas y otras propiedades de la dinámica en el plano complejo puede verse en [19], [23], [26], [34], [40] y [88], entre otros.

1.1.1. Puntos fijos, puntos periódicos y puntos críticos

Definimos el grado de $R(z)$ como el máximo de los grados de $P(z)$ y $Q(z)$. De ahora en adelante supondremos que todas las aplicaciones que vamos a estudiar, salvo que se indique lo contrario, son de grado mayor o igual que 2.

En el estudio de la dinámica de aplicaciones racionales, uno de los problemas fundamentales consiste en estudiar el comportamiento de sucesiones $\{z_n\}$ generadas recursivamente a partir de un cierto valor inicial, $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$, donde cada $z_k = R^k(z_0)$ y donde $R^k(z) = \overbrace{R \circ \cdots \circ R}^{k}$ es la composición de $R(z)$ consigo misma k veces. Si dicha sucesión converge, significa que tiene límite y, por lo tanto, este límite será un punto fijo de $R(z)$.

Definición 1.1 *Decimos que un punto $z \in \bar{\mathbb{C}}$, es un punto fijo de $R(z)$ si verifica $R(z) = z$.*

Existen diferentes tipos de puntos fijos que se clasifican según sea su multiplicador, y éste viene definido como sigue.

Definición 1.2 *Si z es un punto fijo de $R(z)$, entonces llamaremos multiplicador o autovalor de z al valor $\mu = R'(z)$.*

Los puntos fijos de una aplicación racional son casos especiales de puntos periódicos, concretamente son puntos de periodo 1. Los puntos periódicos se definen de la siguiente manera.

Definición 1.3 *Decimos que un punto $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$, es un punto periódico de periodo p, si $R^p(z_0) = z_0$ y $R^n(z_0) \neq z_0$ para todo $n < p$.*

La órbita de un punto periódico z de periodo n está constituida por los n diferentes puntos

$$\mathcal{O}(z) = \{z, R(z), R^2(z), \ldots, R^{n-1}(z)\}.$$

Definición 1.4 *La órbita de un punto periódico de periodo n recibe el nombre de n-ciclo.*

Otro tipo de puntos importantes, son aquéllos que no son periódicos, pero alguna de sus iteraciones sí lo es, éstos son los puntos eventualmente periódicos.

Definición 1.5 *Un punto z decimos que es eventualmente periódico si cumple que $R^k(z) = R^{k+p}(z)$ para algunos enteros positivos p y k.*

Los puntos periódicos también tienen asociado un multiplicador o autovalor que se define de la siguiente manera

Definición 1.6 *Si z es un punto periódico de periodo p, entonces llamaremos multiplicador del p-ciclo al valor de la derivada $\mu = (R^p)'(z)$.*

Los puntos fijos y puntos periódicos se pueden clasificar según su carácter, y éste viene determinado por el autovalor asociado.

Definición 1.7 *Sea z_0 un punto fijo de $R(z)$ con multiplicador μ, entonces diremos que z_0 es:*

(i) *Superatractor, si $\mu = 0$.*

(ii) *Atractor, si $|\mu| < 1$.*

(iii) *Indiferente, si $|\mu| = 1$.*

(iv) *Repulsor, si $|\mu| > 1$.*

Los puntos periódicos de periodo p de una aplicación racional $R(z)$ se clasifican, de forma similar a los puntos fijos, en:

(i) Superatractores, si $\mu = 0$.

(ii) Atractores, si $|\mu| < 1$.

(iii) Indiferentes, si $|\mu| = 1$.

(iv) Repulsores, si $|\mu| > 1$.

Notemos que el autovalor μ asociado a un punto periódico de periodo p (o equivalentemente al p-ciclo), es de suma importancia. Los nombres que reciben los puntos según el valor que tenga su multiplicador son identificativos de lo que va a suceder en un entorno de dichos puntos. Así, por lo tanto, todo punto en un entorno de un punto fijo atractor se irá acercando a él a medida que iteremos y todo punto en un entorno de un punto fijo repulsor se alejará de él. El estudio de los puntos fijos indiferentes es mucho más complejo, ya que existen diversas opciones de lo que puede suceder y se corresponde con la situación frontera entre puntos atractores y repulsores. Probemos que esto es cierto, para ello supongamos que z_0 es un punto fijo (sería idéntico para puntos periódicos de cualquier periodo p) atractor de $R(z)$, es decir, $|R'(z_0)| < 1$. Entonces, para un z suficientemente cercano a z_0 existirá $\beta < 1$ tal que verifique

$$\frac{|R(z) - R(z_0)|}{|z - z_0|} < \beta < 1,$$

y, por ser punto fijo, se tiene que $R(z_0) = z_0$. Además, la desigualdad anterior resultaría

$$|R(z) - z_0| < \beta |z - z_0|,$$

por lo que, $R(z)$ está más cerca de z_0 que z. Si iteramos k veces tenemos que

$$|R(z) - z_0| < \beta^k |z - z_0|,$$

y, como $\beta < 1$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} R^n(z) = z_0.$$

Consecuentemente, se puede concluir que todo z perteneciente a un entorno del punto fijo z_0 converge a z_0 bajo iteración de $R(z)$.

Si por el contrario, z_0 es un punto fijo (ídem para puntos periódicos de cualquier periodo p) repulsor de $R(z)$, es decir, $|R'(z_0)| > 1$, aplicando un procedimiento similar obtenemos que la desigualdad obtenida ahora sería

$$\frac{|R(z) - R(z_0)|}{|z - z_0|} > 1,$$

y, sin más que operar, $|R(z) - z_0| > |z - z_0|$, y por lo tanto, la iteración se aleja de z_0.

Por último, centrando la atención en los puntos indiferentes, es decir, z_0 tal que verifica $|R'(z_0)| = 1$, el comportamiento de las órbitas de puntos en el entorno de estos puntos fijos indiferentes es mucho más complejo que en los casos anteriores, ya que representa la frontera entre ambos. El multiplicador asociado a puntos fijos indiferentes, como ya se ha dicho antes, es de la forma $|\mu| = 1 = e^{i\theta}$, donde $\theta \in [0, 2\pi)$ y el comportamiento dependerá de si θ es un número racional, es decir, $\theta = \frac{p}{q}$, con p, q coprimos entre sí o si es irracional. Se puede profundizar en este tipo de puntos, como puede verse en [25], [31] y [104], entre otros. Se distinguen los siguientes tipos de puntos fijos indiferentes:

- Parabólicos, si existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $\mu^q = 1$.
- Neutrales o indiferentes, si $|\mu| = 1$ y $\mu^q \neq 1$ para todos los $q \in \mathbb{Z}$. En este caso existen dos posibilidades:
  - Si es linealizable, punto de Siegel.
  - Si no es linealizable, punto de Cremer.

El carácter del ∞ como punto fijo necesita de un estudio especial.

Definición 1.8 *El punto ∞ es un punto fijo de $R(z)$ si y sólo si $z = 0$ es un punto fijo de la función*

$$F : z \to \frac{1}{R(\frac{1}{z})}.$$

Si ∞ es un punto fijo de $R(z)$, entonces su multiplicador asociado es $\mu = F'(0)$. En particular tenemos que ∞ es un superatractor si y sólo si $F'(0) = 0$.

Además de los distintos tipos de puntos fijos que existen, también es importante el concepto de cuenca de atracción.

Definición 1.9 *Llamaremos cuenca de atracción de un punto fijo ω de $R(z)$ al conjunto de puntos del plano cuyas iteraciones por $R(z)$ convergen hacia el punto fijo, es decir,*

$$\{z \in \bar{\mathbb{C}} | \lim_{n\to\infty} R^n(z) = \omega\}.$$

En la Figura 1.1 vemos las cuencas de atracción asociadas a las raíces del polinomio $p(z) = z^3 - 1$ al aplicarle el método de Newton, es decir,

$$R(z) = z - \frac{z^3 - 1}{3z^2} = \frac{2z^3 + 1}{3z^2}.$$

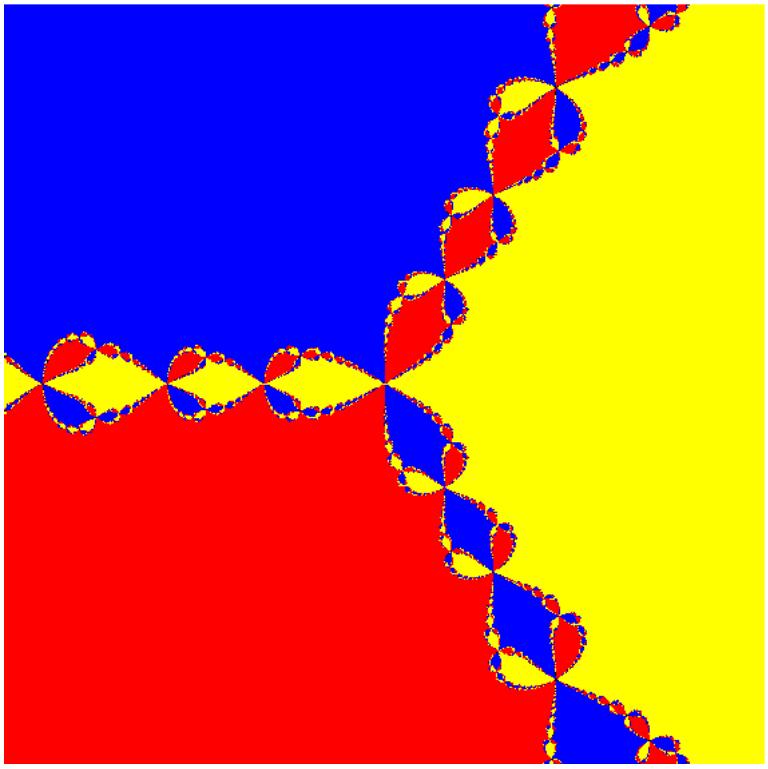


Figura 1.1: Cuencas de atracción asociadas a las raíces del polinomio $p(z) = z^3 - 1$ al aplicarle el método de Newton. En amarillo aparece la cuenca de $z = 1$, en azul la cuenca de $z = e^{2\pi i/3}$ y en rojo la cuenca de $z = e^{4\pi i/3}$.

Debido a que las cuencas de atracción pueden tener infinitas componentes se define el siguiente concepto.

Definición 1.10 *La cuenca de atracción inmediata de un punto fijo ω de $R(z)$ es la componente conexa que contiene el punto fijo.*

Además, dentro del estudio de la dinámica de aplicaciones racionales van a jugar un papel importante los puntos críticos, ya que en cierta medida, pueden caracterizar el comportamiento de las distintas órbitas.

Definición 1.11 *Sea $R(z)$ una función racional de grado d. Un punto $w \in \bar{\mathbb{C}}$, para el cual la cardinalidad de $R^{-1}(w)$ es menor que d, es llamado un valor crítico de $R(z)$. Un punto $z \in R^{-1}(w)$ que es una raíz de $R(z) - w$, con multiplicidad mayor que 1, es llamado un punto crítico de $R(z)$. En particular, z es un punto crítico de una función holomorfa $p(z)$ si $p'(z) = 0$.*

Por ejemplo, la función $R(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$ tiene un punto crítico en $z = -1$, para el que se anula $R'(z) = \frac{z+1}{(1-z)^3} = 0$. El valor crítico asociado a $z = -1$ es $-\frac{1}{4}$. Además, si $\omega = \infty$, $R^{-1}(\omega) = 1$, por lo que $\omega = \infty$ es otro valor crítico, en

este caso, asociado al punto crítico $z = 1$. Los puntos críticos juegan un papel fundamental en el estudio de la dinámica de una función $p(z)$. De hecho, son puntos alrededor de los cuales la función $p(z)$ no es un homeomorfismo local. Es decir, si p_1 es un punto crítico de $p(z)$, ninguna rama de la función inversa de $p(z)$ está definida en ningún entorno del valor crítico $p(p_1)$.

Estos dos conceptos suelen confundirse a menudo y es muy importante saber distinguir entre punto crítico y valor crítico. Por otro lado, se tiene la siguiente nota que relaciona los puntos críticos con los ciclos atractores.

Nota 1.1 *Si el máximo de los grados del denominador y el numerador de una función racional es d, entonces la función tendrá como mucho* $2d - 2$ *puntos críticos y, por lo tanto,* $2d - 2$ *ciclos atractores.*

Consecuentemente, la existencia de órbitas o ciclos atractores interfiere en la búsqueda de raíces de $p(z) = 0$, al aplicar un método iterativo.

1.1.2. Caos

En esta sección introducimos el concepto de caos. Para ello, nos apoyaremos en la definición dada por Devaney (véase [34]), que ha sido modificada con el paso del tiempo, primero por Banks et al. en 1992 [17] y, posteriormente por Touhey en 1997 [107].

La aparición de caos en el método de Newton ha sido estudiada por diferentes autores, como podemos ver en el libro de Gutiérrez y Plaza *Estudio dinámico del método de Newton para resolver ecuaciones no lineales* (véase [53]) y también en el método de Newton amortiguado para polinomios cuadráticos, en concreto, para el caso del polinomio $p(z) = z^2 + 1$ (véase [21]).

Para poder definir y entender la noción de caos, es necesario definir varios conceptos previos, que aparecen a continuación.

Definición 1.12 *Un sistema dinámico discreto es un par* (X, f) *donde* X *es un espacio métrico y* f *es una función definida de* X *en* X*, es decir,* $f : X \to X$*.*

Una vez que tenemos definido lo que es un sistema dinámico discreto pasaremos a ver cuándo se dice que es topológicamente transitivo.

Definición 1.13 *Se dice que un sistema dinámico discreto* (X, f)*, es topológicamente transitivo si dados dos subconjuntos abiertos cualesquiera* U *y* V *de* X*, existe un entero* $n \in \mathbb{N}$ *tal que se verifica que* $f^n(U) \bigcap V \neq \emptyset$*.*

También es necesaria la definición de subconjunto denso en otro.

Definición 1.14 *Se dice que un subconjunto* Y *de un espacio métrico* X *es denso en* X*, si para cualquier subconjunto abierto* U *de* X*, existe siempre un punto de* Y *en* U*.*

Por último, necesitamos definir el concepto de sistema dinámico discreto sensible con respecto a las condiciones iniciales.

Definición 1.15 *Un sistema dinámico discreto (X, f) se dice que es sensible a las condiciones iniciales, si existe un $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X$ y para todo $\epsilon > 0$, existen $y \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que se cumple que la distancia entre x e y es menor que ϵ ($d(x, y) < \epsilon$) y la distancia entre $f^n(x)$ y $f^n(y)$ es mayor que δ ($d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$).*

Este último fenómeno es conocido como «efecto mariposa». Toda vez que ya tenemos definidos los conceptos anteriores, ya podemos ver la definición de caos dada por Devaney en 1992.

Definición 1.16 *Se dice que un sistema dinámico discreto (X, f) es caótico si cumple todas y cada una de las siguientes condiciones:*

(i) *Es topológicamente transitivo.*

(ii) *El conjunto de puntos periódicos de f es denso en X.*

(iii) *El sistema es sensible con respecto a las condiciones iniciales.*

Diversos autores han ido refinando la definición de sistema caótico (en [17] se demuestra que la sensibilidad con respecto a condiciones iniciales es una propiedad redundante) y en 1997 Touhey [107], da una caracterización diferente del concepto de sistema caótico sin utilizar directamente las tres condiciones de la definición de Devaney, como se observa a continuación.

Teorema 1.1 *Sea (X, f) un sistema dinámico discreto tal que para dos conjuntos abiertos no vacíos cualesquiera $U, V \subseteq X$, existe un punto periódico $p \in U$ tal que para $f^n(p) \in V$ para algún $n \in N$, entonces el sistema dinámico es caótico en el sentido de la definición de Devaney.*

Esta caracterización establece que un sistema dinámico discreto es caótico si y sólo si para cualesquiera dos conjuntos abiertos U, V de X, existe una órbita periódica que visita a ambos conjuntos.

Por último, en [53] se pueden ver ejemplos de sistemas dinámicos discretos caóticos como la función «diente de sierra», la función «tienda de campaña» o la función logística entre otras.

1.1.3. Conjugación topológica

Un concepto fundamental para comprender el comportamiento de las aplicaciones racionales, desde el punto de vista dinámico, es el de conjugación. Para introducir este concepto hacemos uso de las transformaciones de Möbius, que son aplicaciones racionales de grado 1.

Definición 1.17 *Llamamos transformación de Möbius de parámetros $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ a la función τ de la siguiente forma*

$$\tau(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \forall z \in \bar{\mathbb{C}}$$

con a, b, c, d tales que $ad - bc \neq 0$.

Las conjugaciones topológicas son muy utilizadas en el estudio de funciones racionales que dependen de parámetros, ya que en ocasiones, pueden reducir el número de parámetros involucrados en el estudio.

Definición 1.18 *Sean $R_1, R_2 : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ dos funciones racionales. Decimos que son conjugadas si y sólo si existe una transformación de Möbius $\varphi : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$, tal que $\varphi \circ R_1 \circ \varphi^{-1}(z) = R_2(z)$ para todo z.*

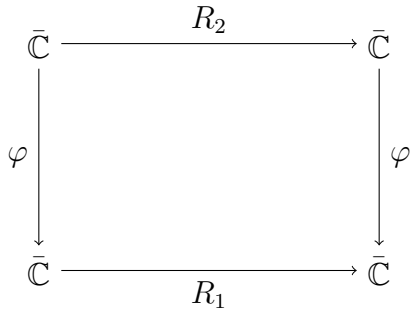


Figura 1.2: Diagrama resultante de una conjugación topológica.

La conjugación es una relación de equivalencia, y las clases de equivalencia se denominan clases de conjugación de las aplicaciones racionales. Para un estudio más profundo sobre conjugaciones se pueden consultar los textos [19], [40] o [53], entre otros. En el siguiente teorema se pueden observar de manera resumida las propiedades elementales de las conjugaciones topológicas.

Teorema 1.2 *Sean $R_1, R_2 : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ dos funciones racionales, y sea $\varphi : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ una conjugación topológica entre $R_1(z)$ y $R_2(z)$, como la que aparece en la Figura 1.2. Entonces,*

(i) *$\varphi^{-1} : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$, es también una conjugación topológica entre $R_2(z)$ y $R_1(z)$.*

(ii) *$\varphi \circ R_1^n(z) = R_2^n \circ \varphi(z)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

(iii) *p es un punto periódico de $R_1(z)$ si y sólo si $\varphi(p)$ es un punto periódico de $R_2(z)$. Además, p y $\varphi(p)$ tienen periodos iguales.*

(iv) *Si p es un punto periódico de $R_1(z)$ y $\varphi'(z)$ no se anula en la órbita de p, entonces p y $\varphi(p)$ tienen el mismo carácter (atractor, repulsor, indiferente).*

(v) *Si p es un punto periódico de $R_1(z)$ con cuenca de atracción $\mathcal{B}(p)$, entonces la cuenca de atracción de $\varphi(p)$ es $\varphi(\mathcal{B}(p))$.*

(vi) *Los puntos periódicos de $R_1(z)$ son densos en $\bar{\mathbb{C}}$, si y sólo si, los puntos periódicos de $R_2(z)$ son densos en $\bar{\mathbb{C}}$.*

(vii) *$R_1(z)$ es caótica sobre $\bar{\mathbb{C}}$, si y sólo si, $R_2(z)$ es caótica sobre $\bar{\mathbb{C}}$.*

Obsérvese que, en ocasiones, el problema de descubrir el comportamiento tanto cualitativo como cuantitativo de una aplicación racional puede simplificarse transfiriendo este problema en otro más sencillo, en términos de su conjugado. Veámoslo con un ejemplo, supongamos que queremos estudiar el método de Newton aplicado a polinomios con dos raíces diferentes, es decir, sea $p(z) = (z-a)(z-b)$, entonces

$$N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)} = z - \frac{(z-a)(z-b)}{2z-a-b}.$$

El estudio de $N_p(z)$ depende de las dos raíces a y b, sin embargo, si utilizamos la transformación de Möbius

$$M(z) = \frac{z-a}{z-b}$$

y componiendo, de la siguiente manera

$$S_p(z) = M \circ N_p \circ M^{-1}(z) = z^2,$$

se obtiene que la aplicación a estudiar es mucho más sencilla que la primitiva, pues es independiente de las raíces. Este hecho ya fue puesto de manifiesto por Cayley en 1879 y es clave en el estudio de procesos iterativos aplicados para resolver ecuaciones cuadráticas complejas, como se verá en el Capítulo 3.

1.1.4. Conjuntos de Julia y Fatou

Esta sección está dedicada a las propiedades de los conjuntos de Julia (véase [61]) y de Fatou (véase [41]), denominados así en honor a sus descubridores, Gaston Julia y Pierre Fatou, quienes mantuvieron una dura batalla por *le grand prix des sciences mathématiques* de 1918 (para más información, puede consultarse el apartado dedicado a su enfrentamiento en [40]). Ambos conjuntos tienen comportamientos complementarios, es más, la definición de ambos se corresponde con el complementario el uno del otro. En términos coloquiales y de una manera superficial puede definirse el conjunto de Fatou como los puntos cuyas órbitas bajo un método iterativo tienen un comportamiento estable, mientras que el conjunto

de Julia se correspondería con los puntos cuyas órbitas tiene un comportamiento inestable.

Diversos autores se han sentido atraídos por el estudio de los conjuntos de Julia y Fatou, ya que son esenciales en el estudio de la dinámica compleja (véase [40], [79] o [89], entre otros). La distinción entre ambos conjuntos está ligada al concepto de normalidad que se define de la siguiente manera.

Definición 1.19 *Dados dos espacios métricos (X, d) e (Y, ρ) y una familia τ de aplicaciones de X en Y, decimos que τ es equicontinua en x_0 si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ y para todo $f \in \tau$, se cumple que si $d(x_0, x) < \delta$, entonces $\rho(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$. Decimos que τ es equicontinua en un subespacio Ω, si es equicontinua para cada punto $x \in \Omega \subseteq X$.*

Definición 1.20 *Suponemos que $R(z)$ es una aplicación racional no constante. Se denomina conjunto de Fatou asociado a $R(z)$, y se denota por $\mathcal{F}(R)$, al mayor subconjunto abierto de $\bar{\mathbb{C}}$ en el que la familia*

$$\tau = \{R, R \circ R, \dots, R \circ \cdots \circ R, \dots\}$$

es equicontinua con respecto a una de las métricas en $\bar{\mathbb{C}}$.

El complementario del conjunto de Fatou es el conjunto en el que la dinámica es más complicada de entender.

Definición 1.21 *Suponemos que $R(z)$ es una aplicación racional no constante. El complementario del conjunto de Fatou, denotado por $\mathcal{J}(R) = \bar{\mathbb{C}} - \mathcal{F}(R)$, se denomina conjunto de Julia asociado a $R(z)$.*

Las propiedades de los conjuntos de Julia y Fatou han sido estudiadas por numerosos autores en diferentes obras, ejemplos de ello son el libro de Fagella y Jarque (véase [40]) o el artículo de Peitgen, Saupe y Haeseler (véase [89]). Entre los resultados sobre las propiedades más importantes cabe destacar el siguiente listado.

Sea $R(z)$ una aplicación racional y $\mathcal{J}(R)$ el conjunto de Julia asociado a $R(z)$. Entonces:

(i) $\mathcal{J}(R) \neq \emptyset$ y $\mathcal{J}(R)$ es denso en sí mismo (es perfecto).

(ii) $\mathcal{J}(R) = \mathcal{J}(R^n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $R(\mathcal{J}(R)) = R^{-1}(\mathcal{J}(R)) = \mathcal{J}(R)$, es decir, $\mathcal{J}(R)$ es completamente invariante.

(iv) Si $z_0 \in \mathcal{J}(R)$, entonces la clausura de $\{z \in \bar{\mathbb{C}} | R^n(z) = z_0\} = \mathcal{J}(R)$.

(v) Si ϑ es un ciclo atractor de $R(z)$, entonces la cuenca de atracción de ϑ está contenida en $\mathcal{F}(R)$ y, además, su frontera está en $\mathcal{J}(R)$.

(vi) Si $\mathcal{J}(R)$ tiene un interior no vacío, entonces $\mathcal{J}(R) = \bar{\mathbb{C}}$.

(vii) $R(z)$ restringida a su conjunto de Julia es sensible respecto a condiciones iniciales.

(viii) $\mathcal{J}(R)$ es autosimilar.

(ix) Para todo punto $z \in \mathcal{J}(R)$ el conjunto de preimágenes de z es denso en $\mathcal{J}(R)$.

(x) $R(z)$ es topológicamente transitiva en $\mathcal{J}(R)$.

(xi) Si P_R es el conjunto de los puntos periódicos repulsores de $R(z)$, entonces $P_R \subset \mathcal{J}(R)$ y además $\bar{P_R} = \mathcal{J}(R)$.

(xii) Si $R(z)$ es no constante y sea $\tau(z)$ una transformación de Möbius. Definimos una aplicación racional nueva $S(z) = \tau \circ R \circ \tau^{-1}(z)$, entonces se cumple que $\mathcal{F}(S) = \tau(\mathcal{F}(R))$ y $\mathcal{J}(S) = \tau(\mathcal{J}(R))$.

Como hemos visto con anterioridad, pueden existir infinitas componentes conexas de una cuenca de atracción, cada una de ellas pertenece al conjunto de Fatou, recordemos que el conjunto de Fatou es abierto. Para ver una clasificación detallada de las diferentes componentes que puede presentar el conjunto de Fatou, se pueden consultar las siguientes referencias [39], [40], [89] o [106].

Decimos que un conjunto X es errante si la intersección $R^n X \cap R^m X$ es vacía para todo $n > m \geq 0$. La posibilidad de aparición de dominios errantes en aplicaciones racionales fue descartada por Sullivan en 1985, como indica el siguiente resultado.

Teorema 1.3 *El conjunto de Fatou de una aplicación racional no tiene componentes errantes. Es decir, cada componente del conjunto de Fatou es eventualmente periódica.*

Sin embargo, I. N. Baker en [14] mostró que los conjuntos de Fatou de algunas funciones enteras en $\bar{\mathbb{C}}$ tienen dominios errantes.

De forma esquemática se pueden encontrar las siguientes componentes de Fatou:

1. Cuencas de atracción de puntos fijos atractores. Las órbitas de puntos cercanos a los puntos fijos convergen hacia dichos puntos. Un ejemplo puede verse en la Figura 1.3, en la que se observan las cuencas de atracción de los 4 puntos fijos atractores, con colores diferentes.

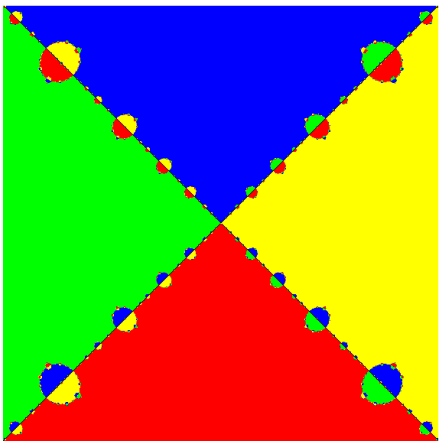


Figura 1.3: Cuencas de atracción asociadas a las raíces del polinomio $p(z) = z^4 - 1$, al aplicarle el conocido método de Halley $\left(H_f(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)} \frac{2}{2-L_f(z)}\right)$. En verde la cuenca de $z = -1$, en amarillo la de $z = 1$, en azul la cuenca de $z = i$ y en rojo la de $z = -i$.

2. Cuencas de atracción de ciclos periódicos. Las órbitas convergen a una órbita periódica (super)atractora. Por ejemplo, la función $p(z) = z^2 - 1$ tiene una órbita $\{0, -1\}$ de periodo 2 que es superatractora. Dicha órbita está rodeada de una cuenca inmediata de atracción que se corresponde con las dos componentes de color amarillo que la contienen, véase la Figura 1.4. La unión de todas las preimágenes de éstas, forma la totalidad de la cuenca dibujada en amarillo. Su complementario, en rojo, es la cuenca de atracción del infinito. En negro aparece el conjunto de Julia.

3. Cuencas de atracción parabólicas. En términos de comportamiento son muy similares a las anteriores, pero con la diferencia que los puntos fijos o periódicos se encuentran en la frontera de la cuenca y no en su interior. En la Figura 1.5 podemos ver las cuencas de atracción asociadas al polinomio $p(z) = z^2 + 0.25$, el cual tiene a $z_0 = 0.5$ como punto fijo con multiplicador asociado $\mu = 1$. En dicha figura se observa en amarillo su cuenca de atracción parabólica, en este caso formada por una sóla componente conexa. Todos los puntos de este color tienen órbitas que convergen a z_0, situado en la frontera. Además, en rojo se aprecia la cuenca de atracción del infinito y en negro el conjunto de Julia.

Además, aunque en el desarrollo de esta tesis no aparecen, pueden encontrarse las siguientes componentes de Fatou:

- Discos de rotación o de Siegel. Se conoce como disco de rotación fijo de $P(z)$, a un abierto U conformemente equivalente al disco unidad, que contiene un punto fijo z_0 en su interior, y tal que $P|_U$ es conformemente conjugada

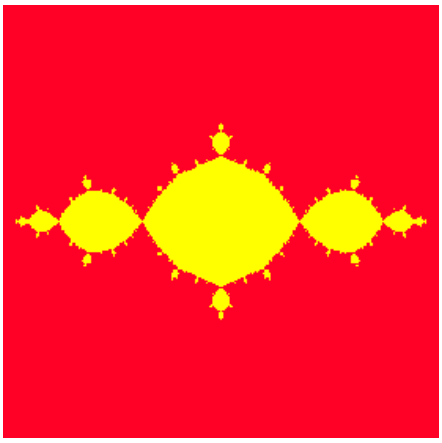


Figura 1.4: Cuencas de atracción asociadas a la función $p(z) = z^2 - 1$ que tiene una órbita periódica superatractora de periodo 2, dicha órbita es $\{0, -1\}$. En amarillo aparece la cuenca de la órbita periódica, mientras que en rojo aparece la cuenca de infinito.

Figura 1.5: Cuencas de atracción asociadas a la función $p(z) = z^2 + 0.25$ que tiene en $z_0 = 0.5$ un punto fijo parabólico. En amarillo aparece la cuenca de $z_0 = 0.5$, mientras que en rojo aparece la cuenca de infinito.

a una rotación rígida $R_\theta(z) = e^{2\pi i\theta}$ en el disco unidad, donde $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ésto quiere decir que existe un homeomorfismo conforme $h : U \to D$ tal que $h \circ P(z) = \mathbb{R}_\theta \circ h(z)$. Ésto significa que las órbitas densas en U viven sobre curvas invariantes y, sobre ellas, se comportan como una rotación irracional, es decir, se acumulan de forma densa sobre toda la curva.

- Anillos de rotación o de Herman. El comportamiento es muy similar al anterior, con la única salvedad de que en lugar de ser conformemente conjugado a un disco de rotación, lo es a un anillo de rotación. Los anillos de

rotación se diferencian de los discos de rotación en que no están asociados a ninguna órbita periódica.

Como consecuencia del principio de módulo máximo, se tiene que todo anillo de rotación requiere de un polo de la función, por eso nunca encontraremos anillos de rotación en los planos de fase de polinomios o funciones enteras.

- Dominios parabólicos en el ∞ o de Baker. Un dominio parabólico infinito fijo es un abierto U del plano tal que todas sus órbitas convergen hacia el punto del infinito, que debe ser una singularidad esencial. Por definición, sólo existen en funciones trascendentes.

- Dominios errantes. Un dominio errante es un abierto U tal que $F^n(U) \cap F^m(U) = \emptyset$ para toda $n, m \in \mathbb{N}$. Es decir, los dominios errantes no son componentes ni periódicos ni eventualmente periódicos.

Una vez que ya tenemos definidos los conjuntos de Julia y Fatou, nos preguntamos qué tipo de puntos pertenecen a cada uno de ellos.

Nota 1.2 *Los puntos fijos:*

- *Superatractores, atractores y linealizables (Siegel) pertenecen al conjunto de Fatou.*

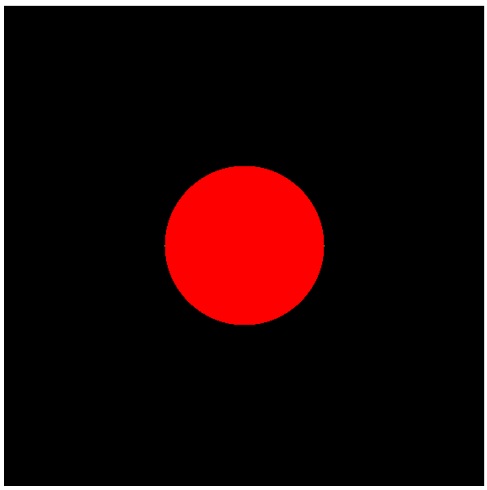
- *Repulsores, parabólicos y no linealizables (Cremer) pertenecen al conjunto de Julia.*

El concepto de conjunto de Julia universal introducido por Kneils en [66], nos permitirá reducir el estudio de la dinámica de un método iterativo como buscador de soluciones aplicado a polinomios, al estudio de la dinámica del método aplicado a polinomios particulares. Por lo tanto, este concepto va a ser de gran utilidad y se define de la siguiente manera.

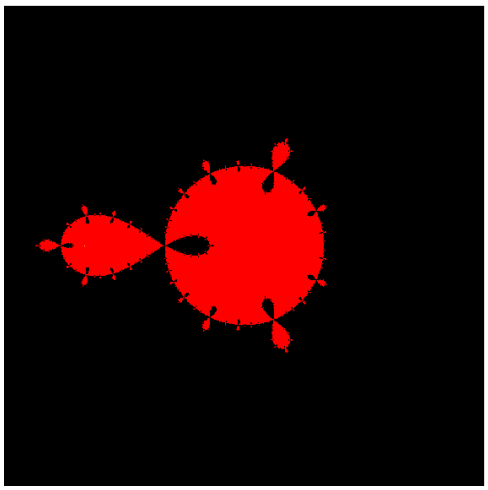
Definición 1.22 *Decimos que un algoritmo iterativo de un punto, para encontrar raíces $p \to T_p$, tiene un conjunto de Julia universal (para polinomios de un cierto grado d) si existe una aplicación racional $R(z)$ tal que para cada polinomio $p(z)$ de grado d, el conjunto de Julia asociado $\mathcal{J}(T_p)$ es conjugado vía una transformación de Möbius a $\mathcal{J}(R)$, es decir, existe una transformación de Möbius $\tau(z)$ tal que $T_p(z) = \tau \circ R \circ \tau^{-1}(z)$.*

Para ilustrar este concepto, consideramos la bien conocida familia de métodos iterativos de Chebyshev-Halley (véase [5] o [30]) para resolver ecuaciones no lineales

$$z_{n+1} = z_n - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{L_p(z_n)}{1 - \beta L_p(z_n)}\right)\frac{p(z_n)}{p'(z_n)}, \quad L_p(z_n) = \frac{p(z_n)p''(z_n)}{(p'(z_n))^2}, \qquad (1.1.1)$$



Newton, Halley y super-Halley



Chebyshev

Figura 1.6: En la imagen aparecen los conjuntos de Julia universales asociados al método de Newton, al método de Halley y al método de super-Halley aplicados a un polinomio cuadrático con dos raíces diferentes. Notemos que son idénticos y coinciden con la circunferencia unidad. En la imagen derecha aparece el conjunto de Julia universal asociado al método de Chebyshev aplicado a un polinomio cuadrático con dos raíces diferentes.

donde $\beta \in \mathbb{R}$. La mayoría de los métodos de tercer orden más famosos están incluidos en esta familia. Por ejemplo, para $\beta = 0$ se obtiene el método de Chebyshev, para $\beta = 0.5$ obtenemos el método de Halley, para $\beta = 1$ se obtiene el método de super-Halley y si $\beta \to \pm\infty$ obtenemos el método de Newton.

Si consideramos polinomios cuadráticos de la forma $p(z) = (z-a)(z-b)$ con $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$. Sea $R_\beta(z)$ la función racional obtenida al aplicar la familia anterior a estos polinomios y sea $M(z)$ la transformación de Möbius definida por

$$M(z) = \frac{z-a}{z-b}.$$

Podemos definir la aplicación racional $S_\beta(z) = M \circ R_\beta \circ M^{-1}(z)$ como

$$S_\beta(z) = z^3 \frac{z + 2(1-\beta)}{2(1-\beta)z + 1}. \tag{1.1.2}$$

Así, tenemos para Newton $S_\infty(z) = z^2$, para super-Halley $S_1(z) = z^4$, para Halley $S_{1/2}(z) = z^3$ y, por último, para Chebyshev $S_0(z) = z^3 \frac{z+2}{2z+1}$. Los gráficos asociados pueden verse en la Figura 1.6.

Existen multitud de resultados relacionados con los conjuntos de Julia y Fatou, en esta tesis se presentan sólo algunos (véase [53] para un listado más detallado).

Teorema 1.4 *Si z_r es un punto de un ciclo repulsor, entonces el conjunto de*

Julia, $\mathcal{J}(R)$, está formado por la clausura de las preimágenes de z_r, es decir,

$$\mathcal{J}(R) = clausura\{z \in \bar{\mathbb{C}} : R^n(z) = z_r, n \in \mathbb{N}\}.$$

Uno de los resultados más importantes es el siguiente teorema.

Teorema 1.5 *(Teorema Fundamental de Fatou y Julia) Los ciclos repulsores son densos en $\mathcal{J}(R)$, es decir,*

$$\mathcal{J}(R) = clausura\{z \in \bar{\mathbb{C}} : z \text{ pertenece a un ciclo repulsor de } R(z)\}.$$

En particular, existe una cantidad infinita de ciclos repulsores y cada $z \in \mathcal{J}(R)$ es obtenido como límite de puntos en ciclos repulsores.

Además, otro concepto íntimamente ligado al estudio de la dinámica es el siguiente.

Definición 1.23 *Llamaremos conjunto postcrítico de una aplicación racional $R(z)$ a la clausura de la unión de las órbitas de todos los puntos críticos de $R(z)$.*

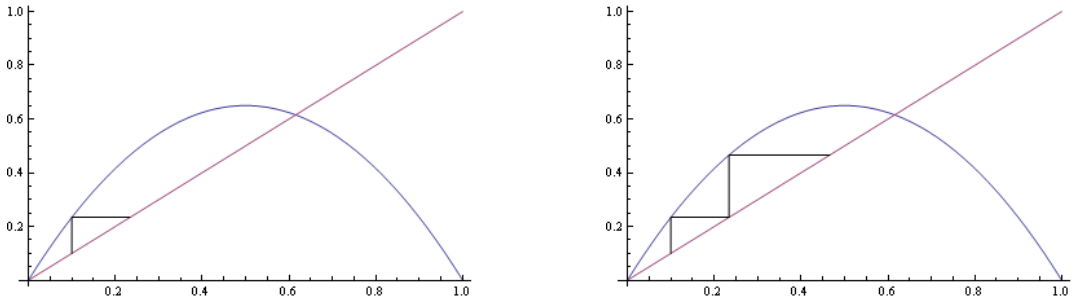
La importancia del conjunto postcrítico en el estudio de la dinámica de funciones racionales se resume en la siguiente proposición que aparece en [26] y que es consecuencia de los trabajos de Fatou.

Proposición 1.6 *El conjunto postcrítico de una función racional $R(z)$ contiene, los ciclos atractores de $R(z)$, los ciclos indiferentes que pertenecen al conjunto de Julia y la frontera de cada disco de Siegel y anillo de Herman.*

1.2. Nociones básicas de iteración de funciones reales

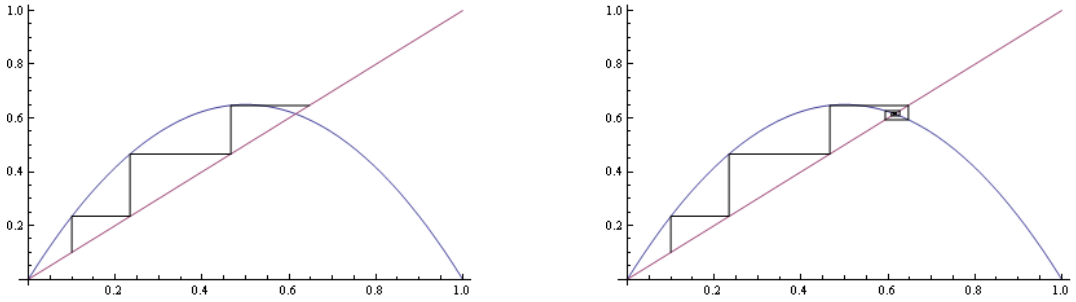
Además de todos los conceptos introducidos en la sección de nociones básicas de iteración compleja, en el caso real aparecen diferentes conceptos que deben ser comentados, como por ejemplo, la aparición de asíntotas, los diagramas de Feigenbaum o los exponentes de Lyapunov, entre otros.

Una de las herramientas en la que nos vamos a apoyar es el estudio gráfico de la dinámica. Para llevar a cabo este estudio necesitamos un gráfico de la función de iteración junto con la identidad. Partimos de un punto inicial, x_0, y se traza una línea vertical hasta que interseca con la función de iteración. En el punto de intersección se traza una línea recta horizontal hasta que interseca la identidad, de nuevo en ese punto trazamos otra recta vertical hasta que interseca la función. La primera coordenada de este último punto se corresponde con la primera iteración del método. Repitiendo el proceso desde este nuevo punto se



Un paso Dos pasos

Figura 1.7: Aplicación del algoritmo de estudio gráfico de la dinámica con uno y dos pasos.



Tres pasos Cincuenta pasos

Figura 1.8: Aplicación del algoritmo de estudio gráfico de la dinámica con tres y cincuenta pasos.

van obteniendo las siguientes iteraciones. En la Figura 1.7 pueden verse los dos primeros pasos de este procedimiento, mientras que en la Figura 1.8 se observa el procedimiento, con tres y cincuenta pasos, respectivamente.

Por otro lado, resulta de gran utilidad el homeomorfismo $G : \mathbb{R} \to (0,1)$ que nos permite obtener compactificaciones de métodos al intervalo $(0,1)$ y que viene definido por

$$G(x) = \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}. \tag{1.2.1}$$

Esta función tiene como inversa

$$G^{-1}(x) = \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right). \tag{1.2.2}$$

Sea $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio de grado mayor que 1, la compactificación que vamos a construir es la siguiente

$$\widetilde{\tau}(x) = G \circ \tau \circ G^{-1}(x). \tag{1.2.3}$$

Además, introduciendo las siguientes notaciones

$$G(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} G(x) = 0,$$

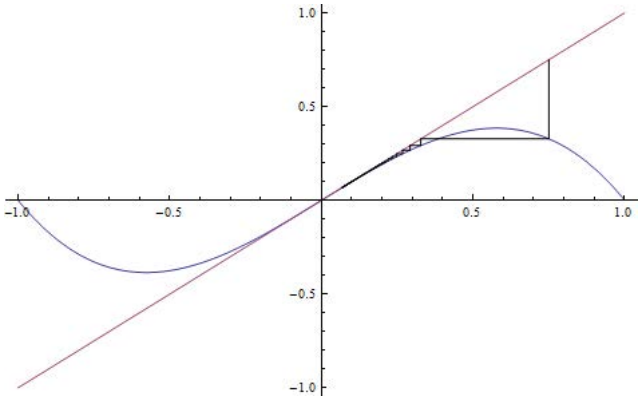


Figura 1.9: Órbita de $x_0 = 0.75$ bajo la función $f(x) = -x^3 + x$, donde puede verse que el 0 es un punto fijo con multiplicador $\mu = 1$, pero con comportamiento atractor.

y

$$G(\infty) = \lim_{x \to \infty} G(x) = 1,$$

y teniendo en cuenta que $\tau(x)$ es un polinomio de grado mayor que 1, se puede extender la compactificación a una aplicación definida en $[0, 1]$. Cabe destacar que al utilizar esta compactificación aparecen dos puntos fijos adicionales que son $x = 0$ y $x = 1$. Como estos puntos fijos extraños (se denominan así por ser puntos fijos que no son raíces) son repulsores, no van a interferir en la dinámica del método.

Con respecto a los puntos fijos, también hay variaciones con respecto a la dinámica compleja, como demuestran los siguientes dos teoremas.

Teorema 1.7 *Sea $f : I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo y $f \in \mathbb{C}^1(I)$. Sea $\xi \in I$ un punto fijo indiferente de $f(x)$, es decir, el módulo de su multiplicador asociado $|f'(\xi)| = 1$, tal que $|f'(x)|$ presenta un máximo local en ξ, entonces ξ es un punto fijo atractor.*

La demostración de este teorema puede verse en [46].

Ejemplo 1.1 *([46]) El 0 es un punto fijo indiferente atractor de la función $f(x) = -x^3 + x$, como puede verse en la Figura 1.9. Notemos que $|f'(x)| = |-3x^2 + 1|$ presenta un máximo local en $x = 0$.*

Teorema 1.8 *Sea $f : I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo y $f \in \mathbb{C}^1(I)$. Sea $\xi \in I$ un punto fijo indiferente de $f(x)$, es decir, el módulo de su multiplicador asociado $|f'(\xi)| = 1$, tal que $|f'(x)|$ presenta un mínimo local estricto en ξ, entonces ξ es un punto fijo repulsor.*

La demostración de este teorema se puede encontrar también en [46].

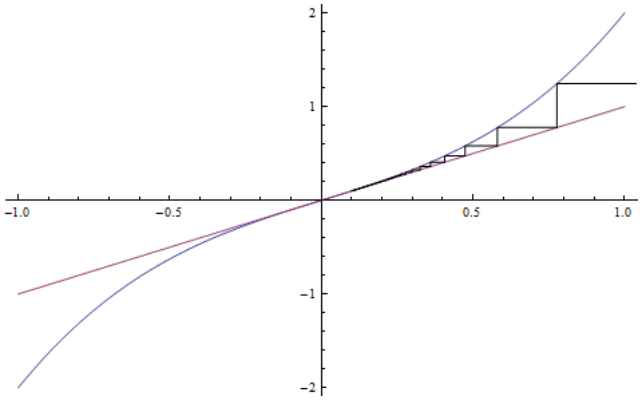


Figura 1.10: Órbita de $x_0 = 0.1$, bajo la función $f(x) = x^3 + x$, donde puede verse que el 0 es un punto fijo con multiplicador asociado $\mu = 1$, pero con comportamiento repulsor.

Ejemplo 1.2 *([46]) El* 0 *es un punto fijo indiferente repulsor de la función* $f(x) = x^3 + x$ *como puede verse en la Figura 1.10. En este caso,* $|f'(x)| = 3x^2 + 1$ *tiene un mínimo absoluto en* $x = 0$.

En el estudio de familias uniparamétricas de funciones de iteración, el carácter de los puntos periódicos puede depender del parámetro. En concreto, los puntos periódicos indiferentes marcan el paso de un carácter atractor a repulsor o viceversa. Cuando se produce un cambio cualitativo en el comportamiento de los puntos periódicos, se dice que se ha producido una bifurcación. Los casos más comunes de bifurcación son los siguientes.

Bifurcación tangente. Cuando un punto fijo indiferente se desdobla en dos puntos fijos, uno atractor y otro repulsor, o cuando dos puntos fijos, uno repulsor y otro atractor colapsan en un único punto fijo indiferente.

Ejemplo 1.3 *La familia cuadrática* $f_c(x) = x^2 + c$ *presenta una bifurcación tangente en* $c = 0.25$. *Los puntos fijos de* $f_c(x) = x$ *son*

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2}.$$

Por otro lado, como la derivada es $f_c'(x) = 2x$, *se tiene que:*

- *Si* $c < 0.25$, $f_c(x)$ *tiene dos puntos fijos cuyos multiplicadores asociados son* $1 \pm \sqrt{1 - 4c}$ *y, por lo tanto, uno es atractor y el otro es repulsor.*
- *Si* $c = 0.25$, $f_c(x)$ *tiene un único punto fijo indiferente en* $x = 1$.
- *Si* $c > 0.25$, $f_c(x)$ *no tiene puntos fijos.*

Bifurcación transcrítica. Cuando dos puntos fijos intercambian su carácter.

Ejemplo 1.4 *La familia logística $f_c(x) = cx(1-x)$, con $c > 0$, presenta una bifurcación transcrítica en $c = 1$. Los puntos fijos de $f_c(x)$, son $x_1 = 0$ y $x_2 = 1 - \frac{1}{c}$. Además, como la derivada es $f_c'(x) = c(1-2x)$, se tiene que:*

- *Si $c < 1$, x_1 es atractor y x_2 repulsor.*
- *Si $c = 1$, $x = 0$ es el único punto fijo indiferente.*
- *Si $c > 1$, x_1 es repulsor y x_2 atractor.*

Bifurcación horca. Cuando un punto fijo atractor se convierte en repulsor a la vez que aparecen dos puntos fijos atractores nuevos.

Ejemplo 1.5 *La familia de funciones $f_c(x) = c(-x^3 + x)$, con $c > 0$, presenta una bifurcación horca en $c = 1$. Los puntos fijos $f_c(x) = x$, son $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{\frac{c-1}{c}}$ y $x_3 = -\sqrt{\frac{c-1}{c}}$. Ahora bien, como la derivada es $f_c'(x) = c(-3x^2 + 1)$, se tiene que:*

- *Si $c = 1$, $f_c(x)$ tiene un único punto fijo indiferente en $x = 0$.*
- *Si $c > 1$, x_1 es repulsor, x_2 atractor y x_3 también es atractor.*

Para estudiar la aparición de bifurcaciones, utilizaremos el conocido diagrama de Feigenbaum o de bifurcaciones que viene definido en [46] de la siguiente forma.

Definición 1.24 *Un diagrama de bifurcación de un sistema dinámico, es una estratificación de su espacio de parámetros inducida por la equivalencia topológica, junto con los retratos de fase representativos de cada estrato. Las soluciones estables suelen representarse mediante líneas continuas, mientras que las soluciones inestables se representan con líneas punteadas.*

Un ejemplo de este tipo de diagramas puede verse en la Figura 1.11. A la hora de interpretar el diagrama, hay que tener en cuenta que muchas veces el rango de bifurcaciones es tan pequeño que, dependiendo de la escala con la que se trabaje, no se llega a apreciar, lo cual no significa que no haya bifurcaciones. Sin embargo, los exponentes de Lyapunov constituyen una buena herramienta que permitirá obviar, en ciertos casos, el problema con las escalas.

Como se ha visto anteriormente, las órbitas cercanas a un n-ciclo se acercan o se alejan del ciclo, bien sean atractores o repulsores y además, el ritmo con que ocurre este fenómeno viene regulado por la derivada de $f^n(x)$ en cualquier punto del ciclo. Para un ciclo $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tras n iteraciones sobre un punto cercano la distancia de éste al ciclo se habrá multiplicado por

$$|(f^n)'(x_1)| = \cdots = |(f^n)'(x_n)| = |f'(x_1)||f'(x_2)| \cdots |f'(x_n)|$$

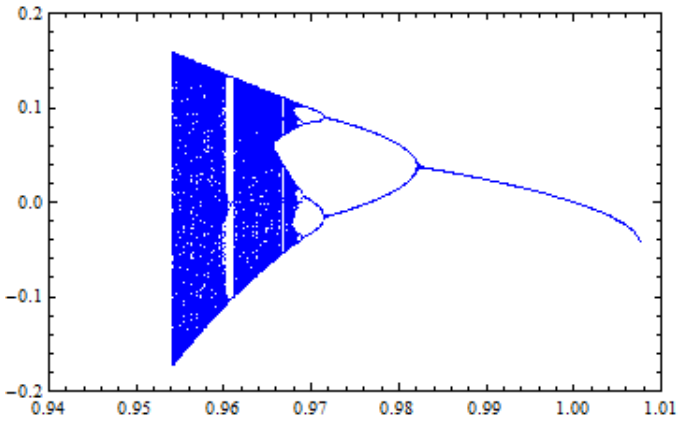


Figura 1.11: Diagrama de Feigenbaum que se obtiene al aplicar el método de Newton de dos pasos a la familia $f(x) = x^3 + \gamma x + 1$, donde se observa que para algunos valores de $\gamma \in (0.94, 1.01)$ se producen bifurcaciones.

y la variación media tras cada iteración será

$$\sqrt[n]{|f'(x_1)||f'(x_2)|\cdots|f'(x_n)|}.$$

Este razonamiento también es válido para órbitas sin ciclos.

Definición 1.25 *Sea la órbita* $\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$*, entonces llamaremos número de Lyapunov de la órbita al valor*

$$L(x_1) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f'(x_1)||f'(x_2)|\cdots|f'(x_n)|}.$$

Notemos además, que este valor es el mismo para todos los elementos de la órbita.

El número de Lyapunov mide la contracción o expansión local asintótica en cada iteración en la proximidad de una órbita.

Nota 1.3 *Si una órbita* $\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$ *es asintótica a una órbita periódica* $\{y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n\}$*, es decir,* $\lim_{n\to\infty}|x_n - y_n| = 0$*, entonces* $L(x_1) = L(y_1)$*, siempre que ambos estén definidos.*

Una vez definido el número de Lyapunov, otro concepto importante es el de exponente de Lyapunov que se define de la siguiente manera.

Definición 1.26 *Sea la órbita* $\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$*, entonces llamaremos exponente de Lyapunov al valor*

$$h(x_1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\log|f'(x_1)| + \log|f'(x_2)| + \cdots + \log|f'(x_n)|\right) = \log(L(x_1)).$$

Notemos además, que este valor es el mismo para todos los elementos de la órbita.

Si el exponente de Lyapunov asociado a x_1 es negativo, las órbitas de puntos cercanos a x_1 serán atraídas por alguna órbita, y si es positivo será caóticas o divergerán a infinito.

Nota 1.4 *Notar que $h(x)$ no está definida si $f'(x)$ se anula en algún punto de la órbita.*

Una manera de relacionar el exponente de Lyapunov con el concepto de caos es el siguiente (véase [21] o [46]).

Nota 1.5 *Se tiene que una órbita $\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$ es caótica si*

- *La órbita no es asintóticamente periódica.*
- *$h(x_1) > 0$, o lo que es lo mismo, $L(x_1) > 1$.*

Ejemplo 1.6 *La familia logística, es la formada por las aplicaciones*

$$f_c : [0,1] \to [0,1],$$

de la forma $f_c(x) = cx(1-x)$, con $c \in \mathbb{R}$. En la Figura 1.12 pueden verse los exponentes de Lyapunov asociados a la iteración del punto $x_0 = \frac{1}{3}$ en función del parámetro c. Se observa, de forma muy resumida, que:

- *Para $c \in (0,3]$, las iteraciones de x_0 convergen hacia una de las raíces.*
- *Para $c \in (3, 1+\sqrt{6}]$, las iteraciones de x_0 convergen hacia un 2-ciclo.*
- *Para $c \in (1+\sqrt{6}, c_\infty]$, donde $c_\infty \approx 3.5699$, las iteraciones de x_0 convergen hacia un 4-ciclo.*
- *Para $c_\infty < c \leq 4$, las iteraciones son, en su mayoría caóticas.*
- *Para $c \geq 4$, las iteraciones de x_0 divergen.*

1.3. Dimensión fractal

En esta sección vamos a comentar algunos aspectos relacionados con las dimensiones fractales, desde su definición hasta las programaciones informáticas empleadas para su cálculo.

El concepto de dimensión fractal es complejo y existen diferentes formas de medirla. Uno de los ejemplos clásicos a la hora de explicar este concepto fue introducido por Lewis Richardson en 1961 en un artículo titulado «¿Cuánto mide la costa de Gran Bretaña?». La medida de dicha costa será mayor a medida que

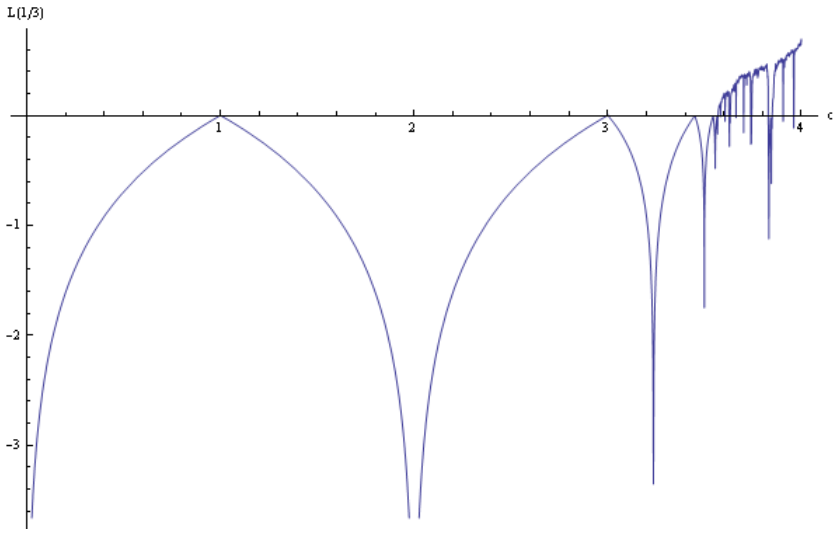


Figura 1.12: Exponentes de Lyapunov asociados al punto $\frac{1}{3}$ en función del valor del parámetro $c \in [0, 4]$ para la función logística.

disminuyamos el factor de escala, es decir, que si tomamos, por ejemplo, los pasos de una persona y los de una hormiga, y vamos recorriendo la costa, la medida recorrida por la hormiga será mayor a la recorrida por la persona.

En 1977 Benoit Mandelbrot publicó el libro *The fractal nature of geometry* (véase [71]) describiendo numerosas aplicaciones de este tipo de estructuras para la investigación en ciencias aplicadas. El término fractal, procedente del latín fractus (fragmentado, irregular), fue introducido por Mandelbrot para designar estos conjuntos que no tenían ningún nombre concreto y desde entonces se conoce esta rama de las matemáticas como geometría fractal.

En 1986, Mandelbrot (véase [72]) dio una definición bastante intuitiva de conjunto fractal: *un conjunto en que las partes son similares al total, en algún sentido*. Lo más generalizado es considerar que un fractal es un conjunto que tiene una o varias de las siguientes propiedades:

(i) Tiene detalles a todas las escalas.

(ii) Es autosemejante.

(iii) Tiene una definición algorítmica sencilla.

(iv) Tiene dimensión topológica menor que su dimensión de Hausdorff.

Para la medición de formas fractales se han introducido nuevos conceptos que van más allá de los conceptos geométricos básicos. El principal problema a la hora de medir un fractal, es que siempre va a haber un factor de escala más pequeño y, por lo tanto, existirá una medición más refinada. Si pensamos en la curva de Koch (Figura 1.13), partimos de una línea recta, que dividimos en tres

partes, y la parte central se reemplaza por dos partes de igual longitud formando un ángulo de 60 grados. En el siguiente paso, tenemos que la longitud de la curva es 4/3 de la primera. En sucesivas iteraciones se aplica el mismo algoritmo a cada uno de los segmentos que se tiene y así, por tanto, la longitud de la curva en la iteración k será de $(\frac{4}{3})^k$.

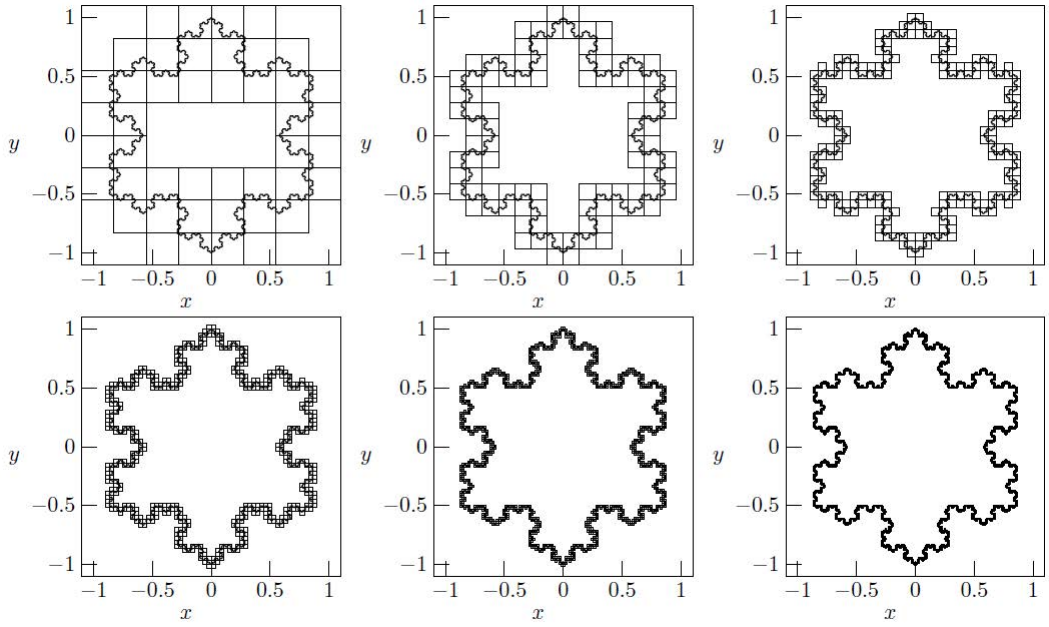


Figura 1.13: Ejemplo de algunas iteraciones de la curva de Koch.

Como la longitud del fractal depende de la unidad de medida que tomemos, la noción de longitud en estos casos, carece de sentido. Para ello se ha introducido el concepto de dimensión fractal. Este concepto es una generalización de la dimensión euclídea y nos va a indicar en qué medida el fractal rellena el plano.

En geometría clásica es conocido que la dimensión de un segmento es 1, la de un círculo es 2 y la de una esfera es 3. Debido a esto, y si trabajamos en el plano, la dimensión de los fractales deberá encontrarse entre 1 y 2.

Antes de definir el concepto de dimensión fractal es necesario definir la dimensión topológica. La siguiente definición fue dada por K. Devlin en 1988 y se basó en la definición inductiva dada por Poincaré.

Definición 1.27 *En una curva sólo es posible moverse en una dirección, adelante o hacia atrás. En una superficie es posible ir adelante, atrás, a derecha o a izquierda. En un volumen es posible moverse, además, hacia arriba o hacia abajo. La curva tiene una dimensión, la superficie tiene dos dimensiones y el volumen tiene tres dimensiones.*

El concepto de dimensión dado por Felix Hausdorff en 1919 (véase [56]) y

que fue perfeccionado más tarde por Besicovitch (véase [20]) y que se define a continuación, es el antecesor del concepto de dimensión fractal.

Definición 1.28 *Si al obtener desde un ente H, n entes iguales, semejantes al original, con razón de semejanza r, entonces la dimensión topológica de H es el número real D que verifica*

$$nr^D = 1.$$

O sea, $\log n + D \log r = 0$. *Por tanto,*

$$D = \frac{\log n}{\log 1/r}.$$

En otras palabras, la dimensión de Hausdorff $H(X)$ de un objeto fractal X mide el número de conjuntos de longitud L que hacen falta para cubrir X por L. Con estos precedentes ya podemos definir el concepto de dimensión fractal.

Definición 1.29 *La dimensión de un fractal puede definirse en términos del mínimo número $N(\epsilon)$ de bolas de radio ϵ necesarias para recubrir el conjunto, como el límite*

$$D_F = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{N(\epsilon)}{\epsilon}.$$

O también en función del recuento del número de cajas N_n de una cuadrícula de anchura $1/2^n$ que intersecan al conjunto

$$D_F = \lim_{n \to \infty} \frac{N_n}{2^n}.$$

Dado que ambas definiciones son equivalentes, y que son invariantes bajo isometrías, optaremos por escoger el algoritmo del recuento de cajas.

El estudio de este procedimiento junto con el desarrollo de una nueva técnica que se denominó «Gauss-Seidelization» puede verse en [52].

Para medir la dimensión de un fractal utilizaremos el algoritmo conocido como «Box-counting» o conteo de cajas. Este algoritmo, a grandes rasgos, se basa en contar el número de cajas de una determinada malla que intersecan al fractal. El algoritmo consiste en lo siguiente:

(i) Se cubre el fractal con una malla compuesta de cajas.

(ii) De todas las cajas de la malla se cuentan sólo aquéllas que intersecan al fractal.

(iii) Ahora, se cambia el tamaño de la malla haciendo las cajas cada vez más pequeñas y volviendo a contar aquéllas que intersecan al fractal.

(iv) Los datos de tamaño de cada caja y del número de cajas se van anotando en cada caso.

Tabla 1.1: Procedimiento del conteo de cajas, donde N_m representa el número de cajas en la malla y d_m la dimensión que se obtiene al aplicar el método del conteo de cajas en cada paso m, a la curva de Koch.

m	N_m	d_m
3	44	1.8198
4	96	1.6462
5	196	1.5229
6	504	1.4962
7	1180	1.4578
8	2856	1.4350
9	6844	1.4156
10	15620	1.3931
11	32320	1.3618
12	66200	1.3345
13	133600	1.3098
14	268804	1.2883

(v) Una vez anotados todos los pasos que queremos utilizar para dicha medición se construyen unos ejes coordenados. El eje horizontal representará el logaritmo del inverso del tamaño de cada caja. Mientras que el eje vertical se corresponderá con el logaritmo del número de cajas que intersecan al fractal en cada iteración.

(vi) Se representan los datos obtenidos de las observaciones en los ejes.

(vii) Con dichos datos se construye la recta de regresión.

(viii) La pendiente de dicha recta de regresión se corresponderá con la dimensión fractal.

Para entender mejor este procedimiento se muestra un ejemplo con la curva de Koch en la Tabla 1.1. En ella se observa cómo la dimensión se va estabilizando cuanto mayor m tomamos. Así vemos cómo para $m = 14$ obtenemos una dimensión de 1.2883. Por otro lado, conocemos teóricamente que la dimensión de la curva de Koch es

$$d = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.2619.$$

Si continuásemos, obtendríamos cada vez una aproximación mejor y, si llegásemos al caso extremo $m = \infty$, obtendríamos la dimensión exacta.

El algoritmo del Box-counting, como ya hemos visto, consiste en contar las cajas que intersecan al fractal, por lo que, es un método que requiere de una apreciación visual. En [69] se elaboró un programa que, de manera automática, nos permitiera medir la dimensión de un fractal. En concreto, se aplicó al cálculo de las dimensiones fractales asociadas a las cuencas de atracción de diversos

procesos iterativos para resolver ecuaciones polinómicas. Al hacerlo de manera automática, es necesario un criterio para poder distinguir si una caja interseca o no interseca al fractal. El criterio escogido es el siguiente:

1. Se realiza la división de la malla en cajas.

2. Una vez que tenemos dicha división, para determinar si una caja interseca al fractal tomamos 5 puntos que se corresponden con los vértices de cada caja y el centro de la misma.

3. Si alguno de esos puntos al iterar la función converge a una raíz diferente a la que convergen los demás asumimos que la caja interseca al fractal y paramos. En caso contrario:

    - Se toman los 4 centros de las cajas que comparten un lado con la inicial.
    - Si dichos puntos al ser iterados convergen todos a la misma raíz que el centro inicial, asumimos que la caja no interseca al fractal y paramos. En caso contrario, es decir, alguno de los centros de las cajas contiguas no converge a la misma raíz que el original:
        - Tomamos 10 puntos en cada uno de los lados que comparten las cajas cuyos centros al ser iterados convergen a raíces diferentes.
        - Si alguno de esos 10 puntos converge a una raíz diferente a la que convergen los demás, la caja interseca al fractal, en caso contrario asumimos que no lo hace.

Para finalizar vamos a presentar algunas dimensiones fractales. La estructura para presentar los resultados va a ser la siguiente:

- Mostraremos el polinomio con sus correspondientes raíces y el color que asignamos a cada una.
- Centro.
- Lado.
- Número de cajas iniciales.
- Número de cajas finales.
- Límite de iteraciones.
- Por último, los dibujos de los fractales junto con la dimensión fractal obtenida.

Siguiendo este esquema hemos seleccionado 3 experimentos de todos los realizados, entre los que aparecen polinomios de grado 2, 3 y 4. Aparte del conocido método de Newton, se han escogido los métodos de Whittaker, definido por

$$W(z) = z - \frac{f(z)}{2f'(z)}\left(2 - \frac{f(z)f''(z)}{f'(z)^2}\right),$$

y Jarrat libre de inversa, que tiene la forma

$$J(z) = z - u(z) + \frac{3}{4}u(z)h(z)\left(1 - \frac{3}{2}h(z)\right),$$

donde

$$u(z) = \frac{f(z)}{f'(z)}$$

y

$$h(z) = \frac{f'\left(z - \frac{2}{3}u(z)\right) - f'(z)}{f'(z)}.$$

Polinomios cuadráticos

Empezaremos estudiando los polinomios cuadráticos, es decir, de la forma $az^2 + bz + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Es conocido que tienen dos raíces o una raíz de multiplicidad 2. Estos polinomios tienen la característica de que mediante transformaciones afines se pueden transformar en el polinomio $p(z) = z^2 - 1$.

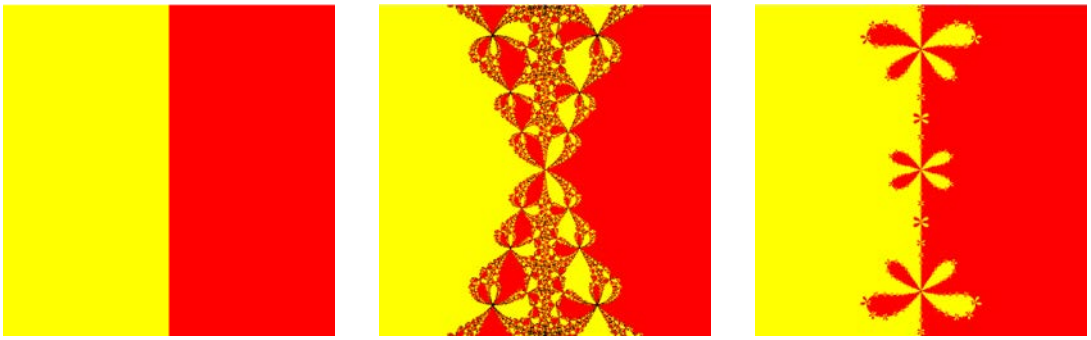
Además, de los estudios realizados, se extrae algo que ya se intuía y es el hecho de que a parte del método y de la función, la región que se escoge para calcular la dimensión también es influyente.

Como dato curioso cabe destacar que Cayley probó que, al aplicar el método de Newton a un polinomio de grado 2, la frontera de las cuencas de atracción se correspondía con la mediatriz del segmento que une las dos raíces del polinomio, por lo tanto, la dimensión del método de Newton en este caso será idénticamente 1 como veremos en los experimentos.

El caso $p(z) = z^2 - 1$. Los datos con los que vamos a estudiar este caso son:

- Las raíces de $p(z)$ son $z = 1$ y $z = -1$, cuyas cuencas de atracción las pintaremos de color *rojo* y *amarillo* respectivamente. Si por el contrario, no hay convergencia a ninguna de ellas en el número de iteraciones escogido se pintará de *negro*.
- Centro: $(0, 0)$.
- Lado: 2.5.
- Número de cajas iniciales: 32.

- Número de cajas finales: 512.
- Límite de iteraciones: 25.
- Algunos de los fractales pueden observarse junto con sus dimensiones fractales correspondientes en la Figura 1.14.



$d = 1.000000$ $d = 1.717302$ $d = 1.375944$

Figura 1.14: Cuencas de atracción asociadas a los métodos de Newton (izquierda), Whittaker (centro) y Jarrat libre de inversa (derecha) (con su correspondiente dimensión fractal, d, calculada utilizando el algoritmo del Box-counting) aplicados al polinomio $p(z) = z^2 - 1$ en la región $[2.5, 2.5] \times [2.5, 2.5]$.

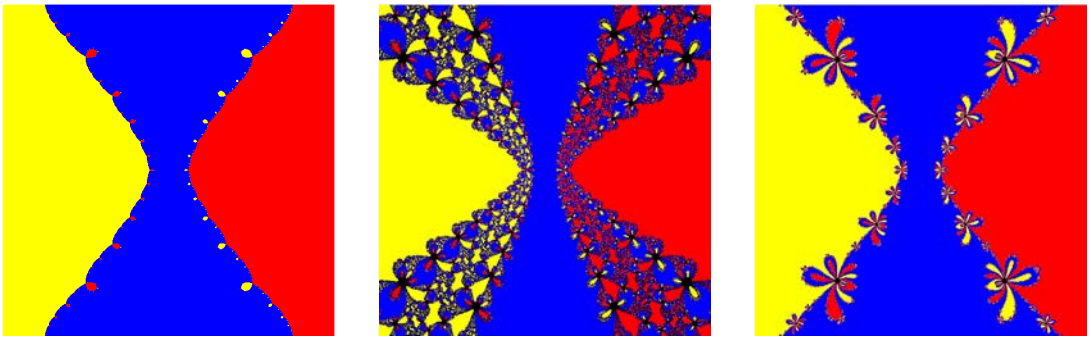
Polinomios cúbicos

Una vez se ha comprobado el comportamiento de los polinomios cuadráticos, podemos pasar al estudio de los polinomios de grado 3. Cayley encontró en ellos su principal reto ya que supuso que, al igual que en los polinomios de grado 2 la frontera de las cuencas de atracción de las raíces era una recta, en los de grado 3 pasaría algo parecido. Nada más lejos de la realidad, ya que se demostró tiempo después que la naturaleza de dicha frontera era fractal e inimaginable para Cayley en aquella época en la que los ordenadores no existían.

El caso $p(z) = z^3 - z$. Los datos con los que vamos a estudiar este caso son:

- Las raíces de $p(z)$ son $z = -1$, $z = 0$ y $z = 1$, cuyas cuencas de atracción las pintaremos de color *amarillo*, *azul* y *rojo* respectivamente. Si por el contrario no hay convergencia a ninguna raíz en el número de iteraciones escogido se pintará de *negro*.
- Centro: $(0, 0)$.
- Lado: 5.

- Número de cajas iniciales: 32.
- Número de cajas finales: 1024.
- Límite de iteraciones: 25.
- Algunos gráficos con sus dimensiones fractales correspondientes se observan en la Figura 1.15.



$d = 1.197916$ $d = 1.765490$ $d = 1.540234$

Figura 1.15: Cuencas de atracción asociadas a los métodos de Newton (izquierda), Whittaker (centro) y Jarrat libre de inversa (derecha) (con su correspondiente dimensión fractal, d, calculada utilizando el algoritmo del Box-counting) aplicados al polinomio $p(z) = z^3 - z$ en la región $[2.5, 2.5] \times [2.5, 2.5]$.

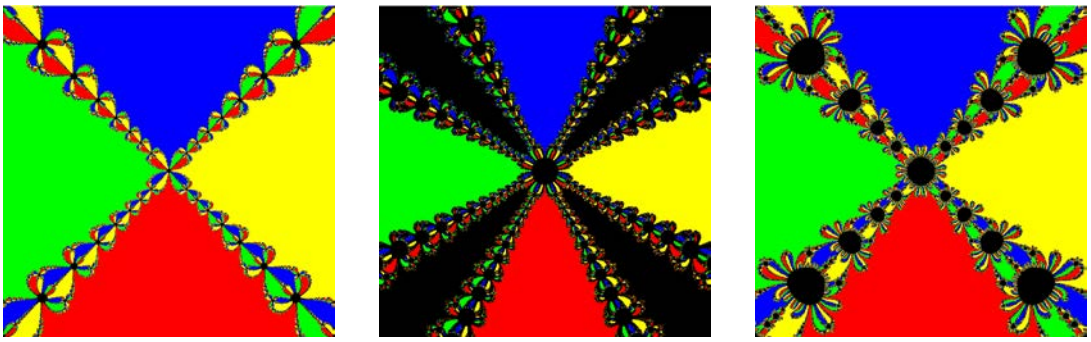
Polinomios cuárticos

Teniendo en cuenta la vistosidad y los resultados obtenidos con los polinomios cúbicos, se optó por realizar estudios de polinomios de grado 4. Como en los casos anteriores, cada cuenca de atracción a una raíz será pintada de un color y de negro las regiones en las que no existe convergencia con el número de iteraciones prefijado.

El caso $p(z) = z^4 - 1$. Los datos con los que vamos a estudiar este caso son:

- Las raíces reales de $p(z)$ son $z = 1$, a la que asignamos el color *amarillo*, y $z = -1$, a la que le hacemos corresponder el *verde* y las imaginarias son $z = -i$ cuya cuenca estará en *rojo* y la cuenca de la otra raíz $z = i$ está en *azul*. Si por el contrario no hay convergencia a ninguna de ellas en el número de iteraciones escogido se pintará de *negro*.
- Centro: $(0, 0)$.
- Lado: 5.

- Número de cajas iniciales: 32.
- Número de cajas finales: 1024.
- Límite de iteraciones: 25.
- Algunos gráficos con sus dimensiones fractales correspondientes se observan en la Figura 1.16.



$d = 1.558473$ $d = 1.650080$ $d = 1.678397$

Figura 1.16: Cuencas de atracción asociadas a los métodos de Newton (izquierda), Whittaker (centro) y Jarrat libre de inversa (derecha) (con su correspondiente dimensión fractal, d, calculada utilizando el algoritmo del Box-counting) aplicados al polinomio $p(z) = z^4 - 1$ en la región $[2.5, 2.5] \times [2.5, 2.5]$.

1.4. Nociones básicas de operadores definidos en espacios de Banach

En el último capítulo de esta memoria se estudia el método de Newton amortiguado para operadores definidos en espacios de Banach. Por este motivo, introducimos a continuación algunos de los conceptos básicos que facilitarán la lectura del Capítulo 4. Para un estudio más detallado sobre espacios de Banach se puede consultar cualquiera de los numerosos tratados dedicados al tema que hay en la bibliografía matemática. Como fuente bibliográfica pueden consultarse las tesis de Gutiérrez [50] y, más reciente la de González [47], además de los libros de Argyros [5] y [6]. Otros textos muy recomendables, ya que introducen los espacios de Banach con un objetivo similar al nuestro son los de Kantorovich [65] y Rall [98].

Sea $F : X \to Y$ un operador definido entre dos espacios de Banach X e Y. Se pretende estudiar la resolución de una ecuación $F(x) = 0$, bajo ciertas condiciones sobre el operador F. Al conjunto de los operadores lineales y acotados entre los espacios X e Y lo denotaremos a partir de ahora $\mathcal{L}(X, Y)$. Si $X = Y$

denotaremos simplemente $\mathcal{L}(X)$. Sea $L \in \mathcal{L}(X,Y)$, denotamos $\mathcal{D}(L)$ a su dominio y $\mathcal{R}(L)$ a su rango. Si existe un operador L^{-1} que aplica $\mathcal{R}(L)$ en $\mathcal{D}(L)$, de manera que

$$L^{-1}Lx = x, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{D}(L),$$
$$LL^{-1}y = y, \quad \text{para todo } y \in \mathcal{R}(L),$$

diremos que L es *invertible* y que L^{-1} es el *inverso* de L. Si L^{-1} existe, entonces también es un operador lineal.

A continuación citamos unos resultados conocidos sobre inversión de operadores. Obsérvese que estos resultados están dados para operadores de un espacio X en sí mismo.

Lema 1.9 (Banach) *Sea $L \in \mathcal{L}(X)$ verificando que*

$$\|L\| \leq k < 1,$$

entonces el operador $I - L$ tiene inverso continuo y, además,

$$\|(I-L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-k}.$$

Unas ligeras variantes del lema anterior son los siguientes resultados.

Lema 1.10 *Sea $L \in \mathcal{L}(X)$. Existe L^{-1} si y sólo si existe un operador invertible $M \in \mathcal{L}(X)$ tal que*

$$\|I - ML\| < 1.$$

En este caso,

$$L^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (I-ML)^n M$$

y

$$\|L^{-1}\| \leq \frac{\|M\|}{1 - \|I - ML\|}.$$

Lema 1.11 *Sea $L \in \mathcal{L}(X)$. Existe L^{-1} si y sólo si existe un operador invertible $M \in \mathcal{L}(X)$ tal que*

$$\|M - L\| < \frac{1}{\|M^{-1}\|}.$$

En este caso,

$$L^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (I - M^{-1}L)^n M^{-1}$$

y

$$\|L^{-1}\| \leq \frac{\|M^{-1}\|}{1 - \|I - M^{-1}L\|} \leq \frac{\|M^{-1}\|}{1 - \|M^{-1}\|\|M - L\|}.$$

Presentamos ahora algunos conceptos y resultados básicos del cálculo diferencial e integral en espacios de Banach.

Definición 1.30 *Dado $x_0 \in X$, si existe un operador $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ de manera que, para todo $x \in X$,*

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+hx)-F(x_0)}{h} = L(x), \tag{1.1}$$

entonces F se dice diferenciable Gâteaux (o diferenciable débilmente) en x_0. En esta situación, el operador lineal L es la derivada de Gâteaux (o la diferencial de Gâteaux) de F en x_0, y se denota $L = dF(x_0)$.

Definición 1.31 *Si el límite de la ecuación (1.1) es uniforme en el conjunto $\{x \in X;\ \|x\| = 1\}$, entonces F se dice diferenciable Fréchet, o simplemente diferenciable en x_0. En este caso, el operador lineal L se llama derivada de Fréchet (o diferencial de Fréchet) de F en x_0, y se denota $L = F'(x_0)$.*

Equivalentemente, el concepto de diferenciabilidad se puede expresar de la siguiente forma. Si dado $x_0 \in X$, existe un operador lineal y continuo $L = F'(x_0)$ de manera que

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{\|F(x_0+v)-F(x_0)-Lv\|}{\|v\|} = 0,$$

entonces F es diferenciable Fréchet en x_0.

Obsérvese que si F es un operador diferenciable Fréchet en x_0, entonces también es diferenciable Gâteaux en x_0. Además, $F'(x_0) = dF(x_0)$. Salvo que se indique lo contrario, cuando nos refiramos a un operador diferenciable, lo entenderemos en el sentido de Fréchet.

Es bien conocido que las propiedades de la diferencial en espacios de Banach son análogas a las de la derivada en el caso escalar, salvo el Teorema del Valor Medio. El siguiente resultado generaliza el Teorema del Valor Medio conocido para funciones escalares.

Teorema 1.12 (del Valor Medio) *Sean X e Y dos espacios de Banach. Sea $F : X \to Y$ un operador diferenciable en un conjunto convexo $\Omega \subseteq X$. Entonces, si $x_0, x_1 \in \Omega$, se tiene*

$$\|F(x_1)-F(x_0)\| \le \sup_{0<\theta<1} \|F'\Big(x_0+\theta(x_1-x_0)\Big)\|\|x_1-x_0\|.$$

Corolario 1.13 *Con la notación anterior se tiene que*

$$\begin{aligned} &\|F(x_1)-F(x_0)-F'(x_0)(x_1-x_0)\| \\ &\le \sup_{0<\theta<1} \|F'\Big(x_0+\theta(x_1-x_0)\Big)-F'(x_0)\|\|x_1-x_0\|. \end{aligned}$$

A continuación comentamos algunos aspectos sobre el cálculo integral en espacios de Banach.

Definición 1.32 *Sea F definida en un intervalo real $[a,b]$ y con valores en un espacio de Banach Y. Entonces podemos definir su integral como el límite de las siguientes sumas*

$$\sum_{k=0}^{n-1} F(\tau_k)(t_{k+1}-t_k),$$

donde $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ y $\tau_k\in[t_k,t_{k+1}]$, cuando $\max_k\{t_{k+1}-t_k\}\to 0$. Si el límite dirigido anterior existe, lo llamaremos integral de F *y lo denotaremos*

$$\int_a^b F(t)\,dt.$$

Evidentemente, si la integral existe, es un elemento de Y. Una condición suficiente para que exista dicha integral es que la función F sea continua en el intervalo $[a,b]$.

Las propiedades de esta integral se deducen de las conocidas para la integral de Riemann en el caso real. De entre ellas, destacamos las tres siguientes por su posterior utilidad.

(i) *Si consideramos un operador lineal y acotado $L\in\mathcal{L}(Y,Z)$, entonces*

$$\int_a^b L(F(t))\,dt = L\left(\int_a^b F(t)\,dt\right).$$

(ii) *Si $F(t)=\phi(t)y_0$, donde y_0 es un elemento fijo de Y y $\phi(t)$ es una función real integrable, entonces*

$$\int_a^b F(t)\,dt = y_0\int_a^b \phi(t)\,dt.$$

(iii) $\left\|\int_a^b F(t)\,dt\right\| \le \int_a^b \|F(t)\|\,dt.$

Definición 1.33 *Supongamos ahora que T es un operador definido en un segmento $[x_0,x_1]\subseteq X$ y con valores en el espacio $\mathcal{L}(X,Y)$. En este caso, se define su integral*

$$\int_{x_0}^{x_1} T(x)\,dx = \int_0^1 T\Big(x_0+t(x_1-x_0)\Big)(x_1-x_0)\,dt.$$

Los siguientes resultados sobre cálculo integral en espacios de Banach pueden consultarse en los libros de Kantorovich [65] o Rall [98].

Teorema 1.14 *Sea F un operador de X en Y que tiene derivada continua en el segmento $[x_0, x_1] \subseteq X$. Entonces*

$$\int_{x_0}^{x_1} F'(x)\,dx = F(x_1) - F(x_0).$$

Lema 1.15 *Si se verifica*

$$\Big\|F\Big(x_0 + \tau(x_1 - x_0)\Big)\Big\| \leq \phi\Big(t_0 + \tau(t_1 - t_0)\Big), \quad \tau \in [0,1]$$

y

$$\|x_1 - x_0\| \leq t_1 - t_0,$$

entonces

$$\left\|\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx\right\| \leq \int_{t_0}^{t_1} \phi(t)\,dt.$$

Como variante del lema anterior, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.16 *Si se cumple la desigualdad*

$$\|F(x)\| \leq \phi(t)$$

para x y t tales que

$$\|x - x_0\| \leq t - t_0,$$

entonces

$$\left\|\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx\right\| \leq \int_{t_0}^{t_1} \phi(t)\,dt,$$

donde x_1 es un elemento que cumple $\|x_1 - x_0\| \leq t_1 - t_0$.

Si $F : X \to Y$ es un operador dos veces diferenciable en un punto $x_0 \in X$, entonces $F''(x_0) \in \mathcal{B}(X^2, Y)$, donde $\mathcal{B}(X^2, Y)$ es el conjunto de los operadores bilineales acotados de $X^2 = X \times X$ en Y, con la norma

$$\|B\| = \sup_{\|x_1\|,\|x_2\| \leq 1} \|B(x_1, x_2)\|, \quad B \in \mathcal{B}(X^2, Y).$$

Es conocido, (véase [27]), que existe una isometría entre el espacio $\mathcal{B}(X^2, Y)$ y $\mathcal{L}\Big(X, \mathcal{L}(X, Y)\Big)$. A partir de ahora, y teniendo en cuenta esta isometría, identificaremos los elementos de ambos espacios. También se sabe, véase [98], que $F''(x_0)$ es un operador bilineal simétrico, es decir,

$$F''(x_0)x_1x_2 = F''(x_0)x_2x_1 \quad \text{para todo } x_1, x_2 \in X.$$

Para un operador bilineal de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ empleamos la notación dada por una matriz de bloques [5] y [6]

$$B = \left(\begin{array}{cc} b_1^{11} & b_1^{12} \\ b_1^{21} & b_1^{22} \\ \hline b_2^{11} & b_2^{12} \\ b_2^{21} & b_2^{22} \end{array} \right). \tag{1.2}$$

Entonces, si $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, se tiene que

$$B(x,y) = \left(\begin{array}{cc} x_1, x_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} b_1^{11} & b_1^{12} \\ b_1^{21} & b_1^{22} \\ \hline b_2^{11} & b_2^{12} \\ b_2^{21} & b_2^{22} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc} b_1^{11}x_1 + b_1^{21}x_2 & b_1^{12}x_1 + b_1^{22}x_2 \\ b_2^{11}x_1 + b_2^{21}x_2 & b_2^{12}x_1 + b_2^{22}x_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c} b_1^{11}x_1y_1 + b_1^{21}x_2y_1 + b_1^{12}x_1y_2 + b_1^{22}x_2y_2 \\ b_2^{11}x_1y_1 + b_2^{21}x_2y_1 + b_2^{12}x_1y_2 + b_2^{22}x_2y_2 \end{array} \right).$$

En $\mathbb{R}^2$ consideramos la norma del máximo

$$\|(x_1, x_2)\| = \text{máx}\Big\{|x_1|, |x_2|\Big\},$$

y en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ la norma dada por

$$\|L\| = \text{máx}\Big\{|a_{11}| + |a_{12}|, |a_{21}| + |a_{22}|\Big\},$$

con

$$L = \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right).$$

Entonces se comprueba fácilmente [97] que la norma del operador bilineal B definido por (1.2) viene dada por

$$\|B\| = \sup_{\|x\|=1} \max_i \sum_{j=1}^{2} \left| \sum_{k=1}^{2} b_i^{jk} x_k \right|.$$

Además, se tiene la siguiente estimación de la norma anterior

$$\|B\| \leq \text{máx}\Big\{|b_1^{11}| + |b_1^{12}| + |b_1^{21}| + |b_1^{22}|, |b_2^{11}| + |b_2^{12}| + |b_2^{21}| + |b_2^{22}|\Big\}.$$

El resultado de componer una aplicación bilineal B y una lineal L es una aplicación bilineal LB. Con la notación anterior, tenemos que la matriz asociada a LB es

$$LB = \left(\begin{array}{cc} a_{11}b_1^{11} + a_{12}b_2^{11} & a_{11}b_1^{12} + a_{12}b_2^{12} \\ a_{11}b_1^{21} + a_{12}b_2^{21} & a_{11}b_1^{22} + a_{12}b_2^{22} \\ \hline a_{21}b_1^{11} + a_{22}b_2^{11} & a_{21}b_1^{12} + a_{22}b_2^{12} \\ a_{21}b_1^{21} + a_{22}b_2^{21} & a_{21}b_1^{22} + a_{22}b_2^{22} \end{array} \right).$$

Si F es un operador de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que a un par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ le hace corresponder $(f(x, y), g(x, y)) \in \mathbb{R}^2$, tenemos que la derivada segunda de F en un punto (x_0, y_0) es el operador de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ dado por la matriz de la forma (1.2)

$$\left(\begin{array}{cc} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \\ \hline g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{array}\right),$$

donde las derivadas parciales anteriores están evaluadas en el punto (x_0, y_0).

Finalizamos esta pequeña introducción a los espacios de Banach con un resultado que será de gran utilidad para nosotros, como es el Teorema de Taylor.

Teorema 1.17 (Taylor) *Supongamos que F es un operador n-veces diferenciable en la bola $B(x_0, r)$, $r > 0$, y que $F^{(n)}$ es integrable en el segmento $[x_0, x_1]$ con $x_1 \in B(x_0, r)$. Entonces*

$$F(x_1) = F(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} F^{(k)}(x_0)(x_1 - x_0)^k + R_n(x_0, x_1),$$

donde

$$\begin{aligned} R_n(x_0, x_1) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x_1} F^{(n)}(x)(x_1 - x)^{n-1}\, dx \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 F^{(n)}\Big(x_0 + t(x_1 - x_0)\Big)(x_1 - x_0)^n (1-t)^{n-1}\, dt. \end{aligned}$$

Capítulo 2

Dinámica real del método de Newton amortiguado

2.1. Introducción

En el presente capítulo vamos a estudiar el comportamiento dinámico del método de Newton amortiguado cuando se utiliza para resolver una ecuación de la forma

$$f(x) = 0, \tag{2.1.1}$$

donde $f(x)$ es una función real de variable real, es decir, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. El comportamiento dinámico para funciones de variable compleja lo veremos en el Capítulo 3.

Para la resolución de ecuaciones no lineales, existen multitud de métodos que se pueden utilizar (véase [108], [115], [117] o [121]), cada uno con diferentes características y requisitos para asegurar que la utilización del mismo nos lleva a la solución buscada. Dentro de esos métodos iterativos se encuentra el más conocido de todos, el método de Newton, que aplicado a una función $f(x)$, tiene la siguiente forma

$$N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

El método de Newton genera una sucesión $\{x_n\}$ que bajo ciertas condiciones converge a la solución de la ecuación (2.1.1). Algunas de las propiedades de este método son las siguientes:

(i) Las raíces de $f(x)$ son los puntos fijos de $N_f(x)$.

(ii) Las raíces simples de la ecuación (2.1.1) son puntos fijos superatractores de $N_f(x)$. En efecto, si x^* es una raíz simple de (2.1.1), se tiene que $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$ y, además,

$$N_f'(x^*) = \frac{f(x^*)f''(x^*)}{f'(x^*)^2} = 0.$$

(iii) Las raíces múltiples de la ecuación (2.1.1) son puntos fijos atractores de $N_f(x)$. Si x^* es una raíz de multiplicidad $m \geq 2$ de $f(x)$, entonces

$$0 < N_f'(x^*) = \frac{m-1}{m} < 1.$$

(iv) La convergencia del método de Newton para puntos cercanos a una raíz simple es cuadrática, sin embargo para raíces múltiples es lineal.

(v) $N_f(x)$ tiene una asíntota vertical en cada solución real de $f'(x) = 0$ tal que $f(x) \neq 0$.

(vi) Los puntos extremos locales de $N_f(x)$, si $f'(x) \neq 0$, son los ceros y los puntos de inflexión de $f(x)$.

Este método ha sido estudiado en profundidad por infinidad de autores (véase, por ejemplo, [16], [53], [91] o [92]) dando lugar a numerosos resultados sobre su convergencia local, semilocal o global. Aunque están demostradas las buenas características del método, el estudio se va a centrar en una modificación de este método que consiste en la introducción de un parámetro amortiguador en el paso de Newton. Esta modificación tiene la siguiente forma

$$N_{\lambda,f}(x) = x - \lambda \frac{f(x)}{f'(x)}, \tag{2.1.2}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ puede ser cualquiera. En este capítulo se excluirá del estudio el caso $\lambda = 0$, por carecer de sentido, ya que en ese caso la función iteradora es la identidad. A través de la literatura existente se le han dado diferentes nombres según los valores que puede tomar este parámetro, entre los que destacan el método de Newton relajado o amortiguado por ser los más utilizados.

Las propiedades del método son diferentes con la inclusión del parámetro amortiguador y algunas de las propiedades son las siguientes:

(i) Los puntos fijos de $N_{\lambda,f}(x)$ son la raíces de $f(x)$.

(ii) La derivada de la función de iteración para el método de Newton amortiguado es

$$N_{\lambda,f}'(x) = (1-\lambda) + L_f(x),$$

donde

$$L_f(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2},$$

es el operador convexidad logarítmica.

(iii) Si x^* es una raíz simple, tenemos que

$$N_{\lambda,f}'(x^*) = 1 - \lambda,$$

y, por lo tanto, va a ser un punto fijo atractor sólo para $\lambda \in (0, 2)$ (superatractor si $\lambda = 1$).

(iv) Si x^* es una raíz de multiplicidad $m \geq 2$, entonces $f(x) = (x - x^*)^m q(x)$, donde $q(x^*) \neq 0$ y se tiene que

$$N'_{\lambda,f}(x^*) = 1 - \frac{\lambda}{m}.$$

Por lo tanto, x^* será atractora para $\lambda \in (0, 2m)$ (superatractora si $\lambda = m$).

(v) Los puntos críticos de $N_{\lambda,f}(x)$ son las soluciones de la ecuación

$$L_f(x) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

Notemos que ya no existe relación directa entre los extremos locales de $N_{\lambda,f}(x)$ y los ceros y puntos de inflexión de $f(x)$.

(vi) La convergencia del método de Newton amortiguado es lineal, salvo en el caso especial $\lambda = 1$, es decir, el método de Newton, en el que la convergencia es cuadrática.

(vii) Notemos que aparecen asíntotas, que se corresponden con los ceros de la derivada de $f(x)$ y por lo tanto, aparecen polos.

En este capítulo, como ya aparece comentado antes, se va a realizar un estudio de la dinámica del método de Newton amortiguado aplicado a diferentes polinomios. Para ello se va a utilizar el siguiente teorema que va a simplificar el estudio.

Teorema 2.1 *(Teorema del escalado amortiguado) Sea $f(x)$ una función analítica, sea $N_{\lambda,f}(x)$ el método de Newton amortiguado aplicado a $f(x)$ y sea $T(x) = \alpha x + \beta$, con $\alpha \neq 0$, una aplicación afín. Sea $g(x) = (f \circ T)(x)$. Entonces $T \circ N_{\lambda,g} \circ T^{-1}(x) = N_{\lambda,f}(x)$, es decir, $N_{\lambda,g}(x)$ y $N_{\lambda,f}(x)$ son conjugadas afines por $T(x)$.*

Demostración En primer lugar tenemos que $T^{-1}(x) = \frac{1}{\alpha}(x - \beta)$. Además,

$$N_{\lambda,g}(T^{-1}(x)) = T^{-1}(x) - \lambda \frac{g(T^{-1}(x))}{g'(T^{-1}(x))}.$$

Por otro lado, como $g \circ T^{-1}(x) = f(x)$, y $(g \circ T^{-1})'(x) = \frac{1}{\alpha} g'(T^{-1}(x))$, entonces $g'(T^{-1}(x)) = \alpha(g \circ T^{-1})'(x) = \alpha f'(x)$. Sustituyendo ahora en $N_{\lambda,g}(T^{-1}(x))$ obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} T \circ N_{\lambda,g} \circ T^{-1}(x) &= T(N_{\lambda,g}(T^{-1}(x))) \\ &= \alpha N_{\lambda,g}(T^{-1}(x)) + \beta \\ &= \alpha T^{-1}(x) - \alpha\lambda \frac{g(T^{-1}(x))}{g'(T^{-1}(x))} + \beta \\ &= \alpha T^{-1}(x) - \lambda \frac{f(x)}{f'(x)} + \beta \\ &= x - \lambda \frac{f(x)}{f'(x)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $T \circ N_{\lambda,g} \circ T^{-1}(x) = N_{\lambda,f}(x)$. Y ésto concluye la demostración. ∎

Nota 2.1 *El teorema del escalado es también válido para cualquier constante no nula c tal que $g(x) = c(f \circ T)(x)$.*

El teorema del escalado permite cambios de coordenadas adecuados, para reducir el estudio de la dinámica de iteraciones. Sin embargo, tiene el inconveniente de que no se puede aplicar para todo proceso iterativo como demuestran S. Amat et al. en [3]. En las siguientes secciones utilizaremos casos particulares de este teorema, para reducir el estudio de los polinomios de segundo y tercer grado. Además, en las dos últimas secciones de este capítulo, se presentará el estudio de varios polinomios seleccionados de grados 4 y 5. Utilizaremos durante toda la sección los diagramas de bifurcaciones y exponentes de Lyapunov que aunque no son concluyentes e incluso si se toman puntos iniciales diferentes podemos obtener resultados distintos, sí nos permiten caracterizar algunos comportamientos existentes mediante experimentos numéricos.

2.2. El método de Newton amortiguado para polinomios cuadráticos

En esta sección vamos a estudiar la dinámica del método de Newton amortiguado aplicado a polinomios cuadráticos. En este caso tenemos una ecuación de la forma

$$f_a(x) = ax^2 + bx + c = 0,\ a, b, c \in \mathbb{R} \tag{2.2.1}$$

con $a \neq 0$. Sin pérdida de generalidad, dividimos todo por a para obtener el polinomio mónico

$$f(x) = x^2 + Bx + C = 0,\ B, C \in \mathbb{R} \tag{2.2.2}$$

donde $B = \frac{b}{a}$ y $C = \frac{c}{a}$. El comportamiento dinámico del método de Newton es igual para ambos polinomios. De hecho, siguiendo un proceso similar al que

puede verse en la Sección 3.2 de [53], veremos que toda la familia cuadrática del tipo (2.2.2) puede reducirse a una del tipo

$$f_\mu(x) = x^2 - \mu,\ \mu \in \mathbb{R}, \tag{2.2.3}$$

mediante un cambio de coordenadas afín. Este cambio de coordenadas viene dado en el siguiente lema, cuya demostración puede verse en [53].

Lema 2.2 *Sea $f(x)$ un polinomio de la forma (2.2.2) y sea $h(x) = x - \frac{B}{2}$. Entonces, $f \circ h(x) = f_\mu(x)$, donde $f_\mu(x)$ es de la forma (2.2.3) con $\mu = \frac{B^2-4C}{4}$.*

La aplicación de este lema nos permite reducir el estudio del comportamiento dinámico del método de Newton amortiguado aplicado a polinomios cuadráticos al estudio de la familia uniparamétrica (2.2.3), como reza el siguiente teorema.

Teorema 2.3 *Sean $f(x)$ y $f_\mu(x)$, definidos en (2.2.2) y (2.2.3) respectivamente, con $\mu = \frac{B^2-4C}{4}$. Entonces $N_{\lambda,f}(x)$ es conjugada topológicamente con $N_{\lambda,f_\mu}(x)$ mediante la transformación afín $h(x) = x - \frac{B}{2}$, es decir,*

$$N_{\lambda,f_\mu}(x) = h^{-1} \circ N_{\lambda,f}(x) \circ h(x).$$

Demostración Tenemos que

$$N_{\lambda,f}(h(x)) = h(x) - \lambda \frac{f(h(x))}{f'(h(x))}.$$

Por otro lado, por el Lema 2.2 como $f \circ h(x) = f_\mu(x)$, y $h'(x) = 1$, se tiene que $f'(h(x)) = (f \circ h)'(x) = f'_\mu(x)$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} h^{-1} \circ N_{\lambda,f} \circ h(x) &= h^{-1}(N_{\lambda,f}(h(x))) \\ &= h^{-1}\left(h(x) - \lambda \frac{f(h(x))}{f'(h(x))}\right) \\ &= x - \lambda \frac{f(h(x))}{f'(h(x))} + \frac{B}{2} \\ &= x - \lambda \frac{f_\mu(x)}{f'_\mu(x)} \\ &= N_{\lambda,f_\mu}(x). \end{aligned}$$

Es decir, $h^{-1} \circ N_{\lambda,f} \circ h(x) = N_{\lambda,f_\mu}(x)$. Y ésto concluye la demostración. ∎

Ahora, queda caracterizar el comportamiento del método de Newton amortiguado en función del valor del parámetro μ. En concreto, el siguiente teorema prueba que el estudio de las iteraciones del método de Newton amortiguado aplicado a un polinomio de segundo grado se reduce a tres casos, según si el polinomio original tiene dos raíces diferentes, una raíz real doble o ninguna raíz real.

Notemos que en el caso en el que $f_\mu(x)$ no tenga raíces reales no tiene sentido estudiarlo desde el punto de vista de los métodos iterativos como buscadores de soluciones, sin embargo, incluimos su estudio por su interés desde el punto de vista dinámico.

Teorema 2.4 *Sea $N_{\lambda,\mu}(x)$ la función de iteración del método de Newton amortiguado aplicado a un polinomio de la forma* (2.2.3)*. Entonces,*

(i) *Si $\mu = 0$, $N_{\lambda,\mu}(x)$ es conjugado topológicamente con la aplicación*

$$N_{\lambda,f_0}(x) = \frac{2-\lambda}{2}x,$$

que es el método de Newton amortiguado aplicado a $f_0(x) = x^2$.

(ii) *Si $\mu > 0$, $N_{\lambda,\mu}(x)$ es conjugado topológicamente con la aplicación*

$$N_{\lambda,f_-}(x) = \frac{(2-\lambda)x^2+\lambda}{2x},$$

que es el método de Newton amortiguado aplicado a $f_-(x) = x^2 - 1$.

(iii) *Si $\mu < 0$, $N_{\lambda,\mu}(x)$ es conjugado topológicamente con la aplicación*

$$N_{\lambda,f_+}(x) = \frac{(2-\lambda)x^2-\lambda}{2x},$$

que es el método de Newton amortiguado aplicado a $f_+(x) = x^2 + 1$.

Demostración Si $\mu = 0$ es una simple comprobación.

Si $\mu > 0$, buscamos una transformación afín, $H(x) = \alpha x + \beta$, tal que verifique

$$H \circ N_{\lambda,\mu}(x) = N_{\lambda,f_-} \circ H(x).$$

Desarrollando la parte izquierda primero

$$H \circ N_{\lambda,\mu}(x) = H(N_{\lambda,\mu}(x)) = \alpha N_{\lambda,\mu}(x) + \beta,$$

y la derecha después, se obtiene

$$N_{\lambda,f_-} \circ H(x) = N_{\lambda,f_-}(H(x)) = \frac{(2-\lambda)H^2(x)+1}{2H(x)}.$$

Operando en ambas expresiones e igualando obtenemos lo siguiente

$$\alpha\beta\lambda x^2 + (\lambda\beta^2 + \lambda\alpha^2\mu - 1)x + \alpha\beta\lambda\mu = 0.$$

Como $\alpha \neq 0$, inmediatamente $\beta = 0$ y entonces $\alpha = \sqrt{\frac{1}{\lambda\mu}}$, de donde se concluye que la transformación buscada es

$$H(x) = \frac{x}{\sqrt{\lambda\mu}}.$$

En el caso $\mu < 0$, realizando un procedimiento similar al anterior obtenemos que la transformación que verifica

$$H \circ N_{\lambda,\mu}(x) = N_{\lambda,f_+} \circ H(x),$$

es la siguiente

$$H(x) = \frac{x}{\sqrt{-\lambda\mu}}.$$

Y ésto concluye la demostración. ∎

Por último, el siguiente corolario muestra los casos de estudio en los que queda reducida la familia cuadrática introducida en (2.2.2).

Corolario 2.5 *El comportamiento dinámico del método de Newton amortiguado aplicado a polinomios cuadráticos de la forma* (2.2.2) *se reduce, según sea el valor del discriminante* $\Delta = B^2 - 4C$*, donde* B, C *son los coeficientes de la función, a los casos siguientes:*

(i) *Si* $\Delta = 0$*,* $N_{\lambda,f}(x)$ *es conjugada topológicamente con* $N_{\lambda,f_0}(x)$*, el método de Newton amortiguado aplicado al polinomio* $f_0(x) = x^2$*.*

(ii) *Si* $\Delta > 0$*,* $N_{\lambda,f}(x)$ *es conjugada topológicamente con* $N_{\lambda,f_-}(x)$*, el método de Newton amortiguado aplicado al polinomio* $f_-(x) = x^2 - 1$*.*

(iii) *Si* $\Delta < 0$*,* $N_{\lambda,f}(x)$ *es conjugada topológicamente con* $N_{\lambda,f_+}(x)$*, el método de Newton amortiguado aplicado al polinomio* $f_+(x) = x^2 + 1$*.*

Por lo tanto, bastará con estudiar la dinámica del método de Newton amortiguado para estos tres polinomios para tener estudiada toda la familia cuadrática.

2.2.1. El método de Newton amortiguado aplicado a $f_0(x) = x^2$

Ésta es la situación que resulta más sencilla, ya que tenemos un polinomio con una única raíz doble en $x = 0$, en este caso el método tiene la siguiente forma para $\lambda \neq 2$ (cuando $\lambda = 2$, la función de iteración es 0 y, por lo tanto, cada punto inicial conduce al punto fijo en la primera iteración)

$$N_{\lambda,f_0}(x) = \frac{2-\lambda}{2}x,$$

y se observa como el método es una contracción lineal para todo $\lambda \in (0, 4)$ y, por tanto, las iteraciones de todo punto $x \in \mathbb{R}$ para esos valores de λ van a converger a la raíz de $f_0(x)$, que es el único punto fijo que tiene la función. Además, por otro lado como

$$N'_{\lambda,f_0}(x) = \frac{2-\lambda}{2} = 1 - \frac{\lambda}{2},$$

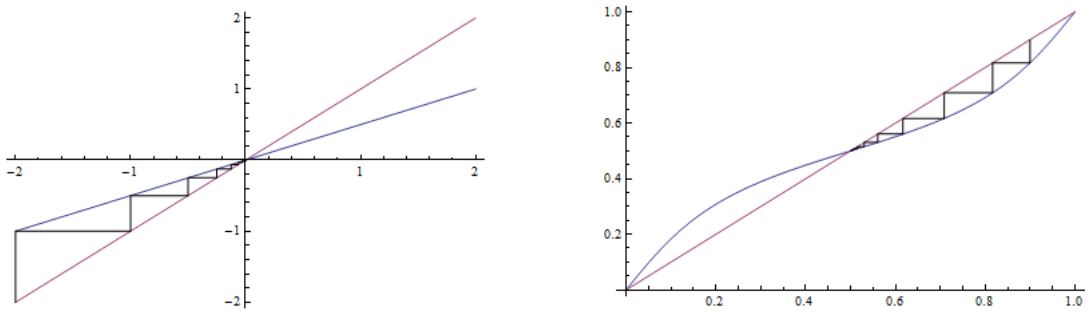
cuanto más cercano a 2 es el parámetro, más rápida es la convergencia hacia la raíz.

Por otro lado, usando la compactificación introducida en (1.2.1), (1.2.2) y (1.2.3), obtenemos la siguiente función

$$\widetilde{N}_{\lambda,f_0}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan\left(\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\cot(\pi x)\right).$$

Notemos que el punto fijo, $x = 0$, de $N_{\lambda,f_0}(x)$ se transforma en el punto fijo $x = \frac{1}{2}$ de $\widetilde{N}_{\lambda,f_0}(x)$.

Por lo tanto, se observa que para $\lambda \in (0,4)$ la dinámica del método de Newton amortiguado aplicado a polinomios con una raíz doble es trivial, ya que la iteración de cada punto converge a la raíz. Además, como ya se ha comentado antes, cuanto más cercano a 2 es el parámetro, mayor será la velocidad de convergencia. En la Figura 2.1 puede verse el comportamiento tanto de $N_{\lambda,f_0}(x)$ como de $\widetilde{N}_{\lambda,f_0}(x)$ para $\lambda = 1$ y en la Figura 2.2 para $\lambda = 0.5$.

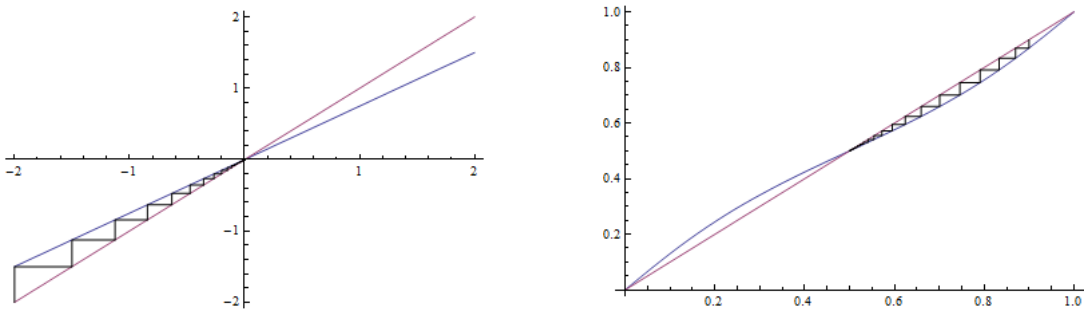


$N_{1,f_0}(x)$ $\qquad$ $\widetilde{N}_{1,f_0}(x)$

Figura 2.1: En la parte izquierda aparece el gráfico del método de Newton aplicado al polinomio $f_0(x) = x^2$, mientras que en la parte derecha aparece la compactificación del mismo. En la parte izquierda se ha tomado $x_0 = -2$ y en la derecha $x_0 = 0.9$. En ambos casos, se observa cómo las órbitas convergen hacia el único punto fijo.

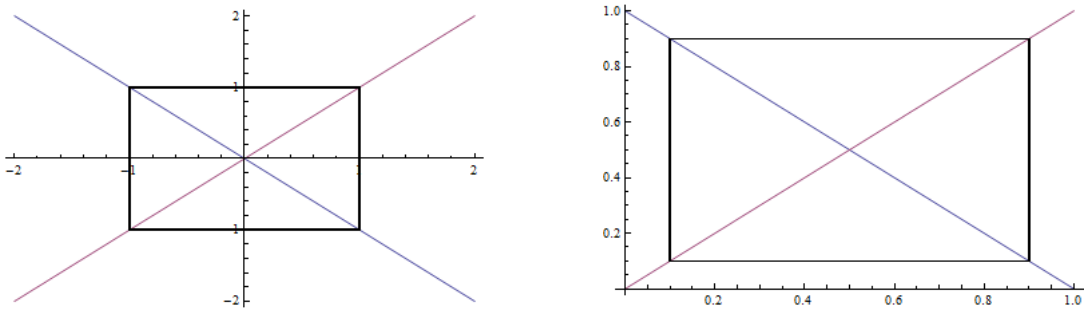
En la Figura 2.3 puede verse el comportamiento de ambas funciones para el valor del parámetro $\lambda = 4$, es decir, el valor para el que el punto fijo que proviene de la raíz es indiferente. Como se observa, la iteración de cada punto inicial que tomemos, salvo el propio punto fijo, bajo $\widetilde{N}_{4,f_0}(x)$ y $N_{4,f_0}(x)$ es un 2-ciclo.

Si ahora estudiamos valores $\lambda \notin [0,4]$, la función de iteración se convierte en una expansión, es decir, las iteraciones de todo punto distinto del punto fijo divergen hacia infinito en valor absoluto. Un ejemplo de esta dinámica puede verse en la Figura 2.4.



$N_{0.5,f_0}(x)$ $\widetilde{N}_{0.5,f_0}(x)$

Figura 2.2: En la parte izquierda se muestra el gráfico del método de Newton amortiguado, con $\lambda = 0.5$, aplicado al polinomio $f_0(x) = x^2$. En la parte derecha aparece el gráfico de la compactificación del método de Newton amortiguado, también con $\lambda = 0.5$. Tomando en la parte izquierda $x_0 = -2$ y en la derecha $x_0 = 0.9$, se observa, en ambos casos, que las órbitas convergen hacia el único punto fijo.



$N_{4,f_0}(x)$ $\widetilde{N}_{4,f_0}(x)$

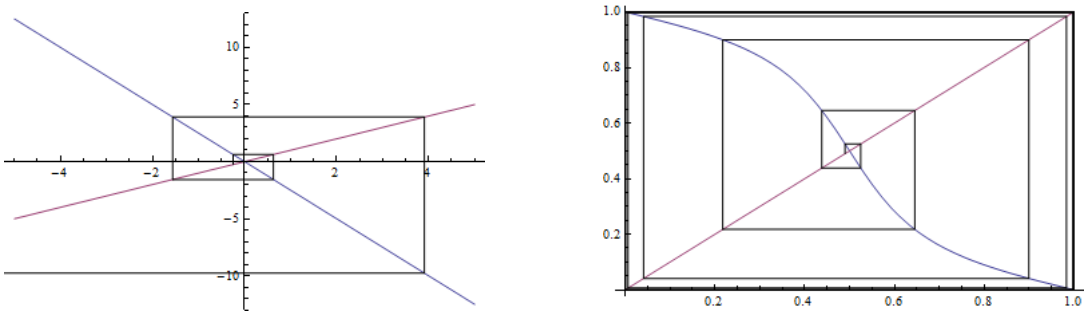
Figura 2.3: En la parte izquierda se muestra el gráfico del método de Newton amortiguado, con $\lambda = 4$, aplicado al polinomio $f_0(x) = x^2$. En la parte derecha aparece el gráfico de la compactificación del método de Newton amortiguado, también con $\lambda = 4$. Tomando en la parte izquierda $x_0 = 1$ y en la derecha $x_0 = 0.1$, se observa, que las órbitas son 2-ciclos.

2.2.2. El método de Newton amortiguado aplicado a $f_-(x) = x^2 - 1$

Vamos a estudiar ahora un polinomio con dos raíces distintas en $x = -1$ y $x = 1$. En este caso el método tiene la siguiente forma

$$N_{\lambda,f_-}(x) = \frac{(2-\lambda)x^2 + \lambda}{2x}.$$

Notemos que $N_{\lambda,f_-}(x)$ tiene una asíntota en $x = 0$ y dos puntos fijos que son



$N_{7,f_0}(x)$ $\widetilde{N}_{7,f_0}(x)$

Figura 2.4: Gráfico del método de Newton amortiguado (izquierda) y de su compactificación (derecha), con $\lambda = 7$, aplicado al polinomio $f_0(x) = x^2$. En ambos casos se observa que para valores cercanos al punto fijo, las iteraciones divergen. En la parte izquierda se ha tomado $x_0 = 0.25$ y en la derecha $x_0 = 0.49$.

las raíces de $f_-(x)$. Por otro lado, la derivada del método tiene la siguiente forma

$$N'_{\lambda,f_-}(x) = \frac{(2-\lambda)x^2 - \lambda}{2x^2}.$$

Si calculamos ahora el carácter de los puntos fijos obtenemos que los multiplicadores asociados son

$$N'_{\lambda,f_-}(\pm 1) = 1 - \lambda,$$

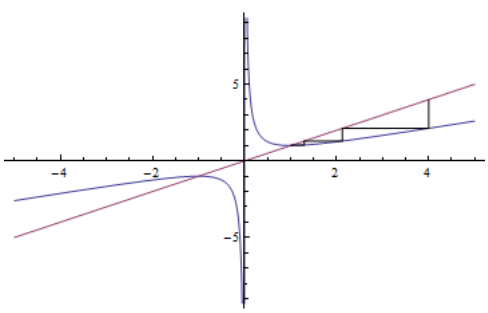
y, por lo tanto, para valores de $\lambda \in (0, 2)$ los puntos fijos (que provienen de las raíces) son atractores (superatractores para $\lambda = 1$). En este caso, las órbitas de $x_0 > 0$ si convergen hacia alguna raíz lo hacen hacia $x = 1$, mientras que las órbitas de $x_0 < 0$ si convergen hacia alguna raíz lo hacen hacia $x = -1$. En el caso de las compactificaciones, las órbitas de $x > 0.5$ si convergen hacia el punto fijo lo hacen hacia el mayor, mientras que las órbitas de $x < 0.5$ si convergen hacia algún punto fijo lo hacen hacia el menor. En las Figuras 2.5 y 2.6 puede verse el comportamiento tanto de $N_{\lambda,f_-}(x)$ como de $\widetilde{N}_{\lambda,f_-}(x)$ para $\lambda = 1$ y $\lambda = 0.2$ respectivamente.

Si tomamos como valor del parámetro amortiguador $\lambda = 2$, obtenemos que el punto fijo que proviene de la raíz es indiferente. La forma de la función iteradora es, en este caso,

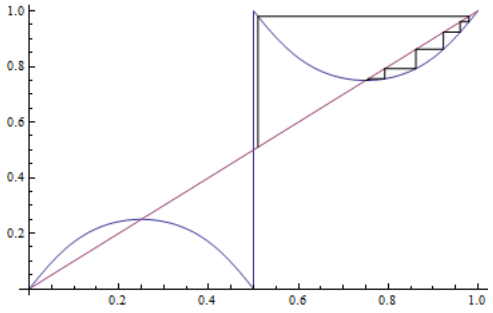
$$N_{2,f_-}(x) = \frac{1}{x}$$

y, por lo tanto, las iteraciones de cada punto distinto de $x = 0$, forman un 2-ciclo. La dinámica para $\lambda \in (2, 4]$ puede ser caótica como se observa en la Figura 2.7.

Por el contrario, si tenemos valores del parámetro amortiguador negativos o mayores que 4, ambos puntos fijos son repulsores y, las iteraciones de cada punto inicial distinto de $x = \pm 1$ pueden diverger hacia infinito en valor absoluto. Un ejemplo de lo que sucede en este caso puede observarse en la Figura 2.8.

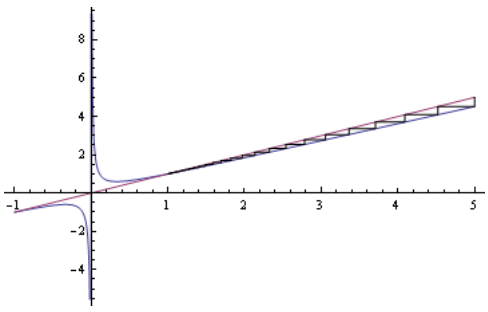


$N_{1,f_-}(x)$

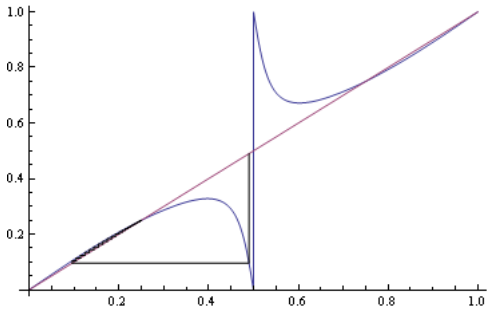


$\widetilde{N}_{1,f_-}(x)$

Figura 2.5: En la parte izquierda aparece el gráfico del método de Newton aplicado al polinomio $f_-(x) = x^2 - 1$ junto con la identidad, tomando $x_0 = 4$, mientras que en la derecha aparece la compactificación del mismo junto con la identidad tomando $x_0 = 0.49$. En ambos casos se observa que las iteraciones convergen hacia el punto fijo más cercano.



$N_{0.2,f_-}(x)$



$\widetilde{N}_{0.2,f_-}(x)$

Figura 2.6: Gráfico del método de Newton amortiguado (izquierda) y de su compactificación (derecha), aplicado al polinomio $f_-(x) = x^2 - 1$, con $\lambda = 0.2$, donde se observa que las iteraciones convergen a los puntos fijos más cercanos. En la parte izquierda, se toma $x_0 = 5$ y en la derecha $x_0 = 0.49$.

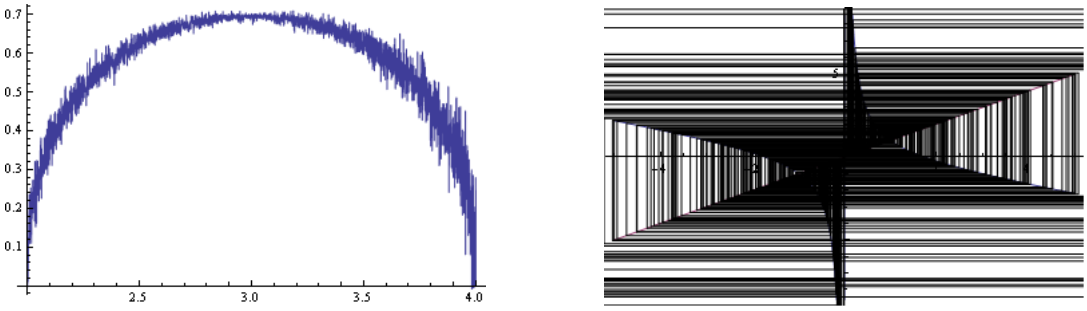
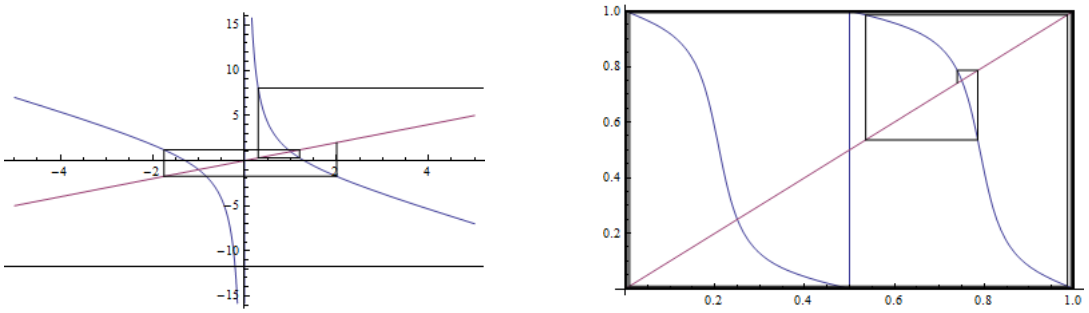


Figura 2.7: En la parte izquierda aparecen los exponentes de Lyapunov asociados a $N_{\lambda,f_-}(x)$, tomando $x_0 = 5$, para distintos valores de $\lambda \in (2, 4]$, mientras que en la derecha vemos las iteraciones de $N_{3,f_-}(x)$, tomando $x_0 = 0.1$, donde se observa la aparición de caos.



$N_{5.0,f_-}(x)$ $\quad\quad$ $\widetilde{N}_{5.0,f_-}(x)$

Figura 2.8: En la parte izquierda aparece el gráfico del método de Newton amortiguado, con $\lambda = 5$, aplicado al polinomio $f_-(x) = x^2 - 1$ junto con la identidad, tomando $x_0 = 2$, mientras que en la derecha aparece la compactificación del mismo, junto con la identidad, tomando un valor inicial cercano al punto fijo positivo. En ambos casos se observa cómo las iteraciones se alejan del punto fijo más cercano.

2.2.3. El método de Newton amortiguado aplicado a $f_+(x) = x^2 + 1$

Vamos a estudiar ahora un polinomio sin raíces reales. Aunque el estudio como buscador de soluciones puede carecer de sentido, sin embargo, estamos interesados en estudiar cómo se comporta el método de Newton amortiguado desde el punto de vista dinámico. En este caso el método tiene la siguiente forma

$$N_{\lambda,f_+}(x) = \frac{(2-\lambda)x^2 - \lambda}{2x},$$

que no tiene puntos fijos. Además, $N_{\lambda,f_+}(x)$ tiene una asíntota en $x = 0$, como ocurría en el caso con dos raíces diferentes. Por otro lado, tenemos

$$N'_{\lambda,f_+}(x) = \frac{(2-\lambda)x^2 + \lambda}{2x^2}.$$

Para estudiar la dinámica del método aplicado a este polinomio concreto, observaremos primero los gráficos de los exponentes de Lyapunov y diagramas de Feigenbaum asociados al método. El gráfico de los exponentes de Lyapunov asociados puede verse en la Figura 2.9, mientras que en la Figura 2.10, se observa el diagrama de bifurcaciones o diagrama de Feigenbaum asociado.

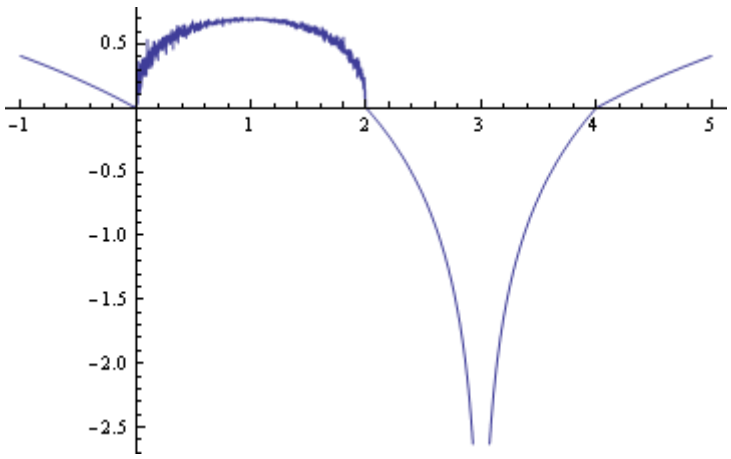


Figura 2.9: Gráfico de los exponentes de Lyapunov asociados al método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f(x) = x^2 + 1$, tomando $x_0 = 5$, para valores de $\lambda \in (-1, 5)$.

Las conclusiones que se extraen, de los estudios numéricos realizados, son las siguientes:

- Si $\lambda < 0$, las iteraciones pueden diverger hacia infinito, en valor absoluto.

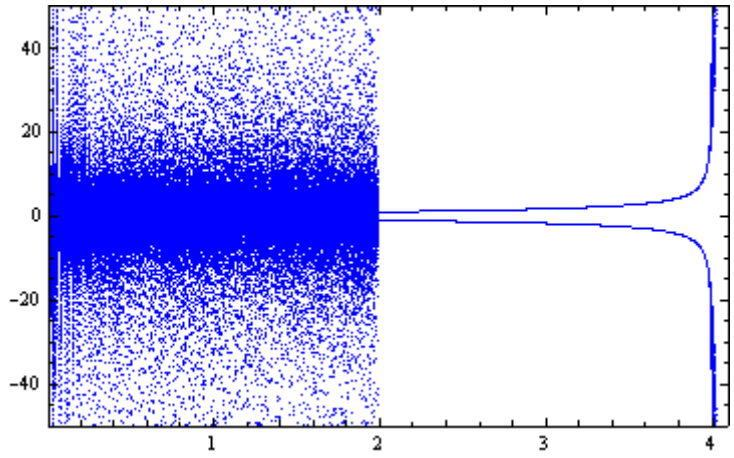


Figura 2.10: Diagrama de Feigenbaum asociado al método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f(x) = x^2 + 1$, tomando $x_0 = 1$, para valores de $\lambda \in (0, 4)$, donde se observa la existencia de caos y además que se producen bifurcaciones.

- Si $\lambda = 0$, el estudio carece de interés.
- Si $\lambda \in (0, 2)$, en las iteraciones puede aparecer comportamiento caótico.
- Si $\lambda = 2$, la iteración de cada punto distinto de $x = 0$, es un 2-ciclo de la forma
$$\left\{x_0, -\frac{1}{x_0}\right\}.$$
- Si $\lambda \in (2, 4)$, la función de iteración presenta 2-ciclos atractores.
- Si $\lambda \geq 4$, las iteraciones pueden diverger hacia infinito, en valor absoluto.

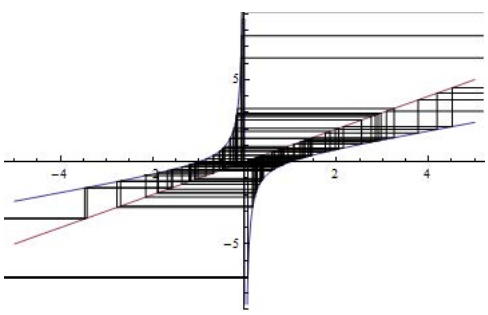
Nos centraremos en los casos $\lambda \in (0, 2)$ y $\lambda \in (2, 4)$. La dinámica del método de Newton amortiguado para valores del parámetro $\lambda \in (0, 2)$ puede ser caótica. En la Figura 2.11 puede verse el comportamiento tanto de $N_{\lambda,f_+}(x)$ como de $\widetilde{N}_{\lambda,f_+}(x)$ para $\lambda = 1$.

Como caso particular, vamos a ver que el método de Newton ($\lambda = 1$) aplicado al polinomio $f_+(x)$ es conjugado topológicamente con la función «diente de sierra», que viene definida como

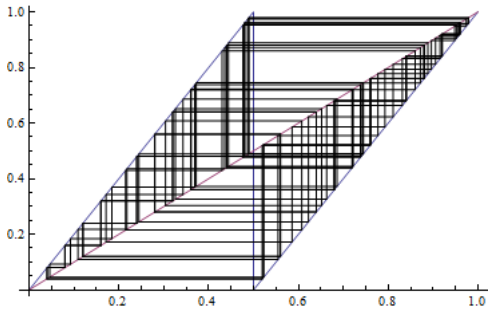
$$S(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 2x - 1, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases} \tag{2.2.4}$$

y cuyo comportamiento es caótico. Para ello consideramos la función $g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera

$$g(x) = -\cot(\pi x),$$



$N_{1,f_+}(x)$



$\widetilde{N}_{1,f_+}(x)$

Figura 2.11: En la parte izquierda aparece el gráfico del método de Newton aplicado al polinomio $f_+(x) = x^2 + 1$ junto con la identidad, mientras que en la derecha aparece la compactificación del mismo junto con la identidad. En ambos casos se observa que las órbitas no convergen y tienen un comportamiento caótico.

y queremos ver que $S(x)$ y $N_{1,f_+}(x)$ son conjugadas topológicamente, vía $g(x)$, es decir, que se verifica que $g \circ S(x) = N_{1,f_+} \circ g(x)$. Por una parte, se tiene que

$$N_{1,f_+} \circ g(x) = -\frac{1 - \operatorname{tg}^2(2\pi x)}{2\operatorname{tg}(\pi x)} = -\frac{1}{\operatorname{tg}(2\pi x)}.$$

Por otro lado, si $x \in (0, \frac{1}{2})$, entonces

$$g \circ S(x) = g(2x) = -\frac{1}{\operatorname{tg}(2\pi x)}.$$

Y si $x \in [\frac{1}{2}, 1)$, entonces

$$g \circ S(x) = g(2x-1) = -\frac{1}{\operatorname{tg}(2\pi x - \pi)} = -\frac{1}{\operatorname{tg}(2\pi x)}.$$

Por lo tanto, en ambos casos se cumple

$$g \circ S(x) = N_{1,f_+} \circ g(x).$$

Por último, si tenemos en cuenta que

$$\lim_{x \to 0^+} g \circ S(x) = -\infty = \lim_{x \to 0^+} N_{1,f_+} \circ g(x)$$

y

$$\lim_{x \to 1^-} g \circ S(x) = \infty = \lim_{x \to 1^-} N_{1,f_+} \circ g(x),$$

se puede extender la igualdad al intervalo $[0, 1]$. Como puede verse en [53], el comportamiento de $S(x)$ es caótico en toda la recta real, por lo que, se puede concluir que el comportamiento de la función $N_{1,f_+}(x)$ también lo es, en toda la recta real. Para valores del parámetro amortiguador distintos de 1, pero en el intervalo $\lambda \in (0, 2)$, se puede encontrar un comportamiento similar.

Continuaremos estudiando el resto de los casos, es decir, para valores de $\lambda \in (2, 4)$. Queremos ver que, efectivamente, la función de iteración presenta 2-ciclos atractores. Para ello resolvemos la ecuación

$$N_{\lambda,f_+}(N_{\lambda,f_+}(x)) - x = 0,$$

cuyas soluciones reales coinciden con las soluciones de

$$(\lambda - 4)x^2 + \lambda = 0.$$

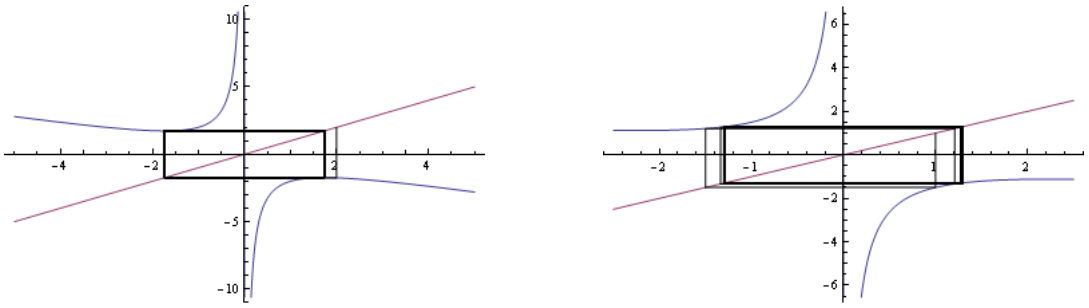
Es decir, los 2-ciclos serán de la forma

$$\left\{-\sqrt{\frac{\lambda}{4-\lambda}},\ \sqrt{\frac{\lambda}{4-\lambda}}\right\}.$$

Ahora, si calculamos el multiplicador asociado a dichos 2-ciclos obtenemos que es

$$\mu = (\lambda - 3)^2,$$

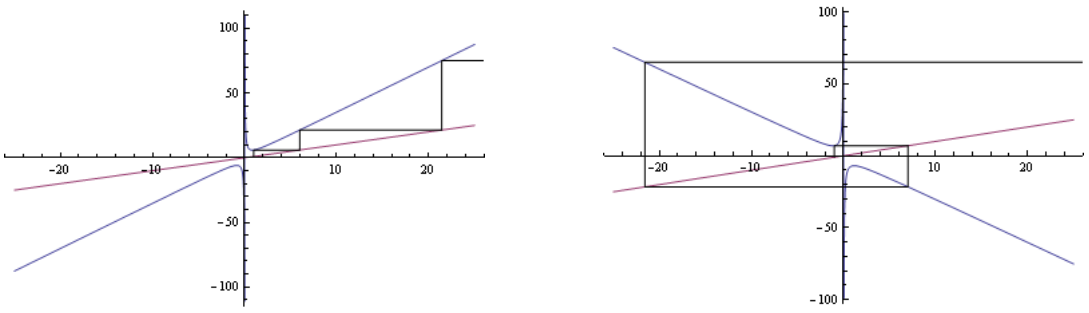
y, por lo tanto, para valores del parámetro $\lambda \in (2, 4)$, dichos 2-ciclos serán atractores, como puede verse en la Figura 2.12.



$N_{2.5,f_+}(x)$ $N_{3,f_+}(x)$

Figura 2.12: En la parte izquierda aparece el gráfico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_+(x) = x^2 + 1$, con $\lambda = 2.5$, donde se observa que las iteraciones de $x_0 = 2$, convergen hacia el 2-ciclo aproximado $\{-1.73205,\ 1.73205\}$. En la parte derecha aparece el gráfico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_+(x) = x^2 + 1$, con $\lambda = 3.0$, donde se observa que las iteraciones de $x_0 = 1$, convergen hacia el 2-ciclo aproximado $\{-1.29099,\ 1.29099\}$.

Por último, para valores de $\lambda \in (-\infty, 0) \cup [4, \infty)$, se puede ver en la Figura 2.13 un ejemplo del comportamiento del método, donde se observa cómo para valores negativos del parámetro las órbitas pueden diverger de forma monótona a infinito mientras que, para valores del parámetro mayores o iguales que 4, pueden diverger, de forma alterna, hacia infinito en valor absoluto.



$N_{-5,f_+}(x)$ $N_{8,f_+}(x)$

Figura 2.13: En la parte izquierda aparece el gráfico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_+(x) = x^2 + 1$, con $\lambda = -5$, donde se observa que las iteraciones, comenzando en $x_0 = -1$, divergen de forma monótona hacia infinito. En la parte derecha aparece el gráfico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_+(x) = x^2 + 1$, con $\lambda = 8$, donde se observa que las iteraciones de $x_0 = 1$, divergen de forma alterna hacia infinito.

2.3. El método de Newton amortiguado para polinomios cúbicos

En la sección anterior ya se observó que la dinámica del método de Newton amortiguado puede presentar comportamientos caóticos para polinomios cuadráticos. En esta sección vamos a estudiar la dinámica del método de Newton amortiguado para polinomios de tercer grado. En este caso, debido a la riqueza que presenta, el comportamiento del método resulta más interesante desde el punto de vista dinámico.

En toda la sección vamos a estudiar la dinámica del método de Newton amortiguado aplicado a polinomios de la forma

$$f_a(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \ \ a, b, c, d \in \mathbb{R}, \tag{2.3.1}$$

con $a \neq 0$. Sin pérdida de generalidad, dividimos todo por el coeficiente director a para obtener el polinomio mónico

$$f(x) = x^3 + Bx^2 + Cx + D, \ \ B, C, D \in \mathbb{R}, \tag{2.3.2}$$

donde $B = \frac{b}{a}$, $C = \frac{c}{a}$ y $D = \frac{d}{a}$. El comportamiento dinámico del método de Newton amortiguado es igual para ambos polinomios. Apoyándonos en el siguiente lema podemos reducir el número de parámetros a dos.

Lema 2.6 *Sea $f(x)$ un polinomio de la forma (2.3.2) y sea $\tau(x) = 3x + B$. Entonces $N_{\lambda,f}(x)$ y $N_{\lambda,g}(x)$ son conjugadas topológicamente, vía $\tau(x)$, donde $N_{\lambda,g}(x)$ es la función de iteración del método de Newton amortiguado aplicada al polinomio*

$$g(x) = x^3 + \alpha x + \beta, \tag{2.3.3}$$

donde $\alpha = 9C - 3B^2$ *y* $\beta = 2B^3 - 9BC + 27D$.

Demostración Notemos primero que

$$N_{\lambda,f}(x) = \frac{\mathrm{C}x + 2Bx^2 + 3x^3 - \mathrm{D}\lambda - \mathrm{C}x\lambda - Bx^2\lambda - x^3\lambda}{\mathrm{C} + 2Bx + 3x^2},$$

y además que

$$N_{\lambda,g}(x) = \frac{3x^3 + x\alpha - x^3\lambda - x\alpha\lambda - \beta\lambda}{3x^2 + \alpha},$$

con $\alpha = 9C - 3B^2$ y $\beta = 2B^3 - 9BC + 27D$, es decir, $N_{\lambda,g}(x)$ es

$$\frac{-3B^2x + 9\mathrm{C}x + 3x^3 - 2B^3\lambda + 9B\mathrm{C}\lambda - 27\mathrm{D}\lambda + 3B^2x\lambda - 9\mathrm{C}x\lambda - x^3\lambda}{3\left(-B^2 + 3\mathrm{C} + x^2\right)}.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\tau(N_{\lambda,f}(x)) = \frac{B\mathrm{C} + 2B^2x + 3\mathrm{C}x + 9Bx^2 + 9x^3 - 3\mathrm{D}\lambda - 3\mathrm{C}x\lambda - 3Bx^2\lambda - 3x^3\lambda}{\mathrm{C} + 2Bx + 3x^2}$$

y

$$N_{\lambda,g}(\tau(x)) = \frac{B\mathrm{C} + 2B^2x + 3\mathrm{C}x + 9Bx^2 + 9x^3 - 3\mathrm{D}\lambda - 3\mathrm{C}x\lambda - 3Bx^2\lambda - 3x^3\lambda}{\mathrm{C} + 2Bx + 3x^2}$$

y por lo tanto, se sigue que $\tau \circ N_{\lambda,f}(x) = N_{\lambda,g} \circ \tau(x)$, es decir, $N_{\lambda,f}(x)$ y $N_{\lambda,g}(x)$ son topológicamente conjugadas para cualquier valor del parámetro amortiguador λ. Y ésto concluye la demostración. ∎

El estudio se puede reducir más incluso, para el método de Newton amortiguado aplicado a polinomios cúbicos, sin necesidad de estudiar todos los polinomios definidos en (2.3.3), como demuestra el siguiente teorema.

Teorema 2.7 *Sea* $N_{\lambda,g}(x)$ *la iteración del método de Newton amortiguado aplicado a un polinomio de la forma* (2.3.3)*, es decir,*

$$N_{\lambda,g}(x) = \frac{(3-\lambda)x^3 + \alpha(1-\lambda)x - \beta\lambda}{3x^2 + \alpha}.$$

Entonces,

(i) *Si* $\alpha = \beta = 0$*, se tiene que*

$$N_{\lambda,g}(x) = N_{\lambda,f_0}(x) = \frac{1}{3}x(3-\lambda),$$

que es el método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_0(x) = x^3$.

(ii) *Si $\alpha > 0$ y $\beta = 0$, se tiene que*

$$N_{\lambda,g}(x) = N_{\lambda,f_+}(x) = \frac{x\,(1-\lambda+(3-\lambda)x^2)}{3x^2+1},$$

que es el método de Newton amortiguado aplicado a $f_+(x) = x^3 + x$.

(iii) *Si $\alpha < 0$ y $\beta = 0$, se tiene que*

$$N_{\lambda,g}(x) = N_{\lambda,f_-}(x) = \frac{x\,(\lambda-1+(3-\lambda)x^2)}{3x^2-1},$$

que es el método de Newton amortiguado aplicado a $f_-(x) = x^3 - x$.

(iv) *Si $\beta \neq 0$, se tiene que*

$$N_{\lambda,g}(x) = N_{\lambda,f_\gamma}(x) = \frac{(3-\lambda)x^3+\gamma(1-\lambda)x-\lambda}{3x^2+\gamma},$$

que es el método de Newton amortiguado aplicado a $f_\gamma(x) = x^3 + \gamma x + 1$.

Demostración Probamos cada uno de los apartados por separado,

(i) Si $\alpha = \beta = 0$, el polinomio $g(x) = x^3$ es igual que $f_0(x) = x^3$ y, por lo tanto, al aplicarle el método de Newton amortiguado obtenemos

$$N_{\lambda,g}(x) = N_{\lambda,f_0}(x) = \frac{1}{3}x(3-\lambda).$$

(ii) Si $\alpha > 0$, $\beta = 0$, tenemos el polinomio $g(x) = x^3 + \alpha x$ y utilizando la transformación afín $h(x) = \sqrt{\alpha}x$, obtenemos

$$\begin{aligned} h^{-1}(N_{\lambda,g}(h(x))) &= h^{-1}\left(-\frac{x\sqrt{\alpha}\,(-1-3x^2+\lambda+x^2\lambda)}{1+3x^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(-\frac{x\sqrt{\alpha}\,(-1-3x^2+\lambda+x^2\lambda)}{1+3x^2}\right) \\ &= \frac{x\,(1-\lambda+(3-\lambda)x^2)}{3x^2+1} = N_{\lambda,f_+}(x). \end{aligned}$$

(iii) Si $\alpha < 0$, $\beta = 0$, tenemos el polinomio $g(x) = x^3 + \alpha x$ y utilizando la transformación afín $h(x) = \sqrt{-\alpha}x$, obtenemos

$$\begin{aligned} h^{-1}(N_{\lambda,g}(h(x))) &= h^{-1}\left(-\frac{x\sqrt{-\alpha}\,(1-3x^2-\lambda+x^2\lambda)}{-1+3x^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\alpha}}\left(-\frac{x\sqrt{-\alpha}\,(1-3x^2-\lambda+x^2\lambda)}{-1+3x^2}\right) \\ &= \frac{x\,(\lambda-1+(3-\lambda)x^2)}{3x^2-1} = N_{\lambda,f_-}(x). \end{aligned}$$

(iv) Si $\beta \neq 0$, escribimos el polinomio de la siguiente forma $g(x) = x^3 + \alpha x + \delta^3$, es decir, tomamos $\beta = \delta^3$. Consideramos $h(x) = \frac{x}{\delta}$ y, obtenemos

$$\begin{aligned} h^{-1}(N_{\lambda,g}(h(x))) &= h^{-1}\left(\frac{3x^3 + \alpha\delta^2 x - \lambda x^3 - \alpha\delta^2\lambda x - \delta^6\lambda}{\delta\left(3x^2 + \alpha\delta^2\right)}\right) \\ &= \delta\left(\frac{3x^3 + \alpha\delta^2 x - \lambda x^3 - \alpha\delta^2\lambda x - \delta^6\lambda}{\delta\left(3x^2 + \alpha\delta^2\right)}\right) \\ &= \frac{3x^3 + \alpha\delta^2 x - \lambda x^3 - \alpha\delta^2\lambda x - \delta^6\lambda}{3x^2 + \alpha\delta^2}. \end{aligned}$$

Por otro lado, si llamamos $f_{\frac{\alpha}{\delta^2}}(x) = x^3 + \dfrac{\alpha}{\delta^2}x + 1$ y le aplicamos el método de Newton amortiguado tenemos que

$$N_{\lambda,f_{\frac{\alpha}{\delta^2}}}(x) = \frac{3x^3 + x\alpha\delta^2 - x^3\lambda - x\alpha\delta^2\lambda - \delta^6\lambda}{3x^2 + \alpha\delta^2}.$$

Por lo tanto, $N_{\lambda,g}(x)$ y $N_{\lambda,f_\gamma}(x)$, con $\gamma = \dfrac{\alpha}{\delta^2}$, son conjugadas topológicamente.

Y ésto concluye la demostración. ∎

Apoyándonos en los dos resultados previos, vamos a proceder con el estudio de cada uno de los casos que se acaban de presentar en el Teorema 2.7. Notemos que este teorema, nos reduce el estudio a únicamente 3 polinomios (que se corresponden con los polinomios con una única raíz real triple ($f_0(x)$), una raíz real simple ($f_+(x)$), tres raíces reales diferentes ($f_-(x)$)) y una familia uniparamétrica de polinomios $f_\gamma(x)$ que, como veremos, es el caso con una mayor riqueza dinámica. Esta riqueza se debe a que dependiendo de los valores que tenga el parámetro γ se tendrán diferentes situaciones en las que pueden aparecer bifurcaciones o caos.

En cada uno de los casos, estudiaremos cómo afecta a la dinámica el valor del parámetro amortiguador. En lugar de restringir el estudio a valores en el intervalo $(0, 2)$, lo estudiaremos para valores en toda la recta real que, aunque pueda perder sentido como método numérico, sí lo tiene como estudio dinámico, ya que ofrece un amplio rango de posibilidades. Cada situación, además, se ilustrará con gráficos de las diferentes posibilidades que se tienen con los valores del parámetro, junto con una órbita que servirá como ejemplo del comportamiento.

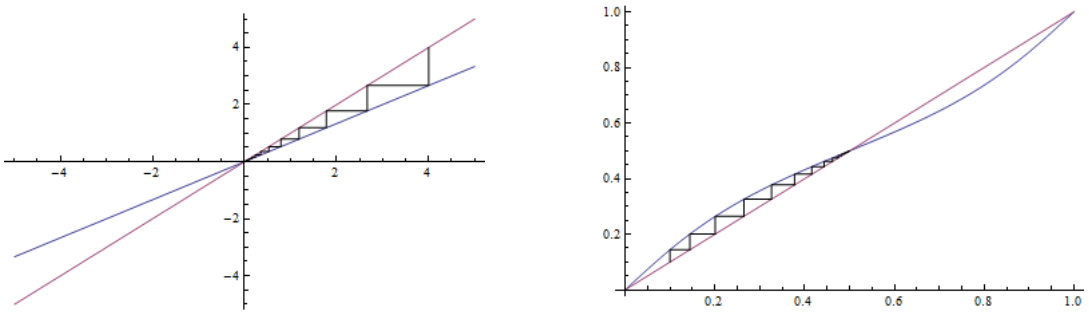
Para complementar el estudio nos apoyaremos también en la conjugación introducida en (1.2.1), (1.2.2) y (1.2.3) y que nos reduce el estudio al intervalo $[0, 1]$.

2.3.1. El método de Newton amortiguado aplicado a $f_0(x) = x^3$

Al igual que en el caso cuadrático, la situación más simple de estudio se corresponde con el caso $f_0(x) = x^3$, que es el caso en el que tenemos un polinomio con una raíz triple. El método de Newton amortiguado aplicado a este tipo de polinomios, para $\lambda \neq 3$, tiene la siguiente forma (si $\lambda = 3$, la función iteradora es nula y, la iteración de cada punto inicial converge a $x = 0$ en la primera iteración)

$$N_{\lambda,f_0}(x) = \frac{1}{3}x(3-\lambda)$$

que es una contracción lineal para todo valor del parámetro amortiguador $\lambda \in (0, 6)$, es decir, cada punto de la recta real que tomemos como punto de partida va a converger hacia la única raíz de $f_0(x)$, como puede observarse en la Figura 2.14, bajo iteración del método. Y ésto indica que la dinámica del método para estos valores de λ es trivial.

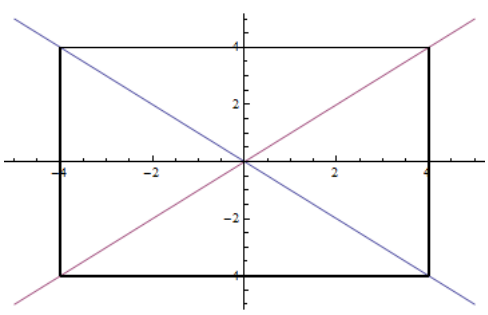


$N_{1,f_0}(x)$ $\quad\quad$ $\widetilde{N}_{1,f_0}(x)$

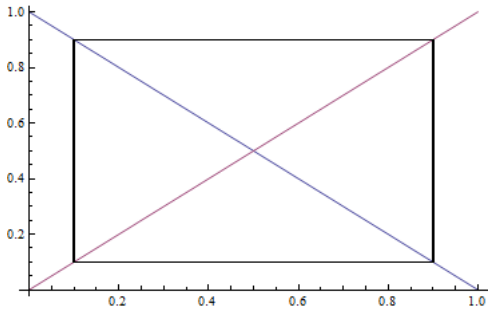
Figura 2.14: En la parte izquierda aparece el gráfico del método de Newton aplicado al polinomio $f_0(x) = x^3$, tomando $x_0 = 4$, mientras que en la derecha aparece la compactificación del mismo tomando $x_0 = 0.1$. En ambos casos se observa cómo las iteraciones convergen al único punto fijo.

Por otro lado, si se toma como valor del parámetro $\lambda = 6$, tenemos en $x = 0$ un punto fijo que va a ser indiferente y vamos a obtener que la iteración de cada punto inicial, salvo la propia raíz de $f_0(x)$, es un 2-ciclo. Este comportamiento puede verse en la Figura 2.15.

Por último, para valores negativos o mayores que 6 del parámetro, obtenemos que el método es una expansión, y las iteraciones de cualquier punto de partida que se tome, exceptuando el propio punto fijo, divergen hacia infinito en valor absoluto. Un ejemplo puede verse en la Figura 2.16.

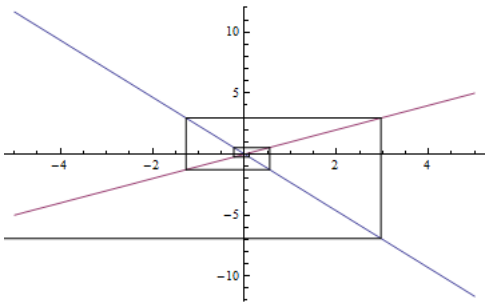


$N_{6,f_0}(x)$

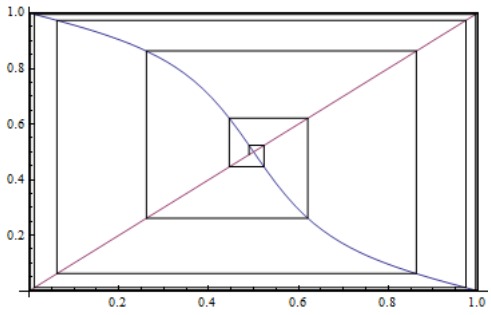


$\widetilde{N}_{6,f_0}(x)$

Figura 2.15: En la parte izquierda aparece el gráfico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_0(x) = x^3$ con $\lambda = 6$, en la derecha aparece la compactificación del mismo. Se observa que las iteraciones, de $x_0 = 4$ en la izquierda y de $x_0 = 0.1$ en la derecha, son 2-ciclos.



$N_{10,f_0}(x)$



$\widetilde{N}_{10,f_0}(x)$

Figura 2.16: En la parte izquierda aparece el gráfico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_0(x) = x^3$ con $\lambda = 10$, mientras que en la derecha aparece la compactificación del mismo. La función identidad aparece en cada gráfico. Se observa como las iteraciones de puntos cercanos al punto fijo se alejan del mismo.

2.3.2. El método de Newton amortiguado aplicado a $f_+(x) = x^3 + x$

El siguiente caso de estudio, es el del polinomio $f_+(x) = x^3 + x$, que es un polinomio de grado 3 que tiene una única raíz real simple y dos complejas conjugadas. En este caso, la raíz real de $f_+(x)$ se encuentra en $x = 0$. Al aplicarle el método de Newton amortiguado a $f_+(x)$ se obtiene

$$N_{\lambda,f_+}(x) = \frac{x\left((3-\lambda)x^2 + 1 - \lambda\right)}{1+3x^2}. \tag{2.3.4}$$

Es evidente que $N_{\lambda,f_+}(x)$ sólo tiene un punto fijo real que se corresponde con la raíz de $f_+(x)$. Además, como

$$N'_{\lambda,f_+}(x) = \frac{(9-3\lambda)x^4 + 6x^2 + 1 - \lambda}{\left(3x^2+1\right)^2},$$

se tiene que el multiplicador asociado a $x = 0$ es $\mu = 1 - \lambda$ y, por lo tanto, para valores del parámetro en el intervalo $(0, 2)$, se tiene que el punto fijo es atractor, salvo para $\lambda = 1$ que es superatractor.

Por otro lado, los puntos críticos de $N_{\lambda,f_+}(x)$ son las soluciones de la ecuación bicuadrada

$$(3\lambda - 9)x^4 - 6x^2 - 1 + \lambda = 0,$$

es decir,

$$x^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & \text{si} \quad \lambda = 3 \\ \dfrac{3 \pm \sqrt{3(4\lambda - \lambda^2)}}{3\lambda - 9} & \text{si} \quad \lambda \in [0,4],\ \lambda \neq 3. \end{cases}$$

Notemos que el discriminante $3(4\lambda - \lambda^2)$ es mayor o igual que cero cuando $\lambda \in [0, 4]$. Vamos a estudiar los dos casos diferentes llamando $x_-^2 = \frac{3-\sqrt{3(4\lambda-\lambda^2)}}{3\lambda-9}$ y $x_+^2 = \frac{3+\sqrt{3(4\lambda-\lambda^2)}}{3\lambda-9}$. Por un lado, estudiamos x_-^2, multiplicando y dividiendo por el conjugado obtenemos

$$x_-^2 = \frac{\lambda - 1}{3 + \sqrt{3(4\lambda - \lambda^2)}}.$$

Por lo tanto, para valores de $\lambda \in [1, 4]$,

$$C_1 = -\sqrt{\frac{\lambda - 1}{3 + \sqrt{3(4\lambda - \lambda^2)}}}$$

y

$$C_2 = \sqrt{\frac{\lambda - 1}{3 + \sqrt{3(4\lambda - \lambda^2)}}},$$

son puntos críticos de $N_{\lambda,f_+}(x)$.

Si ahora estudiamos x_+^2, notemos que, para que sea mayor o igual que 0 se tienen dos restricciones, la primera es que el denominador ha de ser positivo, es decir, $\lambda > 3$ y la segunda es, que el discriminante ha de ser mayor o igual a 0. Por lo tanto, obtenemos dos puntos críticos de $N_{\lambda,f_+}(x)$ si $\lambda \in (3, 4]$

$$C_3 = -\sqrt{\frac{3 + \sqrt{3(4\lambda - \lambda^2)}}{3\lambda - 9}}$$

y

$$C_4 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3(4\lambda - \lambda^2)}}{3\lambda - 9}}.$$

Por lo tanto, recapitulando,

- Si $\lambda = 1$, $N_{\lambda,f_+}(x)$ tiene un único punto crítico en $x = 0$.
- Si $\lambda \in (1, 3]$, $N_{\lambda,f_+}(x)$ tiene dos puntos críticos, C_1 y C_2.
- Si $\lambda \in (3, 4)$, $N_{\lambda,f_+}(x)$ tiene cuatro puntos críticos, C_1, C_2, C_3 Y C_4.
- Si $\lambda = 4$, $N_{\lambda,f_+}(x)$ tiene dos puntos críticos en $x = 1$ y $x = -1$.
- Si $\lambda \notin [1, 4]$, $N_{\lambda,f_+}(x)$ no tiene puntos críticos reales.

En la Figura 2.17 pueden verse los puntos críticos para los distintos valores del parámetro.

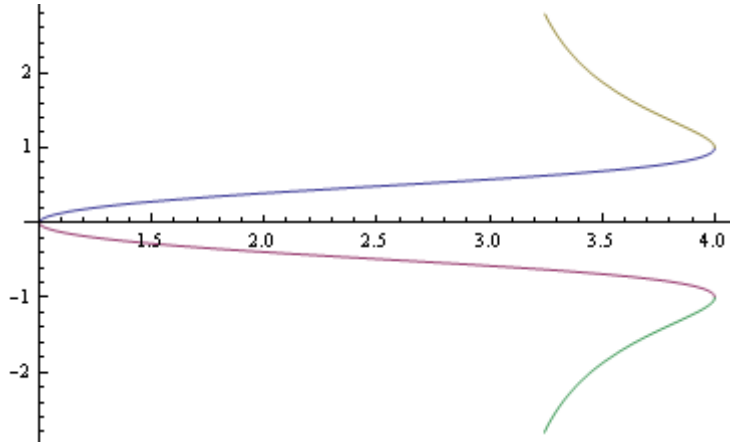


Figura 2.17: Valores que toman los puntos críticos de $N_{\lambda,f_+}(x)$, definida en (2.3.4), para los distintos valores del parámetro $\lambda \in [1, 4]$. En rojo aparece C_1, en azul C_2, en verde C_3 y en amarillo C_4.

El siguiente resultado simplificará de manera significativa el estudio.

Proposición 2.8 *La función de iteración del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_+(x) = x^3 + x$, $N_{\lambda,f_+}(x)$, introducido en* (2.3.4) *tiene simetría impar.*

Demostración Basta ver que

$$N_{\lambda,f_+}(-x) = \frac{x\,(-1+\lambda-3x^2+\lambda x^2)}{1+3x^2}$$

es lo mismo que

$$-N_{\lambda,f_+}(x) = \frac{x\,(-1+\lambda-3x^2+\lambda x^2)}{1+3x^2}.$$

Y ésto concluye la demostración. ∎

Por lo tanto, sólo es necesario estudiar uno de los dos casos $x_0 > 0$ o $x_0 < 0$. Por simplicidad estudiaremos el caso $x_0 > 0$.

El siguiente resultado, proporciona el estudio general de $N_{\lambda,f_+}(x)$, para $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.9 *El comportamiento dinámico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_+(x) = x^3 + x$, es el siguiente:*

- *Si $\lambda < 0$, las iteraciones de cada punto distinto de $x = 0$ divergen de forma monótona hacia infinito.*
- *Si $\lambda = 0$, el estudio carece de interés.*
- *Si $\lambda \in (0, 1]$, $x = 0$ es punto fijo atractor, y todas las iteraciones convergen monótonamente hacia* 0*.*
- *Si $\lambda \in (1, 2)$, $x = 0$ es punto fijo atractor, y todas las iteraciones convergen hacia* 0*. Además, existe un número infinito numerable de puntos eventualmente fijos que caracteriza el tipo de convergencia.*
- *Si $\lambda = 2$, $x = 0$ es punto fijo indiferente, y todas las iteraciones convergen hacia* 0*. Además, existe un número infinito numerable de puntos eventualmente fijos que caracteriza el tipo de convergencia.*
- *Si $\lambda \in (2, 6)$, $x = 0$ es punto fijo repulsor, y la función de iteración presenta* 2*-ciclos atractores, que se corresponden con las soluciones de la ecuación*

$$(\lambda - 6)x^2 + \lambda - 2 = 0.$$

- *Si $\lambda \geq 6$, las iteraciones de cada punto distinto de $x = 0$ divergen, de forma alternada, hacia infinito en valor absoluto.*

Dividiremos la demostración en los diferentes casos, omitiendo el caso $\lambda = 0$, ya que cuando esto ocurre la función iteradora se convierte en la identidad y no tiene sentido estudiarla. Comenzaremos por el caso de valores negativos del parámetro.

Proposición 2.10 *Si $\lambda < 0$, las iteraciones de cada punto distinto de $x = 0$ divergen de forma monótona hacia infinito.*

Demostración Primero llamando $\kappa = -\lambda$, se tiene que $\kappa > 0$, y además,

$$N_{\kappa,f_+}(x) = \frac{x\left((\kappa+3)x^2 + (\kappa+1)\right)}{1+3x^2}.$$

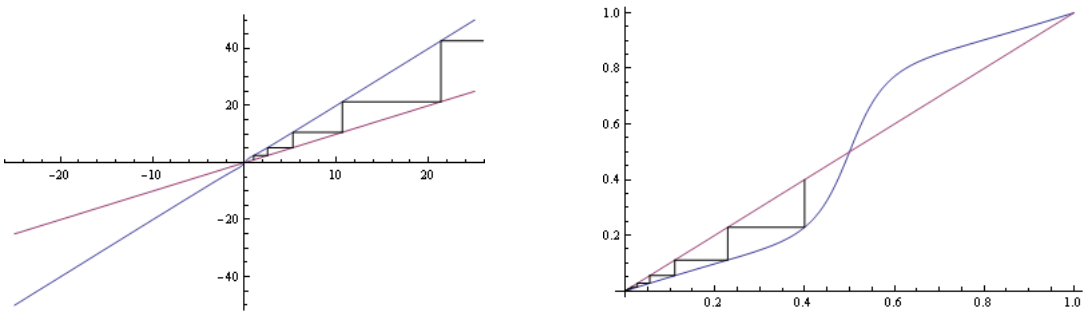
Queremos ver que $\{x_n\}$ es una sucesión creciente y divergente. Se tiene que $x_{n+1} > x_n$, si se verifica

$$x_n\Big((\kappa+3)x_n^2 + (\kappa+1)\Big) > (1+3x_n^2)x_n$$

$$\kappa x_n^2 + \kappa > 0,$$

que es cierto, para todo $\kappa > 0$ y todo $x_n > 0$, por lo tanto, las iteraciones divergen hacia infinito de forma monótona. ∎

Un ejemplo del comportamiento de la función de iteración, $N_{\lambda,f_+}(x)$, para valores de $\lambda < 0$, puede verse en la Figura 2.18. Para el caso $\lambda \in (0, 1]$ se tiene el siguiente resultado.



$N_{-3,f_+}(x)$ $\qquad$ $\widetilde{N}_{-3,f_+}(x)$

Figura 2.18: En la parte izquierda aparece el gráfico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_+(x) = x^3 + x$ con $\lambda = -3$, mientras que en la derecha aparece la compactificación del mismo. La función identidad aparece en cada uno de los gráficos. Se observa que las órbitas de puntos iniciales cercanos al punto fijo se alejan de él.

Proposición 2.11 *Las iteraciones de cualquier punto inicial $x_0 \in \mathbb{R}$ del método de Newton amortiguado aplicado a $f_+(x) = x^3 + x$, con $\lambda \in (0, 1]$, convergen monótonamente al único punto fijo $x = 0$.*

Demostración Queremos ver que la sucesión $\{x_n\}$ es decreciente y además, converge a 0. Veremos primero que es decreciente. Veamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $x_{n+1} = N_{\lambda,f_+}(x_n) \leq x_n$.

$$x_{n+1} = \frac{-x_n\left(-1-3x_n^2+\lambda+x_n^2\lambda\right)}{1+3x_n^2} \leq x_n$$

$$-x_n\left(-1-3x_n^2+\lambda+x_n^2\lambda\right) \leq (1+3x_n^2)x_n$$
$$1+3x_n^2-\lambda-x_n^2\lambda \leq 1+3x_n^2$$
$$-\lambda(1+x_n^2) \leq 0,$$

que es cierto, por hipótesis ya que $\lambda \in (0,1]$ y, por lo tanto, la sucesión $\{x_n\}$ es decreciente. Ahora veámos que está acotada inferiormente por 0.

$$\frac{-x_n\left(-1-3x_n^2+\lambda+x_n^2\lambda\right)}{1+3x_n^2} \geq 0$$

$$-x_n\left(-1-3x_n^2+\lambda+x_n^2\lambda\right) \geq 0$$
$$-\left(-1-3x_n^2+\lambda+x_n^2\lambda\right) \geq 0$$
$$1+3x_n^2-\lambda-x_n^2\lambda \geq 0$$
$$(1-\lambda)+(3-\lambda)x_n^2 \geq 0$$

que vuelve a ser cierto para todo $\lambda \in (0,1]$. Por lo tanto, existe $\lim_{n\to\infty} x_n = x^* \geq 0$. Como x^* es un punto fijo de $N_{\lambda,f_+}(x)$, entonces $x^* = 0$. Y ésto concluye la demostración. ∎

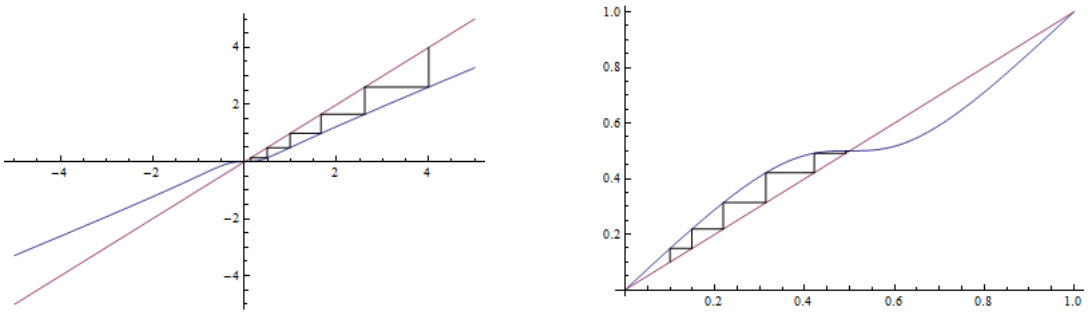
Entonces, si se toma un valor del parámetro entre 0 y 1, para cada punto de partida que se tome las iteraciones de $N_{\lambda,f_+}(x)$ van a converger monótonamente a la solución $x = 0$, como puede verse en la Figura 2.19.

El siguiente caso de estudio es $\lambda \in (1,2)$.

Proposición 2.12 *Si $\lambda \in (1,2)$, 0 es punto fijo atractor, y todas las iteraciones convergen hacia 0. Además, existe un número infinito numerable de puntos eventualmente fijos.*

Demostración En este caso, la función de iteración (2.3.4) tiene la característica de que posee un conjunto infinito numerable de puntos eventualmente fijos que son las preimágenes de 0. Sean $p_k = N^{-k}_{\lambda,f_+}(0)$, las preimágenes positivas del 0. Se tiene que $p_1 = \sqrt{\frac{\lambda-1}{3-\lambda}}$.

Además, como $N'_{\lambda,f_+}(x) > 0$ para $x \in (p_1,\infty)$ se tiene que si $x_0 \in (p_k,p_{k+1})$ entonces $x_1 \in (p_{k-1},p_k)$ y $x_k \in (0,p_1)$. Bastará probar entonces que la iteración de todo punto $x_0 \in (0,p_1)$, converge a 0 para demostrar la hipótesis. Se tiene



$N_{1.0,f_+}(x)$ $\widetilde{N}_{1.0,f_+}(x)$

Figura 2.19: En la parte izquierda aparece el gráfico del método de Newton aplicado al polinomio $f_+(x) = x^3 + x$, mientras que en la derecha aparece la compactificación del mismo. La función identidad aparece en cada uno de los gráficos. Se observa cómo las órbitas de puntos alejados del punto fijo ($x_0 = 4$ en la parte derecha y $x_0 = 0.1$ en la parte izquierda) convergen hacia él.

que, en este caso, $\{x_n\}$ tiende a cero de forma alternada. Para ello, basta ver que $|x_{n+1}| < |x_n|$, es decir,

$$|x_{n+1}| = |N_{\lambda,f_+}(x)| = \left|\frac{-x_n\left(-1-3x_n^2+\lambda+x_n^2\lambda\right)}{1+3x_n^2}\right| \leq |x_n|,$$

o equivalentemente,

$$|-1-3x_n^2+\lambda+x_n^2\lambda| \leq |1+3x_n^2|.$$

Aplicando la desigualdad triangular, en la parte se obtiene que

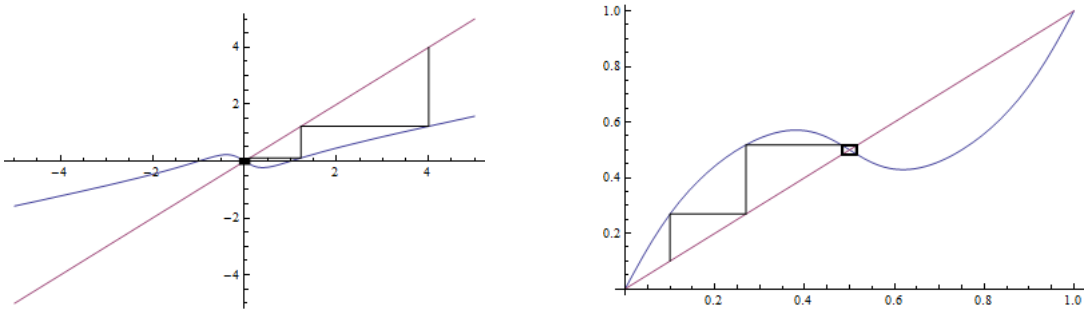
$$|-1-3x_n^2+\lambda+x_n^2\lambda| \leq |1-\lambda|+|\lambda-3|x_n^2,$$

que es siempre menor que $1+3x_n^2$ y, por lo tanto, $|x_{n+1}| < |x_n|$, por lo que, la sucesión es decreciente en módulo hacia cero. Ahora, por la forma de $N_{\lambda,f_+}(x)$, es claro que si $x_n \in (0, p_1)$, entonces $x_{n+1} < 0$ y si $x_n \in (-p_1, 0)$, entonces $x_{n+1} > 0$. Por lo tanto, para $\lambda \in (1, 2)$, el método de Newton amortiguado aplicado a $f_+(x)$ converge a cero de forma alterna como queríamos demostrar. ∎

Proposición 2.13 *Si $\lambda = 2$, $x = 0$ es punto fijo indiferente, y todas las iteraciones convergen hacia él. Además, existe un número infinito numerable de puntos eventualmente fijos.*

La demostración de este resultado se omite por ser similar a la de la Proposición 2.12.

En la Figura 2.20, puede verse cómo, para $\lambda = 2$, las órbitas de puntos lejanos convergen a 0 y además, en la Tabla 2.1 pueden verse algunos de estos puntos



$N_{2.0,f_+}(x)$ $\widetilde{N}_{2.0,f_+}(x)$

Figura 2.20: En la parte izquierda aparece el gráfico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_+(x) = x^3 + x$ con $\lambda = 2.0$, tomando $x_0 = 4$, mientras que en la derecha aparece la compactificación del mismo, tomando $x_0 = 0.1$. La función identidad aparece en cada uno de los gráficos y se observa cómo las órbitas convergen hacia el único punto fijo.

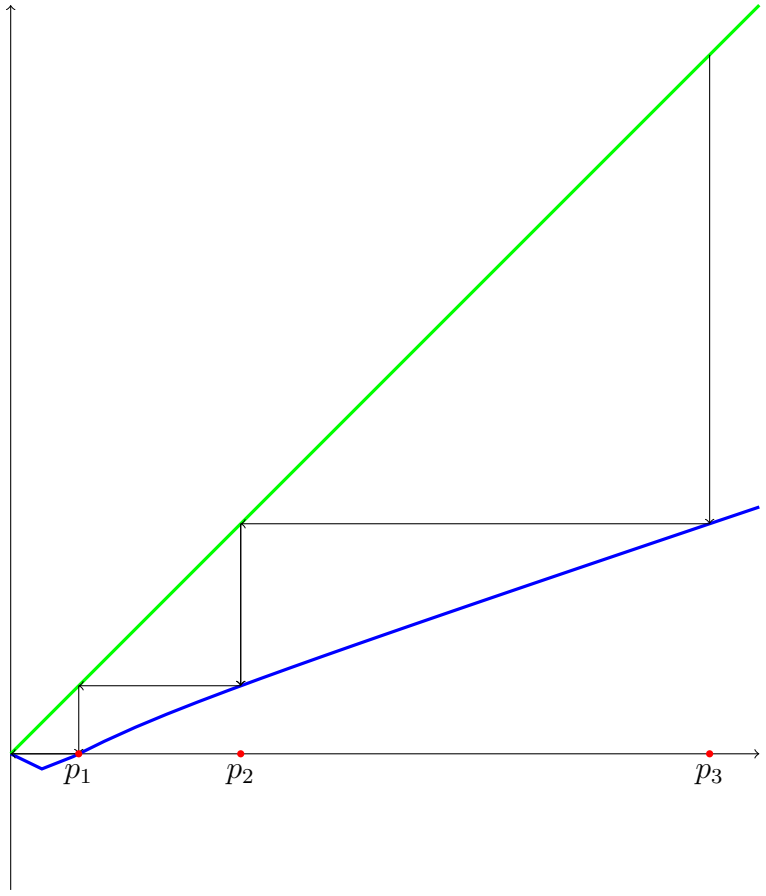


Figura 2.21: Gráfica de $N_{2,f_+}(x) = \frac{x^3-x}{3x^2+1}$, en la que se observan algunos de los puntos eventualmente fijos.

Tabla 2.1: Valores aproximados de algunos de los puntos eventualmente fijos p_k que aparecen en $N_{\lambda,f_+}(x)$ para $\lambda \in (1,2]$.

k	$\lambda = 1.25$	$\lambda = 1.5$	$\lambda = 1.75$	$\lambda = 2.0$
1	0.37796	0.57735	0.77459	1
2	1.00431	1.53515	2.24845	3.38297
3	1.94653	3.26812	5.56230	10.27824
4	3.47042	6.63596	13.41894	30.87789
5	6.02759	13.32187	32.23441	92.64807

eventualmente fijos. En la Figura 2.21 se muestran también algunos de estos puntos eventualmente fijos, para el caso concreto $\lambda = 2$.

Por otro lado, la amplitud de los intervalos queda determinada en el siguiente resultado (véase [16] o [22]).

Proposición 2.14 *Para $\lambda \in (1,2]$, la amplitud de cada intervalo (p_k, p_{k+1}) se va multiplicando aproximadamente por $\dfrac{3}{3-\lambda}$.*

Demostración Por definición, se tiene que $p_{k+1} = N^{-1}_{\lambda,f_+}(p_k)$, es decir, $N_{\lambda,f_+}(p_{k+1}) = p_k$, o equivalentemente

$$\frac{-p_{k+1}(-1-3p_{k+1}^2+\lambda+\lambda p_{k+1}^2)}{1+3p_{k+1}^2} = p_k.$$

Derivando, se tiene que

$$\frac{dp_k}{dp_{k+1}} = \frac{(9-3\lambda)p_{k+1}^4 + 6p_{k+1}^2 + (1-\lambda)}{(1+3p_{k+1}^2)^2}.$$

Ahora, como $p_k \to \infty$ se obtiene que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{dp_k}{dp_{k+1}} = \frac{3-\lambda}{3}.$$

Por otro lado, como

$$\frac{p_k - p_{k-1}}{p_{k+1} - p_k} \approx \frac{d_{p_k}}{d_{p_{k+1}}},$$

se tiene que

$$p_{k+1} - p_k \approx \frac{3}{3-\lambda}(p_k - p_{k-1}).$$

Además, si $p_k \to p^*$, entonces $N_{\lambda,f_+}(p^*) = p^*$, que es cierto sólo si $p^* = 0$, pero como $p_k \to \infty$ no es cierto. Por lo tanto, queda demostrada la hipótesis. ∎

Proposición 2.15 *Para $\lambda \in (2,6)$, la función iteradora, tiene en $x = 0$ un punto fijo repulsor, y además presenta 2-ciclos atractores de la forma*

$$\left\{-\sqrt{\frac{\lambda-2}{6-\lambda}}, \sqrt{\frac{\lambda-2}{6-\lambda}}\right\},$$

que se corresponde con las soluciones de la ecuación

$$(\lambda-6)x^2+\lambda-2=0.$$

Demostración Basta resolver $N^2_{\lambda,f_+}(x) = x$, para obtener que los 2-ciclos se corresponden con las soluciones de la ecuación $(\lambda-6)x^2+\lambda-2=0$, es decir,

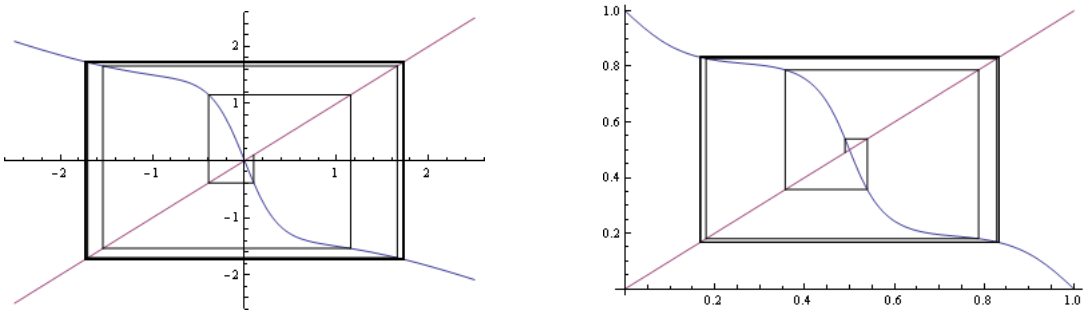
$$x = \pm\sqrt{\frac{\lambda-2}{6-\lambda}}.$$

Además, los 2-ciclos tienen como multiplicador asociado

$$\mu = \frac{(-4+\lambda)^2(-3+\lambda)^2}{\lambda^2},$$

y, por lo tanto, son atractores para todo valor $\lambda \in (2,6)$ y además, son super-atractores para $\lambda = 3$ y $\lambda = 4$. ∎

En la Figura 2.22 puede verse un ejemplo de este comportamiento, mientras que, en la Figura 2.23 se muestra el 2-ciclo que aparece para el valor concreto $\lambda = 5$.



$N_{5.0,f_+}(x)$ $\quad$ $\widetilde{N}_{5.0,f_+}(x)$

Figura 2.22: En la parte izquierda aparece el gráfico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_+(x) = x^3 + x$ con $\lambda = 5.0$, en la derecha aparece la compactificación del mismo. En ambos casos, se observa cómo las iteraciones convergen a 2-ciclos.

Por último, para valores del parámetro mayores o iguales que 6 tenemos el siguiente resultado.

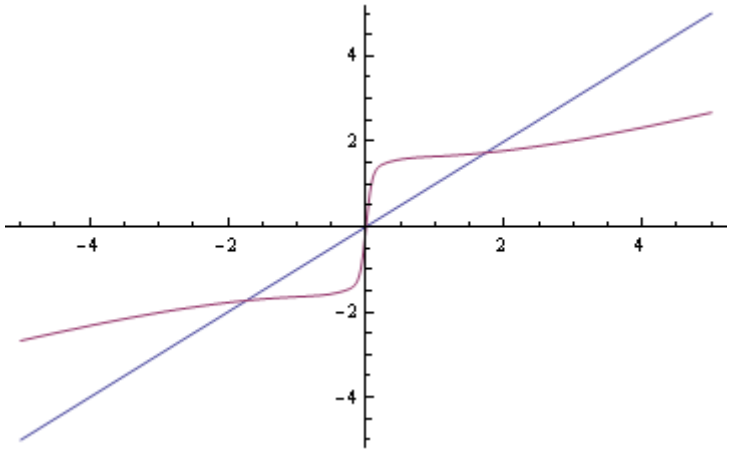


Figura 2.23: Gráfico del método de Newton amortiguado aplicado 2 veces al polinomio $f_+(x) = x^3 + x$ con $\lambda = 5.0$ junto con la identidad, donde se observa que aparece un 2-ciclo.

Proposición 2.16 *Si $\lambda \geq 6$, la función de iteración del método de Newton amortiguado aplicado a $f_+(x) = x^3 + x$ tiene en $x = 0$ un punto fijo repulsor, el 2-ciclo deja de ser atractor y la iteración de cada punto, salvo $x = 0$, diverge, de forma alterna, hacia el infinito en valor absoluto.*

Demostración Por la forma de $N_{\lambda,f_+}(x)$, es claro que para valores del parámetro mayores que 3 las iteraciones son alternadas. Si llamamos $y_n = (-1)^n x_n$, entonces basta probar que $y_{n+1} > y_n$, así, de

$$y_{n+1} = \frac{y_n\left((\lambda - 3)y_n^2 + \lambda - 1\right)}{3y_n^2 + 1} \geq y_n$$

se tiene que

$$(\lambda - 6)y_n^2 + (\lambda - 2) \geq 0,$$

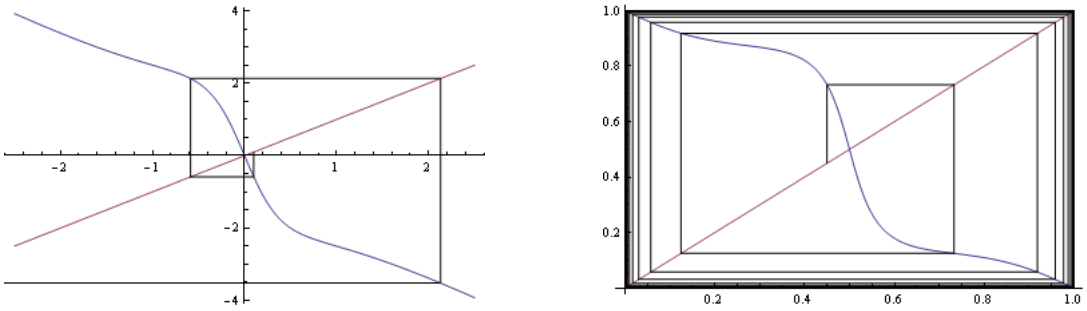
que es cierto por hipótesis ($\lambda \geq 6$), entonces, la sucesión diverge a infinito de forma alternada. ∎

Este comportamiento se observa en la Figura 2.24.

En resumen, la convergencia y divergencia del método se observan en los valores de los exponentes de Lyapunov que aparecen en la Figura 2.25 y las bifurcaciones que aparecen pueden verse en el diagrama de Feigenbaum que se muestra en la Figura 2.26.

2.3.3. El método de Newton amortiguado aplicado a $f_-(x) = x^3 - x$

El siguiente polinomio a estudiar es $f_-(x) = x^3 - x$ que tiene tres raíces reales $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 1$. El método de Newton amortiguado aplicado a $f_-(x)$



$N_{7.0,f_+}(x)$ $\widetilde{N}_{7.0,f_+}(x)$

Figura 2.24: En la parte izquierda aparece el gráfico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_+(x) = x^3 + x$ con $\lambda = 7.0$, en la derecha aparece la compactificación del mismo. En ambos casos se observa cómo las órbitas de puntos cercanos al punto fijo se alejan de él.

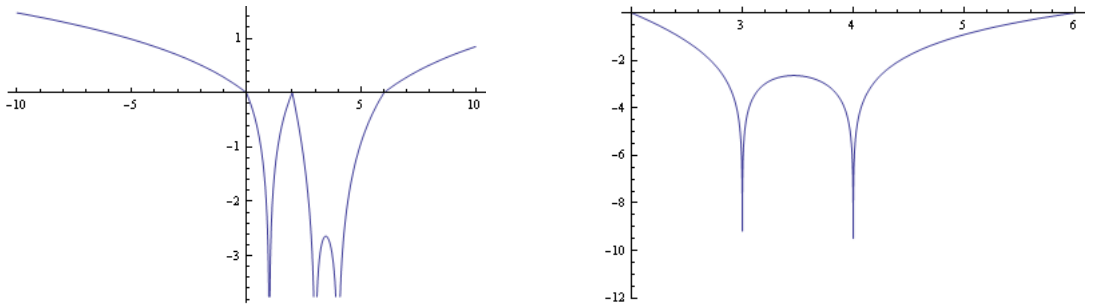


Figura 2.25: En la parte izquierda aparecen los exponentes de Lyapunov asociados al método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_+(x) = x^3+x$, tomando $x_0 = C_2$, para distintos valores de $\lambda \in (-10, 10)$, en la derecha aparece un zoom de la zona de convergencia a 2-ciclos.

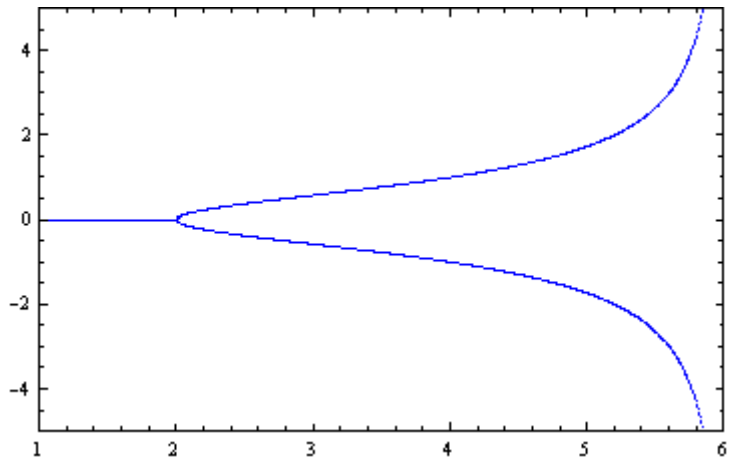


Figura 2.26: Diagrama de bifurcaciones asociado al método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_+(x) = x^3 + x$, tomando $x_0 = C_1$, para distintos valores de λ, donde se observa que para $\lambda \in (2, 6)$ aparece un 2-ciclo.

presenta la siguiente función de iteración

$$N_{\lambda,f_-}(x) = \frac{x\left((3-\lambda)x^2 + \lambda - 1\right)}{3x^2 - 1}. \tag{2.3.5}$$

Nótese que esta función tiene 2 asíntotas verticales en $x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ y $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, además de tres puntos fijos, x_1, x_2 y x_3, que son las raíces del polinomio $f_-(x)$. Si calculamos ahora la derivada, obtenemos que tiene la forma

$$N'_{\lambda,f_-}(x) = \frac{(9-3\lambda)x^4 - 6x^2 + (1-\lambda)}{(3x^2-1)^2}.$$

Y, entonces, los 3 puntos fijos tienen el mismo multiplicador asociado $\mu = 1-\lambda$, y, por lo tanto, tenemos que para valores del parámetro amortiguador en el intervalo $(0, 2)$, los tres puntos son atractores, salvo cuando $\lambda = 1$, que son superatractores. Los puntos críticos de la función de iteración son las soluciones de la ecuación bicuadrada

$$(3\lambda - 9)x^4 + 6x^2 + (\lambda - 1) = 0.$$

Si $\lambda \in (-\infty, 0] \cup (4, \infty)$ o $\lambda = 3$, esta ecuación no tiene soluciones reales y, en otro caso, es decir, $\lambda \in (0, 4]$, $\lambda \neq 3$, las soluciones reales, son de la forma

$$x^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{3(4\lambda - \lambda^2)}}{3\lambda - 9}.$$

Notemos que el discriminante $3(4\lambda - \lambda^2)$ es mayor o igual que cero cuando $\lambda \in (0, 4]$. Vamos a estudiar los dos casos diferentes, llamando $x_-^2 = \frac{-3-\sqrt{3(4\lambda-\lambda^2)}}{3\lambda-9}$

y $x_+^2 = \frac{-3+\sqrt{3(4\lambda-\lambda^2)}}{3\lambda-9}$. Por un lado estudiamos x_+^2, multiplicando y dividiendo por el conjugado obtenemos

$$x_+^2 = \frac{\lambda - 1}{-3 - \sqrt{3(4\lambda - \lambda^2)}}.$$

Por lo tanto, para valores de $\lambda \in (0, 1]$,

$$C_1 = -\sqrt{\frac{1-\lambda}{3 + \sqrt{3(4\lambda - \lambda^2)}}}$$

y

$$C_2 = \sqrt{\frac{1-\lambda}{3 + \sqrt{3(4\lambda - \lambda^2)}}}$$

son puntos críticos de $N_{\lambda,f_-}(x)$.

Si ahora estudiamos x_-^2, observamos que, para que sea mayor o igual que 0 se tienen dos restricciones, la primera, que $3\lambda - 9$ ha de ser negativo, es decir, $\lambda < 3$ y la segunda, que el discriminante ha de ser mayor o igual que 0. Por lo que, obtenemos dos puntos críticos de $N_{\lambda,f_-}(x)$ para $\lambda \in (0, 3)$

$$C_3 = -\sqrt{\frac{-3 - \sqrt{3(4\lambda - \lambda^2)}}{3\lambda - 9}}$$

y

$$C_4 = \sqrt{\frac{-3 - \sqrt{3(4\lambda - \lambda^2)}}{3\lambda - 9}}.$$

Por lo tanto, recapitulando,

- Si $\lambda \in (0, 1]$, $N_{\lambda,f_-}(x)$ tiene cuatro puntos críticos C_1, C_2, C_3 y C_4.
- Si $\lambda = 1$, $N_{\lambda,f_-}(x)$ tiene tres puntos críticos que, además, coinciden con las raíces de $f_-(x)$.
- Si $\lambda \in (1, 3)$, $N_{\lambda,f_-}(x)$ tiene dos puntos críticos C_3 y C_4.
- si $\lambda \notin (0, 3)$, $N_{\lambda,f_-}(x)$ no tiene puntos críticos reales.

En la Figura 2.27 pueden verse los puntos críticos para los distintos valores del parámetro λ.

Un resultado que reducirá el estudio de forma significativa es el siguiente.

Proposición 2.17 *La función de iteración del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_-(x) = x^3 - x$, $N_{\lambda,f_-}(x)$, tiene simetría impar.*

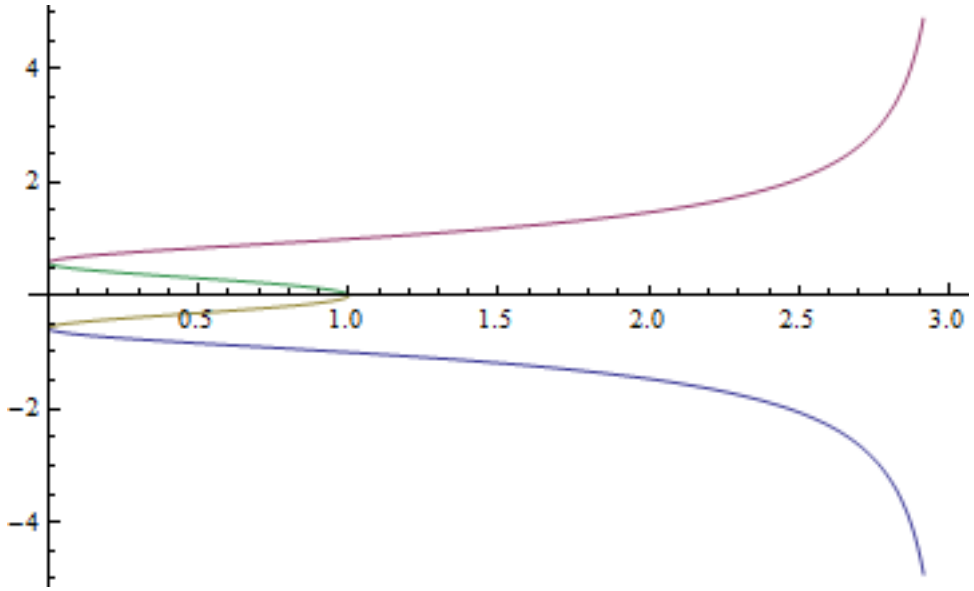


Figura 2.27: Valores que toman los puntos críticos de $N_{\lambda,f_-}(x)$, definida en (2.3.5), para los distintos valores del parámetro $\lambda \in (0,3)$. En amarillo aparece C_1, en verde C_2, en azul C_3 y en magenta C_4.

Demostración Notemos que

$$N_{\lambda,f_-}(-x) = \frac{x\left(1-\lambda-3x^2+\lambda x^2\right)}{-1+3x^2}$$

y

$$-N_{\lambda,f_-}(x) = \frac{x\left(1-\lambda-3x^2+\lambda x^2\right)}{-1+3x^2},$$

son idénticos, y entonces, la simetría es impar como queríamos demostrar. ∎

Por simplicidad, sólo estudiaremos el caso $x_0 > 0$. Notemos que durante el estudio en este apartado, se han tomado valores del parámetro λ aproximados, debido a que se obtienen de un análisis gráfico y, por tanto, es imposible dar valores exactos. Se ha tomado la decisión de aproximar con 5 cifras decimales. Además, éste es el motivo por el que algunos intervalos aparecen sin tomar los puntos extremos, y quedan abiertos. Teniendo ésto en cuenta, el siguiente resultado proporciona el estudio general de $N_{\lambda,f_-}(x)$ para $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.18 *El comportamiento dinámico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_-(x) = x^3 - x$, es el siguiente:*

- *Si $\lambda < 0$, las iteraciones pueden diverger hacia infinito si $x_0 > 0$ y a menos infinito si $x_0 < 0$.*
- *Si $\lambda = 0$, el estudio carece de interés.*

- *Si* $\lambda \in (0, 2)$*,* $x = 0$*,* $x = 1$ *y* $x = -1$ *son puntos fijos atractores, pero no todas las iteraciones convergen hacia uno de ellos.*

- *Si* $\lambda = 2$*,* $x = 0$*,* $x = 1$ *y* $x = -1$ *son puntos fijos indiferentes, pero no todas las iteraciones convergen hacia uno de ellos.*

- *Si* $\lambda \in (2, \alpha_1)$*, donde* $\alpha_1 \approx 2.37064$ *es la raíz real de* $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 26\lambda - 30$*, los puntos fijos son repulsores. Además, la función de iteración presenta, para cada* $\lambda \in (2, \alpha_1)$*, dos* 2*-ciclos atractores, que se corresponden con las soluciones de la ecuación*

$$(\lambda - 3)^2 x^4 - (\lambda^2 - 4\lambda + 6)x^2 + 4 = 0.$$

- *Si* $\lambda \in (\alpha_1, 2.44229)$*, los puntos fijos son repulsores y la función de iteración presenta ciclos atractores de diferentes órdenes.*

- *Si* $\lambda \in (2.44229, 2.72220)$*, los puntos fijos son repulsores. Puede aparecer comportamiento caótico en las iteraciones.*

- *Si* $\lambda \in (2.72220, 2.75256)$*, los puntos fijos son repulsores. Además, la función de iteración presenta* 4*-ciclos atractores.*

- *Si* $\lambda \in (2.75256, 2.77360)$*, los puntos fijos son repulsores. Además, la función de iteración puede presentar* n*-ciclos atractores.*

- *Si* $\lambda \in (2.77360, 6)$*, los puntos fijos son repulsores. Puede aparecer comportamiento caótico en las iteraciones.*

- *Si* $\lambda \geq 6$*, las iteraciones pueden diverger hacia infinito de forma alternada en valor absoluto.*

La demostración, como en el apartado anterior, la dividiremos en los diferentes casos, omitiendo el caso $\lambda = 0$, ya que cuando ésto ocurre, la función iteradora se convierte en la identidad y no tiene sentido estudiarla. Un resumen de este comportamiento puede verse en la Figura 2.28.

Empezando por los valores negativos tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.19 *Para* $\lambda < 0$*, la función iteradora, tiene tres puntos fijos repulsores y las iteraciones pueden diverger hacia infinito en valor absoluto.*

En la Figura 2.29 pueden verse los exponentes de Lyapunov asociados, para valores negativos del parámetro, donde se observa que puede existir divergencia, ya que dichos exponentes, son positivos.

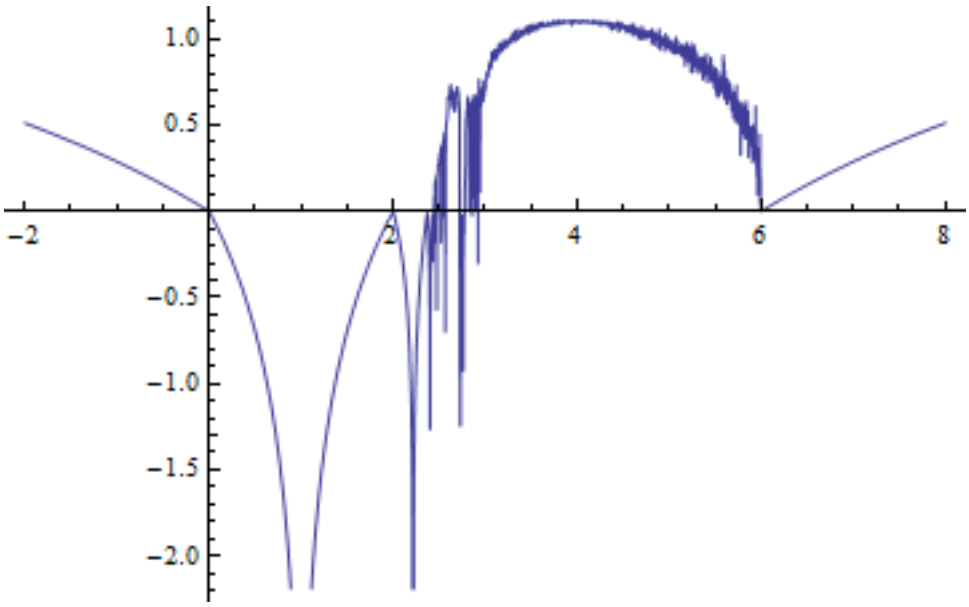


Figura 2.28: Exponentes de Lyapunov asociados a la función de iteración $N_{\lambda,f_-}(x)$, definida en (2.3.5), tomando $x_0 = 1.1$, para valores de $\lambda \in (-2, 8)$.

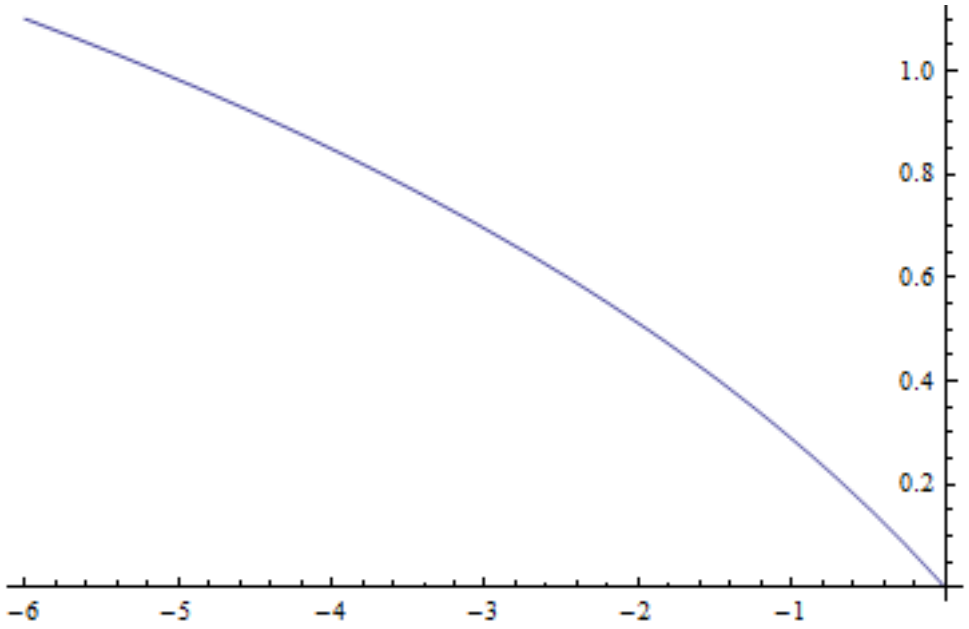


Figura 2.29: Exponentes de Lyapunov asociados a la función de iteración $N_{\lambda,f_-}(x)$, definida en (2.3.5), tomando $x_0 = 1.1$, para valores de $\lambda \in (-6, 0)$.

Una vez hemos estudiado los valores negativos, pasamos a estudiar los valores mayores que 0. Nos centramos ahora en el caso en el que los puntos fijos son, al menos, atractores, es decir, $\lambda \in (0, 2)$.

Proposición 2.20 *Para $\lambda \in (0, 2)$, los puntos fijos $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$ son atractores, pero no todas las iteraciones convergen hacia uno de ellos.*

Demostración La principal dificultad a la hora de estudiar este polinomio, radica en el hecho de conocer hacia qué raíz converge un punto arbitrario inicial. Para ello, nos apoyaremos en [22], [53], [73] y [118]. Primero, notemos que $f'_-(x) = 3x^2 - 1$ y, por lo tanto, $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, son puntos críticos de $f_-(x)$.

Denotaremos $W(x^*)$ la cuenca de atracción inmediata de la raíz x^*. Es sencillo, por la forma del polinomio, comprobar que

$$W(-1) = \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

y

$$W(1) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right).$$

La gráfica del polinomio puede verse en la Figura 2.30. La intuición, incita a pensar que $W(0) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, pero ese pensamiento es falso, ya que por ejemplo $N_{1,f_-}(0.5) = -1$.

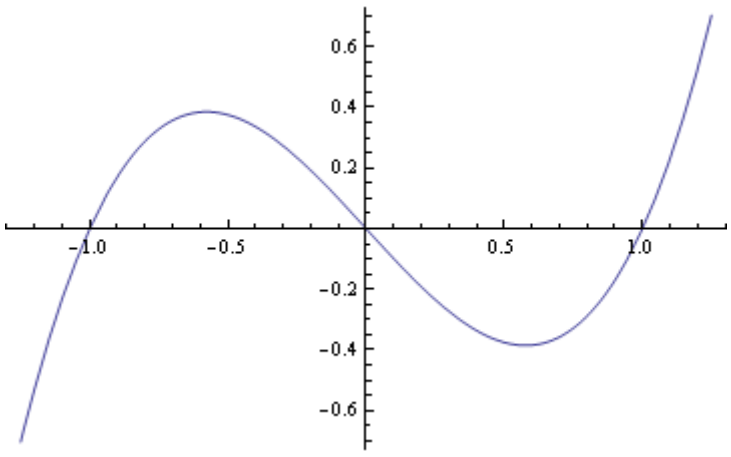


Figura 2.30: Gráfico del polinomio $f_-(x) = x^3 - x$ donde se observa que tiene 3 raíces en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$, y dos puntos críticos en $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ahora bien, tenemos que $N_{\lambda,f_-}(x)$ es continua en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y que 0 es un punto fijo atractor para todo $\lambda \in (0, 2)$, excepto cuando $\lambda = 1$, que es super-atractor. Por lo tanto, debido a la simetría de $f_-(x)$ con respecto al origen, $W(0)$ será de la forma $(-a, a)$ con $0 < a < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Notemos que existe un 2-ciclo, que se corresponde con las soluciones de la ecuación

$$(\lambda - 6)x^2 + (2 - \lambda) = 0,$$

es decir, de la forma

$$\left\{ a_1 = -\sqrt{\frac{\lambda - 2}{\lambda - 6}},\ a_2 = \sqrt{\frac{\lambda - 2}{\lambda - 6}} \right\}.$$

Además, el 2-ciclo es repulsor ya que

$$N'_{\lambda,f_-}(a_1)N'_{\lambda,f_-}(a_2) = \frac{(-4+\lambda)^2(-3+\lambda)^2}{\lambda^2} > 1,$$

para cada $\lambda \in (0, 2)$.

Queremos ver ahora qué ocurre en el intervalo $\left(a_2, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Notemos que $N'_{\lambda,f_-}(x) < 0$, para todo $\lambda \in (0, 2)$ y $x \in \left(a_2, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, es decir,

$$(3\lambda - 9)x^4 + 6x^2 + (\lambda - 1) > 0,$$

para ello, tenemos en cuenta que, dependiendo de los valores de λ, la ecuación $(3\lambda - 9)x^4 + 6x^2 + (\lambda - 1)$ tiene 4 soluciones, y entonces tenemos 5 posibles intervalos. Dividimos el estudio en dos casos diferenciados. El primero si $0 < \lambda \leq 1$, tiene 4 soluciones que son C_1, C_2, C_3 y C_4, y además, tenemos una función bicuadrada de forma que el coeficiente director y el término independiente son negativos, por lo tanto, los intervalos $(-\infty, C_3)$, (C_4, ∞) y (C_1, C_2) quedan descartados. Por lo que los únicos intervalos que verifican la ecuación son (C_3, C_1) y (C_2, C_4). Y queremos ver $\left(a_2, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \subseteq (C_2, C_4)$, para ello, primero veremos que $a_2 > C_2$, de esta manera

$$\sqrt{\frac{2-\lambda}{6-\lambda}} \geq \sqrt{\frac{1-\lambda}{3+\sqrt{3(4\lambda-\lambda^2)}}}$$

$$\frac{2-\lambda}{6-\lambda} \geq \frac{1-\lambda}{3+\sqrt{3(4\lambda-\lambda^2)}}$$

$$\frac{(2-\lambda)(3+\sqrt{3\lambda(4-\lambda)}) - (6-\lambda)(1-\lambda)}{(6-\lambda)(3+\sqrt{3\lambda(4-\lambda)})} \geq 0.$$

Ahora bien, es claro que para todo $\lambda \in (0, 1)$ el denominador es positivo, por lo que sólo hay que estudiar el numerador

$$(2-\lambda)\left(3+\sqrt{3\lambda(4-\lambda)}\right) - (6-\lambda)(1-\lambda) \geq 0.$$

Operando

$$(2-\lambda)\sqrt{3\lambda(4-\lambda)} + 6 - 3\lambda - 6 + 7\lambda - \lambda^2 \geq 0$$

$$-\lambda^2 + 4\lambda + (2-\lambda)\sqrt{3\lambda(4-\lambda)} \geq 0$$

o equivalentemente

$$(2-\lambda)\sqrt{3\lambda(4-\lambda)} \geq \lambda(\lambda-4).$$

La parte izquierda de la inecuación es positiva, y la parte derecha negativa para $\lambda \in (0,1]$ por lo tanto, es cierto que $a_2 \geq C_2$ para esos valores del parámetro. Por otro lado, tenemos que ver que $\frac{\sqrt{3}}{3} < C_4$, así

$$\frac{1}{3} \leq \frac{3+\sqrt{3\lambda(4-\lambda)}}{3(3-\lambda)}$$

$$3-\lambda \leq 3+\sqrt{3\lambda(4-\lambda)}$$

$$-\lambda \leq \sqrt{3\lambda(4-\lambda)},$$

que es claro que se cumple, ya que la parte izquierda es negativa y la parte derecha positiva. Por último, queda probar que $a_2 < \frac{\sqrt{3}}{3}$, para cada $\lambda \in (0,1]$, pero es inmediato.

Por otro lado, si $\lambda \in (1,2)$, demostrar que $N_{\lambda,f_-}(x) < 0$, es más sencillo. Por su forma

$$N_{\lambda,f_-}(x) = (1-\lambda) + \lambda\frac{6x^2(x^2-1)}{(1-3x^2)^2},$$

se tiene que el primer sumando, es negativo y el segundo para todo valor de $x \in [0,1)$ también es negativo y, $\left(a_2, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \subset (0,1)$, por lo tanto, $N_{\lambda,f_-}(x) < 0$, para todo $\lambda \in (0,2)$ y todo $x \in \left(a_2, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Por lo tanto, $N_{\lambda,f_-}((a_2, \frac{\sqrt{3}}{3})) = (-\infty, a_1)$. Llamamos $e_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, y entonces como $-e_1 \in (-\infty, a_2)$, existe un único valor $e_2 \in \left(a_2, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ tal que $N_{\lambda,f_-}(e_2) = -e_1$. Ahora $N_{\lambda,f_-}((a_2,e_2)) = (-e_1, a_1)$. Como $-e_2 \in (-e_1, a_2)$, se tiene que existe un único $e_3 \in (a_2, e_2)$ tal que $N_{\lambda,f_-}(e_3) = -e_2$, y así sucesivamente se construye una sucesión $\{e_k\}$ tal que $N_{\lambda,f_-}(e_{k+1}) = -e_k$ (por simetría $N_{\lambda,f_-}(-e_{k+1}) = e_k$). Por construcción $a_2 < e_{k+1} < e_k$. Por lo tanto, existe el límite de $\{e_k\}$ y lo llamamos L. Debido a la continuidad de $N_{\lambda,f_-}(x)$, se tiene que $N_{\lambda,f_-}(L) = -L$, o equivalentemente

$$N_{\lambda,f_-}(N_{\lambda,f_-}(L)) = N_{\lambda,f_-}(-L) = -N_{\lambda,f_-}(L) = L.$$

Por lo tanto, L es un punto fijo de N^2_{λ,f_-}, es decir, $L = a_2$.

Notemos que $N_{\lambda,f_-}((e_2,e_1)) = (-\infty, -e_1)$, es decir $(e_2,e_1) \in W(-1)$, y que $N_{\lambda,f_-}((e_3,e_2)) = (-e_1,-e_2)$, es decir $(e_3,e_2) \in W(1)$. En general, se tiene que para cada $n \geq 1$

$$\begin{cases} (e_{2n}, e_{2n-1}) & \in & W(-1) \\ (e_{2n+1}, e_{2n}) & \in & W(1). \end{cases}$$

En este caso, los puntos e_k son los extremos de las componentes conexas de $W(-1)$ y $W(1)$. Además, el conjunto de Julia en este caso está formado por los puntos e_k, $-e_k$ y el 2-ciclo repulsor

$$\left\{a_1 = -\sqrt{\frac{\lambda-2}{\lambda-6}},\ a_2 = \sqrt{\frac{\lambda-2}{\lambda-6}}\right\}.$$

Y con ésto concluye la demostración. ∎

Una vez hemos visto lo que sucede para $\lambda \in (0,2)$, pasaremos a ver el resto de los casos, es decir, estudiaremos valores del parámetro $\lambda \geq 2$.

Proposición 2.21 *Si $\lambda = 2$, los puntos fijos $x = 0$, $x = 1$ y $x - 1$ son puntos fijos indiferentes, pero no todas las iteraciones convergen hacia uno de ellos.*

La demostración es similar a la del caso anterior, pero resulta incluso más sencilla la caracterización de las cuencas, por la forma del método

$$N_{2,f_-}(x) = \frac{x^3 + x}{3x^2 - 1}$$

y, por lo tanto, se omite. En la Figura 2.31 puede verse la forma del método y cómo las cuencas quedan bien determinadas.

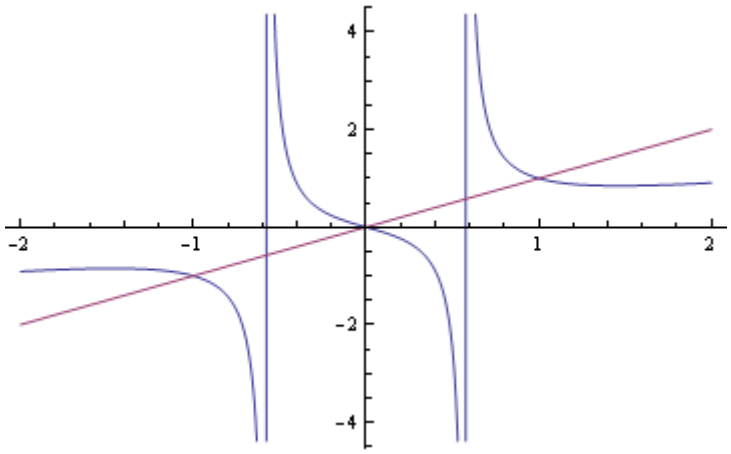


Figura 2.31: Gráfico de $N_{2,f_-}(x) = \frac{x^3+x}{3x^2-1}$, junto con la identidad.

Proposición 2.22 *Para $\lambda \in (2, \alpha_1)$, donde α_1 es la raíz real del polinomio $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 26\lambda - 30$, la función iteradora, tiene tres puntos fijos repulsores y además, para cada $\lambda \in (2, \alpha_1)$, presenta dos 2-ciclos atractores, que se corresponden con las soluciones de la ecuación*

$$(\lambda - 3)^2 x^4 - (\lambda^2 - 4\lambda + 6)x^2 + 4 = 0.$$

Demostración Basta resolver $N^2_{\lambda,f_-}(x) = x$, para obtener que los 2-ciclos se corresponden con las soluciones de la ecuación $(\lambda-3)^2x^4-(\lambda^2-4\lambda+6)x^2+4=0$. Además, los 2-ciclos tienen como multiplicador asociado

$$\mu = \frac{\lambda^3 - 8\lambda^2 + 25\lambda - 27}{\lambda - 3}.$$

El siguiente paso es ver para qué valores del parámetro, los 2-ciclos son atractores. Por un lado,

$$\frac{\lambda^3 - 8\lambda^2 + 25\lambda - 27}{\lambda - 3} < 1$$

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 24\lambda - 24 = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 6\lambda + 12) < 0,$$

y esto es cierto para cada $\lambda \in (2, 3)$. Por otro lado,

$$\frac{\lambda^3 - 8\lambda^2 + 25\lambda - 27}{\lambda - 3} > -1$$

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 26\lambda - 30 > 0.$$

Ésto es cierto para cada $\lambda > 3$, o si λ es menor que la raíz real de $\lambda^3-8\lambda^2+26\lambda-30$ que aproximadamente es 2.37064. Por lo tanto, si $\lambda \in (2, \alpha_1)$ los 2-ciclos son atractores. ∎

Nota 2.2 *Los 2-ciclos atractores para $\lambda \in (2, \alpha_1)$, son de la forma $\{a_1, a_2\}$ y $\{-a_1, -a_2\}$, donde*

$$a_1 = \sqrt{\frac{6 - 4\lambda + \lambda^2 - \sqrt{\lambda}\sqrt{-24 + 24\lambda - 8\lambda^2 + \lambda^3}}{2\,(9 - 6\lambda + \lambda^2)}}$$

y

$$a_2 = \sqrt{\frac{6 - 4\lambda + \lambda^2 + \sqrt{\lambda}\sqrt{-24 + 24\lambda - 8\lambda^2 + \lambda^3}}{2\,(9 - 6\lambda + \lambda^2)}}.$$

En la Tabla 2.2 pueden verse algunos valores de estos 2-ciclos.

Tabla 2.2: Valores aproximados de algunos de los 2-ciclos atractores que aparecen en $N_{\lambda,f_-}(x)$ para $\lambda \in (2, \alpha_1)$.

λ	a_1	a_2
2.1	0.82981	1.33899
2.2	−0.77784	−1.60700
2.3	0.74106	1.92773
2.35	−2.12075	−0.72545

Observando ahora el gráfico correspondiente a los exponentes de Lyapunov que aparece en la Figura 2.32, se ve cómo desde $\lambda = \alpha_1$ hay ciclos atractores que van doblando su periodo hasta aproximadamente $\lambda = 2.44229$, y a partir de ese valor, ya aparece el caos hasta aproximadamente $\lambda = 2.72220$. Además, desde ese valor, encontramos n-ciclos hasta aproximadamente $\lambda = 2.77360$, a partir de donde se observa comportamiento caótico. El siguiente resultado caracteriza algunos de los 4 ciclos.

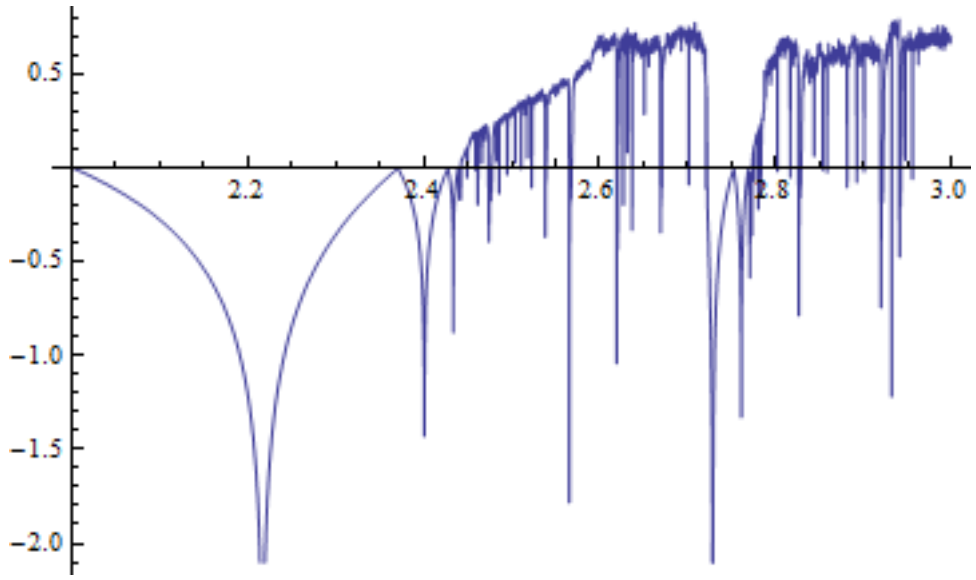


Figura 2.32: Exponentes de Lyapunov asociados a la función de iteración $N_{\lambda,f_-}(x)$, definida en (2.3.5), tomando $x_0 = 1.1$, para valores de $\lambda \in (2, 3)$.

Proposición 2.23 *Para $\lambda \in (2.72220, 2.75256)$, la función iteradora, tiene tres puntos fijos repulsores y además, para cada $\lambda \in (2.72220, 2.75256)$, presenta un 4-ciclo atractor y otro repulsor, que se corresponden con las soluciones de la ecuación*

$$(162 - 162 + 63\lambda^2 - 12\lambda^3 + \lambda^4)x^8 + (-216 + 288 - 138\lambda^2 + 30\lambda^3 - 3\lambda^4)x^6 + (108 - 156\lambda + 96\lambda^2 - 24\lambda^3 + 3\lambda^4)x^4 + (-24 + 32\lambda - 22\lambda^2 + 6\lambda^3 - \lambda^4)x^2 + (2 - 2\lambda + \lambda^2) = 0.$$

Demostración Basta resolver $N^4_{\lambda,f_-}(x) = x$, para obtener la ecuación cuyas soluciones se corresponden con los 4-ciclos. La ecuación posee 8 raíces distintas, que se corresponden con dos 4-ciclos. Uno de ellos es atractor, para $\lambda \in (2.72220, 2.75256)$ y otro repulsor para todo λ, como se observa en la Figura 2.33. En la Tabla 2.3 pueden verse algunos valores de estos 4-ciclos atractores. Por lo tanto, el resultado queda demostrado. ∎

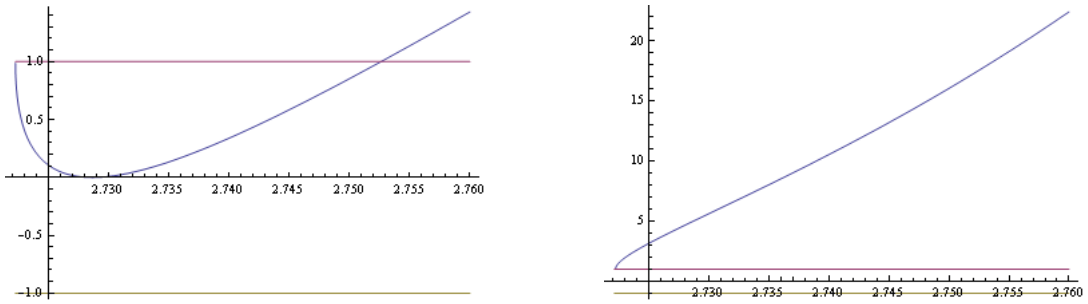


Figura 2.33: Multiplicador asociado a los 4-ciclos de $N_{\lambda,f_-}(x)$, definida en (2.3.5), para valores de $\lambda \in (2.7221, 2.76)$ junto con las rectas $y = 1$ e $y = -1$. Obsérvese que, para $\lambda \in (2.72220, 2.75256)$, existen 4-ciclos atractores, pero para valores fuera de ese rango, los 4-ciclos son repulsores.

Tabla 2.3: Valores aproximados de algunos de los 4-ciclos atractores que aparecen en $N_{\lambda,f_-}(x)$ para $\lambda \in (2.72220, 2.75256)$.

λ	a_1	a_2	a_3	a_4
2.73	0.47831	−2.73260	−0.47831	2.73260
2.735	0.47500	−2.63844	−0.47500	2.63844
2.74	0.472305	−2.56724	−0.472305	2.56724
2.745	0.46997	−2.50931	−0.46997	2.50932
2.75	0.46789	−2.46022	−0.46789	2.46022

Proposición 2.24 *Para $\lambda = 3$, la función iteradora, tiene tres puntos fijos repulsores y el comportamiento dinámico es caótico. Además, la función iteradora presenta dos 3-ciclos repulsores.*

Demostración Calcular los 3-ciclos es equivalente a encontrar las raíces de $N^3_{\lambda,f_-}(x) - x$, o equivalentemente de

$$-\frac{9(-1+x)x(1+x)\left(1-3x-9x^2+3x^3\right)\left(-1-3x+9x^2+3x^3\right)}{1-84x^2+630x^4-756x^6+81x^8}.$$

Si excluimos los puntos fijos tenemos que existen dos 3-ciclos que se corresponden con las soluciones de

$$3x^3 - 9x^2 - 3x + 1 = 0$$

y de

$$3x^3 + 9x^2 - 3x - 1 = 0.$$

Debido a la simetría, sin pérdida de generalidad, podemos estudiar una de las dos ecuaciones, en nuestro caso la primera. Dicha ecuación tiene por soluciones aproximadas $a_1 = -0.484454$, $a_2 = 0.210138$ y $a_3 = 3.27432$ que constituyen un 3-ciclo. Por otro lado, si calculamos el multiplicador asociado se obtiene que en módulo es

$$\mu = 8,$$

y por lo tanto, es repulsor.

Por otro lado, si extendemos el estudio al caso complejo y calculamos los puntos críticos obtenemos que son $\pm\frac{i}{\sqrt{3}}$, que forman un 2-ciclo. Por el Teorema 4.3.1 que aparece en [19] se puede concluir que el conjunto de Julia es todo el plano complejo, y concretamente, en el caso real el conjunto de Julia es toda la recta real. Por lo tanto, el comportamiento es caótico. ∎

Observando ahora los exponentes de Lyapunov asociados a la función iteradora para valores de $\lambda \in (3, 6)$ que aparecen en la Figura 2.34, vemos que el comportamiento puede ser caótico.

Proposición 2.25 *Para $\lambda \in (3, 6)$, la función iteradora, tiene tres puntos fijos repulsores y el comportamiento de las iteraciones puede ser caótico.*

Por último, para valores del parámetro mayores que 6 se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.26 *Para $\lambda \geq 6$, la función iteradora, tiene tres puntos fijos repulsores y las iteraciones pueden diverger de forma alterna hacia infinito en valor absoluto.*

En la Figura 2.35 observamos los exponentes de Lyapunov asociados para valores del parámetro mayores o iguales que 6 donde se observa la divergencia de las iteraciones a infinito.

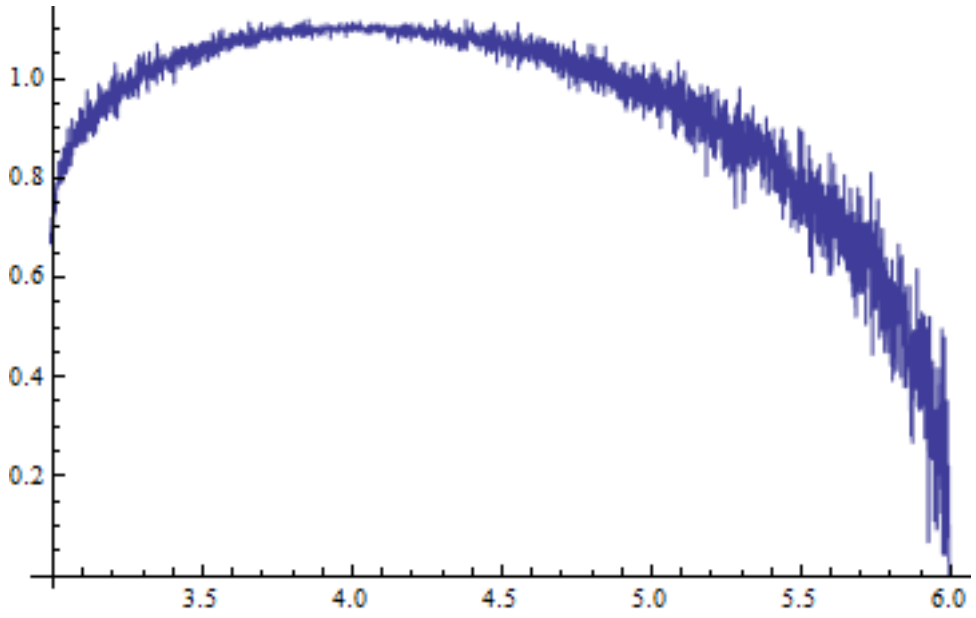


Figura 2.34: Exponentes de Lyapunov asociados a la función de iteración $N_{\lambda,f_-}(x)$, definida en (2.3.5), tomando $x_0 = 1.1$, para valores de $\lambda \in (3, 6)$.

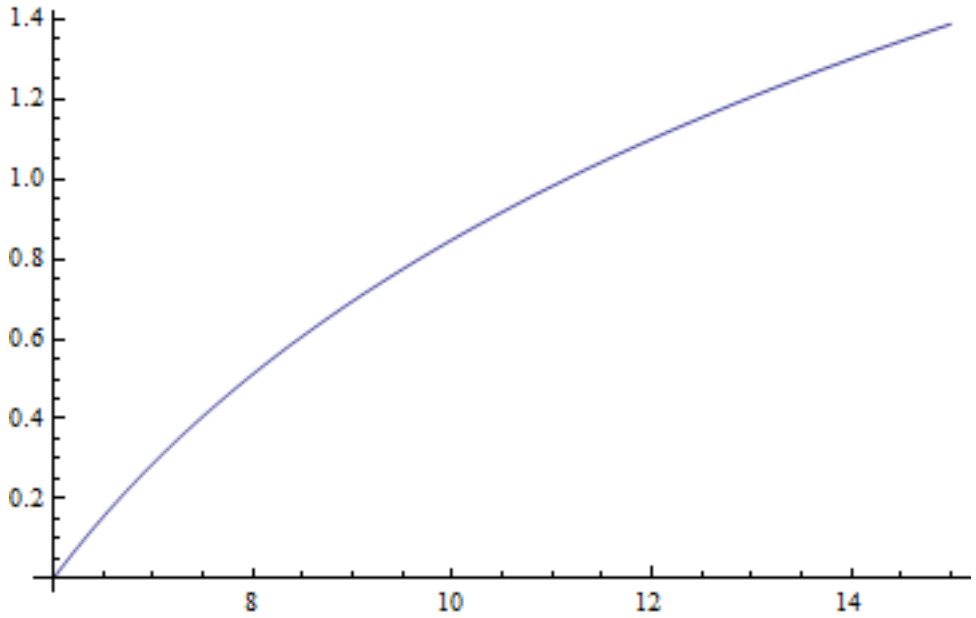


Figura 2.35: Exponentes de Lyapunov asociados a la función de iteración $N_{\lambda,f_-}(x)$, definida en (2.3.5), tomando $x_0 = 1.1$, para valores de $\lambda \in (6, 15)$.

2.3.4. El método de Newton amortiguado aplicado a la familia $f_\gamma(x) = x^3 + \gamma x + 1$

Por último vamos a estudiar la familia de polinomios, que depende de un paramétro γ, y que es de la forma

$$f_\gamma(x) = x^3 + \gamma x + 1. \tag{2.3.6}$$

Esta familia es la que más riqueza dinámica presenta, ya que al depender de un parámetro el estudio va a ser mucho más extenso.

El método de Newton amortiguado aplicado a la familia $f_\gamma(x)$ tiene la siguiente forma

$$N_{\lambda,f_\gamma}(x) = \frac{(3-\lambda)x^3 - x\gamma(1-\lambda) - \lambda}{3x^2 + \gamma}. \tag{2.3.7}$$

En esta sección vamos a estudiar la dinámica de esta familia en función de ambos parámetros γ y λ. Fijaremos primero el parámetro γ, y estudiaremos qué ocurre para los diferentes valores del parámetro λ.

Empezaremos el estudio para valores de $\gamma < 0$. Como $f'_\gamma(x) = 3x^2 + \gamma$, en este caso la función $f_\gamma(x)$ tiene dos puntos críticos

$$\gamma_- = -\sqrt{-\frac{\gamma}{3}}$$

y

$$\gamma_+ = \sqrt{-\frac{\gamma}{3}}.$$

Por otro lado, si resolvemos la ecuación

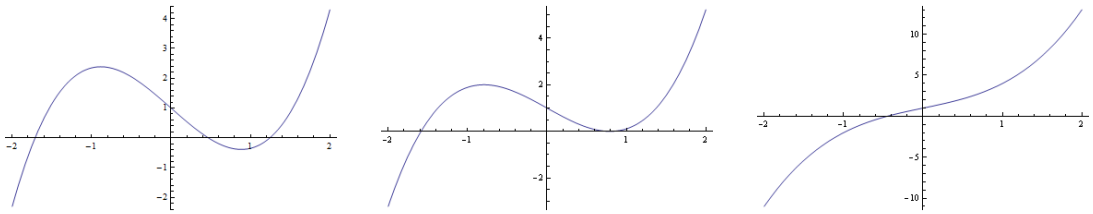
$$f_\gamma(\gamma_+) = \left(\sqrt{-\frac{\gamma}{3}}\right)^3 + \gamma\sqrt{-\frac{\gamma}{3}} + 1 = 0,$$

se obtiene que

$$\gamma_* = \frac{-3}{\sqrt[3]{4}} \approx -1.88988 \tag{2.3.8}$$

es solución. Este valor es muy importante, ya que la función $f_{\gamma_*}(x)$ tiene una raíz doble. Por lo tanto, tenemos tres posibilidades (véase Figura 2.36):

- Si $\gamma < \gamma_*$, el polinomio $f_\gamma(x)$ tiene tres raíces reales.
- Si $\gamma = \gamma_*$, el polinomio $f_{\gamma_*}(x)$ tiene una raíz real doble y una simple que es negativa.
- Si $\gamma > \gamma_*$, el polinomio $f_\gamma(x)$ tiene una única raíz real.



$\gamma = -2$ $\gamma = \gamma_*$ $\gamma = 2$

Figura 2.36: En la parte izquierda aparece el gráfico del polinomio $f_\gamma(x) = x^3 + \gamma x + 1$ con $\gamma = -2$, en el centro con $\gamma = \gamma_*$ y en la derecha con $\gamma = 2$.

Caso $\gamma < \gamma_*$. Para $\gamma < \gamma_*$, el polinomio $f_\gamma(x)$ tiene tres raíces diferentes como puede verse en la parte izquierda de la Figura 2.36 y el método iterativo $N_{\lambda,f_\gamma}(x)$ tiene dos asíntotas verticales, y tres puntos fijos que se corresponden con las tres raíces de $f_\gamma(x)$. El multiplicador asociado a los puntos fijos es $\mu = 1 - \lambda$. En la Figura 2.37 pueden verse los exponentes de Lyapunov para distintos valores de λ y el valor concreto de $\gamma = -2$. Los puntos fijos para $\gamma = -2$ son $r_1 = 1$, $r_2 = \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{5}\right)$ y $r_3 = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{5}\right)$, y las asíntotas son $a_1 = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ y $a_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Los puntos críticos son las soluciones de la ecuación

$$3(\lambda - 3)x^4 + 12x^2 - 6\lambda x - 4(\lambda - 1) = 0.$$

Dependiendo del valor del parámetro, esta ecuación tiene cuatro, tres, dos raíces reales o ninguna, como se observa en la Figura 2.38. El comportamiento dinámico del método aplicado a este polinomio es similar al estudiado en la Sección 2.3.3 para el polinomio $f_-(x) = x^3 - x$, y por eso, omitimos su estudio en profundidad.

Caso $\gamma = \gamma_*$. Para $\gamma = \gamma_*$, el polinomio $f_{\gamma_*}(x)$ tiene una raíz real doble y una simple que es negativa, como puede verse en la parte central de la Figura 2.36. A diferencia de lo que ocurre para otros valores negativos de γ, en este caso $N_{\lambda,f_{\gamma_*}}(x)$ sólo tiene una asíntota vertical.

En este caso particular, la función de iteración tiene la siguiente forma

$$N_{\lambda,f_{\gamma_*}}(x) = \frac{-x(-3+\lambda) - \left(2^{1/3}\right) x^2(-3+\lambda) + \left(2^{2/3}\right)\lambda}{3 + 3\ \left(2^{1/3}\right) x}, \tag{2.3.9}$$

y sólo tiene dos puntos fijos, que son los que provienen de las raíces, que son $r_1 = \sqrt[3]{-4}$, simple, y $r_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ que es doble. El multiplicador asociado a r_1 es $\mu = 1 - \lambda$ y el asociado a r_2 es $\mu = 1 - \frac{\lambda}{2}$. Notemos que en este caso la función de iteración tiene una sóla asíntota en $x = a_1$, donde $a_1 = -r_1 = -\sqrt[3]{-4}$.

Por otro lado, las puntos críticos de $N_{\lambda,f_{\gamma_*}}(x)$ son las soluciones de la ecuación bicuadrada

$$\left(2^{2/3}\right)(-3+\lambda)x^2 + 2\ \left(2^{1/3}\right)(-3+\lambda)x + 3(\lambda - 1) = 0,$$

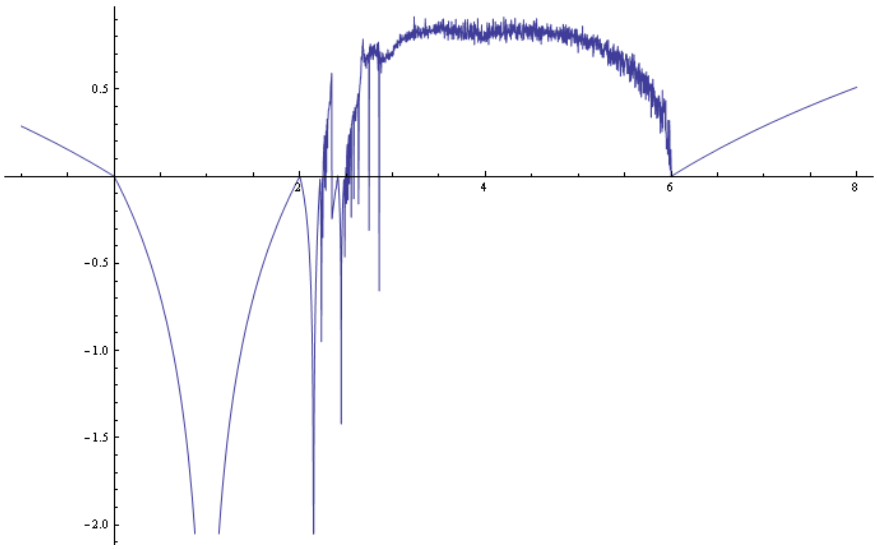


Figura 2.37: Exponentes de Lyapunov asociados a la función de iteración $N_{\lambda,f_{-2}}(x)$, tomando $x_0 = 1.1$, para valores de $\lambda \in (-1, 8)$.

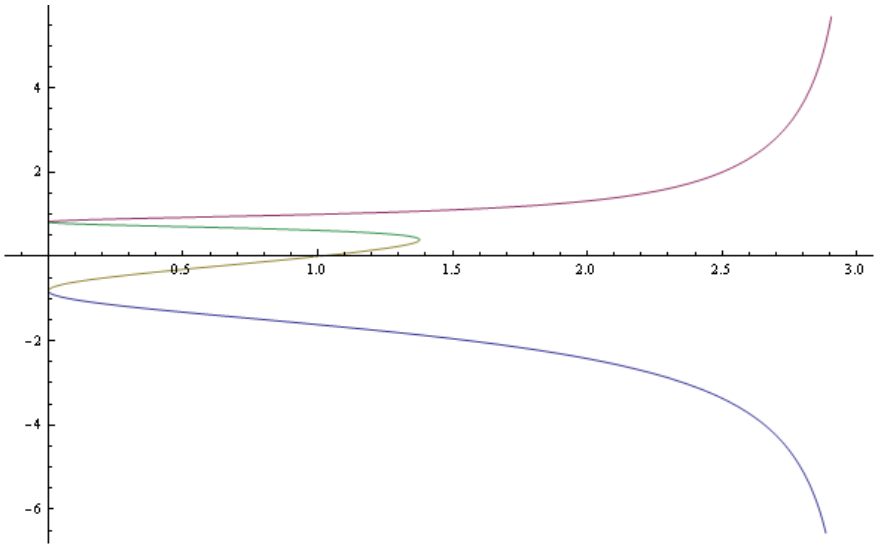


Figura 2.38: Puntos críticos reales de la función $N_{\lambda,f_{-2}}(x)$ para los distintos valores de $\lambda \in [0, 3]$.

es decir, obtenemos dos puntos críticos

$$C_1 = \frac{-2\left(2^{1/6}\right)\lambda - \left(2^{2/3}\right)\sqrt{3\lambda - \lambda^2}}{2\sqrt{3\lambda - \lambda^2}}$$

y

$$C_2 = \frac{3 - \lambda - \sqrt{2}\sqrt{3\lambda - \lambda^2}}{\left(2^{1/3}\right)(-3 + \lambda)}.$$

Notemos que el discriminante $3\lambda - \lambda^2$ es mayor o igual que cero cuando $\lambda \in [0, 3]$. Por lo tanto,

- Si $\lambda \in (0, 3)$, $N_{\lambda, f_{\gamma_*}}(x)$ tiene dos puntos críticos C_1 y C_2.
- Si $\lambda \notin (0, 3)$, $N_{\lambda, f_{\gamma_*}}(x)$ no tiene puntos críticos reales.

En la Figura 2.39 pueden verse los puntos críticos para los distintos valores del parámetro.

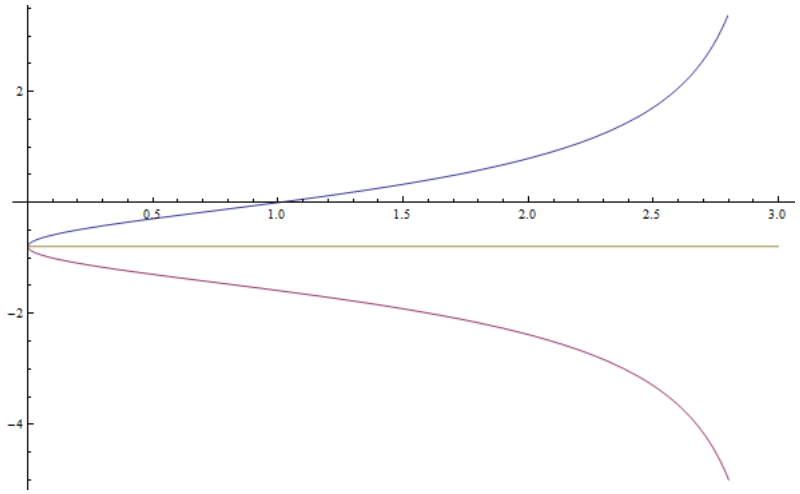


Figura 2.39: Valores que toman los puntos críticos de $N_{\lambda, f_{\gamma_*}}(x)$ para los distintos valores del parámetro $\lambda \in (0, 3)$. En magenta aparece C_1 y en azul C_2. Además, en amarillo aparece la asíntota $a_1 = -\sqrt[3]{-4}$, que es el eje sobre el que son simétricos los puntos críticos.

El valor de la asíntota a_1, va a ser muy importante ya que sirve como punto de cambio de tendencia, es decir, para valores del punto inicial inferiores al valor $a_1 = -\sqrt[3]{-4}$, vamos a tener un comportamiento y para valores superiores otro comportamiento diferente.

De los estudios numéricos y gráficos realizados (el valor de algún punto es aproximado, al provenir del estudio gráfico, por lo tanto, para dichos valores el intervalo se deja abierto, de nuevo se ha tomado la decisión de aproximar con 5

cifras decimales), se extraen las siguientes conclusiones sobre el comportamiento dinámico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_{\gamma_*}(x) = x^3 + \gamma_* x + 1$:

- Si $\lambda < 0$, las iteraciones pueden diverger hacia infinito en valor absoluto.
- Si $\lambda = 0$, el estudio carece de interés.
- Si $\lambda \in (0, 2)$, los puntos fijos son atractores y las iteraciones de $x_0 < a_1 = -\sqrt[3]{-4}$ si convergen hacia alguna raíz, lo hacen hacia $r_1 = \sqrt[3]{-4}$ y las iteraciones de $x_0 > a_1 = -\sqrt[3]{-4}$ si convergen hacia alguna raíz, lo hacen hacia $r_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.
- Si $\lambda = 2$, los puntos fijos son indiferentes y las iteraciones de $x_0 < a_1 = -\sqrt[3]{-4}$ si convergen hacia alguna raíz, lo hacen hacia $r_1 = \sqrt[3]{-4}$ y las iteraciones de $x_0 > a_1 = -\sqrt[3]{-4}$ si convergen hacia alguna raíz, lo hacen hacia $r_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.
- Si $\lambda \in (2, \alpha_1]$, donde $\alpha_1 \approx 2.41259$ es la raíz real del polinomio $\lambda^3 - 12\lambda^2 + 48\lambda - 60$, el punto fijo que proviene de la raíz doble es atractor, y el que proviene de la raíz simple es repulsor. Además, las iteraciones de $x_0 < a_1 = -\sqrt[3]{-4}$ pueden converger a 2-ciclos mientras que las iteraciones de $x_0 > a_1 = -\sqrt[3]{-4}$ si convergen hacia alguna raíz, lo hacen hacia $r_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.
- Si $\lambda \in (\alpha_1, 2.49845)$, el punto fijo que proviene de la raíz doble es atractor, y el que proviene de la raíz simple es repulsor. Además, las iteraciones de $x_0 < a_1 = -\sqrt[3]{-4}$ pueden converger hacia un n-ciclos mientras que las iteraciones de $x_0 > a_1 = -\sqrt[3]{-4}$ si convergen hacia alguna raíz, lo hacen hacia $r_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.
- Si $\lambda \in (2.49845, 2.66666)$, el punto fijo que proviene de la raíz doble es atractor, y el que proviene de la raíz simple es repulsor. Además, las iteraciones de $x_0 < a_1 = -\sqrt[3]{-4}$ pueden ser caóticas mientras que las iteraciones de $x_0 > a_1 = -\sqrt[3]{-4}$ si convergen hacia alguna raíz, lo hacen hacia $r_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.
- Si $\lambda \in (2.66666, 4)$, el punto fijo que proviene de la raíz doble es atractor, y el que proviene de la raíz simple es repulsor. Además, las iteraciones de cada punto si convergen hacia alguna raíz, lo hacen hacia $r_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.
- Si $\lambda \in [4, 6]$, los puntos fijos son repulsores (excepto para $\lambda = 4$, donde el que proviene de la raíz doble es indiferente), y las iteraciones de cada punto pueden ser caóticas.
- Si $\lambda > 6$, las iteraciones de cada punto distinto de las raíces del polinomio pueden diverger hacia infinito en valor absoluto.

Procederemos con el estudio de cada caso por separado. El primer caso de estudio es para valores negativos del parámetro. Si observamos la Figura 2.40, vemos que no hay convergencia y como se observa en la Figura 2.41 las iteraciones, sin importar si el punto inicial está a la izquierda o a la derecha de la asíntota, pueden diverger hacia infinito en valor absoluto.

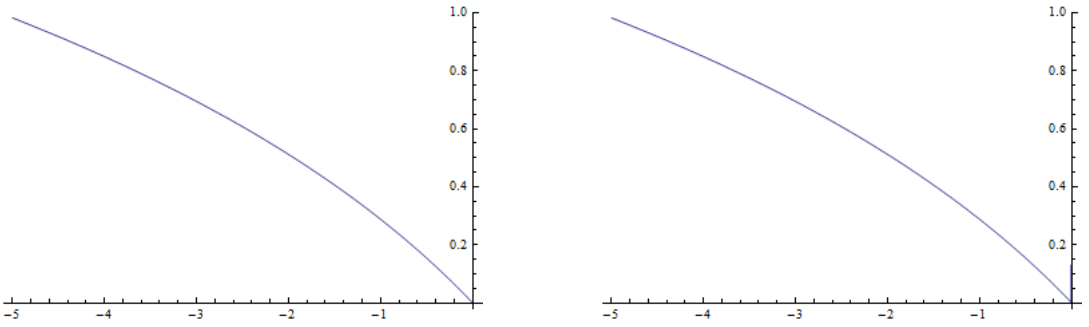
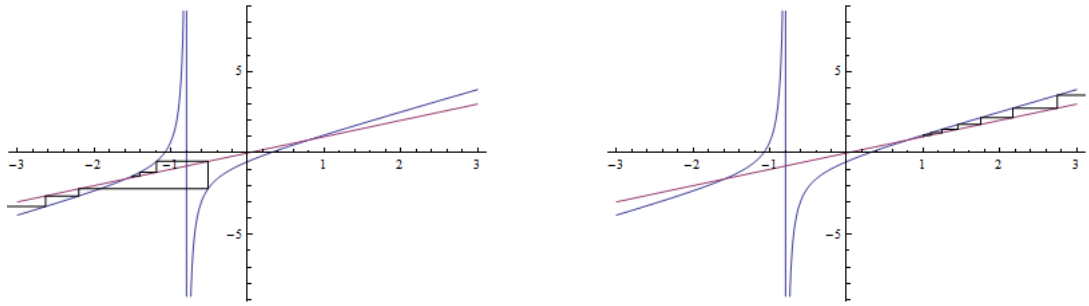


Figura 2.40: Gráficos de los exponentes de Lyapunov asociados a la función (2.3.9) para valores de $\lambda \in (-5, 0)$. A la izquierda se parte del punto inicial $x_0 = -0.85$ y a la derecha de $x_0 = 1$.



$x_0 = -1.5$ $\qquad$ $x_0 = 1$

Figura 2.41: Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_{\gamma_*}(x)$ con $\lambda = -1.0$. En la parte izquierda aparecen las órbitas de $x_0 = -1.5$ y se observa cómo se alejan de la raíz $r_1 = \sqrt[3]{-4}$, en la parte derecha las órbitas de $x_0 = 1$, donde se observa que se alejan de $r_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

El siguiente caso de estudio se corresponde con $\lambda \in (0, 2)$. Para dicho rango de valores del parámetro, se obtiene que ambos puntos fijos son atractores. Si nos apoyamos en los exponentes de Lyapunov que aparecen en la Figura 2.42, vemos que hay convergencia en ambos casos, aunque ya se observa que dichos exponentes no son idénticos. Además, como se muestra en la Figura 2.43, las iteraciones de puntos iniciales a la izquierda de la asíntota si convergen hacia una raíz, van a parar a $r_1 = \sqrt[3]{-4}$, mientras que si el punto inicial se encuentra a la derecha de la asíntota si convergen hacia una raíz, lo hacen hacia $r_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

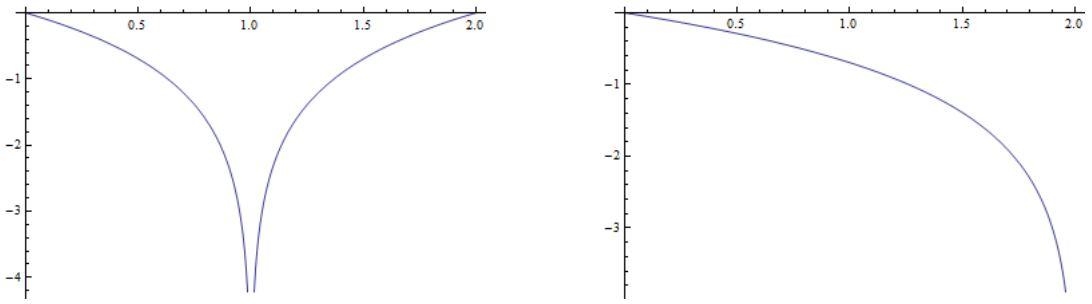
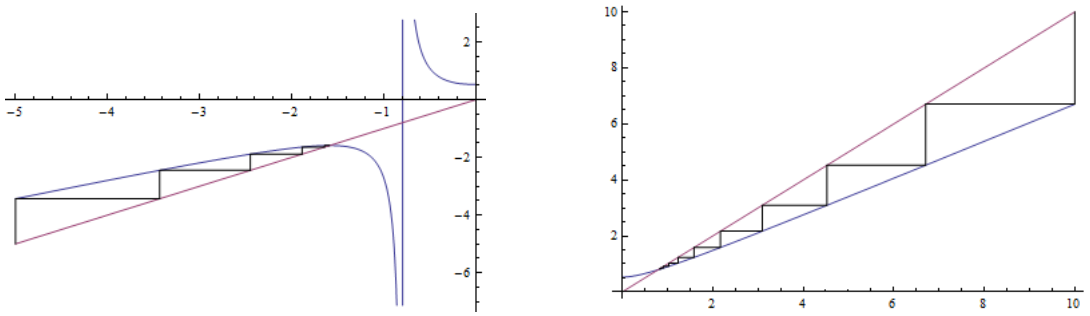


Figura 2.42: Gráficos de los exponentes de Lyapunov asociados a la función (2.3.9) para valores de $\lambda \in (0, 2]$. En la parte izquierda se itera el punto crítico C_1 y en la derecha C_2.



$x_0 = -5$ $\qquad$ $x_0 = 10$

Figura 2.43: Gráficos del método de Newton aplicado al polinomio $f_{\gamma_*}(x)$. En la parte izquierda aparecen las órbitas de un punto a la izquierda de la asíntota y vemos cómo las iteraciones convergen a la raíz $r_1 = \sqrt[3]{-4}$ mientras que, en la parte derecha aparecen las órbitas de un punto a la derecha de la asíntota y, se observa, que convergen a $r_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Ahora estudiaremos el caso para valores del parámetro $\lambda \in (2,3)$, donde la raíz doble, $r_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, es un punto fijo atractor mientras que la simple, $r_1 = \sqrt[3]{-4}$, es repulsor. Para dicho rango de valores del parámetro, es donde se observa el cambio más significativo en cuanto a la dinámica. Si comenzamos observando los exponentes de Lyapunov en la Figura 2.44, vemos que, en el caso de valores mayores que $a_1 = -\sqrt[3]{-4}$ puede haber convergencia hacia la raíz, sin embargo, para valores a la izquierda hay un intervalo en el que las iteraciones podrían ser caóticas.

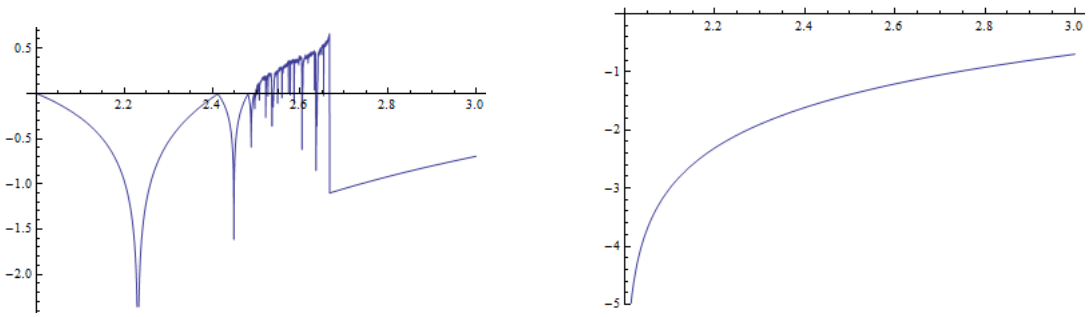
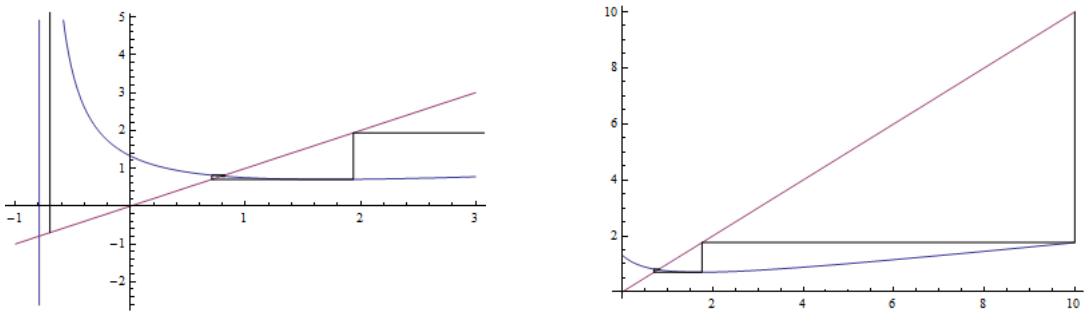


Figura 2.44: Gráficos de los exponentes de Lyapunov asociados a la función (2.3.9) para valores de $\lambda \in (2,3)$. En la parte izquierda se itera el punto crítico C_1 y en la derecha C_2.

El estudio ahora se escinde en dos ramas, a la izquierda de $a_1 = -\sqrt[3]{-4}$, y a la derecha. La parte de la derecha es muy sencilla ya que si la iteración converge hacia una raíz, lo hace hacia $r_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ como puede verse en la Figura 2.45.



$x_0 = -0.7$ $\qquad$ $x_0 = 10$

Figura 2.45: Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_{\gamma_*}(x)$ con $\lambda = 2.5$. En la parte izquierda aparecen las órbitas de $x_0 = -0.7$ y en la parte derecha las de $x_0 = 10$. En ambos casos se observa que convergen a $r_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Estudiaremos ahora, qué ocurre para puntos iniciales menores que $a_1 = -\sqrt[3]{-4}$. Para ello, vamos a calcular los 2-ciclos que presenta la función de iteración, que

son de la forma

$$DC_1 = \frac{-36 - 3\sqrt{(-6+\lambda)(-4+\lambda)(-2+\lambda)}\sqrt{\lambda} + 12\lambda - \lambda^2}{2\,(2^{1/3})\,(-6+\lambda)(-3+\lambda)}$$

y

$$DC_2 = \frac{-36 - 3\sqrt{(-6+\lambda)(-4+\lambda)(-2+\lambda)}\sqrt{\lambda} + 12\lambda - \lambda^2}{2\,(2^{1/3})\,(-6+\lambda)(-3+\lambda)}.$$

Resolviendo el discriminante, encontramos que la función de iteración presenta 2-ciclos reales para $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (2, 4) \cup (6, \infty)$. Además, dichos 2-ciclos van a ser atractores para $\lambda \in (2, \alpha_1)$, donde α_1 es la raíz real del polinomio $\lambda^3 - 12\lambda^2 + 48\lambda - 60$. Si observamos ahora el gráfico de los 2-ciclos que se observa en la Figura 2.46, vemos que, en ese intervalo, son negativos. Un ejemplo de la dinámica de las iteraciones para este caso puede verse en la Figura 2.47.

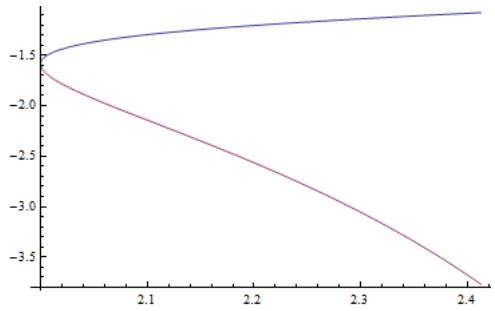
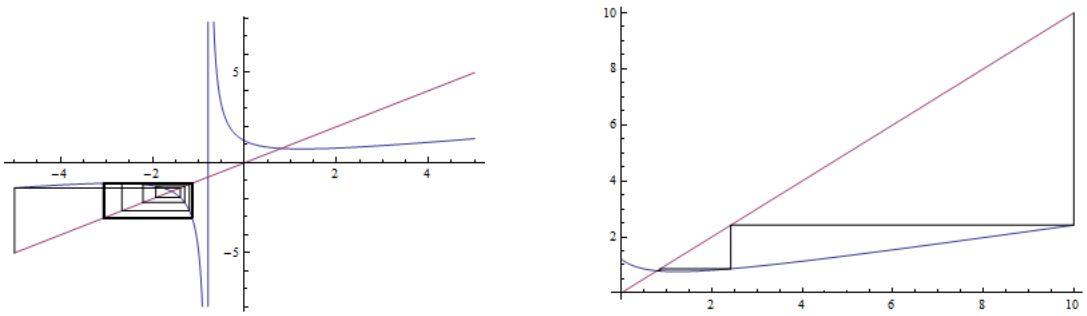


Figura 2.46: Valores de los 2-ciclos atractores que aparecen para $\lambda \in (2, \alpha_1)$ donde $\alpha_1 \approx 2.41259$.

Para el caso $\lambda \in (\alpha_1, 2.66666)$, vemos que hay dos zonas, la primera que es hasta aproximadamente $\lambda = 2.49845$ y de ahí en adelante. Para proceder al estudio, vamos a apoyarnos en los diagramas de bifurcaciones de Feigenbaum. En la Figura 2.48 vemos el diagrama de Feigenbaum que aparece. Si hacemos un zoom en cada una de las ramas de la Figura 2.48, vemos como hay un 4-ciclo, que se va bifurcando en n-ciclos cada vez mayores hasta λ aproximadamente 2.49845, a partir de ese valor se puede encontrar un comportamiento caótico como se observa en la Figura 2.49.

Es claro que para $\lambda \in (2.66666, 3]$ si hay convergencia hacia una raíz, es hacia la raíz $r_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, como puede verse en la Figura 2.50. El siguiente caso de estudio es para valores del parámetro en el intervalo $(3, 4)$. Si observamos la Figura 2.51, vemos que hay convergencia y como se observa en la Figura 2.52 las iteraciones, sin importar si el punto inicial está a la izquierda o a la derecha de la asíntota, convergen hacia $r_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.



$x_0 = -5$ $\qquad$ $x_0 = 10$

Figura 2.47: Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_{\gamma_*}(x)$ con $\lambda = 2.3$. En la parte izquierda aparecen las órbitas de $x_0 = -5$ y en la parte derecha las de $x_0 = 10$. En la parte izquierda las iteraciones convergen al 2-ciclo aproximado $\{-3.05527, -1.14001\}$ y en la parte derecha se observa que convergen a $r_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

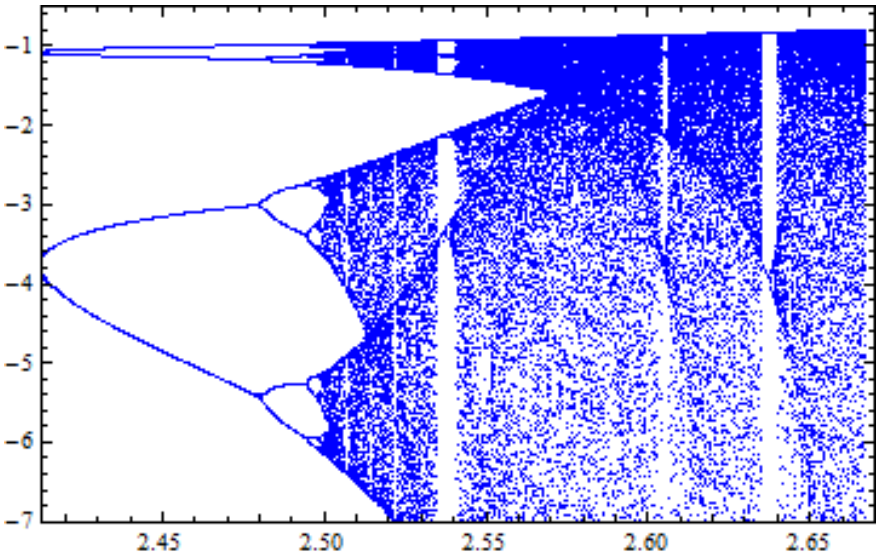


Figura 2.48: Diagrama de Feigenbaum asociado a la función (2.3.9), tomando $x_0 = C_1$, para $\lambda \in (\alpha_1, 2.66666)$, donde $\alpha_1 \approx 2.41259$.

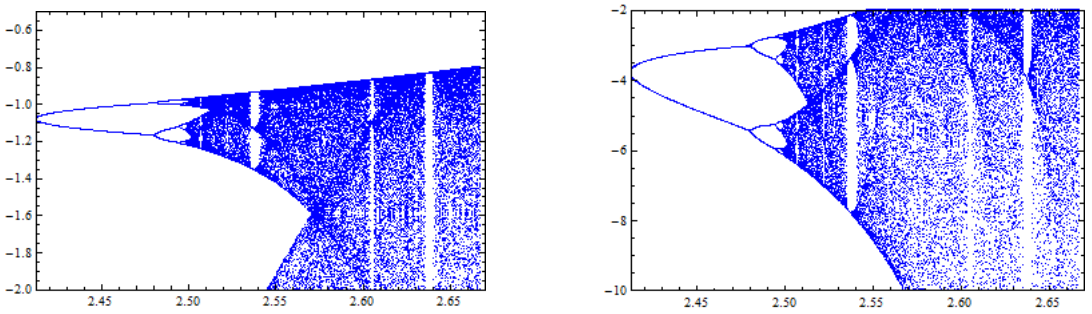
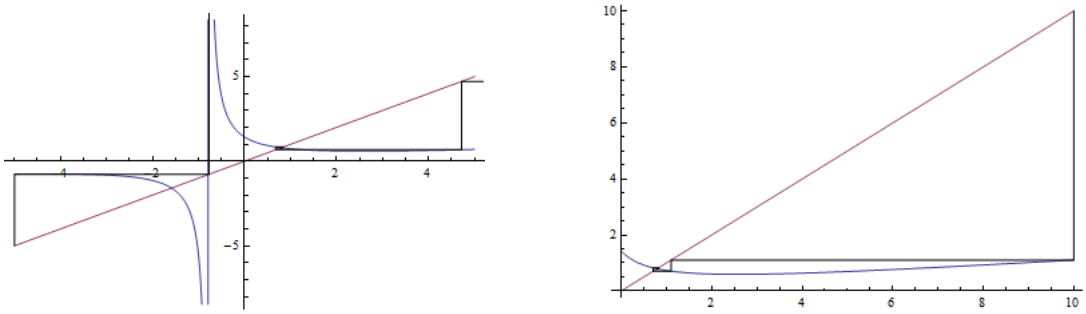
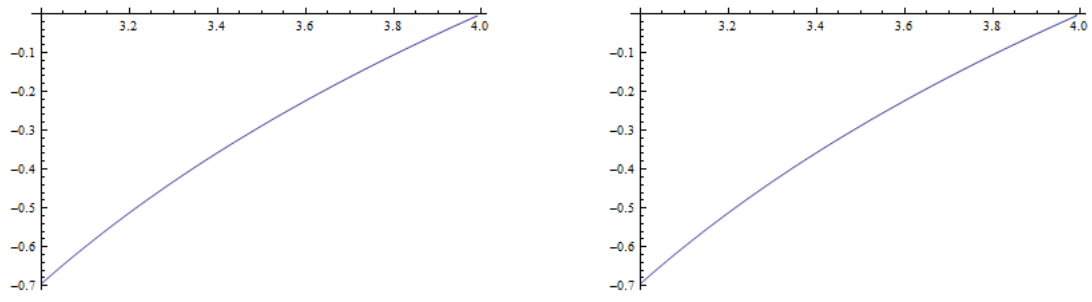


Figura 2.49: Zoom de las dos ramas que aparecen en el diagrama de Feigenbaum asociado a la función (2.3.9), tomando $x_0 = C_1$, para $\lambda \in (\alpha_1, 2.66666)$, donde $\alpha_1 \approx 2.41259$.



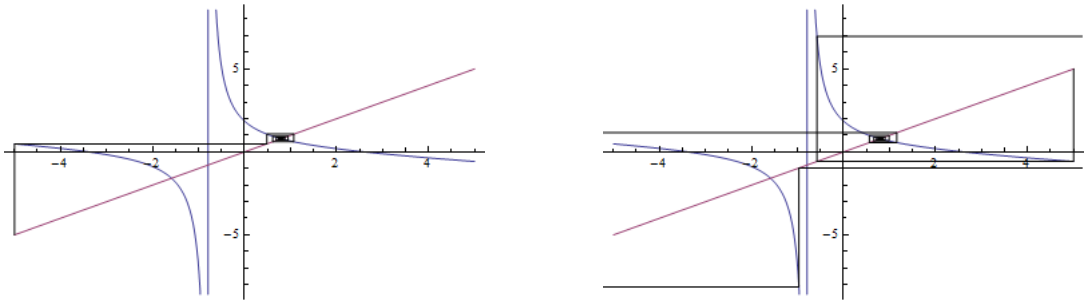
$x_0 = -5$ $\qquad$ $x_0 = 10$

Figura 2.50: Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_{\gamma_*}(x)$ con $\lambda = 2.7$. En la parte izquierda aparecen las órbitas de $x_0 = -5$ y en la parte derecha las de $x_0 = 10$. En ambos casos se observa que convergen a $r_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.



$x_0 = -5$ $\qquad$ $x_0 = 5$

Figura 2.51: Gráficos de los exponentes de Lyapunov asociados a la función (2.3.9) para valores de $\lambda \in (3, 4)$. A la izquierda se parte del punto inicial $x_0 = -5$ y a la derecha de $x_0 = 5$.



$x_0 = -5$ $x_0 = 5$

Figura 2.52: Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_{\gamma_*}(x)$ con $\lambda = 3.5$. En la parte izquierda aparecen las órbitas del punto $x_0 = -5$ y en la parte derecha del punto $x_0 = 5$. En ambos casos se observa cómo convergen hacia la raíz $r_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Ahora, si estudiamos los valores del parámetro en el intervalo $[4, 6)$, se observa que las iteraciones de cada punto pueden ser caóticas, como se puede ver en la Figura 2.53 y también en la Figura 2.54 se ve cómo las iteraciones pueden ser caóticas.

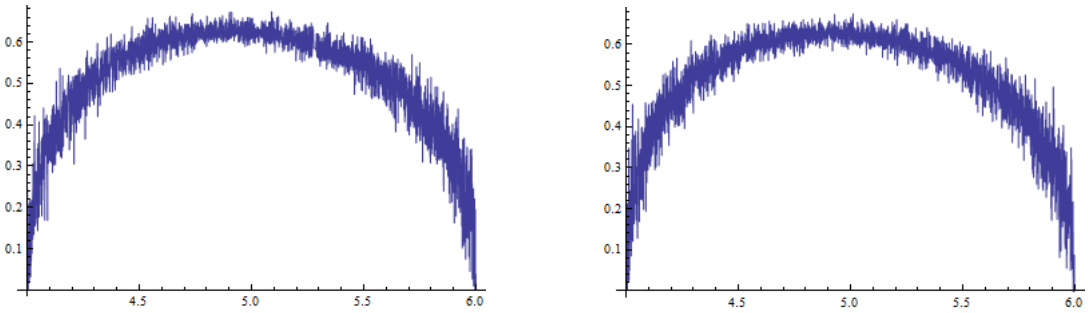
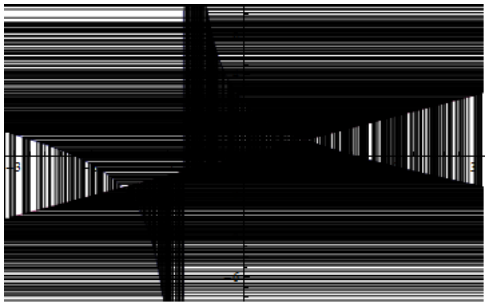


Figura 2.53: Gráficos de los exponentes de Lyapunov asociados a la función (2.3.9) para valores de $\lambda \in [4, 6]$. En la parte izquierda se itera el punto inicial $x_0 = -5$ y en la derecha $x_0 = 5$.

El último caso de estudio es para valores del parámetro mayores o iguales que 6. En la Figura 2.55 se observa que no hay convergencia. Además, en la Figura 2.56 podemos ver cómo las iteraciones, sin importar si el punto inicial está a la izquierda o a la derecha de la asíntota, divergen hacia infinito en valor absoluto.

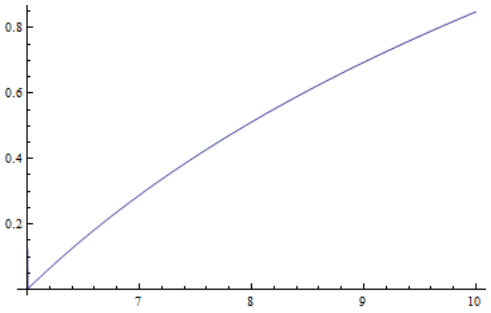
Para finalizar con la riqueza que nos proporciona este método, podemos observar en la Figura 2.57 puntos exactos donde se produce el caos.



$x_0 = -1$

$x_0 = 1$

Figura 2.54: Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_{\gamma_*}(x)$ con $\lambda = 5.0$. En la parte izquierda aparecen las órbitas del punto $x_0 = -1$ y en la parte derecha las órbitas de $x_0 = 1$. En ambos casos, se observa el comportamiento caótico.



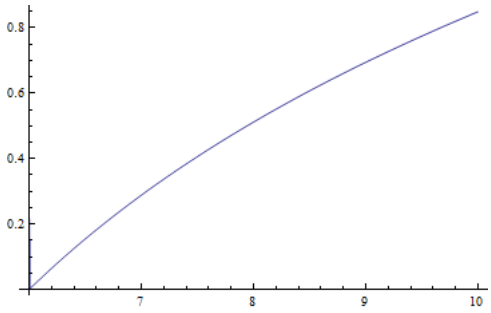
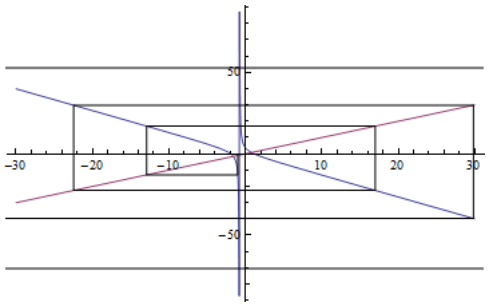
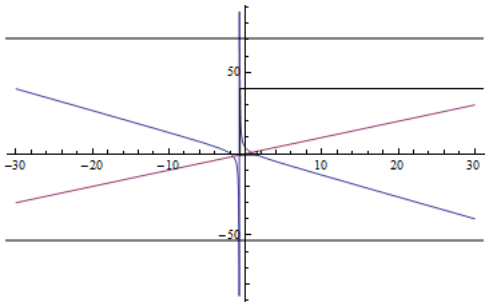


Figura 2.55: Gráficos de los exponentes de Lyapunov asociados a la función (2.3.9) para valores de $\lambda \in (6, 10)$. En la parte izquierda se itera el punto inicial $x_0 = -5$ y en la derecha $x_0 = 5$.



$x_0 = -1$



$x_0 = 1.5$

Figura 2.56: Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_{\gamma_*}(x)$ con $\lambda = 7.0$. En la parte izquierda aparecen las órbitas de $x_0 = -1$ y se observa cómo se alejan de $r_1 = \sqrt[3]{-4}$. En la parte derecha las órbitas de $x_0 = 1.5$ y, de nuevo, se observa que se alejan de $r_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

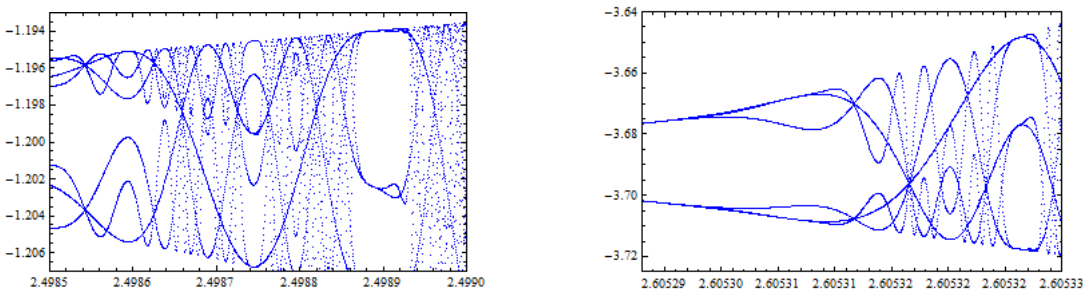


Figura 2.57: Zoom de los diagramas de Feigenbaum asociados al método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_{\gamma_*}(x)$, tomando $x_0 = C_1$, donde se aprecia la aparición de caos.

Caso $\gamma_* < \gamma < 0$. Este caso de estudio, es especialmente complicado, ya que para elecciones de γ y λ aparecen 2-ciclos atractores incluso cuando la raíz es atractora. Nos vamos a centrar en valores de $\lambda \in (0, 1)$ de tal manera, que aparezcan 2-ciclos atractores, que no aparecen cuando $\lambda = 1$ (método de Newton). Utilizando el código del Anexo 2, obtenemos las siguientes condiciones, para la aparición de 2-ciclos atractores:

$$(C_1) = \begin{cases} -1.27416 < \gamma < -1.25315 \\ \lambda \in (\omega,\ 1) \text{ donde } \omega \text{ es la segunda raíz menor de } P_1(t), \text{ definido} \\ \text{en el Anexo 2.} \end{cases}$$

$$(C_2) = \begin{cases} -1.25315 < \gamma < 0 \\ \lambda \in (\omega_1,\ \omega_2) \text{ donde } \omega_1, \omega_2 \text{ son, respectivamente, las raíces} \\ \text{menor y mayor del polinomio } P_2(t), \text{ definido en el Anexo 2.} \end{cases}$$

Consideramos en primer lugar (C_1), para ello vamos a estudiar el caso particular $\gamma = -1.26$. La forma del método iterativo es

$$N_{\lambda, f_{-1.26}}(x) = \frac{-1.26x + 3x^3 - \lambda + 1.26x\lambda - x^3\lambda}{-1.26 + 3x^2},$$

que tiene dos asíntotas verticales

$$a_1 = -\sqrt{\frac{1.26}{3}}$$

y

$$a_2 = \sqrt{\frac{1.26}{3}}.$$

El polinomio $f_{-1.26}(x)$ tiene una única raíz $x = -1.40431$, y por lo tanto, $N_{\lambda, f_{-1.26}}(x)$ tiene un único punto fijo. Por otro lado, los puntos críticos son las soluciones de la ecuación

$$3(3 - \lambda)x^4 - 7.56x^2 + 6\lambda x - 1.5876\lambda + 1.5876 = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación se observan en la Figura 2.58. Del gráfico se extrae que para cualquier valor de $\lambda \in (0,1)$, hay 2 puntos críticos.

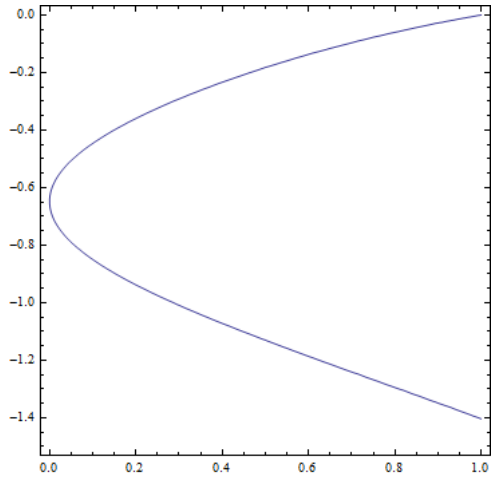
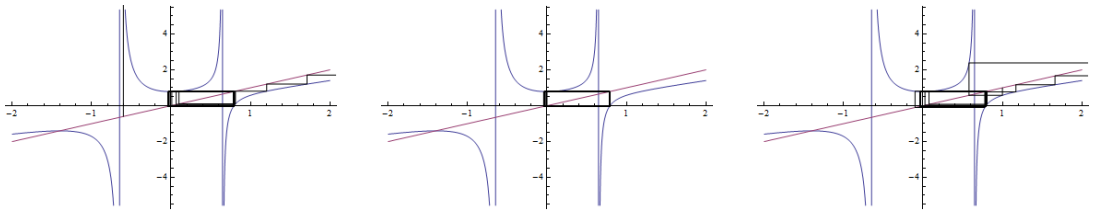


Figura 2.58: Puntos críticos que aparecen en la función $N_{\lambda,f_{-1.26}}(x)$ para $\lambda \in (0,1)$ y $x \in (-1.5,0)$.

Veamos que efectivamente existen estos 2-ciclos atractores. Teniendo en cuenta la condición (C_1), obtenemos que para valores de $\lambda \in (0.985898,1)$, existen 2-ciclos atractores. Si tomamos, $\lambda = 0.99$, los 2-ciclos serán las soluciones reales de la ecuación

$$20.2409t^6 - 24.2061t^4 - 5.0591t^3 + 12.7965t^2 - 1.18478t - 0.0503788 = 0.$$

En este caso, el 2-ciclo atractor es de la forma $\{-0.031613, 0.787322\}$. Ahora, lo único que quedaría por comprobar es que estos 2-ciclos tienen cuenca de atracción, pero como puede verse en la Figura 2.59, existen valores de x_0, para los que las iteraciones convergen al 2-ciclo.



$x_0 = -0.6$ $\qquad$ $x_0 = 0$ $\qquad$ $x_0 = 1.0$

Figura 2.59: Gráfico del método de Newton amortiguado para $\lambda = 0.99$, aplicado al polinomio $f_{-1.26}(x)$, donde se observa que, para ciertos puntos iniciales, las iteraciones convergen hacia 2-ciclos.

Estudiamos ahora el caso (C_2), los 2-ciclos son las raíces menor y mayor del polinomio $DC2(t)$, definido en el Anexo 2. Vamos a estudiar el caso $\gamma = -1$. Para este caso particular la forma del método iterativo es

$$N_{\lambda,f_{-1}}(x) = \frac{(3-\lambda)x^3 + (\lambda-1)x - \lambda}{3x^2 - 1},$$

que tiene dos asíntotas verticales

$$a_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

y

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

El polinomio $f_{-1}(x)$ tiene una única raíz $x = -1.32472$, y por lo tanto, $N_{\lambda,f_{-1}}(x)$ tiene un único punto fijo. Por otro lado, los puntos críticos son las soluciones de la ecuación

$$(9-3\lambda)x^4 - 6x^2 + 6\lambda x + 1 - \lambda = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación se observan en la Figura 2.60. Notemos que para cada $\lambda \in (0,1)$, la función tiene dos puntos críticos.

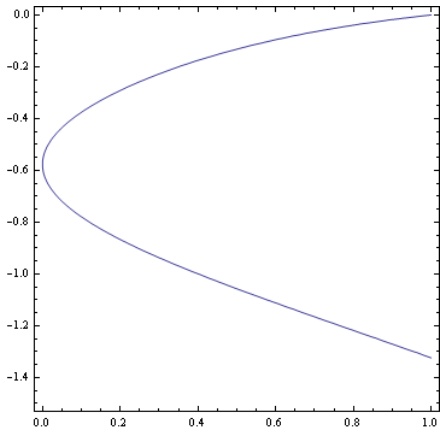
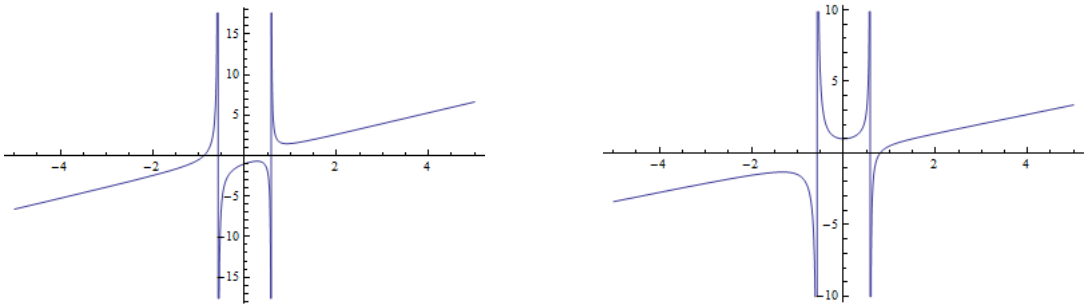


Figura 2.60: Puntos críticos que aparecen en la función $N_{\lambda,f_{-1}}(x)$ para $\lambda \in (0,1)$ y $x \in (-1.5, 0)$.

El primer dato de interés que se extrae del estudio de la dinámica del método aplicado a este polinomio, es que el signo del parámetro cambia el carácter del punto crítico más cercano a cero que tiene la función. Como puede verse en la Figura 2.61, para valores del parámetro negativos dicho punto crítico es un máximo, que además decrece con el parámetro, mientras que para valores del parámetro positivos es un mínimo que crece con λ.

Si ahora observamos el gráfico de los 2-ciclos para valores de $\lambda \in (-1.2, 0.75)$ y de $x \in (-1,1)$ que se ve en la Figura 2.62 o para valores de $\lambda \in (0,1)$ y de $x \in (-1,1)$ que se ve en la Figura 2.63, observamos que aparecen 2-ciclos. Además, numéricamente se ha obtenido que para valores de $\lambda \in (0.715, 0.746) \cup (6.0, 7.15)$ aparecen dos 2-ciclos y otros ciclos atractores. En la Tabla 2.4 pueden verse algunos de estos ciclos para valores de $\lambda \in (0.715, 0.746)$.



$\lambda = -1$ $\lambda = 1$

Figura 2.61: Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_{-1}(x)$, para $\lambda = -1$ y $\lambda = 1$.

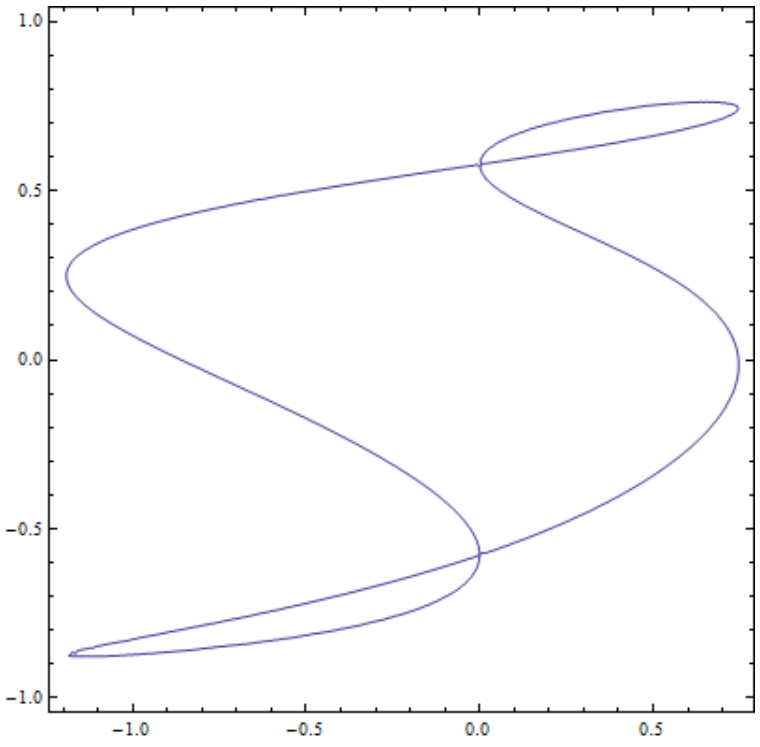


Figura 2.62: 2-ciclos que aparecen en $N_{\lambda,f_{-1}}(x)$ para valores de $\lambda \in (-1.2, 0.75)$ y de $x \in (-1, 1)$.

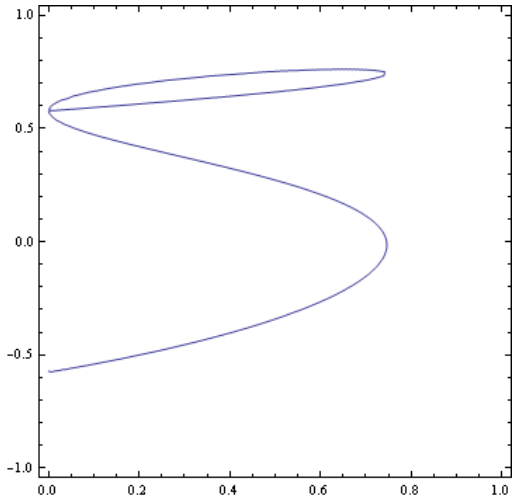


Figura 2.63: 2-ciclos que aparecen en $N_{\lambda,f_{-1}}(x)$ para valores de $\lambda \in (0,1)$ y de $x \in (-1,1)$.

Tabla 2.4: Valores aproximados de algunos de los ciclos que aparecen en $N_{\lambda,f_{-1}}(x)$ para $\lambda \in (0.715, 0.746)$.

λ	Orden	n-ciclo
0.729	8	$\{0.7326, -0.0562, 0.7210, -0.1308,$ $0.7364, -0.0343, 0.7223, -0.1217\}$
0.7300	4	$\{0.7343, -0.04736, 0.7223, -0.1230\}$
0.7342	4	$\{0.7294, -0.0813, 0.7282, -0.0890\}$
0.7360	2	$\{0.7300, -0.0798\}$
0.745	2	$\{0.7385, -0.0391\}$
0.746	2	$\{0.7405, -0.0287\}$

Como hemos visto en los estudios anteriores y, una vez más, utilizando los gráficos de diagramas de Feigenbaum y exponentes de Lyapunov, se extrae que la dinámica de este polinomio es altamente compleja.

Caso $\gamma = 0$. El siguiente caso de estudio se corresponde con el polinomio $f_0(x) = x^3 + 1$ que merece un estudio único para él. Para este caso particular, la forma del método iterativo es la siguiente

$$N_{\lambda,f_0}(x) = \frac{x^3(3-\lambda) - \lambda}{3x^2},$$

que tiene una asíntota vertical en $x = 0$. El polinomio $f_0(x)$ tiene una única raíz $x = -1$, y por lo tanto, $N_{\lambda,f_0}(x)$ tiene un único punto fijo. Por otro lado, los

puntos críticos son las soluciones de la ecuación

$$(3-\lambda)x^3 + 2\lambda = 0.$$

Como se observa en la Figura 2.64, para cada valor de $\lambda \neq 3$, hay un único punto crítico

$$x = \sqrt[3]{\frac{2\lambda}{\lambda - 3}}.$$

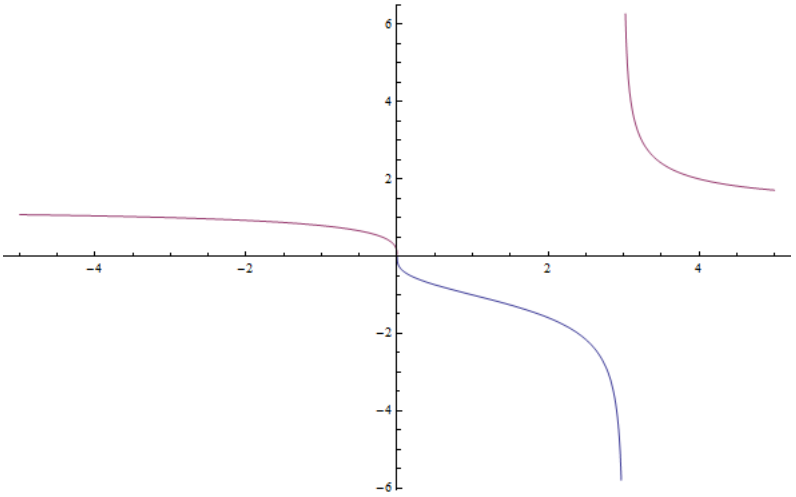
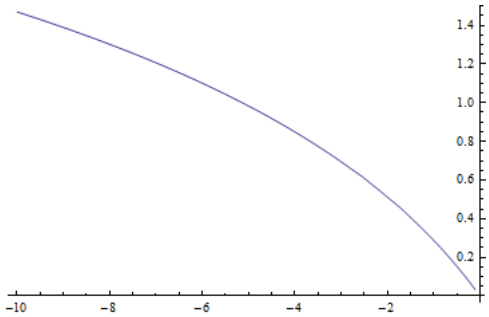
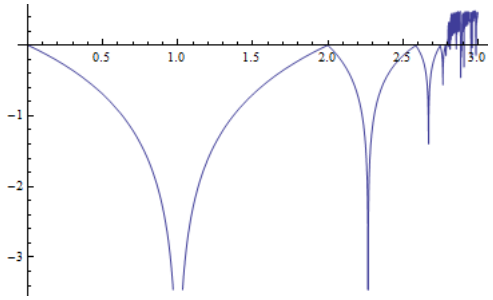


Figura 2.64: Gráfica de la curva $(3-\lambda)x^3 + 2\lambda$, con $\lambda \in [-5, 5]$ y $x \in [-6, 6]$.

Si ahora nos fijamos en los gráficos de los exponentes de Lyapunov que se pueden ver en las Figuras 2.65 y 2.66, se observa que se pueden encontrar ciclos atractores y caos.

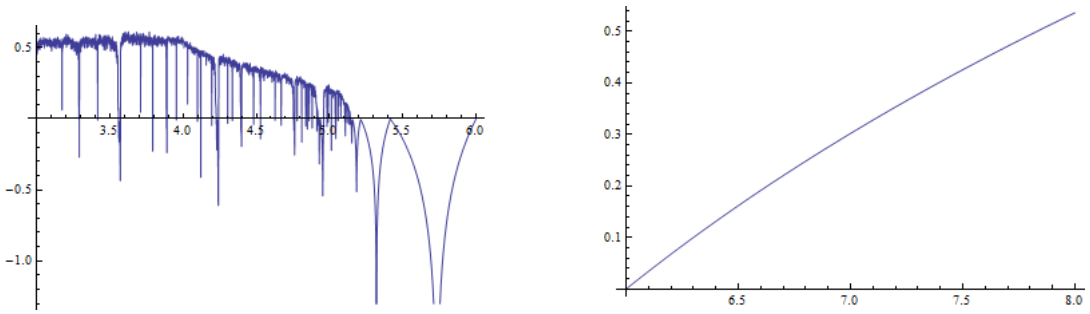


$\lambda \in (-10, 0)$



$\lambda \in (0, 3)$

Figura 2.65: Exponentes de Lyapunov asociados a la función de iteración $N_{\lambda,f_0}(x)$, tomando como punto inicial el punto crítico, para valores de $\lambda \in (-10, 3)$.



$\lambda \in (3, 6)$ $\lambda \in (6, 8)$

Figura 2.66: Exponentes de Lyapunov asociados a la función de iteración $N_{\lambda,f_0}(x)$, tomando como punto inicial el punto crítico, para valores de $\lambda \in (3, 8)$.

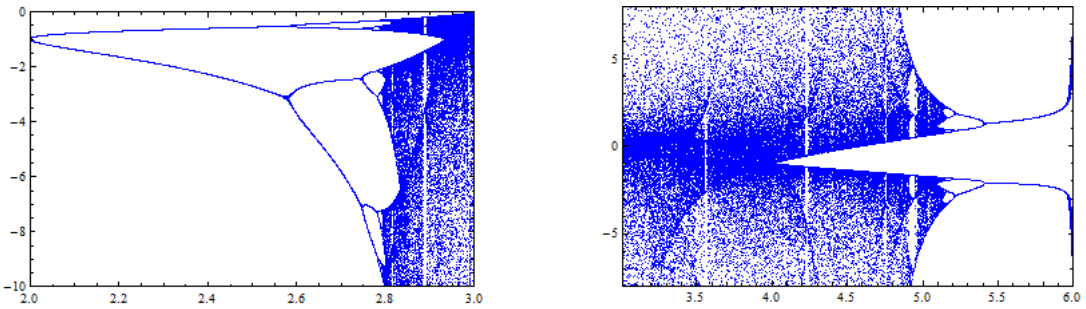


Figura 2.67: Diagramas de Feigenbaum asociados a la iteración del punto crítico de $N_{\lambda,f_0}(x)$ para valores de $\lambda \in (2, 6)$.

Observando los diagramas de bifurcaciones de Feigenbaum que se observan en la Figura 2.67, se ve como pueden aparecer ciclos y caos.

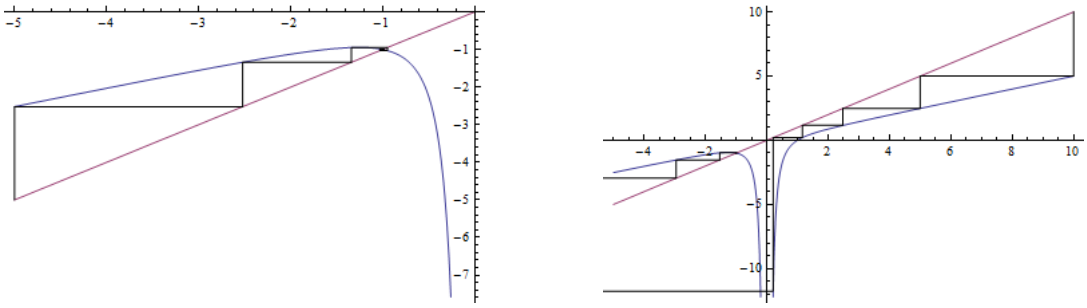
En definitiva, y teniendo en cuenta que al provenir del estudio gráfico, algunos de los valores que aparecen son aproximados (se ha decidido aproximar con 5 cifras decimales), y por eso, los intervalos que los contienen se dejan abiertos, se puede concluir lo siguiente:

(i) Si $\lambda < 0$ las iteraciones de $N_{\lambda,f_0}(x)$ pueden diverger hacia infinito en valor absoluto, como se observa en la Figura 2.68.

$x_0 = -1.1$ $\qquad$ $x_0 = -0.9$

Figura 2.68: Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_0(x)$ con $\lambda = -2.0$. En la parte izquierda aparecen las órbitas de un punto cercano al punto fijo, pero menor, y se observa cómo se alejan de él, en la parte derecha las órbitas de un punto cercano al punto fijo pero mayor que él, y se observa que también se alejan de él.

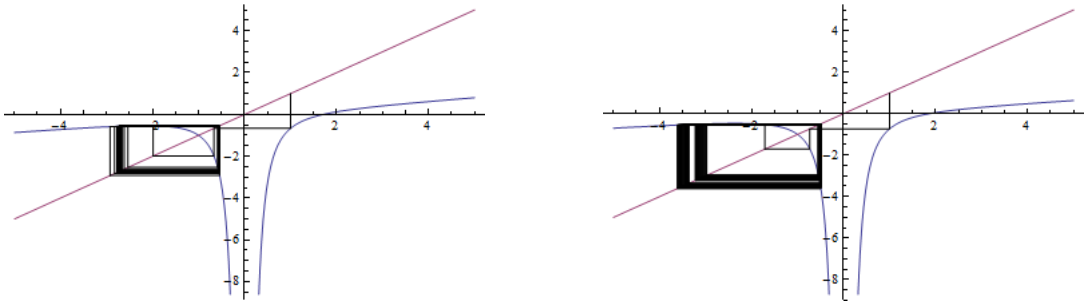
(ii) Si $\lambda \in (0, 2]$, las iteraciones de $N_{\lambda,f_0}(x)$ si convergen hacia una raíz, lo hacen hacia la raíz $r_1 = -1$. Un ejemplo de este comportamiento puede verse en la Figura 2.69.



$x_0 = -5$ $\qquad$ $x_0 = 10$

Figura 2.69: Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_0(x)$ con $\lambda = 1.5$. Se observa que las iteraciones de puntos lejanos, tanto negativos como positivos, convergen al punto fijo.

(iii) Si $\lambda \in (2, 2.79245)$, la función de iteración puede presentar n-ciclos atractores, como se observa en la Figura 2.70.



$\lambda = 2.5$ $\lambda = 2.6$

Figura 2.70: Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_0(x)$ con $\lambda = 2.5$ y $\lambda = 2.6$. El punto inicial tomado es $x_0 = 1$ y se observa que en el primer caso las iteraciones convergen a un 2-ciclo y en el segundo a un 4-ciclo.

(iv) Si $\lambda \in (2.79245, 5.14311)$, las iteraciones de $N_{\lambda,f_0}(x)$ pueden ser caóticas. En la Figura 2.71 se observa este comportamiento.

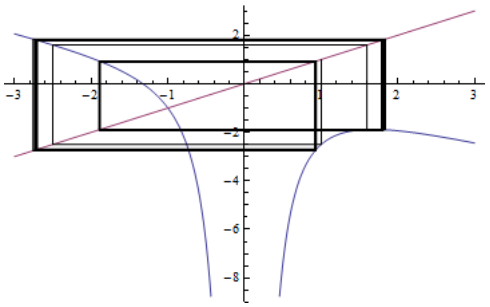
$\lambda = 3.5$ $\lambda = 4.5$

Figura 2.71: Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_0(x)$ con $\lambda = 3.5$ y $\lambda = 4.5$. El punto inicial tomado es $x_0 = 1$. En ambos casos se observa el comportamiento caótico de las iteraciones.

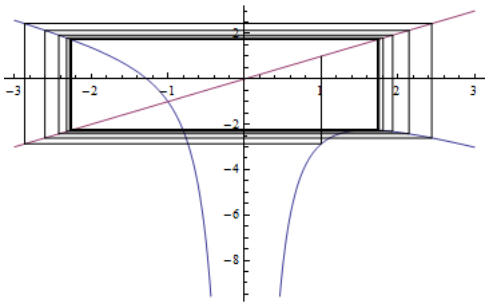
(v) Si $\lambda \in (5.14311, 6)$, la función de iteración puede presentar n-ciclos atractores. En la Figura 2.72 se muestra este comportamiento.

(vi) Si $\lambda \geq 6$, las iteraciones de $N_{\lambda,f_0}(x)$ pueden diverger hacia infinito en valor absoluto, como se observa en la Figura 2.73.

Caso $\gamma > 0$. El último caso de estudio que queda en esta sección es el caso $\gamma > 0$. El polinomio $f_\gamma(x)$ en este caso tiene una única raíz como puede verse en la parte derecha de la Figura 2.36.

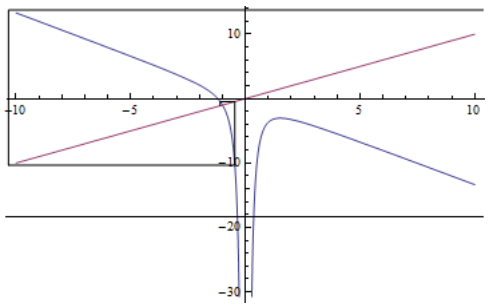


$\lambda = 5.25$

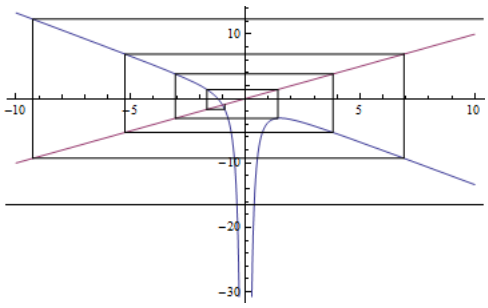


$\lambda = 5.8$

Figura 2.72: Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_0(x)$ con $\lambda = 5.25$ y $\lambda = 5.8$. En ambos casos el punto inicial tomado es $x_0 = 1$ y se observa que para $\lambda = 5.25$ las iteraciones convergen a un 4-ciclo y para $\lambda = 5.8$ las iteraciones convergen a un 2-ciclo.



$x_0 = -1.1$



$x_0 = -0.9$

Figura 2.73: Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_0(x)$ con $\lambda = 7.0$. En la parte izquierda aparecen las órbitas de un punto cercano al punto fijo, pero menor, y se observa cómo se alejan de él, en la parte derecha las órbitas de un punto cercano al punto fijo pero mayor que él, donde se observa que las órbitas también se alejan de dicho punto fijo.

Vamos a estudiar el caso particular $\gamma = 1$, ya que para cada $\gamma > 0$ la dinámica va a ser similar. Para este polinomio concreto, el método de Newton amortiguado tiene la forma

$$N_{\lambda,f_1}(x) = \frac{(3-\lambda)x^3 - x(1-\lambda) - \lambda}{3x^2+1}. \tag{2.3.10}$$

Notemos que en este caso no hay asíntotas verticales. Además, $N_{\lambda,f_\gamma}(x)$ tiene un mínimo que crece con el parámetro γ. Por otro lado, para $\gamma = 1$ los puntos críticos son las soluciones de la ecuación

$$(3\lambda - 9)x^4 - 6x^2 - 6x\lambda + \lambda - 1 = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación, pueden verse en la Figura 2.74 y en la Figura 2.75 puede verse un zoom de la zona conflictiva. Aproximando con 5 cifras decimales obtenemos lo siguiente:

- Si $\lambda \in (-\infty, -1.63559)$, la función presenta 2 puntos críticos.
- Si $\lambda = -1.63559$, la función tiene 1 punto crítico.
- Si $\lambda \in (-1.63559, 0.56134)$, la función no presenta puntos críticos.
- Si $\lambda = 0.56134$, la función tiene 1 punto crítico.
- Si $\lambda \in (0.56134, 3]$, la función tiene 2 puntos críticos.
- Si $\lambda \in (3, 3.03077)$, la función posee 4 puntos críticos.
- Si $\lambda = 3.03077$, la función tiene 3 puntos críticos.
- Si $\lambda > 3.03077$, la función presenta 2 puntos críticos.

Este caso resulta ser sencillo si observamos los exponentes de Lyapunov (véase Figura 2.76) y las bifurcaciones (véase Figura 2.77).

Por lo tanto, se observan los siguientes comportamientos:

- Si $\lambda < 0$, las iteraciones pueden diverger hacia infinito en valor absoluto, como puede verse en la Figura 2.78.
- Si $\lambda \in (0, 2)$, la única raíz de $f_1(x)$ es un punto fijo atractor y un ejemplo de lo que ocurre puede verse en la Figura 2.79.
- Si $\lambda = 2$, la única raíz de $f_1(x)$ es un punto fijo indiferente.
- Si $\lambda \in (2, 6)$, la función $N_{\lambda,f_1}(x)$ presenta un 2-ciclo atractor. En la Figura 2.80 puede verse un ejemplo de este comportamiento.
- Si $\lambda \geq 6$, las iteraciones pueden diverger hacia infinito en valor absoluto, como puede verse en la Figura 2.81.

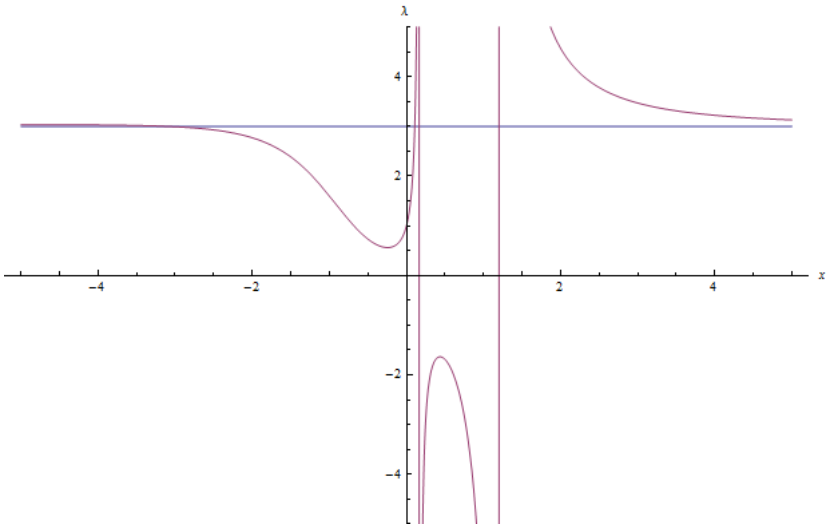


Figura 2.74: Curva de puntos críticos de $N_{\lambda,f_1}(x)$, para $x \in (-5,5)$ y $\lambda \in (-5,5)$.

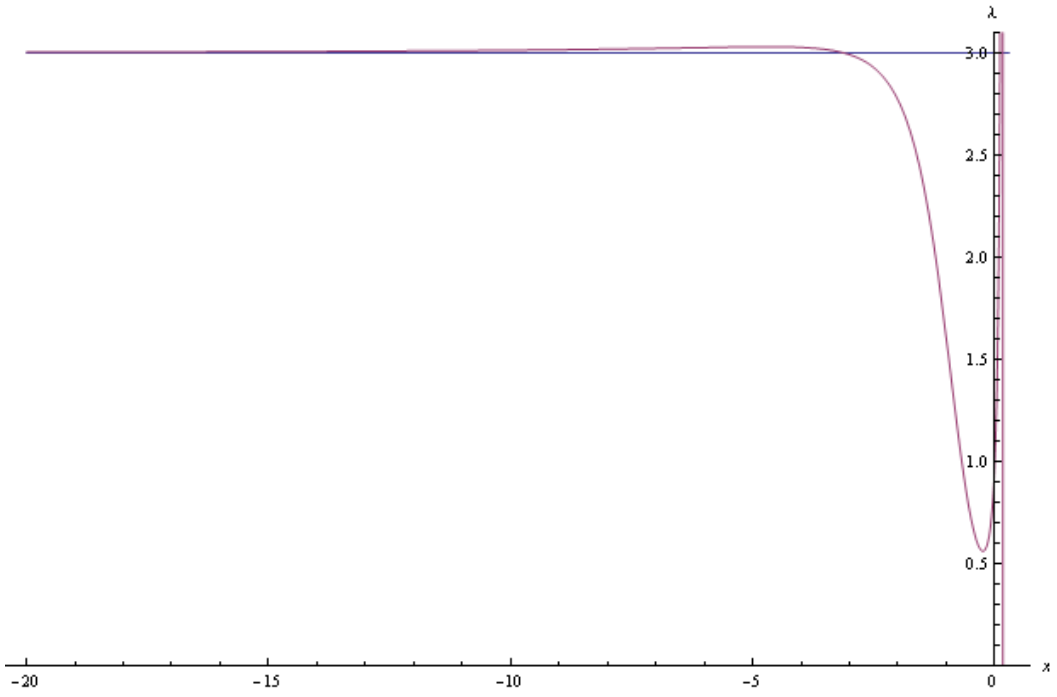


Figura 2.75: Zoom de la zonas donde se muestran los puntos críticos que aparecen en $N_{\lambda,f_1}(x)$ para $x \in (-20, 0.3)$ y $\lambda \in (0, 3.1)$.

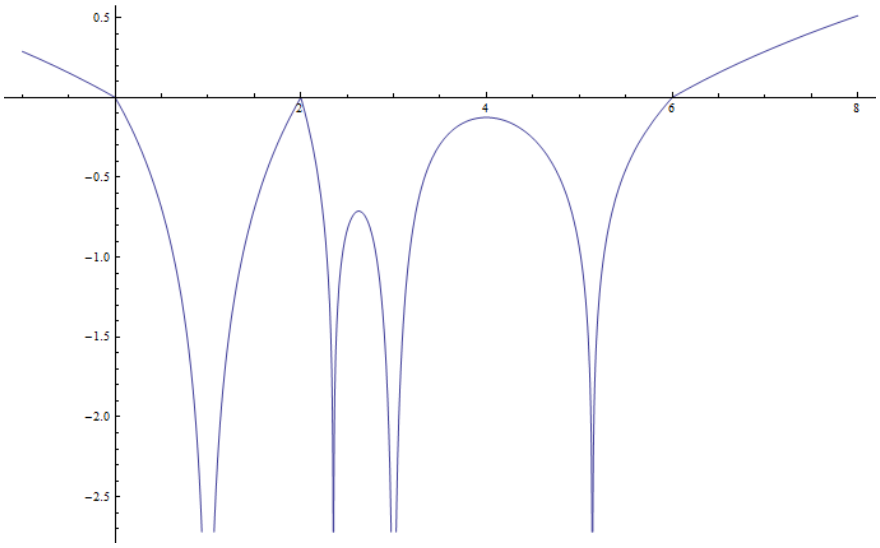


Figura 2.76: Exponentes de Lyapunov asociados a la función de iteración $N_{\lambda,f_1}(x)$, tomando $x_0 = 1.1$, para valores de $\lambda \in (-1, 8)$.

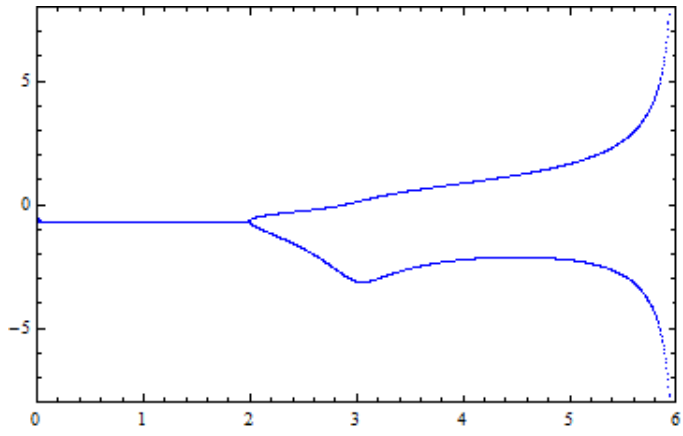


Figura 2.77: Diagrama de Feigenbaum asociado a la función de iteración $N_{\lambda,f_1}(x)$, tomando $x_0 = 0$, para valores de $\lambda \in (0, 6)$.

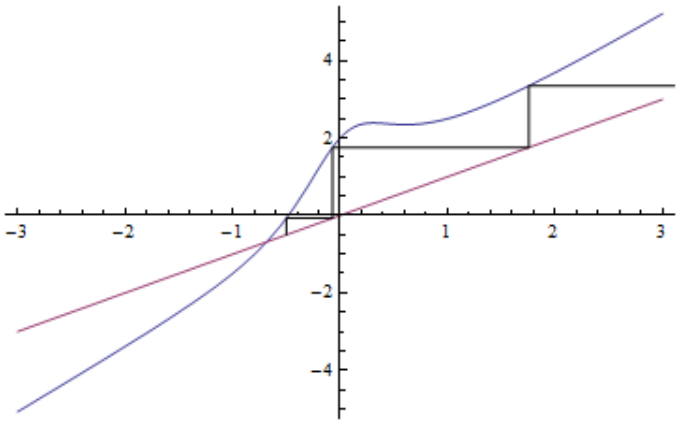


Figura 2.78: Gráfico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_1(x) = x^3 + x + 1$, con $\lambda = -2.0$. Aparecen las órbitas de un punto cercano al punto fijo, y se observa cómo las iteraciones se alejan de él.

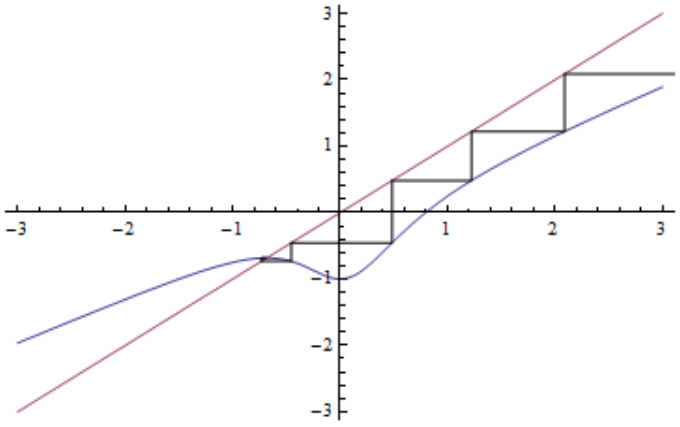


Figura 2.79: Gráfico del método de Newton aplicado al polinomio $f_1(x) = x^3 + x + 1$, donde se observa la convergencia de las iteraciones al punto fijo.

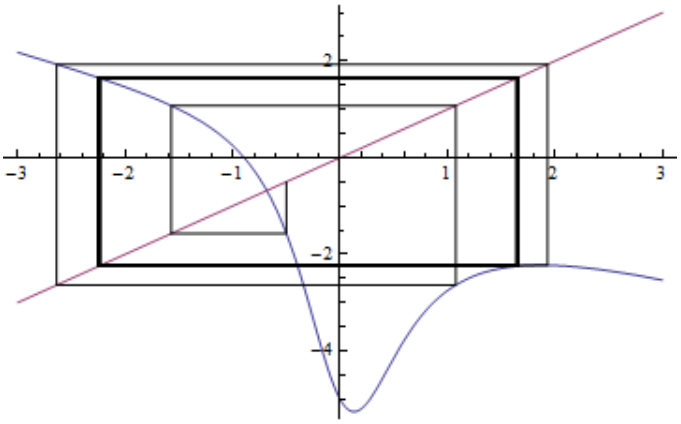


Figura 2.80: Gráfico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_1(x) = x^3 + x + 1$, con $\lambda = 5.0$. Vemos cómo la órbita de $x_0 = 0.5$ converge a un 2-ciclo.

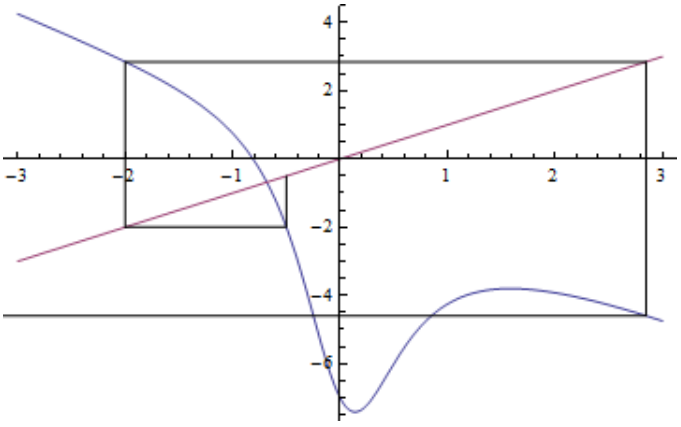


Figura 2.81: Gráfico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_1(x) = x^3 + x + 1$, con $\lambda = 7.0$. Se observa cómo las órbitas de un punto cercano al punto fijo se alejan de él.

2.4. El método de Newton amortiguado para polinomios cuárticos

De forma similar a lo presentado en anteriores secciones, se va a proceder con un estudio de la dinámica del método de Newton amortiguado para polinomios cuárticos. Debido a que el estudio de todos los polinomios de grado cuatro es demasiado extenso, se va a proceder con algunos casos seleccionados. Además, como no se quiere extender demasiado el presente capítulo en las siguientes secciones, se va a proceder con un estudio menos profundo que en el estudio de polinomios de grados 2 o 3.

2.4.1. El método de Newton amortiguado aplicado a $f(x) = x^4$

El primer caso de estudio de polinomios de grado 4, se corresponde con $f(x) = x^4$. Este polinomio tiene una única raíz múltiple y el método de Newton amortiguado aplicado a $f(x)$ para $\lambda \neq 4$ (para $\lambda = 4$ la función de iteración es la función nula y la iteración de cada punto converge al punto fijo en el primer paso) tiene la siguiente forma

$$N_{\lambda,f}(x) = \frac{1}{4}(4-\lambda)x,$$

que es una contracción lineal para todo valor de $\lambda \in (0, 8)$, y, por lo tanto, para valores de λ en ese intervalo las iteraciones de cada punto convergen a la raíz $x = 0$. Si $\lambda = 8$, la función de iteración $N_{8,f}(x)$ es el opuesto de la identidad y, por lo tanto, la iteración de cada punto x_0 distinto a la raíz se convierte en un 2-ciclo de la forma $\{x_0, -x_0\}$. Por último, para valores negativos del parámetro o mayores que 8, el método se convierte en una expansión lineal y las iteraciones de cada punto distinto de $x_0 = 0$ divergen hacia infinito en valor absoluto.

2.4.2. El método de Newton amortiguado aplicado a $f(x) = x^4 - 1$

Como segundo caso de estudio, hemos escogido el polinomio $f(x) = x^4 - 1$, que tiene dos raíces reales y dos complejas conjugadas, en concreto las reales son $x = 1$ y $x = -1$. El método de Newton amortiguado aplicado a este polinomio tiene la forma

$$N_{\lambda,f}(x) = \frac{(4-\lambda)x^4 + \lambda}{4x^3}.$$

Esta función de iteración, tiene una asíntota en $x = 0$. Si ahora calculamos la derivada, obtenemos

$$N'_{\lambda,f}(x) = \frac{(4-\lambda)x^4 - 3\lambda}{4x^4},$$

y, por lo tanto, los puntos críticos serán las soluciones de $(4-\lambda)x^4 - 3\lambda = 0$, es decir, las soluciones de $x^4 = \frac{3\lambda}{4-\lambda}$, que sólo existen si $\lambda \in [0, 4)$. Es claro que, para $\lambda \in (0, 4)$, existen dos puntos críticos que son $C_1 = -\sqrt[4]{\frac{3\lambda}{4-\lambda}}$ y $C_2 = \sqrt[4]{\frac{3\lambda}{4-\lambda}}$. La curva que se observa en la Figura 2.82 representa estos puntos críticos.

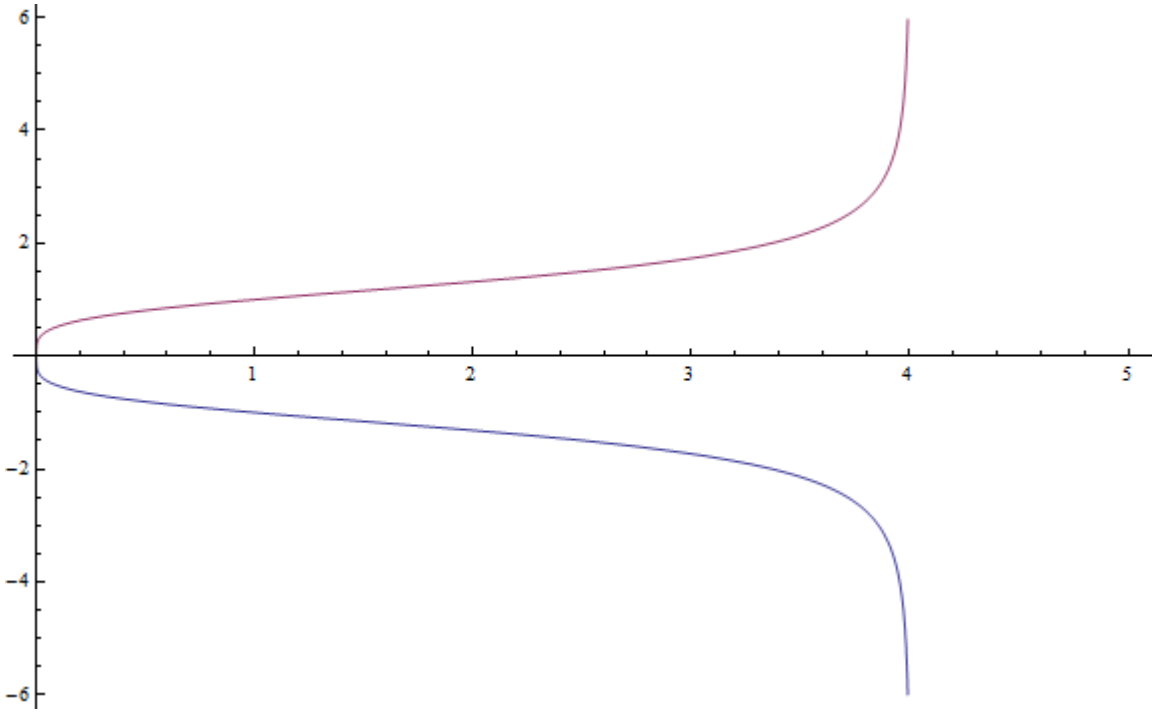


Figura 2.82: Gráfico de los puntos críticos que se obtienen al aplicar el método de Newton amortiguado a $f(x) = x^4 - 1$. En azul aparece C_1 y en magenta C_2.

El siguiente resultado simplificará de manera significativa el estudio.

Proposición 2.27 *La función de iteración del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f(x) = x^4 - 1$, $N_{\lambda,f_+}(x)$, tiene simetría impar.*

Demostración Observando que

$$N_{\lambda,f}(-x) = \frac{(\lambda-4)x^4 - \lambda}{4x^3}$$

es lo mismo que

$$-N_{\lambda,f}(x) = \frac{(\lambda-4)x^4 - \lambda}{4x^3},$$

se puede concluir que la función $N_{\lambda,f}(x)$ tiene simetría impar, como queríamos demostrar. ∎

Por lo tanto, sólo es necesario estudiar uno de los dos casos. Por simplicidad estudiaremos el caso $x_0 > 0$.

De los estudios numéricos realizados se extraen las siguientes conclusiones sobre el comportamiento dinámico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f(x) = x^4 - 1$. Notemos que, de nuevo, los valores son aproximados.

- Si $\lambda < 0$, las iteraciones pueden diverger hacia infinito en valor absoluto.
- Si $\lambda = 0$, el estudio carece de interés.
- Si $\lambda \in (0, 2)$, los puntos fijos son atractores.
- Si $\lambda = 2$, los puntos fijos son indiferentes.
- Si $\lambda \in (2, 2.80195)$, los puntos fijos son repulsores, y la función de iteración puede presentar n-ciclos atractores.
- Si $\lambda \in (2.80195, 3.40428)$, los puntos fijos son repulsores, y puede aparecer comportamiento caótico.
- Si $\lambda \in (3.40428, 3.62463)$, los puntos fijos son repulsores, y la función de iteración puede presentar n-ciclos atractores.
- Si $\lambda \in (3.62463, 8)$, los puntos fijos son repulsores, y puede aparecer comportamiento caótico.
- Si $\lambda \geq 8$, las iteraciones pueden diverger hacia infinito en valor absoluto.

Este comportamiento se puede ver ilustrado en los gráficos de los exponentes de Lyapunov y diagramas de Feigenbaum que se observan en las Figuras 2.83, 2.84 y 2.85.

2.4.3. El método de Newton amortiguado aplicado a $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$

El siguiente caso de estudio es el de un polinomio con 4 raíces diferentes, de los estudios numéricos realizados y apoyándonos en los estudios de diferentes autores (véase, por ejemplo [18], [19], [82] o [120]) se concluye que para el caso del método de Newton ($\lambda = 1$) el conjunto de Julia es un conjunto de Cantor. Por lo tanto, para este caso particular, la dinámica va a ser muy complicada. Aún así, como en los polinomios de grado 4 considerados anteriormente, vamos a proceder con un primer análisis de la dinámica.

Si aplicamos el método de Newton amortiguado a $f(x)$ se obtiene

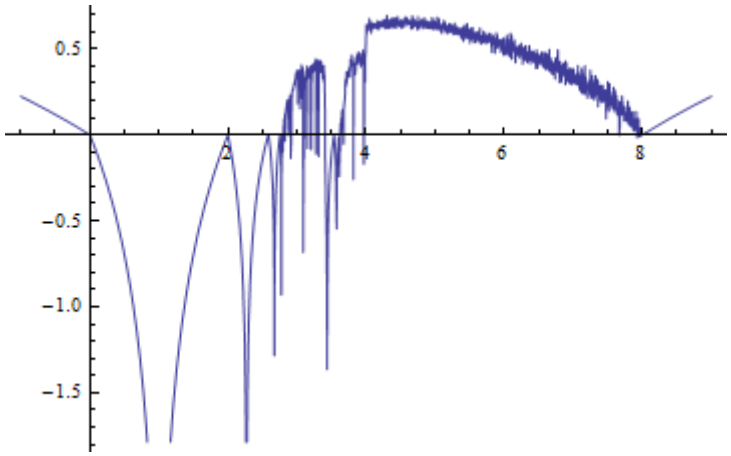
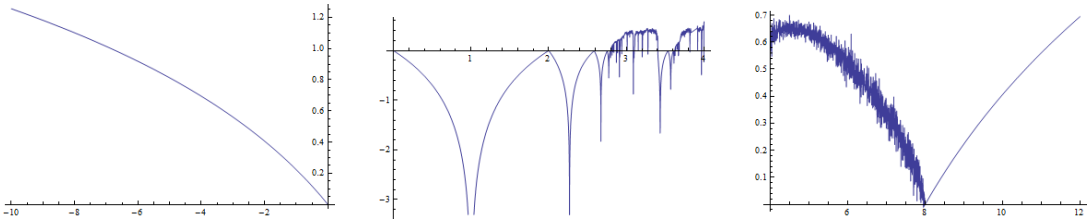
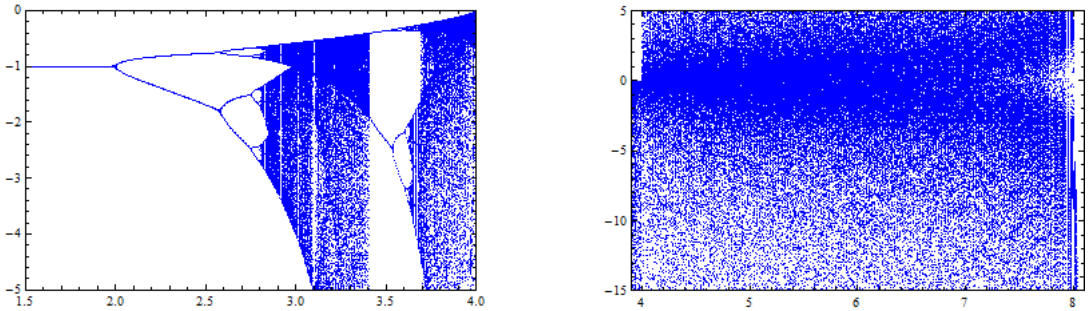


Figura 2.83: Exponentes de Lyapunov asociados a la función de iteración $N_{\lambda,f}(x) = \frac{(4-\lambda)x^4+\lambda}{4x^3}$, tomando $x_0 = 5$, para valores de $\lambda \in (-1, 9)$.



$\lambda \in (-10, 0)$ $\lambda \in (0, 4)$ $\lambda \in (4, 12)$

Figura 2.84: Zoom de los exponentes de Lyapunov asociados a la función de iteración $N_{\lambda,f}(x) = \frac{(4-\lambda)x^4+\lambda}{4x^3}$, tomando en la parte izquierda $x_0 = 2$, en la parte central $x_0 = C_1$ y en la parte derecha $x_0 = 5$, para distintos valores de λ en cada una de las regiones importantes.



$\lambda \in (1.5, 4)$ $\lambda \in (3.9, 8.1)$

Figura 2.85: Diagramas de Feigenbaum asociados a la función de iteración $N_{\lambda,f}(x) = \frac{(4-\lambda)x^4+\lambda}{4x^3}$, tomando $x_0 = 5$, para distintos valores de λ, donde se observa la aparición de ciclos y caos. Notemos que existe un intervalo que incluye a 3.5 en el que aparece una ventana donde se encuentran además 3-ciclos.

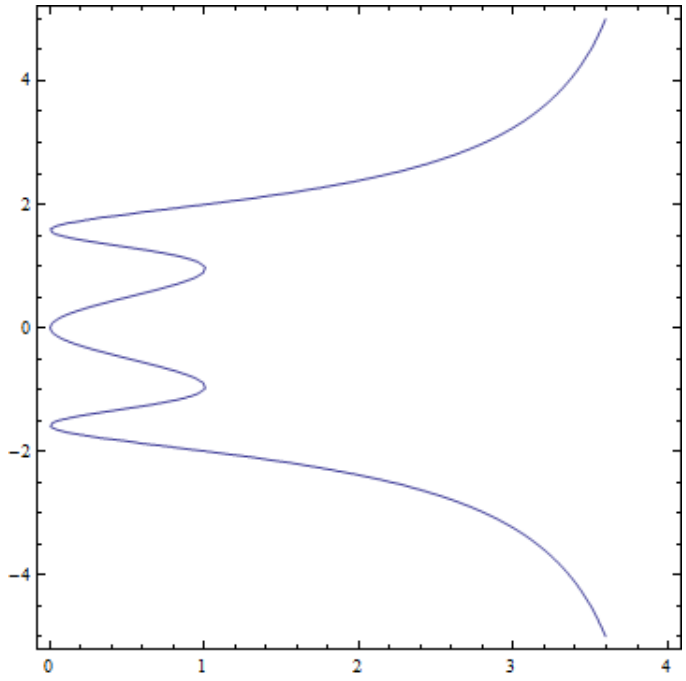


Figura 2.86: Valores que toman los puntos críticos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f(x) = (x^2-1)(x^2-4)$ para valores del parámetro $\lambda \in [0, 4]$.

$$N_{\lambda,f}(x) = \frac{(4-\lambda)x^4 + (5\lambda - 10)x^2 - 4\lambda}{2x\left(-5 + 2x^2\right)}. \tag{2.4.1}$$

Si ahora calculamos la derivada obtenemos

$$N'_{\lambda,f}(x) = \frac{(8-2\lambda)x^6 + (5\lambda - 40)x^4 + (50-\lambda)x^2 - 20\lambda}{2x^2\left(-5 + 2x^2\right)^2},$$

se tiene que el multiplicador asociado a las raíces es $\mu = 1 - \lambda$ y, por lo tanto, para valores del parámetro en el intervalo $(0, 2)$ se tiene que los puntos fijos son atractores, salvo para $\lambda = 1$, que son superatractores. En la Figura 2.86 pueden verse los puntos críticos para los distintos valores del parámetro.

De la Figura 2.86 se extrae que:

- Si $\lambda \in (-\infty, 0)$, $N_{\lambda,f}(x)$ no tiene puntos críticos.
- Si $\lambda \in (0, 1.00704)$, $N_{\lambda,f}(x)$ tiene seis puntos críticos.
- si $\lambda = 1.00704$, $N_{\lambda,f}(x)$ tiene cuatro puntos críticos reales.
- Si $\lambda \in (1.00704, 4)$, $N_{\lambda,f}(x)$ tiene dos puntos críticos.

- Si $\lambda \in [4, \infty)$, $N_{\lambda,f}(x)$ no tiene puntos críticos.

Como en casos anteriores, el siguiente resultado nos permitirá sólo estudiar las iteraciones de puntos iniciales positivos o negativos. En nuestro caso elegiremos los puntos iniciales positivos.

Proposición 2.28 *La función de iteración del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$, $N_{\lambda,f}(x)$, tiene simetría impar.*

Demostración Teniendo en cuenta que

$$N_{\lambda,f}(-x) = \frac{10x^2 - 4x^4 + 4\lambda - 5x^2\lambda + x^4\lambda}{2x\,(-5 + 2x^2)},$$

y como

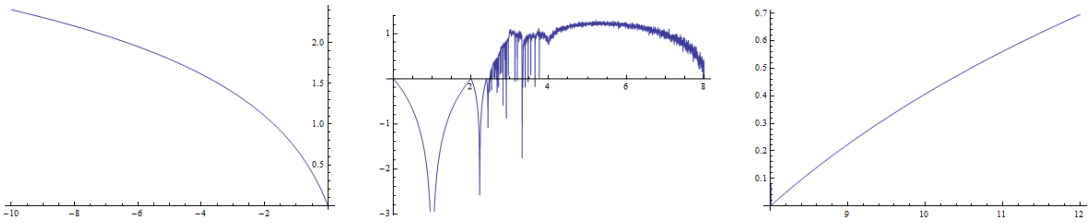
$$-N_{\lambda,f}(x) = \frac{10x^2 - 4x^4 + 4\lambda - 5x^2\lambda + x^4\lambda}{2x\,(-5 + 2x^2)}.$$

Se concluye que existe simetría impar. ∎

Guiándonos por los estudios numéricos realizados, y teniendo en cuenta que, para valores aproximados se han elegido 5 cifras decimales y se deja el intervalo abierto, el comportamiento dinámico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$ es el siguiente:

- Si $\lambda < 0$, los puntos fijos son repulsores, y las iteraciones pueden diverger hacia infinito en valor absoluto.
- Si $\lambda = 0$, el estudio carece de interés.
- Si $\lambda \in (0, 2)$, los puntos fijos son atractores.
- Si $\lambda = 2$, los puntos fijos son indiferentes.
- Si $\lambda \in (2, 2.48878)$, los puntos fijos son repulsores, y la función de iteración puede presentar n-ciclos atractores.
- Si $\lambda \in (2.48878, 8)$, los puntos fijos son repulsores, y puede aparecer comportamiento caótico.
- Si $\lambda \geq 8$, las iteraciones pueden diverger hacia infinito en valor absoluto.

Vemos este comportamiento ilustrado por los gráficos de los exponentes de Lyapunov y diagramas de Feigenbaum que se observan en las Figuras 2.87 y 2.88.



$\lambda \in (-10, 0)$ $\lambda \in (0, 8)$ $\lambda \in (8, 12)$

Figura 2.87: Exponentes de Lyapunov asociados a $N_{\lambda,f}(x)$ definida en (2.4.1), tomando en la parte izquierda $x_0 = 2$, en la parte central $x_0 = 5$ y en la parte derecha $x_0 = 5$, para distintos valores de λ.

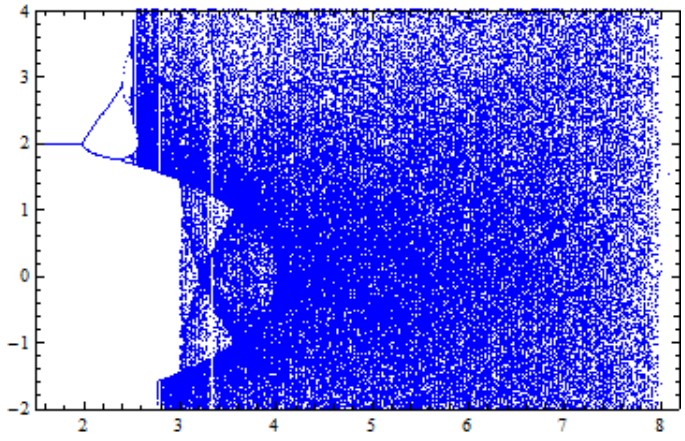


Figura 2.88: Diagrama de Feigenbaum asociado a $N_{\lambda,f}(x)$ definida en (2.4.1), tomando $x_0 = 5$, para valores de $\lambda \in (1.5, 8.1)$.

2.5. El método de Newton amortiguado para polinomios quínticos

En esta sección vamos a proceder con el estudio de los polinomios quínticos, para ello vamos a generalizar las ideas que se dan en [15] para el método de Newton dando resultados para el método de Newton amortiguado.

Vamos a estudiar polinomios quínticos mónicos de la forma $f(x) = x^5 + c_1x^4 + c_2x^3 + c_3x^2 + c_4x + c_5$. Lo primero que vamos a hacer es reducir el número de parámetros de los que depende el polinomio, para ello se va a proceder a discutir los aspectos algebráicos necesarios para poder llevar a cabo la reducción. La ecuación

$$x^5 + c_1x^4 + c_2x^3 + c_3x^2 + c_4x + c_5 = 0,$$

con coeficientes c_i arbitrarios, puede transformarse a una de tipo *Bring-Jerrard*

$$x^5 + ax + b^5 = 0,$$

utilizando una transformación de Tschirnhaus (véase [1]). Este tipo de transformaciones reducen la ecuación polinomial

$$c_0x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n = 0$$

a una con tres términos menos

$$c_0x^n + b_4x^{n-4} + \cdots + b_{n-1}x + b_n = 0$$

transformando la raíz como sigue

$$x_j = \sum_{k=0}^{4} \gamma_{4-k} x_j^{4-k}, \ (j = 1, 2, \ldots, n),$$

donde los coeficientes γ_j pueden ser expresados en radicales de los términos de c_j. Por lo tanto, cada ecuación quíntica puede ser expresada de la forma:

$$x^5 + ax + b^5 = 0.$$

Los coeficientes pueden ser expresados en radicales de términos de los c_j. Por lo tanto, vamos a estudiar polinomios de la forma $x^5 + ax + b^5 = 0$ y utilizaremos conjugaciones topológicas para simplificar el estudio de los polinomios.

Proposición 2.29 *Sea $g(x) = x^5 + ax + b^5$, donde $b \neq 0$ y definimos la función $f(x) = x^5 + cx + 1$ donde $c = \frac{a}{b^4}$. Entonces, $N_{\lambda,g}(x)$ y $N_{\lambda,f}(x)$ son topológicamente conjugadas vía el homeomorfismo $\tau(x) = \frac{x}{b}$.*

Demostración Primero calculamos $N_{\lambda,g}(x)$ y $N_{\lambda,f}(x)$

$$N_{\lambda,g}(x) = \frac{(5-\lambda)x^5 + a(1-\lambda)x - b^5\lambda}{a + 5x^4},$$

$$N_{\lambda,f}(x) = -\frac{b^4(5-\lambda)x^5 + a(1-\lambda)x - b^4\lambda}{a + 5b^4x^4}.$$

Ahora, se tiene que

$$\tau \circ N_{\lambda,g}(x) = \frac{(5-\lambda)x^5 + a(1-\lambda)x - b^5\lambda}{b\,(a+5x^4)}$$

y

$$N_{\lambda,f} \circ \tau(x) = -\frac{(5-\lambda)x^5 + a(1-\lambda)x - b^5\lambda}{b\,(a+5x^4)}.$$

Por lo tanto, $N_{\lambda,g}(x)$ y $N_{\lambda,f}(x)$ son topológicamente conjugadas, como queríamos demostrar. ∎

Ahora, veamos qué ocurre si $b = 0$.

Proposición 2.30 *Sea $g(x) = x^5 + a^4x$, donde $a \neq 0$ y definimos la función $f_+(x) = x^5 + x$. Entonces, $N_{\lambda,g}(x)$ y $N_{\lambda,f_+}(x)$ son topológicamente conjugadas vía el homeomorfismo $\tau(x) = \frac{x}{a}$.*

Demostración Es inmediato ver que

$$\tau \circ N_{\lambda,g}(x) = \frac{x\,((5-\lambda)x^4 + a^4(1-\lambda))}{a\,(a^4+5x^4)}$$

y

$$N_{\lambda,f_+} \circ \tau(x) = \frac{x\,((5-\lambda)x^4 + a^4(1-\lambda))}{a\,(a^4+5x^4)}$$

son idénticas y, por lo tanto, $N_{\lambda,g}(x)$ y $N_{\lambda,f_+}(x)$ son topológicamente conjugadas, como queríamos demostrar. ∎

Y de forma análoga tenemos, la siguiente proposición

Proposición 2.31 *Sea $g(x) = x^5 - a^4x$, donde $a \neq 0$ y definimos la función $f_-(x) = x^5 - x$. Entonces, $N_{\lambda,g}(x)$ y $N_{\lambda,f_-}(x)$ son topológicamente conjugadas vía el homeomorfismo $\tau(x) = \frac{x}{a}$.*

Demostración Basta ver que

$$\tau \circ N_{\lambda,g}(x) = \frac{x\,((\lambda-5)x^4 + a^4(1-\lambda))}{a\,(-5x^4+a^4)}$$

y

$$N_{\lambda,f_-} \circ \tau(x) = \frac{x\,((\lambda-5)x^4 + a^4(1-\lambda))}{a\,(-5x^4+a^4)}.$$

Por lo tanto, $N_{\lambda,g}(x)$ y $N_{\lambda,f_-}(x)$ son topológicamente conjugadas, con lo que se concluye la demostración. ∎

Por último, el caso $a = 0$, que se corresponde con el polinomio $f(x) = x^5$, también debe ser estudiado.

Nota 2.3 *Las 3 últimas proposiciones implican que la dinámica del método de Newton amortiguado para un polinomio quíntico de la forma $f(x) = x^5 + ax + b^5$, es equivalente a la dinámica del método de Newton amortiguado aplicado a la familia de polinomios $f_c(x) = x^5 + cx + 1$ o a $g_a(x) = x^5 + ax$. Además, el método de Newton amortiguado aplicado a una función $g_a(x)$ es topológicamente conjugado al método de Newton amortiguado aplicado a uno de los siguientes tres polinomios:*

- $f_-(x) = x(x^4 - 1)$.
- $f_+(x) = x(x^4 + 1)$.
- $f_0(x) = x^5$.

Por lo tanto, el estudio del método de Newton amortiguado aplicado a polinomios quínticos de la forma $f(x) = x^5 + ax + b^5$, se reduce al estudio del caso $f_c(x) = x^5 + cx + 1$ y a los tres polinomios $f_-(x)$, $f_+(x)$ y $f_+(x)$. Destacar que, debido a la longitud y el número de casos que genera, se deja el caso $f_c(x)$ como trabajo abierto o futuro.

2.5.1. El método de Newton amortiguado aplicado a $f_0(x) = x^5$

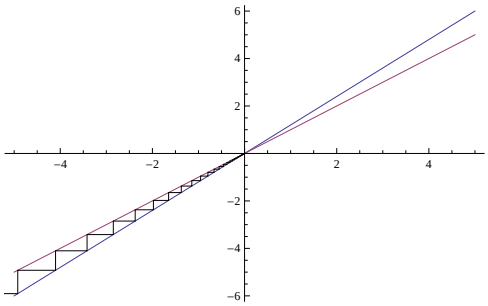
Este es el caso más sencillo, ya que el polinomio tiene una única raíz real de multiplicidad 5. El método de Newton amortiguado aplicado a este tipo de polinomios, para $\lambda \neq 5$, tiene la siguiente forma (para $\lambda = 5$ la función de iteración es la función nula y, por lo tanto, la iteración de cada punto converge en una iteración a la raíz de $f_0(x)$)

$$N_{\lambda,f_0}(x) = \frac{1}{5}x(5 - \lambda),$$

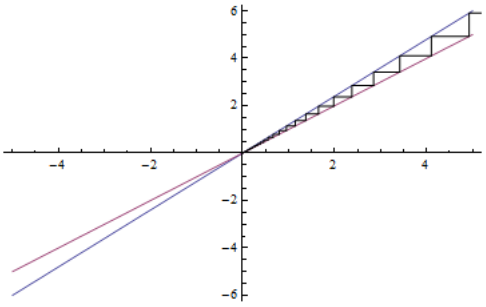
que es una contracción lineal para todo valor del parámetro amortiguador $\lambda \in (0, 10)$, es decir, la iteración de cada punto de la recta real que tomemos como punto de partida va a converger hacia el único punto fijo, $x = 0$.

Si empezamos estudiando el caso de valores de $\lambda < 0$, las iteraciones de cada punto distinto del punto fijo divergen de forma monótona hacia infinito en valor absoluto como puede observarse en la Figura 2.89.

Si ahora nos centramos en valores de $\lambda \in (0, 10)$, la función de iteración se corresponde con una contracción, como ya se ha visto antes, y para este caso las iteraciones de cada punto convergen hacia el punto fijo monótonamente. Un ejemplo de este comportamiento puede verse en la Figura 2.90.

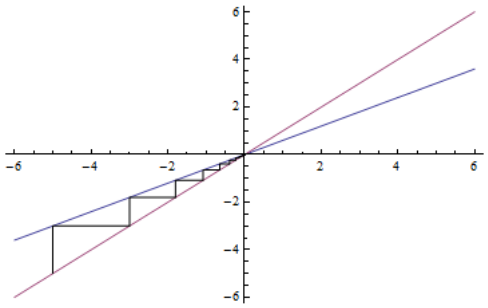


$x_0 = -0.01$

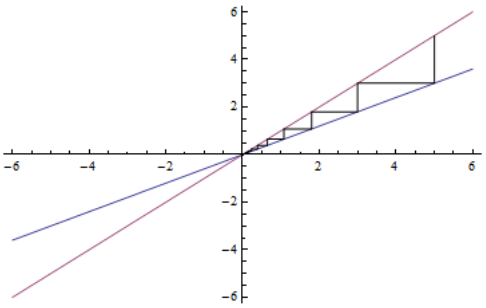


$x_0 = 0.01$

Figura 2.89: Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_0(x) = x^5$ con $\lambda = -1$, con puntos iniciales cerca del punto fijo, donde se observa que las iteraciones divergen de forma monótona hacia infinito en valor absoluto.



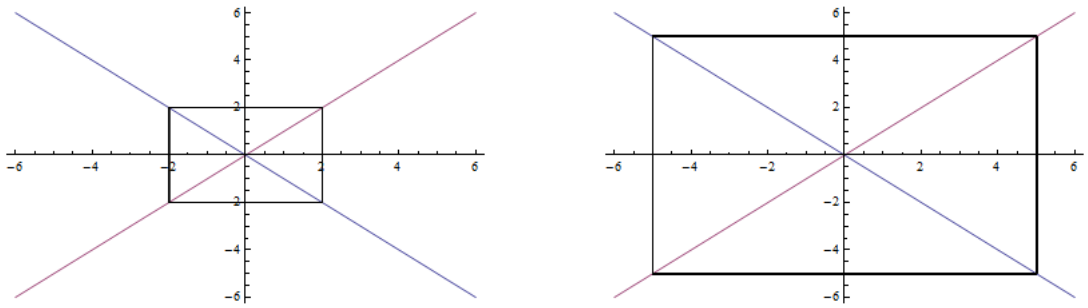
$x_0 = -5$



$x_0 = 5$

Figura 2.90: Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_0(x) = x^5$ con $\lambda = 2$, donde se observa que las iteraciones de puntos iniciales lejanos al punto fijo, convergen hacia él.

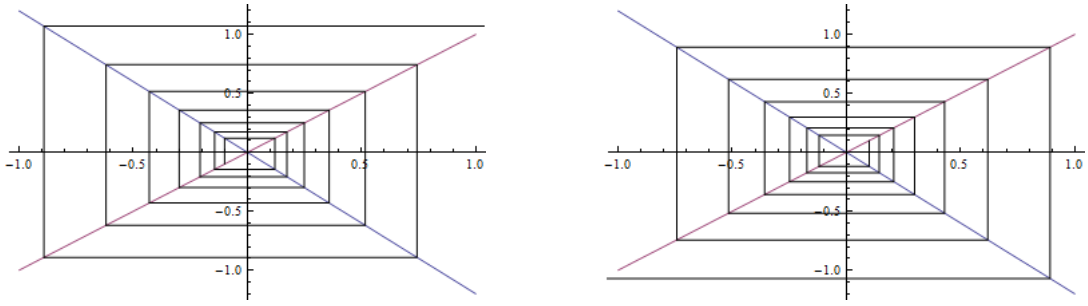
Por otro lado, si se toma como valor del parámetro $\lambda = 10$, la función de iteración se convierte en menos la identidad. El punto fijo va a ser indiferente y vamos a obtener que la iteración de cada punto inicial, salvo el propio punto fijo, es un 2-ciclo de la forma $\{x_0, -x_0\}$. En la Figura 2.91 se muestra lo que ocurre para $\lambda = 10$.



$x_0 = -2$ $\qquad$ $x_0 = 5$

Figura 2.91: Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_0(x) = x^5$, con $\lambda = 10$, para diferentes puntos de partida, donde se observa que las iteraciones constituyen un 2-ciclo.

Por último, para valores del parámetro mayores que 10, obtenemos que el método es una expansión y cualquier punto de partida que se tome, exceptuando $x = 0$, diverge de forma alterna hacia infinito en valor absoluto. Un ejemplo puede verse en la Figura 2.92.



$x = -0.01$ $\qquad$ $x = 0.01$

Figura 2.92: Gráficos del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_0(x) = x^5$ con $\lambda = 11$. Para valores cercanos al punto fijo, se observa que las iteraciones divergen hacia infinito en valor absoluto.

2.5.2. El método de Newton amortiguado aplicado a $f_+(x) = x^5 + x$

El siguiente caso de estudio es el del polinomio $f_+(x) = x^5 + x$, que tiene una única raíz real simple y cuatro complejas. La raíz real de $f_+(x)$ se encuentra en

$x = 0$. Al aplicarle el método de Newton amortiguado a $f_+(x)$ se obtiene

$$N_{\lambda,f_+}(x) = \frac{x\left((5-\lambda)x^4 + 1 - \lambda\right)}{1+5x^4}. \tag{2.5.1}$$

Si ahora calculamos la derivada obtenemos

$$N'_{\lambda,f_+}(x) = \frac{(25-5\lambda)x^8 + (10+10\lambda)x^4 + 1 - \lambda}{\left(1+5x^4\right)^2}$$

y se tiene que el multiplicador asociado a $x = 0$ es $\mu = 1 - \lambda$ y, por lo tanto, para valores del parámetro en el intervalo $(0, 2)$ se tiene que el punto fijo es atractor, salvo para $\lambda = 1$, que es superatractor. Los puntos críticos de la función serán las soluciones de la ecuación

$$(25-5\lambda)x^8 + (10+10\lambda)x^4 + 1 - \lambda = 0$$

es decir,

$$x^4 = \begin{cases} \dfrac{1}{15} & \text{si} \quad \lambda = 5 \\ \dfrac{-(5+5\lambda) \pm \sqrt{20\lambda(4+\lambda)}}{25-5\lambda} & \text{si} \quad \lambda \in (-\infty, -4] \cup [1, \infty),\ \lambda \neq 5. \end{cases}$$

Notemos que el discriminante $20\lambda(4+\lambda)$ es mayor o igual que cero, cuando $\lambda \notin (-4, 0)$. Vamos a estudiar los dos casos diferentes. Por un lado, estudiamos

$$x_+^4 = \frac{-(5+5\lambda) + \sqrt{20\lambda(4+\lambda)}}{25-5\lambda},$$

multiplicando y dividiendo por el conjugado obtenemos

$$x_+^4 = \frac{\lambda - 1}{(5+5\lambda) + \sqrt{20\lambda(4+\lambda)}}.$$

Por lo tanto, para valores de $\lambda \in (-\infty, -4] \cup [1, \infty)$, $\lambda \neq 5$,

$$C_1 = -\sqrt[4]{\frac{\lambda - 1}{(5+5\lambda) + \sqrt{20\lambda(4+\lambda)}}}$$

y

$$C_2 = \sqrt[4]{\frac{\lambda - 1}{(5+5\lambda) + \sqrt{20\lambda(4+\lambda)}}}$$

son puntos críticos de $N_{\lambda,f_+}(x)$.

Si ahora estudiamos

$$x_-^4 = \frac{-(5+5\lambda) - \sqrt{20\lambda(4+\lambda)}}{25-5\lambda}$$

es claro, que para que sea positivo, tanto el numerador como el denominador han de ser del mismo signo y esto ocurre si $\lambda \leq -4$ o si $\lambda > 5$. Los puntos críticos de $N_{\lambda,f_+}(x)$ para $\lambda \in (-\infty, -4] \cup (5, \infty)$

$$C_3 = -\sqrt[4]{\frac{-(5+5\lambda) - \sqrt{20\lambda(4+\lambda)}}{25-5\lambda}}$$

y

$$C_4 = \sqrt[4]{\frac{-(5+5\lambda) - \sqrt{20\lambda(4+\lambda)}}{25-5\lambda}}.$$

Por lo tanto, recapitulando,

- Si $\lambda \in (-\infty, -4)$, $N_{\lambda,f_+}(x)$ tiene cuatro puntos críticos C_1, C_2, C_3 y C_4.
- Si $\lambda = -4$, $N_{\lambda,f_+}(x)$ tiene dos puntos críticos $C_1 = C_3$ y $C_2 = C_4$.
- Si $\lambda \in (-4, 1)$ $N_{\lambda,f_+}(x)$ no tiene puntos críticos.
- Si $\lambda = 1$, $N_{\lambda,f_+}(x)$ tiene un punto crítico real en $x = 0$.
- Si $\lambda \in (1, 5]$, $N_{\lambda,f_+}(x)$ tiene dos puntos críticos reales.
- Si $\lambda \in (5, \infty)$, $N_{\lambda,f_+}(x)$ tiene cuatro puntos críticos C_1, C_2, C_3 y C_4.

En la Figura 2.93 pueden verse los puntos críticos para los distintos valores del parámetro. Como en los casos anteriores, utilizando el siguiente resultado podremos estudiar, sin pérdida de generalidad, el caso de puntos iniciales positivos.

Proposición 2.32 *La función de iteración del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_+(x) = x^5 + x$, $N_{\lambda,f_+}(x)$, tiene simetría impar.*

Demostración Es inmediato al observar que

$$N_{\lambda,f_+}(-x) = -N_{\lambda,f_+}(x) = \frac{x\left(-1 - 5x^4 + \lambda + x^4\lambda\right)}{1 + 5x^4}.$$

Lo que concluye la demostración. ∎

Teniendo en cuenta que se toman valores aproximados con 5 cifras decimales para los intervalos, se pueden extraer las siguientes conclusiones sobre el comportamiento dinámico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_+(x) = x^5 + x$

- Si $\lambda < 0$, las iteraciones pueden diverger hacia infinito en valor absoluto.

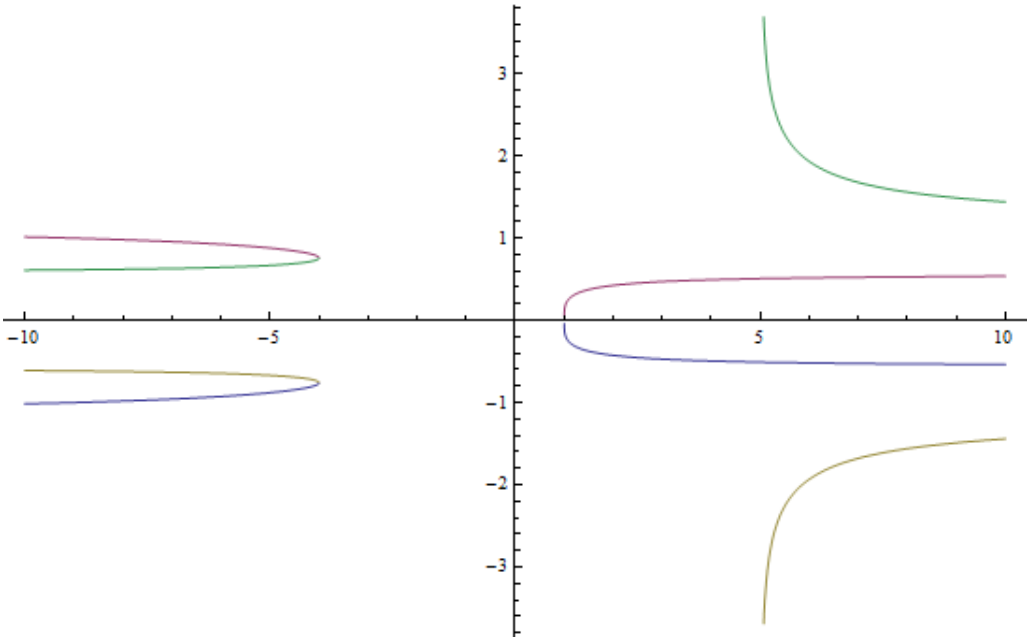
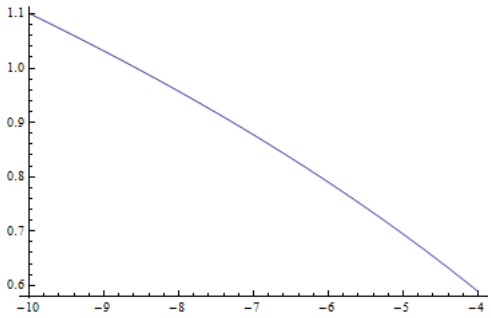


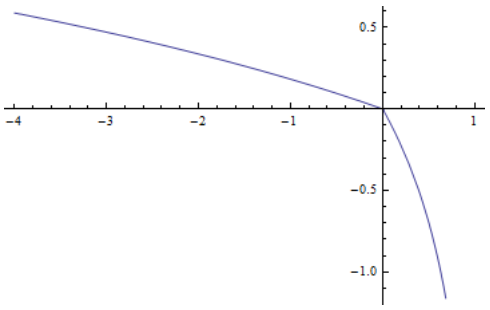
Figura 2.93: Valores que toman los puntos críticos de $N_{\lambda,f_+}(x)$ para distintos valores del parámetro $\lambda \in [-10, 10]$. En azul aparece C_1, en magenta C_2, en amarillo C_3 y en verde C_4.

- Si $\lambda = 0$, el estudio carece de interés.
- Si $\lambda \in (0, 2)$, $x = 0$ es punto fijo atractor.
- Si $\lambda = 2$, $x = 0$ es punto fijo indiferente.
- Si $\lambda \in (2, 3.33002)$, $x = 0$ es punto fijo repulsor, y la función de iteración puede presentar n-ciclos atractores.
- Si $\lambda \in (3.33002, 5.20358)$, $x = 0$ es punto fijo repulsor, y las iteraciones pueden presentar comportamiento caótico.
- Si $\lambda \in (5.20358, 10)$, $x = 0$ es punto fijo repulsor, y la función de iteración puede presentar n-ciclos atractores.
- Si $\lambda \geq 10$, las iteraciones pueden diverger hacia infinito en valor absoluto.

El comportamiento del método de Newton amortiguado aplicado a este tipo de polinomios puede verse en las Figuras 2.94, 2.95 y 2.96, en las que se muestran tanto los exponentes de Lyapunov, como los diagramas de Feigenbaum asociados a $N_{\lambda,f_+}(x)$.

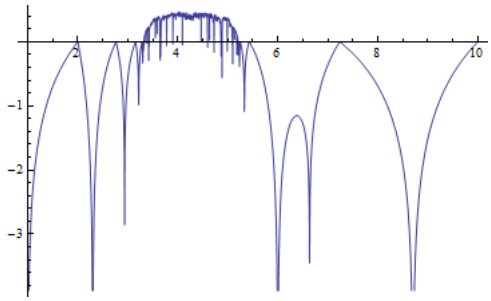


$\lambda \in (-10, -4)$

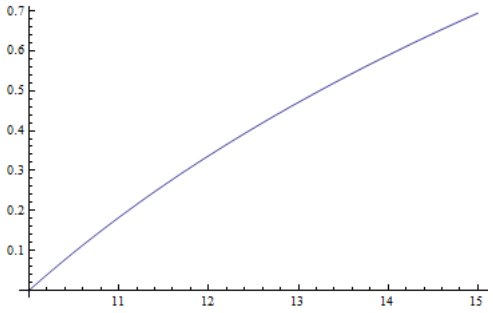


$\lambda \in (-4, 1)$

Figura 2.94: Exponentes de Lyapunov asociados a $N_{\lambda,f_+}(x)$, definida en (2.5.1), tomando en la parte izquierda $x_0 = C_1$ y en la parte derecha $x_0 = 5.0$, para distintos valores de λ.

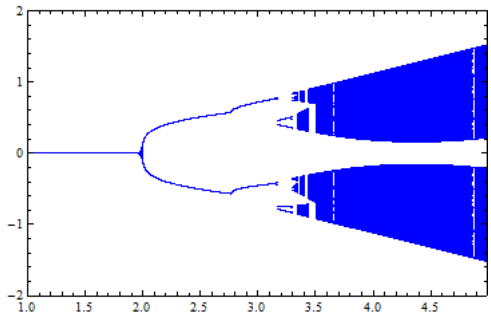


$\lambda \in (1, 10)$

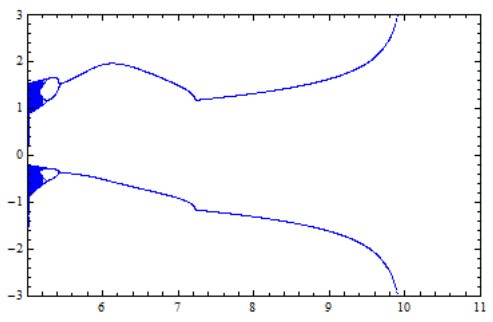


$\lambda \in (10, 15)$

Figura 2.95: Exponentes de Lyapunov asociados a $N_{\lambda,f_+}(x)$, definida en (2.5.1), tomando en la parte izquierda $x_0 = C_1$ y en la parte derecha $x_0 = C_2$, para distintos valores de λ.



$\lambda \in (1, 5)$



$\lambda \in (5, 10)$

Figura 2.96: Diagramas de Feigenbaum asociados a $N_{\lambda,f_+}(x)$, definida en (2.5.1), tomando en la parte izquierda $x_0 = -1.1$ y en la parte derecha $x_0 = C_1$, para distintos valores de λ.

2.5.3. El método de Newton amortiguado aplicado a $f_-(x) = x^5 - x$

El último caso de estudio, es el polinomio $f_-(x) = x^5 - x$, que es un polinomio que tiene tres raíces reales simples y dos complejas conjugadas. Las raíces de $f_-(x)$ se encuentran en $x = 0$, $x = -1$ y en $x = 1$. Al aplicarle el método de Newton amortiguado a $f_-(x)$ se obtiene

$$N_{\lambda,f_-}(x) = \frac{x\left((5-\lambda)x^4 + \lambda - 1\right)}{5x^4 - 1}. \tag{2.5.2}$$

Si ahora calculamos la derivada obtenemos

$$N'_{\lambda,f_-}(x) = \frac{(25-5\lambda)x^8 - (10+10\lambda)x^4 + 1 - \lambda}{\left(5x^4-1\right)^2},$$

se tiene que el multiplicador asociado a las raíces es $\mu = 1-\lambda$ y, por lo tanto, para valores del parámetro en el intervalo $(0, 2)$ se tiene que los puntos fijos son atractores, salvo para el caso del método de Newton ($\lambda = 1$), que son superatractores. Los puntos críticos de la función serán las soluciones de la ecuación

$$(25-5\lambda)x^8 - (10+10\lambda)x^4 + 1 - \lambda = 0.$$

Si $\lambda = 5$, esta ecuación no tiene soluciones reales y, en otro caso,

$$x^4 = \frac{5 + 5\lambda \pm \sqrt{20\lambda(4+\lambda)}}{25 - 5\lambda}.$$

Notemos que el discriminante $20\lambda(4+\lambda)$ es mayor o igual que cero cuando $\lambda \notin (-4, 0)$. Vamos a estudiar los dos casos diferentes. Por un lado estudiamos

$$x_-^4 = \frac{5 + 5\lambda - \sqrt{20\lambda(4+\lambda)}}{25 - 5\lambda},$$

multiplicando y dividiendo por el conjugado obtenemos

$$x_-^4 = \frac{1-\lambda}{(5+5\lambda) + \sqrt{20\lambda(4+\lambda)}}.$$

Por lo tanto, para valores de $(0, 1)$,

$$C_1 = -\sqrt[4]{\frac{1-\lambda}{(5+5\lambda) + \sqrt{20\lambda(4+\lambda)}}}$$

y

$$C_2 = \sqrt[4]{\frac{1-\lambda}{(5+5\lambda) + \sqrt{20\lambda(4+\lambda)}}}$$

son puntos críticos de $N_{\lambda,f_-}(x)$.

Si ahora estudiamos

$$x_+^4 = \frac{(5+5\lambda)+\sqrt{20\lambda(4+\lambda)}}{25-5\lambda}$$

es claro, que para que sea positivo, el numerador y el denominador han de ser del mismo signo y esto ocurre si $\lambda \in [0,5)$. Los puntos críticos de $N_{\lambda,f_-}(x)$ para $\lambda \in (0,5)$ son

$$C_3 = -\sqrt[4]{\frac{(5+5\lambda)+\sqrt{20\lambda(4+\lambda)}}{25-5\lambda}}$$

y

$$C_4 = \sqrt[4]{\frac{(5+5\lambda)+\sqrt{20\lambda(4+\lambda)}}{25-5\lambda}}.$$

Resumiendo,

- Si $\lambda \in (-\infty, 0]$, $N_{\lambda,f_-}(x)$ no tiene puntos críticos reales.
- Si $\lambda \in (0,1)$, $N_{\lambda,f_-}(x)$ tiene cuatro puntos críticos reales, C_1, C_2, C_3 y C_4.
- Si $\lambda = 1$, $N_{\lambda,f_-}(x)$ tiene tres puntos críticos reales, que se corresponden con las raíces de la función $f_-(x)$.
- Si $\lambda \in (1,5)$, $N_{\lambda,f_-}(x)$ tiene dos puntos críticos reales, C_3 y C_4.
- Si $\lambda \in [5,\infty)$, $N_{\lambda,f_+}(x)$ no tiene puntos críticos reales.

En la Figura 2.97 pueden verse los puntos críticos para los distintos valores del parámetro.

De nuevo el siguiente resultado simplificará de manera significativa el estudio.

Proposición 2.33 *La función de iteración del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_-(x) = x^5 - x$, $N_{\lambda,f_-}(x)$, tiene simetría impar.*

Demostración Es inmediata al comprobar que

$$N_{\lambda,f_-}(-x) = \frac{x\left((\lambda-5)x^4+1-\lambda\right)}{5x^4-1} = -N_{\lambda,f_-}(x).$$

Lo cual prueba la simetría impar, como queríamos demostrar. ∎

Como en el anterior caso, sólo es necesario estudiar uno de los dos casos. Por simplicidad estudiaremos el caso $x_0 > 0$.

De los estudios numéricos realizados, y de nuevo teniendo en cuenta que son valores aproximados, se puede extraen las siguientes conclusiones sobre el comportamiento dinámico del método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $f_-(x) = x^5 - x$:

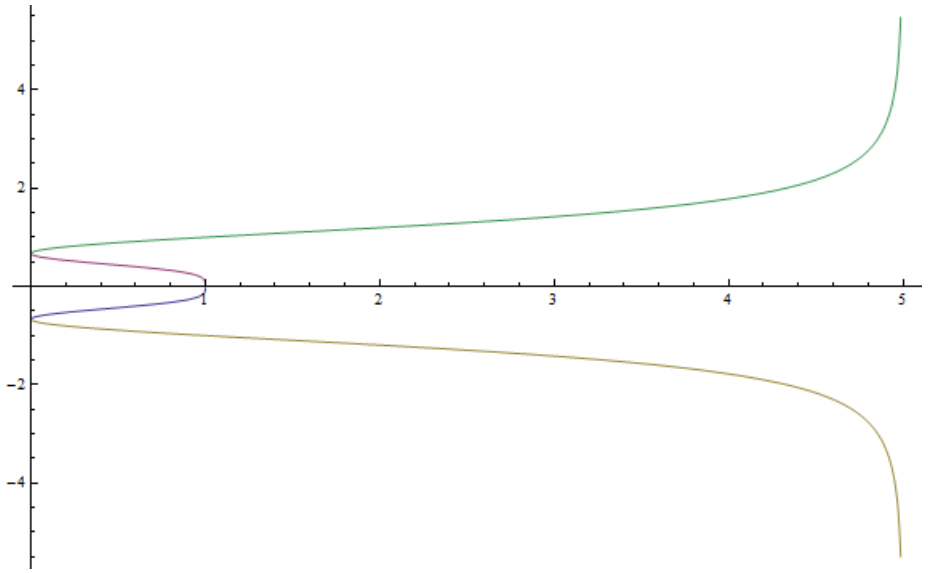
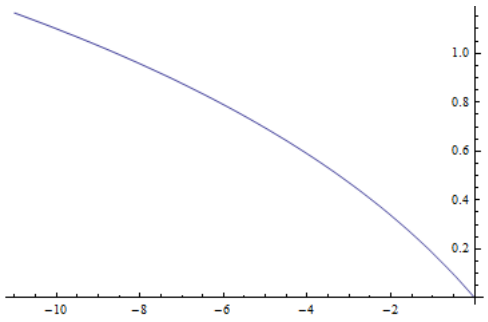


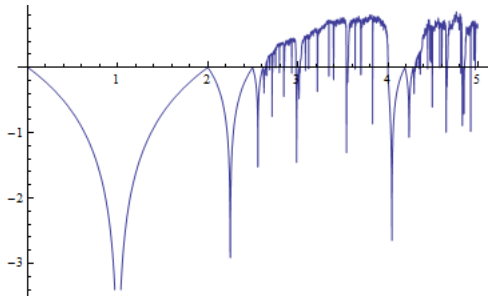
Figura 2.97: Valores que toman los puntos críticos de $N_{\lambda,f_-}(x)$ para los distintos valores del parámetro $\lambda \in (0,5)$. En azul aparece C_1, en magenta C_2, en amarillo C_3 y en verde C_4.

- Si $\lambda < 0$, las iteraciones pueden diverger hacia infinito en valor absoluto.
- Si $\lambda = 0$, el estudio carece de interés.
- Si $\lambda \in (0,2)$, los puntos fijos son atractores.
- Si $\lambda = 2$, los puntos fijos son indiferentes.
- Si $\lambda \in (2, 2.64267)$, los puntos fijos son repulsores, y la función de iteración puede presentar n-ciclos atractores.
- Si $\lambda \in (2.64267, 4)$, los puntos fijos son repulsores, y las iteraciones pueden presentar comportamiento caótico.
- Si $\lambda \in (4, 4.30800)$, los puntos fijos son repulsores, y la función de iteración puede presentar n-ciclos atractores.
- Si $\lambda \in (4.30800, 10)$, los puntos fijos son repulsores, y las iteraciones pueden presentar comportamiento caótico.
- Si $\lambda \geq 10$, las iteraciones de cada punto distinto de la raíces de $f_-(x)$ pueden diverger hacia infinito en valor absoluto.

Este comportamiento se puede ver ilustrado por los gráficos de los exponentes de Lyapunov y diagramas de Feigenbaum que se observan en las Figuras 2.98, 2.99, 2.100 y 2.101.

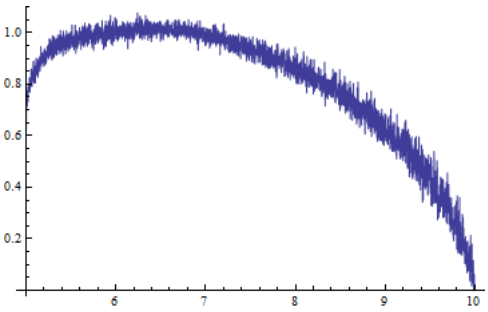


$\lambda \in (-11, 0)$

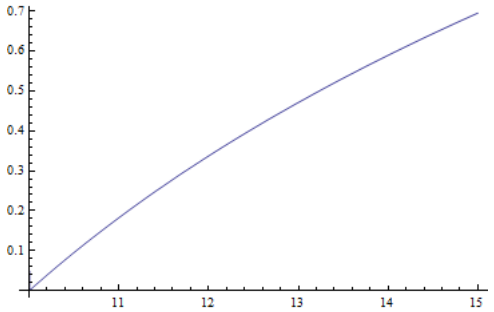


$\lambda \in (0, 5)$

Figura 2.98: Exponentes de Lyapunov asociados a $N_{\lambda,f_-}(x)$, definida en (2.5.2), tomando $x_0 = 5$, para distintos valores de λ.



$\lambda \in (5, 10)$



$\lambda \in (10, 15)$

Figura 2.99: Exponentes de Lyapunov asociados a $N_{\lambda,f_-}(x)$, definida en (2.5.2), tomando $x_0 = 5$, para distintos valores de λ.

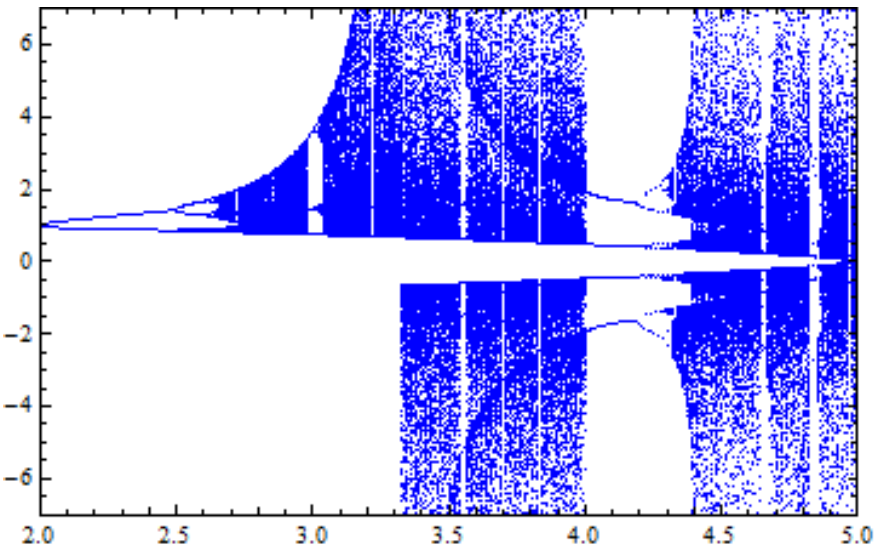


Figura 2.100: Diagrama de Feigenbaum asociado a $N_{\lambda,f_-}(x)$, definida en (2.5.2), tomando $x_0 = 5$, para distintos valores de $\lambda \in (2, 5)$.

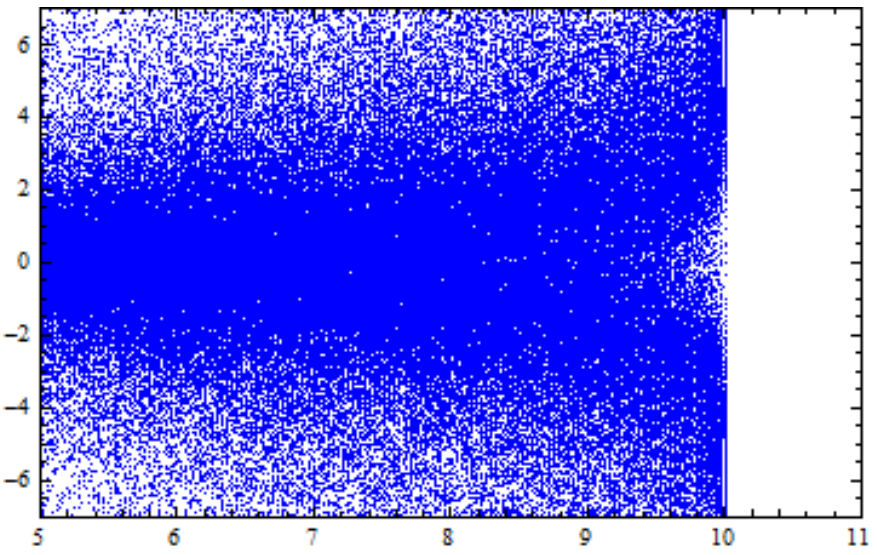


Figura 2.101: Diagrama de Feigenbaum asociado a $N_{\lambda,f_-}(x)$, definida en (2.5.2), tomando $x_0 = 5$, para distintos valores de $\lambda \in (5, 11)$.

Capítulo 3

Dinámica compleja del método de Newton amortiguado

3.1. Dinámica compleja del método de Newton

En el capítulo anterior ya vimos el estudio de la dinámica del método de Newton amortiguado aplicado a polinomios con coeficientes reales. En este capítulo daremos un paso más, y estudiaremos la dinámica del método en el plano complejo. Utilizaremos como notación, z en lugar de x para denotar puntos en el plano complejo y llevaremos a cabo un estudio similar al que se realiza en [43] para el método de Chebyshev o en [49] para otro tipo de métodos.

Uno de los objetivos más importantes en el análisis numérico es la resolución de ecuaciones no lineales, es decir, encontrar z^* tal que $p(z^*) = 0$ siendo $p(z)$ no lineal. En este contexto los métodos más utilizados son los llamados *métodos iterativos*. El método iterativo más conocido y utilizado, es *el método de Newton* cuya forma es:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{p(z_n)}{p'(z_n)}, \quad z_n \in \mathbb{C}, \tag{3.1.1}$$

donde $p(z)$ es una función definida en el plano complejo, $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Newton presentó su método (para ver una breve historia del método véase [36] o [53]) en *De Analysis Per Æquationes Numero Terminorum INFINITAS*, artículo que puede verse en la Figura 3.1.

El estudio de la dinámica del método de Newton en el plano complejo tiene una importancia histórica desde que, primero E. Schöder en el año 1870 (véase [102]) y, posteriormente A. Cayley en 1879 (véase [28]) propusieran utilizar dicho método para resolver ecuaciones definidas en el plano complejo.

Uno de los problemas más famosos es el conocido como *problema de Cayley* que consiste en estudiar las cuencas de atracción de cada una de las raíces del polinomio complejo al cual aplicamos el método de Newton (véase por ejemplo

Et ſupponens $-0{,}0054 + r = q$, hunc ut prius ſubſtituo, & operationem ſic produco quo uſq; placuerit. Verum ſi ad bis tot figuras tantum quot in Quotiente jam reperiuntur una dempta, operam continuare cupiam, pro q ſubſtituo $-0{,}0054 + r$ in hanc $6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061$, ſcilicet primo ejus termino (q^3) propter exilitatem ſuam

$y^3 - 2y - 5 = 0$		$+2{,}10000000$ $-0{,}00544853$ $+2{,}09455147 = y$
$2 + p = y$	$+y^3$	$+8 + 12p + 6p^2 + p^3$
	$+2y$	$-4 - 2p$
	-5	-5
	Summa	$-1 + 10p + 6p^2 + p^3$
$0{,}1 + q = p$	$+p^3$	$+0{,}001 + 0{,}03q + 0{,}3q^2 + q^3$
	$+6p^2$	$+0{,}06 + 1{,}2 + 6{,}0$
	$+10p$	$+1, + 10,$
	-1	$-1,$
	Summa	$+0{,}061 + 11{,}23q + 6{,}3q^2 + q^3$
$-0{,}0054 + r = q$	$+6{,}3q^2$	$+0{,}000183708 - 0{,}06804r + 6{,}3r^2$
	$+11{,}23q$	$-0{,}060642 + 11{,}23$
	$+0{,}061$	$+0{,}061$
	Summa	$+0{,}000541708 + 11{,}16196r + 6{,}3r^2$
$-0{,}00004854 + s = r$		

Figura 3.1: Artículo original en *De Analysis Per Æquationes Numero Terminorum INFINITAS* donde Newton presenta su método.

[54], [55] o [60]). En un principio para polinomios cuadráticos (Cayley estudió el polinomio $p(z) = z^2 - 1$) el problema resultó ser fácilmente resoluble ya que las cuencas de atracción asociadas a las raíces quedaban determinadas como dos semiplanos separados por una recta que resultaba ser la mediatriz del segmento que une las dos raíces. Sin embargo, cuando dio el paso a polinomios cúbicos (concretamente, para $p(z) = z^3 - 1$) observó que el problema no era para nada trivial. El propio Cayley formuló su problema como sigue:

> The problem is to determine the regions of the plane, such that P being taken at pleasure anywhere within region we arrive ultimately at the point A; anywhere within region we arrive ultimately at the point B and so for the several points representing the roots of the equation.

El problema original de Cayley puede verse en la Figura 3.2, además, una modificación de este artículo, publicado un año después, puede verse en la Figura 3.3. En él, Cayley quería caracterizar los conjuntos de valores iniciales, tales que si z^* es una raíz de $p(z) = 0$, la iteración del método de Newton aplicado a $p(z)$ converge a z^*. En lenguaje matemático, se trata de caracterizar el conjunto

$$\mathcal{A}(z^*) = \{z_0 \in \bar{\mathbb{C}}; z_n \to z^*\},$$

que es lo que se denomina cuenca de atracción asociada a la raíz z^* (véase la Definición 1.9).

Si observamos la Figura 3.4, vemos cómo para el caso del polinomio cuadrático $p(z) = z^2 - 1$, la diferenciación de las cuencas de atracción es sencilla, ya que se corresponden con los dos semiplanos

$$\mathbb{C}^- = \{z | \Re(z) < 0\}$$

y

$$\mathbb{C}^+ = \{z | \Re(z) > 0\},$$

donde $\Re(z)$ denota la parte real de z.

Cada punto de $\mathbb{C}^-$ converge hacia $z = -1$, mientras que cada punto del semiplano $\mathbb{C}^+$ converge hacia la raíz $z = 1$. Además, en el eje imaginario, que se corresponde con la separación de ambos planos, es conocido que el método tiene un comportamiento caótico (véase Sección 3.1.2). Ahora bien, si observamos la Figura 3.5 vemos que para polinomios de grado mayor, las cuencas de atracción no son para nada triviales, por lo que no resulta tan extraño que Cayley fracasara en su intento de caracterizarlas. Además, teniendo en cuenta el hecho de que no disponía de los potentes programas de cálculo simbólico ni de dibujo de los que disponemos hoy en día (véase [109] o [110]), el hecho resulta más que justificado.

Con posterioridad, los matemáticos franceses P. Fatou y G. Julia (véase [41] y [61]), éste último inspirado en el problema original de Cayley, obtuvieron resultados significativos al estudiar funciones en una forma más general. Con sus trabajos sentaron las bases del estudio de la iteración de funciones racionales en el plano complejo extendido, $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, conocido también como la esfera de Riemann. Ambos se apoyaron en el estudio realizado por Montel (véase [79]) sobre familias normales.

3.1.1. Propiedades del método de Newton en el plano complejo ampliado

En esta subsección veremos algunas de las propiedades del método de Newton aplicado a polinomios en el plano complejo. Se muestran estas propiedades, ya que pueden servir de referencia en el estudio de otros procesos iterativos, en nuestro caso, del método de Newton amortiguado.

Desiderata and Suggestions.

By Professor Cayley, *Cambridge, England.*

No. 3.—THE NEWTON-FOURIER IMAGINARY PROBLEM.

The Newtonian method as completed by Fourier, or say the Newton-Fourier method, for the solution of a numerical equation by successive approximations, relates to an equation $f(x) = 0$, with real coefficients, and to the determination of a certain real root thereof a by means of an assumed approximate real value ξ satisfying prescribed conditions: we then, from ξ, derive a nearer approximate value ξ_1 by the formula $\xi_1 = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$; and thence, in like manner, $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ approximating more and more nearly to the required root a.

In connexion herewith, throwing aside the restrictions as to reality, we have what I call the Newton-Fourier Imaginary Problem, as follows.

Take $f(u)$, a given rational and integral function of u, with real or imaginary coefficients; ξ, a given real or imaginary value, and from this derive ξ_1 by the formula $\xi_1 = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$, and thence $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ each from the preceding one by the like formula.

A given imaginary quantity $x + iy$ may be represented by a point the coordinates of which are (x, y): the roots of the equation are thus represented by given points $A, B, C \ldots$, and the values $\xi, \xi_1, \xi_2 \ldots$ by points $P, P_1, P_2, \ldots$ the first of which is assumed at pleasure, and the others each from the preceding one by the like given geometrical construction. The problem is to determine the regions of the plane, such that P being taken at pleasure anywhere within one region we arrive ultimately at the point A; anywhere within another region at the point B; and so for the several points representing the roots of the equation.

The solution is easy and elegant in the case of a quadric equation, but the next succeeding case of the cubic equation appears to present considerable difficulty.

Cambridge, *March 3d, 1879.*

Figura 3.2: El artículo original de Sir Arthur Cayley de 1879 titulado *The Newton-Fourier Imaginary Problem.*

743.

ON THE NEWTON-FOURIER IMAGINARY PROBLEM.

[From the *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. III. (1880), pp. 231, 232.]

THE Newtonian process of approximation to the root of a numerical equation $f(u)=0$, consists in deriving from an assumed approximate root ξ a new value $\xi_1=\xi-\frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$, which should be a closer approximation to the root sought for: taking the coefficients of $f(u)$ to be real, and also the root sought for, and the assumed value ξ, to be each of them real, Fourier investigated the conditions under which ξ_1 is in fact a closer approximation. But the question may be looked at in a more general manner: ξ may be any real or imaginary value, and we have to inquire in what cases the series of derived values

$$\xi_1=\xi-\frac{f(\xi)}{f'(\xi)},\quad \xi_2=\xi_1-\frac{f(\xi_1)}{f'(\xi_1)},\ \dots$$

converge to a root, real or imaginary, of the equation $f(u)=0$. Representing as usual the imaginary value ξ, $=x+iy$, by means of the point whose coordinates are x, y, and in like manner ξ_1, $=x_1+iy_1$, &c., then we have a problem relating to an infinite plane; the roots of the equation are represented by points A, B, $C,\dots$; the value ξ is represented by an arbitrary point P; and from this by a determinate geometrical construction we obtain the point P_1, and thence in like manner the points P_2, $P_3,\dots$ which represent the values ξ_1, ξ_2, $\xi_3,\dots$ respectively. And the problem is to divide the plane into regions, such that, starting with a point P_1 anywhere in one region, we arrive ultimately at the root A; anywhere in another region we arrive ultimately at the root B; and so on for the several roots of the equation. The division into regions is made without difficulty in the case of a quadric equation; but in the next succeeding case, that of a cubic equation, it is anything but obvious what the division is: and the author had not succeeded in finding it.

Figura 3.3: Artículo de Sir Arthur Cayley titulado *On The Newton-Fourier Imaginary Problem* publicado en 1880.

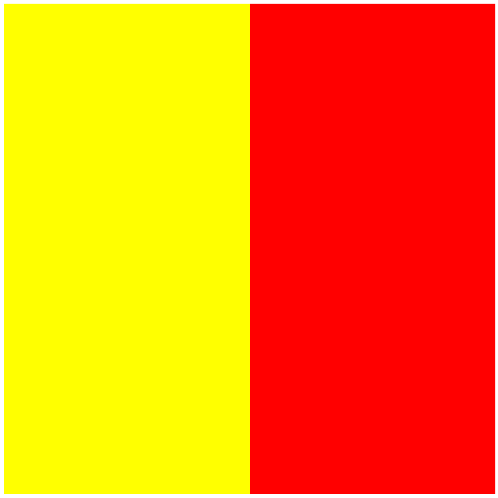


Figura 3.4: Cuencas de atracción asociadas al método de Newton aplicado al polinomio $p(z) = z^2 - 1$. En amarillo los puntos que convergen a $z = -1$ y en rojo los que convergen a $z = 1$.

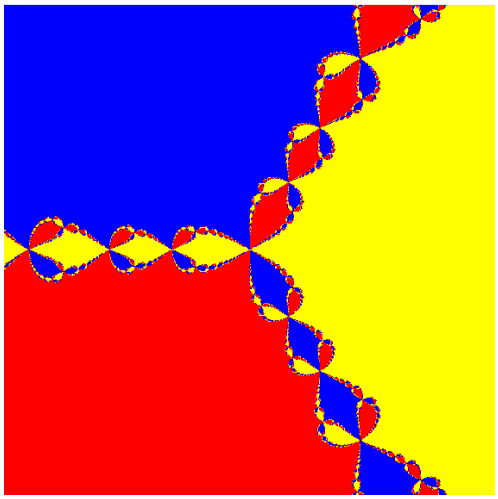


Figura 3.5: Cuencas de atracción asociadas al método de Newton aplicado al polinomio $p(z) = z^3 - 1$. En amarillo los puntos que convergen a $z = 1$, en rojo los que convergen a $z = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ y en azul los puntos que convergen a $z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

Sea $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ con $a_n \neq 0$, un polinomio de grado n con coeficientes complejos y sea

$$N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}, \tag{3.1.2}$$

la función de iteración del método de Newton aplicado a dicho polinomio. Entonces algunas de las propiedades elementales muy conocidas (véase [29], [40] o

[53]) de la dinámica de $N_p(z)$ definida en (3.1.2) son las siguientes:

(i) Los únicos puntos fijos finitos de $N_p(z)$ son las raíces de $p(z)$, es decir,

$$N_p(z^*) = z^* \Longleftrightarrow p(z^*) = 0.$$

(ii) El infinito es siempre un punto fijo repulsor de $N_p(z)$, con multiplicador asociado $N_p'(\infty) = \frac{n}{n-1} > 1$. Entonces, si el método parte de un punto cercano al infinito, entendiendo por esto $|z| \gg 1$, sus iteraciones sucesivas se aproximan a una parte compacta de $\mathbb{C}$, es decir, se «alejan» del infinito.

(iii) La raíces simples de $p(z)$ son puntos fijos superatractores de $N_p(z)$, ya que

$$N_p'(z) = L_p(z), \tag{3.1.3}$$

donde $L_p(z) = \frac{p(z)p''(z)}{(p'(z))^2}$ (ya visto en el capítulo anterior) es conocido como grado de convexidad logarítmica, que fue introducido por Garay y Hernández en [42] y estudiado por Gutiérrez en su tesis doctoral [50], entre otros. Por tanto, $N_p'(z^*) = 0$. Obsérvese que ésto implica que $N_p(z)$ es conjugada a la aplicación $z \mapsto z^k$, para algún $k > 1$ en una vecindad de z^*.

(iv) Las raíces de $p(z)$ de multiplicidad $m > 1$, son puntos fijos atractores de $N_p(z)$. En efecto, si z^* es una raíz de $p(z)$ con multiplicidad $m > 1$, se tiene que su multiplicador asociado es $N_p'(z^*) = \frac{m-1}{m} < 1$.

(v) Los puntos críticos de $N_p(z)$ son las raíces simples de $p(z)$ y los puntos que anulan la segunda derivada. Por lo tanto, los únicos puntos críticos libres de $N_p(z)$ son los puntos tales que anulan $p''(z)$.

Conviene recordar también el concepto de punto fijo extraño.

Definición 3.1 *Sea $R(z)$ una función racional asociada a un polinomio $q(z)$. Llamaremos puntos fijos extraños a los puntos fijos, $R(z) = z$, que no son soluciones de $q(z) = 0$. Estos puntos fijos serán atractores, repulsores o indiferentes.*

Todas estas propiedades caracterizan el método de Newton completamente, aunque hay otros resultados que dan propiedades dinámicas importantes del método de Newton aplicado a polinomios. Por ejemplo, el resultado siguiente, atribuido a J. Head en su tesis doctoral de 1987 (véase [57]), a Nishizawa y Fujimura en 1992 (véase [83]) y a G. Saunder en 1984 (véase [101]) es una buena muestra de ello.

Teorema 3.1 *Una función racional $R : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ de grado $n \geq 2$ es la función de iteración del método de Newton aplicado a un polinomio de grado mayor o igual que 2 si y sólo si el punto $z = \infty$ es el único punto fijo repulsor y para todos los demás puntos fijos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ existe un número $d_j \in \mathbb{N}$, tal que $R'(\alpha_j) = \frac{d_j - 1}{d_j} < 1$.*

La demostración de este teorema se apoya en el teorema de Shishikura [103] que establece que para funciones racionales $R(z)$ con un único punto fijo repulsor o racionalmente indiferente con multiplicador $\mu = 1$, el conjunto de Julia es conexo. Teniendo en cuenta que para el método de Newton el único punto fijo repulsor es el infinito se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 3.2 *Sea $p(z)$ un polinomio con coeficientes complejos, entonces el conjunto de Julia de la función racional $N_p(z)$ introducida en* (3.1.2) *es conexo.*

Por último, y para finalizar con esta sección, veremos una técnica que nos será de gran utilidad, y ya vista en el capítulo anterior para polinomios con coeficientes reales, y que es conocido como *escalado* y que puede verse en [92] y [99].

Teorema 3.3 *Sea $p(z)$ un polinomio con coeficientes complejos y sea $T(z) = \alpha z + \beta$, con $\alpha \neq 0$ una aplicación afín. Si $q(z) = p \circ T(z)$, entonces $N_p(z)$ y $N_q(z)$ son conjugadas, es decir, $T \circ N_q \circ T^{-1}(z) = N_p(z)$.*

Demostración Se tiene que

$$\begin{aligned} T \circ N_q \circ T^{-1}(z) &= T(N_q(T^{-1}(z))) \\ &= T\left(T^{-1}(z) - \frac{q(T^{-1}(z))}{q'(T^{-1}(z))}\right) \\ &= \alpha\left(T^{-1}(z) - \frac{q(T^{-1}(z))}{q'(T^{-1}(z))}\right) + \beta \\ &= \alpha\left(\frac{z}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\right) - \frac{q(T^{-1}(z))}{\alpha^{-1}q'(T^{-1}(z))} + \beta \\ &= z - \frac{p(z)}{p'(z)} \\ &= N_p(z). \end{aligned}$$

Como queríamos demostrar. ∎

De forma inmediata se demuestra el siguiente resultado.

Corolario 3.4 *Sea $\nu(z) = \bar{z}$ la aplicación conjugado de z y sean*

$$p(z) = \prod(z - r_i)$$

y

$$q(z) = \prod(z - \bar{r}_i).$$

Entonces, $N_p(z)$ es topológicamente conjugada, vía la transformación $\nu(z)$, a $N_q(z)$.

Demostración Se demuestra mediante un simple cálculo. Teniendo en cuenta el hecho de que, $\overline{p(z)} = q(\bar{z})$ y también que $\overline{p^{(j)}(z)} = q^{(j)}(\bar{z})$ donde $p^{(j)}(z)$ denota la j-ésima derivada del polinomio $p(z)$. Se tiene que

$$\nu \circ N_p(z) = \overline{z - \frac{p(z)}{p'(z)}} = \bar{z} - \overline{\frac{p(z)}{p'(z)}} = \bar{z} - \frac{q(\bar{z})}{q'(\bar{z})} = N_q \circ \nu(z).$$

Y ésto completa la demostración. ∎

Una aplicación de el Teorema 3.3 es que al utilizarlo nos permite simplificar el número de parámetros. Más adelante veremos cómo nos permite incluso, que el estudio no dependa de las raíces del polinomio a estudiar.

3.1.2. El método de Newton aplicado a ecuaciones polinómicas

Durante esta subsección estudiaremos el comportamiento dinámico del método de Newton aplicado a polinomios. Éste es un tema ampliamente estudiado por varios autores (véase por ejemplo [19], [44], [45], [78]). No obstante, en esta memoria daremos un tratamiento ligeramente distinto al estudio. En lugar de considerar el grado del polinomio como parámetro que va cambiando en el estudio, consideraremos como parámetro el número de raíces distintas. De esta forma podemos apreciar también la influencia de la multiplicidad de las raíces en el comportamiento dinámico del método de Newton.

El caso $p(z) = (z-a)^m, m \geq 1$

Comenzaremos estudiando el caso más simple, es decir, el caso en el que tenemos un polinomio con una única raíz. Sea $p(z) = (z-a)^m,\ a \in \mathbb{C},\ m \geq 2$. Entonces notemos que

$$N_p(z) = z - \frac{(z-a)^m}{m(z-a)^{m-1}} = \frac{(m-1)z + a}{m}. \tag{3.1.4}$$

Ahora, si conjugamos con la aplicación afín $A(z) = (z-a)$, se tiene que $N_p(z)$ es conjugado con la aplicación racional obtenida aplicando el método de Newton a $q(z) = z^m$, es decir,

$$N_q(z) = A \circ N_p \circ A^{-1}(z) = z - \frac{z^m}{mz^{m-1}} = \frac{m-1}{m} z. \tag{3.1.5}$$

De manera inmediata podemos deducir las siguientes conclusiones.

Teorema 3.5 *La función racional $N_q(z)$ definida en* (3.1.5) *tiene dos puntos fijos en $\bar{\mathbb{C}}$, que son ∞ y 0. El carácter de dichos puntos fijos es el siguiente*

(i) *$z = 0$ tiene como multiplicador asociado $\mu = \frac{m-1}{m} < 1$. Por lo tanto, es un punto fijo atractor.*

(ii) *$z = \infty$ tiene como multiplicador $\mu = \frac{m}{m-1} > 1$, por lo que, es un punto fijo repulsor.*

Como consecuencia inmediata obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.6 *La función racional $N_p(z)$ definida en* (3.1.4) *tiene dos puntos fijos en $\bar{\mathbb{C}}$ que son $z = \infty$ y $z = a$. El carácter de dichos puntos fijos es el siguiente*

(i) *$z = a$ tiene como multiplicador asociado $\mu = \frac{m-1}{m} < 1$, y, por lo tanto, es un punto fijo atractor.*

(ii) *$z = \infty$ tiene como multiplicador $\mu = \frac{m}{m-1} > 1$, por lo que, es un punto fijo repulsor.*

El caso $p(z) = (z-a)(z-b)$

Ahora, estudiaremos todo lo relacionado con polinomios de segundo grado con dos raíces diferentes a y b. Para ello, realizaremos un estudio similar al llevado a cabo en el caso anterior, aunque adaptándolo. El siguiente resultado, fundamental en el estudio de este tipo de polinomios, es el teorema de Cayley que vimos en la Sección 3.1.1.

Aplicando el método de Newton a un polinomio de este estilo, obtenemos que su forma es

$$N_p(z) = z - \frac{(z-a)(z-b)}{2z-a-b}. \tag{3.1.6}$$

Si ahora utilizamos la transformación de Möbius

$$M_2(z) = \frac{z-a}{z-b}, \tag{3.1.7}$$

observamos que nos lleva la raíz a a $z = 0$ y la raíz b a $z = \infty$. Además, obtenemos la aplicación racional siguiente

$$S_p(z) = M_2 \circ N_p \circ M_2^{-1}(z) = z^2. \tag{3.1.8}$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.7 *Sea $N_p(z)$ el método de Newton aplicado al polinomio $p(z) = (z-a)(z-b)$, con $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$. Entonces $N_p(z)$ es conjugada con la aplicación $S_p(z)$, dada en (3.1.8) mediante la transformación de Möbius $M_2(z)$ definida en (3.1.7). Además, el conjunto de Julia $\mathcal{J}(N_p)$ es una circunferencia en la esfera compleja que pasa por el punto del infinito, o equivalentemente, $\mathcal{J}(N_p)$ es la recta que equidista de los puntos a y b en el plano complejo.*

Demostración Se puede comprobar por sustitución directa que $S_p(z) = M_2 \circ N_p \circ M_2^{-1}(z) = z^2$, aunque el cálculo puede resultar un poco tedioso. A continuación, damos una demostración alternativa que puede resultar más interesante desde el punto de vista matemático. Lo primero, es observar que

$$\begin{array}{ll} N_p(a) = a & M_2(a) = 0 \\ N_p(b) = b & M_2(b) = \infty \\ N_p(\infty) = \infty & M_2(\infty) = 1. \end{array}$$

Entonces, se tiene que

$$\begin{array}{rccccccc} S_p: & z & \to & M_2^{-1}(z) & \to & N_p(M_2^{-1}(z)) & \to & M_2(N_p(M_2^{-1}(z))) \\ & 0 & \to & a & \to & a & \to & 0 \\ & \infty & \to & b & \to & b & \to & \infty \\ & 1 & \to & \infty & \to & \infty & \to & 1. \end{array}$$

Notemos que, $S_p(z)$ es una aplicación racional de grado 2 (como $N_p(z)$) que fija el 0, el ∞ y el 1. Además,

$$\begin{aligned} S_p'(z) &= (M_2 \circ N_p \circ M_2^{-1})'(z) \\ &= M_2'(N_p(M_2^{-1}(z)))N_p'(M_2^{-1}(z))(M_2^{-1})'(z) \\ &= \frac{M_2'(N_p(M_2^{-1}(z)))N_p'(M_2^{-1}(z))}{M_2'(M_2^{-1}(z))}. \end{aligned}$$

Como

$$M_2'(z) = \frac{a-b}{(z-b)^2}$$

y

$$N_p'(z) = L_p(z) = \frac{p(z)p''(z)}{p'(z)^2},$$

se tiene que

$$S_p'(0) = \frac{M_2'(N_p(a))N_p'(a)}{M_2'(a)} = N_p'(a) = 0.$$

Por otra parte, como $M_2'(b) = \infty$,

$$S_p'(\infty) = \lim_{z\to b} \frac{M_2'(N_p(z))N_p'(z)}{M_2'(z)} = \lim_{z\to b} \frac{(z-b)^2}{(N_p(z)-b)^2} N_p'(z) = \lim_{z\to b} \frac{1}{N_p'(z)} = \infty.$$

Así, $S_p(z)$ tiene una raíz doble en $z = 0$, luego es de la forma

$$S_p(z) = \frac{z^2}{\alpha z^2 + \beta z + \gamma}.$$

Como $S_p(\infty) = \infty$, $\alpha = 0$. Como $S_p'(\infty) = \infty$ y,

$$S_p'(\infty) = \lim_{z\to\infty} \frac{2z(\beta z+\gamma) - \beta z^2}{(\beta z+\gamma)^2} = \frac{1}{\beta},$$

se sigue que $\beta = 0$. Por último, como $S_p(1) = 1$, se tiene que $\gamma = 1$ y, por lo tanto, $S_p(z) = z^2$. Y ésto concluye la demostración. ∎

Como consecuencia del resultado anterior podemos formular las siguientes propiedades dinámicas asociadas a las aplicaciones $N_p(z)$ y su conjugada $S_p(z)$.

Teorema 3.8 *La función racional $S_p(z)$ definida en (3.1.8) tiene como puntos fijos $z = 0$, $z = 1$ y $z = \infty$. Los multiplicadores asociados a ellos son los siguientes:*

(i) $\mu_0 = 0$, *por lo tanto,* $z = 0$ *es superatractor.*

(ii) $\mu_\infty = 0$, *así que,* $z = \infty$ *es también superatractor.*

(iii) $\mu_1 = 2$, *entonces,* $z = 1$ *es repulsor.*

Y como consecuencia inmediata se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 3.9 *La función racional $N_p(z)$ definida en (3.1.6) tiene como puntos fijos $z = a$, $z = b$ y $z = \infty$.*

Los multiplicadores asociados a ellos son los siguientes

(i) $\mu_a = 0$, *por lo tanto,* $z = a$ *es superatractor.*

(ii) $\mu_b = 0$, *así que,* $z = b$ *es superatractor también.*

(iii) $\mu_\infty = 2$, *entonces,* $z = \infty$ *es repulsor.*

Notemos que usando el Teorema 3.3, el comportamiento del método de Newton aplicado a polinomios de segundo grado con 2 raíces diferentes es conjugado al del método de Newton aplicado a $z^2 - 1$.

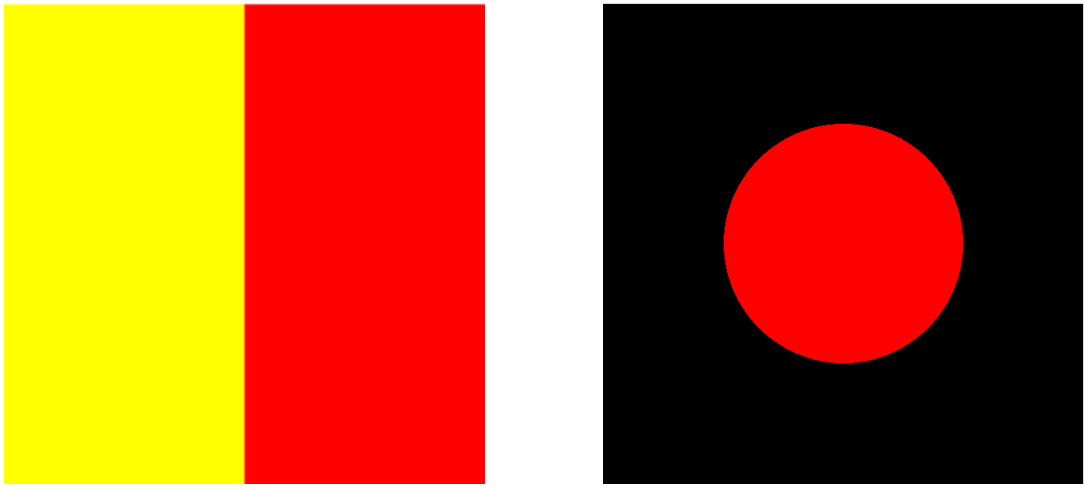
En la Figura 3.6 vemos las cuencas de atracción asociadas a los puntos fijos del método de Newton aplicado al polinomio $p(z) = z^2 - 1$ y a los puntos fijos de $S_p(z)$. Notemos que el conjunto de Julia del primero es una recta y que en el segundo caso es una circunferencia.

El caso $f(z) = (z - a)^2(z - b)$

Continuamos con el estudio de polinomios con dos raíces diferentes, pero ahora una de las raíces será simple y la otra tendrá multiplicidad 2. Siguiendo los mismos pasos que en los casos anteriores, si aplicamos el método de Newton a este tipo de polinomios obtenemos la expresión

$$N_p(z) = z - \frac{(z - a)^2(z - b)}{3z^2 - (4a + 2b)z + a^2 + ab}. \tag{3.1.9}$$

Y aplicando la transformación de Möbius $M_2(z)$ definida en (3.1.7), que nos lleva la raíz doble a 0 y la simple a ∞, definimos nuestra nueva función racional



$N_p(z)$ $S_p(z)$

Figura 3.6: En la parte izquierda aparecen las cuencas de atracción de $N_p(z)$ aplicada a $p(z) = z^2 - 1$ y en el de la derecha las cuencas de atracción de $S_p(z)$, definida en (3.1.8).

$$S_p(z) = M_2 \circ N_p \circ M_2^{-1}(z) = \frac{z^2 + z}{2}, \tag{3.1.10}$$

que, como se observa, no depende de las raíces a y b. Si en lugar de utilizar esta transformación, utilizamos la transformación $M_1(z)$, definida como

$$M_1(z) = 1 + \frac{2(z-a)}{a-b}, \tag{3.1.11}$$

que nos lleva la raíz a a $z = 1$ y la raíz b a $z = -1$ podemos definir la nueva función racional como

$$R_p(z) = M_1 \circ N_p \circ M_1^{-1}(z) = \frac{2z^2 + z + 1}{3z + 1}. \tag{3.1.12}$$

que tampoco depende de las raíces a y b.

Ahora, podemos extraer las siguientes conclusiones.

Teorema 3.10 *La función racional $S_p(z)$ definida en (3.1.10) tiene como puntos fijos $z = 0$, $z = 1$ y $z = \infty$, con multiplicadores asociados*

(i) $\mu_0 = 1/2$, *y por lo tanto, $z = 0$ es atractor.*

(ii) $\mu_\infty = 0$, *consecuentemente, $z = \infty$ es superatractor.*

(iii) $\mu_1 = 3/2$, *es decir, $z = 1$ es repulsor.*

$R_p(z)$ $S_p(z)$

Figura 3.7: En la parte izquierda aparecen las cuencas de atracción asociadas a $R_p(z)$ definida en (3.1.12) y en la parte derecha las cuencas de atracción asociadas a $S_p(z)$, definida en (3.1.10).

Y como consecuencia inmediata se obtiene los siguientes corolarios.

Corolario 3.11 *La función racional $N_p(z)$ definida en (3.1.9) tiene como puntos fijos $z = a$, $z = b$ y $z = \infty$. Además, se tiene que*

(i) *$z = a$ es atractor.*

(ii) *$z = b$ es superatractor.*

(iii) *$z = \infty$ es repulsor.*

Corolario 3.12 *La función racional $R_p(z)$ definida en (3.1.12) tiene como puntos fijos: $z = 1$, $z = -1$ y $z = \infty$. Y, además*

(i) *$z = 1$ es atractor.*

(ii) *$z = -1$ es superatractor.*

(iii) *$z = \infty$ es repulsor.*

En la Figura 3.7 observamos las cuencas de atracción asociadas a $R_p(z)$ y a $S_p(z)$. Y vemos como el conjunto de Julia deja de ser una recta y una circunferencia respectivamente.

El caso $p(z) = (z-a)^m(z-b)$

A la vista de lo que ocurre en los casos anteriores para polinomios con 2 raíces diferentes, es claro que la dinámica del método se ve afectada por la multiplicidad de las raíces. Nos centraremos en este apartado, en estudiar la importancia de dicha multiplicidad. Si aplicamos el método de Newton (3.1.2), a un polinomio de la forma $p(z) = (z-a)^m(z-b)$, su expresión viene dada por

$$N_p(z) = \frac{mz^2 + (1-m)bz - ab}{(m+1)z - (a+bm)}.$$

Si ahora le aplicamos la transformación (3.1.11), la función racional asociada es

$$R_p(z) = \frac{mz^2 + (m-1)z + 1}{(m+1)z + (m-1)}. \tag{3.1.13}$$

Si observamos los gráficos de la Galería Newton, Figura 3.8, se observa cómo la cuenca de atracción de la raíz múltiple «invade» a la de la raíz simple. Además, cuanto mayor es la multiplicidad «más agresiva» es dicha invasión. Para $m > 1$, el conjunto de Julia asociado a $R_p(z)$ ya no es el eje imaginario, sino una curva de estructura más compleja. A la vista de los gráficos que aparecen en dicha Galería (Figura 3.8) parece que el conjunto de Julia va aumentando su inclinación y que tiene un vértice que se va desplazando desde el 0 hacia el -1. Por lo tanto, la conclusión que se puede extraer es que la multiplicidad de las raíces juega un papel muy importante en el estudio de la dinámica del método de Newton para este tipo de polinomios.

3.2. Dinámica compleja del método de Newton amortiguado

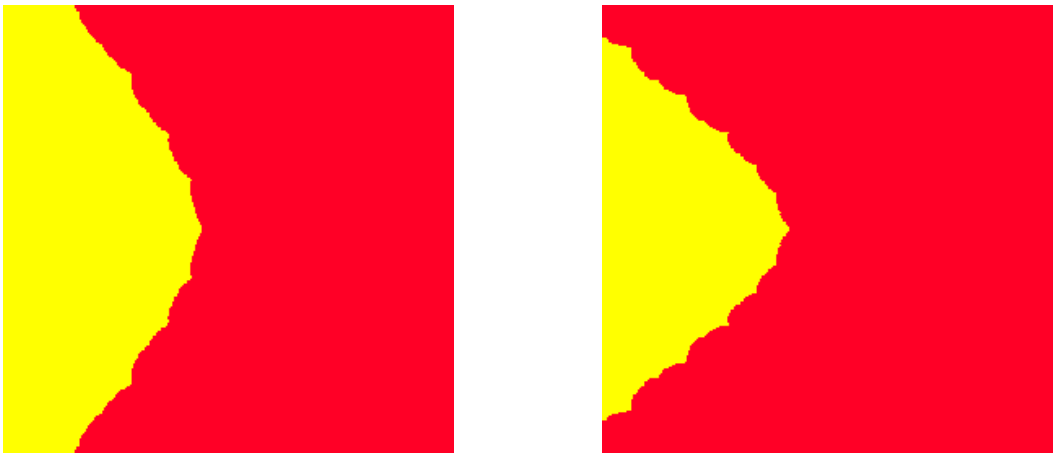
En esta sección vamos a estudiar una modificación del método de Newton introducido en (3.1.1), que consiste en la introducción de un parámetro λ en el paso de Newton de la siguiente manera

$$z_{n+1} = z_n - \lambda \frac{p(z_n)}{p'(z_n)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{3.2.1}$$

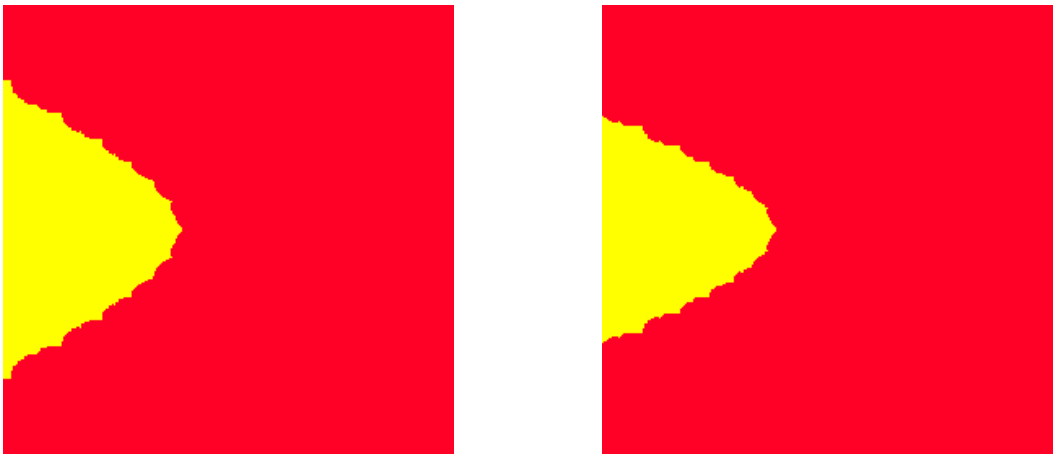
con el objetivo de estudiar la influencia del parámetro amortiguador en las cuencas de atracción como se puso de manifiesto en [35]. Durante todo el capítulo omitiremos el caso $\lambda = 0$ por carecer de sentido, ya que entonces el método es la identidad.

Una de las formas de introducir este método es a partir del método de Newton contínuo (véase [81])

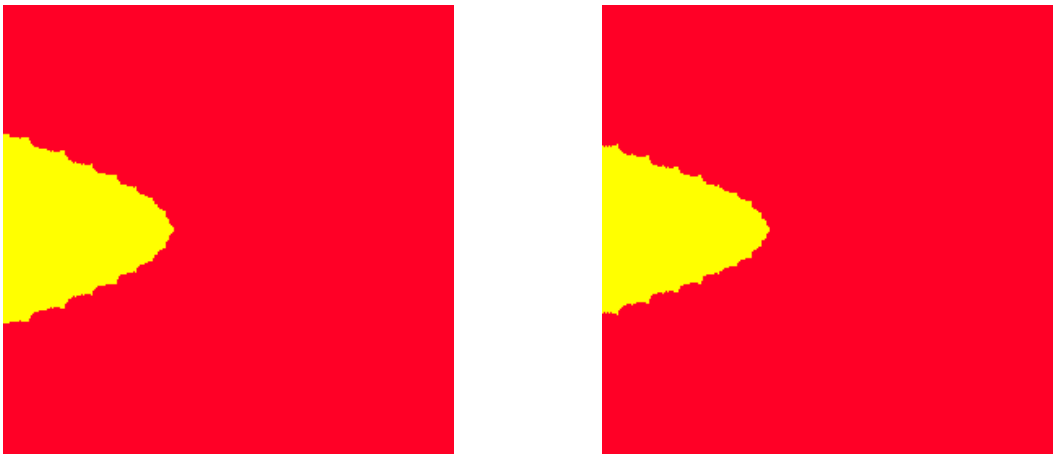
$$z'(t) = -\frac{p(z(t))}{p'(z(t))}. \tag{3.2.2}$$



$m = 2$ $m = 3$



$m = 4$ $m = 5$



$m = 6$ $m = 7$

Figura 3.8: Galería Newton. Cuencas de atracción asociadas a $R_p(z)$ definida en (3.1.13) para diferentes valores de m. En rojo aparece la cuenca de $z = 1$, la raíz múltiple, y en amarillo la cuenca de $z = -1$, la raíz simple. Además, se observa cómo a medida que aumenta m la cuenca de la raíz múltiple «invade» más la de la raíz simple.

que surge de resolver el problema de valor inicial

$$\begin{cases} z'(t) = -\dfrac{p(z(t))}{p'(z(t))} \\ z(0) = z_0, \end{cases}$$

aplicando el método de Euler explícito

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta t} = -\frac{p(z_n)}{p'(z_n)}.$$

Finalmente, reordenando términos tenemos que

$$z_{n+1} = z_n - \Delta t \frac{p(z_n)}{p'(z_n)}, \quad z_n \in \mathbb{C},$$

Y ahora tomando $\lambda = \Delta t$ obtenemos el método de Newton amortiguado definido en (3.2.1).

Para estudiar la dinámica del método de Newton amortiguado, denotamos por $N_{\lambda,p}(z)$ a la siguiente función de iteración

$$N_{\lambda,p}(z) = z - \lambda \frac{p(z)}{p'(z)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{3.2.3}$$

donde $p(z)$ es un polinomio con coeficientes complejos. Durante esta sección estudiaremos cómo afecta la introducción del parámetro, y veremos que influye significativamente en la dinámica del método.

Puntos fijos de $N_{\lambda,p}(z)$

Algunas afirmaciones, que aparecen en [93], relacionadas con los puntos fijos del método de Newton amortiguado aplicado a un polinomio con coeficientes complejos, $p(z)$, son las siguientes:

- Las raíces de $p(z)$ son los únicos puntos fijos finitos de $N_{\lambda,p}(z)$. En efecto, cada raíz simple de $p(z)$ es un punto fijo de $N_{\lambda,p}(z)$.
- Por otra parte, si z^* es una raíz de multiplicidad $m > 1$, entonces se tiene que
$$p(z) = (z - z^*)^m q(z),\ q(z^*) \neq 0,$$
además,
$$p'(z) = (z - z^*)^{m-1}(mq(z) + (z - z^*)q'(z)),$$
y entonces,
$$N_{\lambda,p}(z^*) = z^* - \lambda\,(z - z^*)\,\frac{q(z)}{mq(z) + (z - z^*)q'(z)}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{z \to z^*} -\lambda \, (z - z^*) \, \frac{q(z)}{mq(z) + (z - z^*)q'(z)} = 0.$$

Entonces, $N_{\lambda,p}(z^*) = z^*$.

- Si $p(z)$ es un polinomio de grado mayor que 1, entonces ∞ también es un punto fijo de $N_{\lambda,p}(z)$. Si $p(z)$ es de grado 1 y $\lambda \neq 1$, ∞ es un punto fijo.

Multiplicadores asociados a los puntos fijos

Notemos que la derivada del método tiene la forma

$$N'_{\lambda,p}(z) = \frac{(1-\lambda)p'^2(z) + \lambda p(z)p''(z)}{p'^2(z)} = 1 - \lambda + \lambda L_p(z),$$

entonces, es fácil comprobar que

- El multiplicador asociado a una raíz simple z^* es $1 - \lambda$.
- Ahora, si z^* es una raíz de multiplicidad $m > 1$, tenemos que el multiplicador asociado a dicho punto fijo es $1 - \frac{\lambda}{m}$.
- ∞ es un punto fijo repulsor con multiplicador asociado $\frac{\lambda - d}{\lambda}$ donde d es el grado de $p(z)$.

  Vamos a ver este último punto con más detalle. Sea $p(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \cdots + a_0$ un polinomio de grado d, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que su coeficiente director es 1. Si aplicamos el método de Newton amortiguado a este polinomio obtenemos

$$N_{\lambda,p}(z) = z - \lambda \frac{z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \cdots + a_0}{dz^{d-1} + a_{d-1}(d-1)z^{d-2} + \cdots + a_1}.$$

  Entonces tenemos que

$$N_{\lambda,p}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{\lambda}{z} \frac{a_0 z^d + a_1 z^{d-1} + \cdots + a_d}{a_1 z^{d-1} + a_2(d-1)z^{d-2} + \cdots + d}.$$

  Y, por lo tanto,

$$S_{\lambda,p}(z) = \frac{1}{N_{\lambda,p}(\frac{1}{z})} = z\left(1 - \frac{1}{\lambda} \frac{d + \cdots + a_0 z^d}{1 + \cdots + a_1 z^{d-1}}\right),$$

  de donde se deduce que

$$S'_{\lambda,p}(0) = \frac{\lambda - d}{\lambda}.$$

Teorema 3.13 *Sea $p(z)$ un polinomio de grado d. Sea z^* una raíz de multiplicidad m, con $m \geq 1$, de $p(z)$. Entonces, se tiene que*

(i) *z^* es un punto fijo superatractor si $\lambda = m$.*

(ii) *z^* es un punto fijo atractor si $\lambda \in B(m, m)$ y $\lambda \neq m$.*

(iii) *z^* es un punto fijo indiferente si $\lambda \in \partial B(m, m) = \Big\{x \in \bar{\mathbb{C}} : |z - m| = m\Big\}$.*

(iv) *z^* es un punto fijo repulsor si $\lambda \notin \overline{B}(m, m)$.*

Para estudiar la dinámica de $N_{\lambda,p}(z)$ en la esfera de Riemann ($\bar{\mathbb{C}}$), podemos conjugar $N_{\lambda,p}(z)$ con una transformación de Möbius $M(z)$ y la dinámica de las iteraciones de $N_{\lambda,p}(z)$ será la misma que la de $M \circ N_{\lambda,p} \circ M^{-1}(z)$.

En lo que sigue utilizaremos las transformaciones $M_1(z)$ definida en (3.1.11) y $M_2(z)$ definida en (3.1.7), que hemos visto en la sección anterior. En las siguientes subsecciones vamos a estudiar la dinámica del método, aplicado a diferentes tipos de polinomios. En concreto, en la Subsección 3.2.1 vamos a estudiar el caso más sencillo, es decir, un polinomio con una única raíz de multiplicidad m. A continuación, en la Subsección 3.2.2 veremos el caso de polinomios con dos raíces. Por último, en la Subsección 3.2.3 estudiaremos la dinámica del método aplicado a polinomios con 3 raíces simples diferentes.

3.2.1. El caso $p(z) = (z - a)^m, m \geq 1$

Comenzaremos estudiando el caso más sencillo, puesto que $p(z)$ tiene una única raíz, y veremos cómo el parámetro amortiguador modifica la dinámica del método de Newton amortiguado (3.2.3), en relación con la dinámica del método de Newton (3.1.2). Sea $p(z) = (z - a)^m,\ a \in \mathbb{C},\ m \geq 2$. Entonces notemos que

$$N_{\lambda,p}(z) = z - \lambda \frac{(z-a)^m}{m(z-a)^{m-1}} = \frac{(m-\lambda)z + \lambda a}{m}. \tag{3.2.4}$$

Realizando un estudio similar al realizado para el método de Newton, y utilizando la transformación de Möbius $M_2(z)$, introducida en (3.1.7), llegamos a lo siguiente

$$S_\lambda(z) = z - \lambda \frac{z^m}{mz^{m-1}} = \frac{m-\lambda}{m} z. \tag{3.2.5}$$

Esta función tiene en $z = \infty$ y $z = 0$ sus puntos fijos, sin embargo el carácter de ambos depende del parámetro λ.

Valores reales del parámetro

Si consideramos valores reales de λ, es decir, $\lambda \in \mathbb{R}$ tendríamos lo siguiente:

- Si $\lambda \in (-\infty, 0)$, $z = \infty$ es atractor y $z = a$ repulsor.
- Si $\lambda = 0$, la función de iteración $N_{\lambda,p}(z)$ sería la identidad y el estudio dinámico carecería de sentido.
- Si $\lambda = m$, $N_{\lambda,p}(z) = a$ y, por tanto, cada punto converge a $z = a$ en la primera iteración.
- Si $\lambda \in (0, 2m)$ y $\lambda \neq m$, $z = \infty$ es repulsor y $z = a$ es atractor.
- Si $\lambda = 2m$, la función de iteración $N_{\lambda,p}(z)$ es el opuesto de la identidad y la iteración de cada punto $z \neq a$ es un 2-ciclo de la forma $\{-z, z\}$.
- Si $\lambda \in (2m, \infty)$, $z = \infty$ es atractor y $z = a$ es repulsor.

Por lo tanto, podemos deducir las siguientes conclusiones.

Teorema 3.14 *La función racional $S_\lambda(z)$ definida en* (3.2.5) *tiene dos puntos fijos en $\bar{\mathbb{C}}$, que son $z = \infty$ y $z = 0$. El carácter de dichos puntos fijos si $\lambda \neq m$ y $\lambda \neq 0$ es el siguiente*

(i) *$z = 0$ tiene como multiplicador asociado $\frac{m-\lambda}{m}$. Por lo tanto, es un punto fijo atractor para $\lambda \in (0, 2m)$, indiferente si $\lambda = 2m$ y repulsor en otro caso.*

(ii) *$z = \infty$ tiene como multiplicador $\frac{m}{m-\lambda}$, por lo que, es un punto fijo repulsor para $\lambda \in (0, 2m)$, indiferente si $\lambda = 2m$ y atractor en otro caso.*

Si $\lambda = m$ o $\lambda = 0$ se obtiene un caso degenerado.

Como consecuencia inmediata obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.15 *La función racional $N_{\lambda,p}(z)$ definida en* (3.2.4) *tiene dos puntos fijos en $\bar{\mathbb{C}}$, que son $z = \infty$ y $z = a$. El carácter de dichos puntos fijos si $\lambda \neq m$ y $\lambda \neq 0$ es el siguiente*

(i) *$z = a$ tiene como multiplicador asociado $\frac{m-\lambda}{m}$. Por lo tanto, es un punto fijo atractor para $\lambda \in (0, 2m)$, indiferente si $\lambda = 2m$ y repulsor en otro caso.*

(ii) *$z = \infty$ tiene como multiplicador $\frac{m}{m-\lambda}$, por lo que, es un punto fijo repulsor para $\lambda \in (0, 2m)$, indiferente si $\lambda = 2m$ y atractor en otro caso.*

Si $\lambda = m$ o $\lambda = 0$ se obtiene un caso degenerado.

Valores complejos del parámetro

Si en lugar de considerar parámetros reales, estudiamos valores de λ complejos, los resultados anteriores varían considerablemente y obtenemos lo siguiente.

Teorema 3.16 *Sea $p(z) = (z-a)^m$, con $a \in \mathbb{C}$ y sea $N_{\lambda,p}(z)$ el método de Newton amortiguado dado en (3.2.4). Sea $\lambda \in B(m,m) = \{z \in \mathbb{C}; |z-m| < m\}$, entonces $z = a$ es un punto fijo superatractor si $\lambda = m$ y atractor en otro caso y, $z = \infty$ es un punto fijo repulsor.*

Demostración Es inmediato a partir de $N'_{\lambda,p}(z) = \frac{m-\lambda}{m}$. ∎

Teorema 3.17 *Sea $p(z) = (z-a)^m$, con $a \in \mathbb{C}$ y sea $N_{\lambda,p}(z)$ el método de Newton amortiguado definido en (3.2.4). Sea $\lambda \in \partial B(m,m) = \{z \in \mathbb{C}; |z-m| = m\}$, entonces $z = a$ es indiferente y $z = \infty$ es indiferente.*

Demostración Como $\lambda \in \partial B(m,m)$ es claro, por la forma de $N_{\lambda,p}(z)$, que $z = a$ es un punto fijo indiferente y, además, $z = \infty$ es un punto fijo indiferente. ∎

Los puntos fijos indiferentes pueden tener diferentes comportamientos así que vamos a realizar un estudio más profundo.

Nota 3.1 *Si $\lambda \in \partial B(m,m)$, entonces $\lambda = m - me^{i\theta}$, donde $\theta \in [0, 2\pi)$, y se obtiene que*

$$N_{\lambda,p}(z) = \frac{(m-\lambda)z + \lambda a}{m} = e^{i\theta}z + \left(1 - e^{i\theta}\right)a,$$

y así,

$$N'_{\lambda,p}(z) = e^{i\theta} \Rightarrow |N'_{\lambda,p}(z)| = 1,$$

por lo que, $z = a$ es un punto fijo indiferente. Según los valores de θ tendremos diferentes comportamientos de $z = a$ como punto fijo.

- *Si $\theta = 0$, entonces $N_{0,p}(z) = z$, y, por lo tanto, todo punto es un punto fijo.*
- *Si $\theta \in \mathbb{Q}$, es decir, $\theta = \frac{p}{q}$ con p, q coprimos, entonces $e^{i\theta}$ es una raíz q-ésima de la unidad y, por lo tanto, hay un q-ciclo, en consecuencia, se tiene que $z = a$ es un punto fijo parabólico.*
- *Si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces $e^{i\theta q} \neq 1$, $\forall q \in \mathbb{N}$ y, como consecuencia, no hay ciclos. La órbita de cualquier punto z_0 es densa en la circunferencia de radio m. Además, por los teoremas de Jacobi (véase página 22 de ([34]) y Touhey (véase [107]) se concluye que el comportamiento de la función de iteración es caótico.*

Teorema 3.18 *Sea $p(z) = (z-a)^m$, con $a \in \mathbb{C}$ y sea $N_{\lambda,p}(z)$ el método de Newton amortiguado definido en (3.2.4), sea $\lambda \notin \overline{B}(m,m)$, entonces, $z = a$ es repulsor y $z = \infty$ es atractor.*

Demostración Es inmediato, sin más que tener en cuenta que el estudio es equivalente al caso $p(z) = z^m$. ∎

Nótese que incluso en el caso del polinomio más sencillo, el parámetro amortiguador ejerce influencia en el estudio de la dinámica del método de Newton amortiguado.

3.2.2. El caso $p(z) = (z-a)^n(z-b)^m$

Antes de empezar con el estudio de este caso, retomamos las transformaciones que vamos a utilizar. Consideraremos $R_\lambda(z) = M_1 \circ N_{\lambda,f} \circ M_1^{-1}(z)$, que es de la forma

$$R_\lambda(z) = \frac{(n+m-\lambda)\ z^2 + (m-n)\ z + \lambda}{(n+m)\ z - n + m}. \tag{3.2.6}$$

Al calcular los puntos fijos de dicha función racional obtenemos tres, $z = -1$, $z = 1$, $z = \infty$. Para saber el carácter de los puntos fijos calcularemos los multiplicadores asociados a cada uno y veremos que dichos caracteres dependen tanto de la multiplicidad de las raíces, como del parámetro amortiguador.

Por otro lado, consideramos también $S_\lambda(z) = M_2 \circ N_{\lambda,f} \circ M_2^{-1}(z)$, cuya forma es

$$S_\lambda(z) = \frac{n\,z^2 + (m-\lambda)\ z}{(n-\lambda)\ z + m}. \tag{3.2.7}$$

Los puntos fijos de esta nueva función son $z = 0$ y $z = \infty$, que son los transformados de las raíces del polinomio $p(z)$, vía $M_2(z)$, y, por otro lado, $z = 1$, el transformado de $z = \infty$, vía $M_2(z)$. Al igual que el caso estudiado en la Subsección 3.2.1, el carácter de estos puntos fijos vendrá determinado tanto por la multiplicidad de las raíces, como por el parámetro amortiguador.

Estudiaremos entonces, la dinámica de las funciones racionales $R_\lambda(z)$ y $S_\lambda(z)$ dadas en (3.2.6) y (3.2.7), respectivamente, modificando las multiplicidades de ambas raíces.

El caso $p(z) = (z-a)(z-b)$

Comenzaremos estudiando polinomios de segundo grado con dos raíces simples a y b. Para ver la influencia del parámetro amortiguador realizaremos el estudio de la dinámica del método de Newton amortiguado para este tipo de polinomios y compararemos los resultados con los obtenidos para el método de Newton.

Valores reales del parámetro

Aplicando el método de Newton amortiguado a $p(z) = (z-a)(z-b)$, es decir, para $m = n = 1$ obtenemos la siguiente expresión

$$S_\lambda(z) = \frac{z^2 + (1-\lambda)z}{(1-\lambda)z + 1}. \tag{3.2.8}$$

Por simplicidad, llamaremos $\alpha = 1 - \lambda$, lo cual transforma la función (3.2.8) en

$$S_\alpha(z) = \frac{z^2 + \alpha z}{\alpha z + 1}. \tag{3.2.9}$$

Entonces, vamos a estudiar la dinámica de esta función $S_\alpha(z)$ para $\alpha \neq -1$, $\alpha \neq 1$ ya que en esos casos el estudio carece de sentido. Comenzamos calculando los puntos fijos de dicha función y obtenemos el siguiente resultado.

Lema 3.19 *La función racional $S_\alpha(z)$ definida en (3.2.8) tiene 3 puntos fijos que son $z = 0$, $z = 1$ y $z = \infty$. Los multiplicadores asociados a estos puntos son $\mu_0 = \mu_\infty = \alpha$ y $\mu_1 = \frac{2}{1+\alpha}$.*

Demostración Inmediata, sin más que tener en cuenta la expresión (3.2.9). ∎

Del estudio de los caracteres de los puntos fijos para los distintos valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, se derivan los siguientes resultados.

Teorema 3.20 *Sea $S_\alpha(z)$ la función definida en (3.2.9) y sea $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces se verifica que $S_\alpha(\bar{z}) = \overline{S_\alpha(z)}$, $\forall z \in \bar{\mathbb{C}}$.*

Demostración Llamando $z = a + bi$ con $a,\ b \in \mathbb{R}$, tenemos que $\bar{z} = a - bi$. Veámos que $S_\alpha(z)$ y $S_\alpha(\bar{z})$ son conjugadas. Por un lado,

$$\begin{aligned} S_\alpha(z) &= S_\alpha(a+bi) \\ &= (a+bi)\frac{a+bi+\alpha}{1+\alpha(a+bi)} \\ &= \frac{(a+ib)(a+\alpha+ib)}{1+\alpha(a+ib)} \\ &= \frac{a^2 - b^2 + a\alpha + a^3\alpha + ab^2\alpha + a^2\alpha^2 + b^2\alpha^2}{b^2\alpha^2 + (1+a\alpha)^2} \\ &\quad -i\left(\frac{2ab - b\alpha - a^2b\alpha - b^3\alpha}{b^2\alpha^2 + (1+a\alpha)^2}\right). \end{aligned}$$

Y, por otro lado,

$$\begin{aligned} S_\alpha(\bar{z}) &= S_\alpha(a-bi) = (a-bi)\frac{a-bi+\alpha}{1+\alpha(a-bi)} \\ &= \frac{(a-ib)(a+\alpha-ib)}{1+\alpha(a-ib)} \\ &= \frac{a^2-b^2+a\alpha+a^3\alpha+ab^2\alpha+a^2\alpha^2+b^2\alpha^2}{b^2\alpha^2+(1+a\alpha)^2} \\ &\quad +i\left(\frac{2ab-b\alpha-a^2b\alpha-b^3\alpha}{b^2\alpha^2+(1+a\alpha)^2}\right). \end{aligned}$$

Por lo que, $S_\alpha(\bar{z}) = \overline{S_\alpha(z)},\ \forall z \in \bar{\mathbb{C}}$, como queríamos demostrar. ∎

Teorema 3.21 *Sea $S_\alpha(z)$ definida en (3.2.9), si $\alpha = -3$, entonces $z = 0$ y $z = \infty$ son puntos fijos repulsores y $z = 1$ es un punto fijo indiferente. Además, $S_\alpha(z)$ presenta dos 3-ciclos repulsores y, por lo tanto, existen ciclos de todos los órdenes.*

Demostración Para $\alpha = -3$, $S_\alpha(z)$ tiene la siguiente forma

$$S_{-3}(z) = z\frac{-3+z}{1-3z}.$$

Los puntos fijos son: $z = 0$ con multiplicador asociado $\mu_0 = 3$, $z = 1$ con multiplicador asociado $\mu_1 = -1$ y $z = \infty$ con multiplicador asociado $\mu_\infty = -3$. Por lo tanto, $z = 0$ y $z = \infty$ son repulsores mientras que $z = 1$ es indiferente.

Los 3-ciclos de $S_{-3}(z)$ serán las soluciones de la ecuación

$$S^3_{-3}(z) - z = 0.$$

O, equivalentemente, las soluciones de la ecuación

$$z(z-1)(7-14z-119z^2+316z^3-119z^4-14z^5+7z^6) = 0,$$

que son $z = 0$, $z = 1$ que, por ser puntos fijos, no pueden pertenecer a ciclos y las otras 6 soluciones de la ecuación, que forman dos 3-ciclos que son:

$$\{z_1 = -4.39642, z_2 = 2.29172, z_3 = 0.276279\}$$

y

$$\{z_4 = -0.22746, z_5 = 0.436354, z_6 = 3.61953\}.$$

El multiplicador asociado a ambos ciclos es $\mu = -13$ y, por lo tanto, son 3-ciclos repulsores. Por otro lado, por el Teorema de Li y Yorke (véase [68]) podemos asegurar que existen n-ciclos de todos los órdenes. ∎

Teorema 3.22 *Sea $S_\alpha(z)$ definida en (3.2.9), si $\alpha \in (-3,-1)$, entonces $z=0$, $z=\infty$ y $z=1$ son puntos fijos repulsores. Además, $S_\alpha(z)$ presenta un 2-ciclo atractor de la forma*

$$\left\{\frac{-(\alpha+1)-\sqrt{\alpha^2+2\alpha-3}}{2}, \frac{-(\alpha+1)+\sqrt{\alpha^2+2\alpha-3}}{2}\right\}.$$

Demostración Teniendo el cuenta que un 2-ciclo cumple que

$$S_\alpha(S_\alpha(z)) = z \leftrightarrow S_\alpha(S_\alpha(z)) - z = 0,$$

obtenemos 5 soluciones $z=0$, $z=\infty$, $z=1$, que son los puntos fijos, y las soluciones de la ecuación

$$z^2 + (\alpha+1)z + 1 = 0.$$

Por lo que, se tiene que $u_1u_2 = 1$ y $u_1+u_2 = -(1+\alpha)$, siendo u_1 y u_2 las soluciones de dicha ecuación. Por otro lado, si $\{u_1,u_2\}$ es un 2-ciclo, se cumple que $S_\alpha(u_1)=u_2$ y $S_\alpha(u_2)=u_1$. Ahora, para que sea atractor debe cumplir que

$$\begin{aligned}
(S_\alpha^2)'(u_1) &= S'_\alpha(S_\alpha(u_1))S'_\alpha(u_1)\\
&= S'_\alpha(u_1)S'_\alpha(u_2)\\
&= \frac{(\alpha u_1^2+2u_1+\alpha)(\alpha u_2^2+2u_2+\alpha)}{(1+\alpha u_1)^2(1+\alpha u_2)^2}\\
&= \frac{\alpha^2+2\alpha u_1+\alpha^2u_1^2+2\alpha u_2+4+2\alpha u_1+\alpha^2u_1^2+2\alpha u_2+\alpha^2}{(1+\alpha(u_1+u_2)+\alpha^2u_1u_2)^2}\\
&= \frac{\alpha^2(2u_1u_2+u_1^2+u_2^2)+4\alpha(u_1+u_2)+4}{(1+\alpha(u_1+u_2)+\alpha^2u_1u_2)^2}\\
&= \frac{\alpha^2(u_1+u_2)^2+4\alpha(u_1+u_2)+4}{(1+\alpha(u_1+u_2)+\alpha^2u_1u_2)^2}\\
&= \frac{(\alpha(u_1+u_2)+2)^2}{(1+\alpha(u_1+u_2)+\alpha^2u_1u_2)^2}\\
&= \frac{(-\alpha(1+\alpha)+2)^2}{(1-\alpha(1+\alpha)+\alpha^2)^2}\\
&= \frac{(\alpha^2+\alpha-2)^2}{(\alpha-1)^2}\\
&= \frac{((\alpha-1)(\alpha+2))^2}{(\alpha-1)^2} = (\alpha+2)^2 < 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\alpha \in (-3,-1)$, tenemos que $(S_\alpha^2)'(u_1) < 1$ y, por lo tanto, $\{u_1,u_2\}$ es un 2-ciclo atractor. ∎

Si $\alpha \in (-1,1)$, el conjunto de Julia asociado a $S_\alpha(z)$, definida en (3.2.9), tiene una estructura particularmente sencilla, es la circunferencia unidad. Como las inversas de la transformación de Möbius $M_2(z) = \frac{z-a}{z-b}$ transforman circunferencias en rectas, de forma equivalente podemos decir que para $\lambda \in (0,2)$, el conjunto de Julia asociado al método de Newton amortiguado aplicado a polinomios de la forma $p(z) = (z-a)(z-b)$ es una recta. Esto es lo que se establece en el siguiente resultado.

Teorema 3.23 *Si $\lambda \in (0,2)$, el conjunto de Julia asociado al método de Newton amortiguado aplicado a polinomios de la forma $p(z) = (z-a)(z-b)$, con $a \neq b$, coincide con la mediatriz del segmento que une a y b. Además, las cuencas de atracción de cada una de las raíces se corresponden con el semiplano que contiene a la propia raíz.*

Demostración Para la demostración consideramos la función de iteración

$$R_\lambda(z) = \frac{(2-\lambda)z^2 + \lambda}{2z},$$

obtenida después de conjugar

$$N_{\lambda,p}(z) = z - \lambda \frac{(z-a)(z-b)}{(z-a)+(z-b)}$$

con la transformación afín $M_1(z)$, definida en (3.1.11).

Notemos que los únicos puntos fijos finitos de $R_\lambda(z)$ son $z=-1$ y $z=1$. Sean ahora los conjuntos

$$\mathcal{A} = \{z | \Re(z) > 0\},$$
$$\mathcal{B} = \{z | \Re(z) < 0\},$$
$$\mathcal{C} = \{z | \Re(z) = 0\},$$

donde $\Re(z)$, denota la parte real de z.

Veamos que $\mathcal{F} = \mathcal{A} \bigcup \mathcal{B}$ y que $\mathcal{J} = \mathcal{C}$, donde $\mathcal{F}$ y $\mathcal{J}$ son, respectivamente, los conjuntos de Fatou y Julia asociados a $R_\lambda(z)$.

En primer lugar, veamos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$. Si $z \in \mathcal{A}$, $z = u + vi,\ a > 0$ entonces,

$$\begin{aligned} R_\lambda(z) &= \frac{z^2(2-\lambda)+\lambda}{2z} \\ &= \frac{(u+vi)^2(2-\lambda)+\lambda}{2(u+vi)} \\ &= \frac{(u^2+v^2)(2-\lambda)(u+vi)+\lambda(u-vi)}{2(u^2+v^2)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $0 < \lambda < 2$, se tiene

$$\Re(R_\lambda(z)) = \frac{u((u^2+v^2)(2-\lambda)+\lambda)}{2(u^2+v^2)} > 0$$

y, por tanto, $R_\lambda(z) \in \mathcal{A}$. Además,

$$|R_\lambda(z) - 1| = \left|(z-1)\frac{(z-1)+(z+1)-\lambda(z+1)}{(z+1)+(z-1)}\right|$$

$$= \left|(z-1)\frac{1-\lambda+\frac{z-1}{z+1}}{1+\frac{z-1}{z+1}}\right| < |z-1|.$$

Teniendo en cuenta esta desigualdad y que $R_\lambda(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$, por el Teorema del Punto Fijo, tenemos que, para todo $z \in \mathcal{A}$,

$$\lim_{n\to\infty} R_\lambda^n(z) = 1.$$

En consecuencia, el conjunto $\mathcal{A}$ está incluido en la cuenca de atracción del punto fijo $z = 1$ y, por tanto, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$.

Teniendo en cuenta la simetría de $R_\lambda(z)$ respecto al eje imaginario, $R_\lambda(-z) = -R_\lambda(z)$, se deduce análogamente que

$$\lim_{n\to\infty} R_\lambda^n(z) = -1$$

para todo $z \in \mathcal{B}$ y así, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$.

Por otra parte, $\mathcal{C}$ es invariante por $R_\lambda(z)$, es decir,

$$R_\lambda(\mathcal{C}) = \mathcal{C} = R_\lambda^{-1}(\mathcal{C}).$$

En efecto, si $z \in \mathcal{C}$, entonces $z = yi$ para algún $y \in \mathbb{R}$ y se tiene

$$R_\lambda(yi) = \frac{-y^2(2-\lambda)+\lambda}{2yi} = \left(\frac{y^2(2-\lambda)-\lambda}{2y^2}\right) i \in \mathcal{C}.$$

Recíprocamente, si $R_\lambda(z) = Bi$ para algún $B \in \mathbb{R}$, reordenamos términos y obtenemos que

$$z^2(2-\lambda) - 2Biz + \lambda = 0.$$

Ahora, operando llegamos a que $z \in \mathcal{C}$.

Notemos además que $0 \in \mathcal{C}$, y que 0 es una preimagen del ∞, por lo tanto, $0 \in \mathcal{J}$.

Después de todas estas consideraciones, podemos concluir que $\mathcal{C}$ no está incluido en ninguna de las dos cuencas de atracción de los puntos fijos. De hecho, $\mathcal{C}$ es la frontera de dichas cuencas de atracción. Entonces $\mathcal{C} = \mathcal{J}$.

Como la preimagen por

$$M_1(z) = 1 + \frac{2(z-a)}{a-b}$$

del conjunto $\mathcal{C}$ es la mediatriz del segmento que une a y b, queda demostrado el resultado. ∎

Si $\alpha \notin (-1,1)$ (o equivalentemente $\lambda \notin (0,2)$), la estructura del conjunto de Julia asociado al método de Newton amortiguado deja de ser la mediatriz entre ambos puntos fijos. Por ejemplo, cuando $\alpha \in (-3,-1)$, ya vimos en el Teorema 3.22 que aparece un 2-ciclo atractor y, además, los puntos fijos son repulsores, por lo tanto, en este caso dichos puntos fijos pertenecen al conjunto de Julia, así como la recta que los une. Además, el conjunto de Julia puede presentar otras formas tal y como se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 3.24 *Sea $S_\alpha(z)$ definida en (3.2.9), si $\alpha \in (-\infty,-3)\cup(1,\infty)$, entonces $z=0$, $z=\infty$ son puntos fijos repulsores y $z=1$ es un punto fijo atractor. Además, el conjunto de Julia es un conjunto de tipo Cantor.*

Demostración Antes de comenzar a estudiar la función, vamos a aplicar la transformación de Möbius siguiente

$$K(z) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha-1}}\frac{z+1}{z-1}.$$

Así, podemos construir la nueva aplicación racional

$$T_\alpha(z) = K \circ S_\alpha \circ K^{-1}(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1+\alpha}{2}z.$$

Si calculamos los puntos fijos de $T_\alpha(z)$ obtenemos 3: $z = -\sqrt{\frac{2}{\alpha-1}}$, y $z = \sqrt{\frac{2}{\alpha-1}}$ que son repulsores, con multiplicador asociado α, y $z=\infty$ que es atractor, con multiplicador asociado $\frac{2}{1+\alpha}$.

Ahora, centramos nuestra atención en el caso $\alpha > 1$, para el cual los puntos fijos son reales. Consideramos el intervalo definido

$$I = \left[-\sqrt{\frac{2}{\alpha-1}}, \sqrt{\frac{2}{\alpha-1}}\right].$$

Como $T_\alpha(z)$, visto como una función de variable real, es estrictamente creciente de cada uno de los siguientes subintervalos

$$I_0 = \left[-\sqrt{\frac{2}{\alpha-1}}, -\frac{\sqrt{2(\alpha-1)}}{\alpha+1}\right]$$

e

$$I_1 = \left[\frac{\sqrt{2(\alpha-1)}}{\alpha+1}, \sqrt{\frac{2}{\alpha-1}}\right]$$

y además, $T_\alpha(I_0) = I$ y $T_\alpha(I_1) = I$, podemos definir las dos ramas que llamaremos $g_0(z)$ y $g_1(z)$, de $T_\alpha^{-1}(z)$ en I por $g_0(I) = I_0$ y $g_1(I) = I_1$. Además, como $|T'_\alpha(z)| > \frac{\alpha+1}{2}$, por el Teorema de la Función Inversa podemos asegurar

que $|g_0'(z)| = |g_1'(z)| < \frac{2}{\alpha+1}$ y, por lo tanto, vamos obteniendo intervalos que van decreciendo por un factor de al menos $\frac{2}{\alpha+1}$.

Si ahora llamamos K_n la unión de los 2^n mutuamente disjuntos intervalos cerrados $\phi_1, \ldots, \phi_n(I)$, donde ϕ_j es $g_0(z)$ o $g_1(z)$, se tiene que el conjunto de Julia es

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Este conjunto K verifica que:

(i) Es un conjunto no vacío, ya que los extremos de los intervalos K_n pertenecen al conjunto K.

(ii) Es cerrado y acotado y, por lo tanto, compacto por ser intersección de compactos.

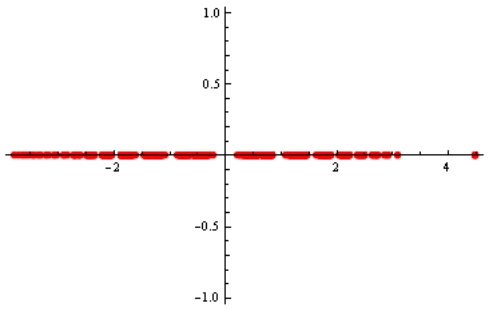
(iii) Es no numerable. Cada punto de K se puede caracterizar como la intersección de una cadena infinita de intervalos encajados. En el primer paso tenemos dos intervalos I_0, I_1, en el siguiente cuatro $I_{00}, I_{01}, I_{10}, I_{11}$ y así sucesivamente. Entonces, el código de los intervalos que estén en I_i, empezarán por i, seguido de ceros y unos. En el paso n tendremos 2^n intervalos codificados con una cadena de n ceros y unos. Si $x \in K$

$$x = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \quad i_j \in \{0,1\}$$

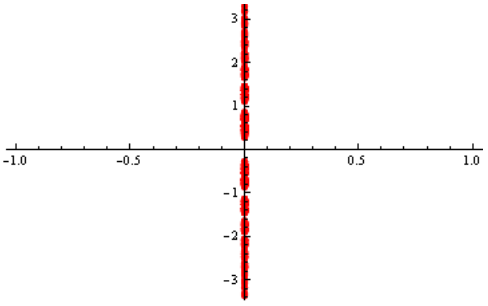
Así, existe una biyección entre K y el conjunto de sucesiones infinitas de ceros y unos. Se obtiene una aplicación de K en I expresado en base 2. Esta aplicación es suprayectiva pero no inyectiva, ya que existen sucesiones que corresponden al mismo punto de I (los extremos de los subintervalos). Por lo tanto K tiene tantos o más puntos que I. Y así, como I no es numerable, K tampoco lo es.

(iv) K es totalmente disconexo, ya que la longitud de los subintervalos en el paso n es $\left(\frac{2}{\alpha+1}\right)^n$, y como $\alpha \in (1,\infty)$, dicha longitud es menor que 1 y, por lo tanto, conforme hacemos más pasos tendremos subintervalos de longitud cada vez más pequeña hasta llegar a cero y entonces, será completamente disconexo.

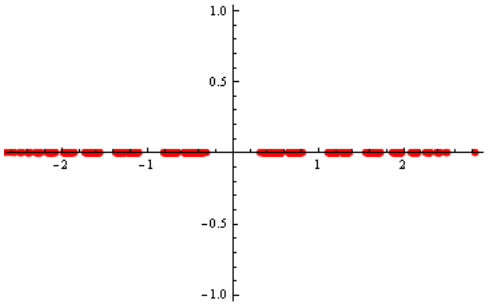
Y, por lo tanto, el conjunto de Julia K es un conjunto de tipo Cantor, para $\alpha > 1$, en la parte izquierda de la Figura 3.9, se observan algunos de estos conjuntos. Si $\alpha < -3$, como los puntos fijos son imaginarios puros y como $T_\alpha(iz) = \frac{2+(\alpha+1)z^2}{2z} i$ se haría un estudio similar para la función $Q_\alpha(z) = \frac{2+(\alpha+1)z^2}{2z}$, obteniéndose un conjunto de tipo Cantor en el eje imaginario como puede verse en la parte derecha de la Figura 3.9. Y, por lo tanto, el conjunto de Julia K es un conjunto de tipo Cantor para $\alpha \in (-\infty,-3) \cup (1,\infty)$. ∎



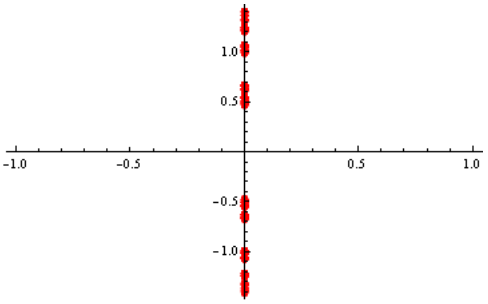
$\alpha = 1.1$



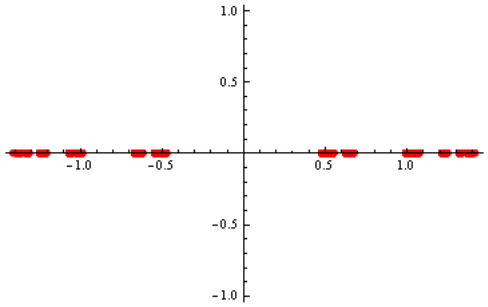
$\alpha = -3.1$



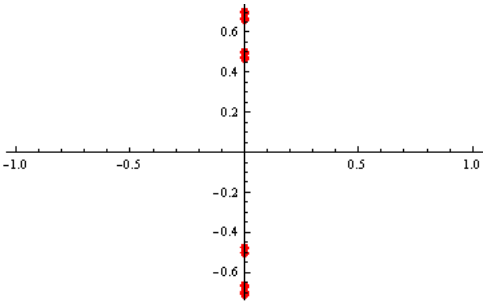
$\alpha = 1.25$



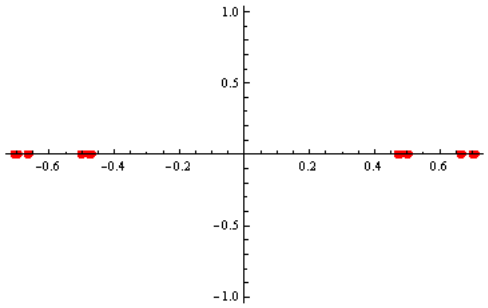
$\alpha = -4$



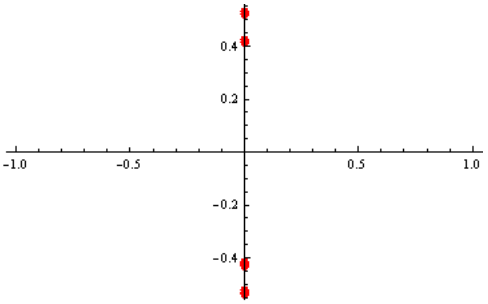
$\alpha = 2$



$\alpha = -7$



$\alpha = 5$



$\alpha = -10$

Figura 3.9: Conjuntos de tipo Cantor asociados al conjunto de Julia de $S_\alpha(z)$ definida en (3.2.9), para valores de $\alpha \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$. En la parte izquierda se muestran dichos conjuntos para valores de $\alpha > 1$ mientras que en la parte derecha para valores de $\alpha < -3$.

Tabla 3.1: Caracteres de los puntos fijos de $S_\alpha(z)$ para distintos valores reales de α.

Intervalo de α	0	1	∞
$(-\infty, -3)$	R	A	R
-3	R	I	R
$(-3, -1)$	R	R	R
-1	I	R	I
$(-1, 0)$	A	R	A
0	SA	R	SA
$(0, 1)$	A	R	A
1	I	I	I
$(1, \infty)$	R	A	R

En la Tabla 3.1 observamos los caracteres de los puntos fijos para distintos valores reales de α, donde A significa atractor, R repulsor, I indiferente y SA superatractor. Llama la atención que para valores de $\alpha \in (-3, -1)$, los tres puntos fijos resulten ser repulsores. Notemos que el intervalo en el que nos interesa estudiar el método, como buscador de soluciones es $(-1, 1)$, ya que en dicho intervalo los puntos fijos relacionados con las raíces son atractores o superatractores.

Valores complejos del parámetro

Vamos ahora a realizar el estudio de la dinámica para valores complejos del parámetro amortiguador. Veremos que lo que se desprende es una generalización de los resultados obtenidos para valores reales del parámetro en la que pasaremos de tener intervalos de similar comportamiento a tener bolas. Sin embargo, hay algunos resultados que no se conservan, por ejemplo, se pierde la propiedad de simetría que sí se tenía para valores reales. Omitiremos las demostraciones, ya que se siguen de las dadas para valores reales del parámetro λ.

Teorema 3.25 *Sea $p(z) = (z-a)(z-b)$, con $a,\ b \in \mathbb{C}$ y $a \neq b$ y sea $S_\alpha(z)$ la función racional definida en (3.2.9), entonces si $\alpha \in B(0,1)$, se tiene*

- *$z = 0$ y $z = \infty$ son atractores (superatractores si $\alpha = 0$).*
- *$z = 1$ es repulsor.*

Teorema 3.26 *Sea $p(z) = (z-a)(z-b)$, con $a,\ b \in \mathbb{C}$ y $a \neq b$ y sea $S_\alpha(z)$ la función racional definida en (3.2.9), entonces si $\alpha \in \partial B(0,1)$ tenemos*

- *$z = 0$ y $z = \infty$ son indiferentes.*
- *$z = 1$ es repulsor (salvo en $\alpha = 1$, donde es indiferente).*

Teorema 3.27 *Sea $p(z) = (z-a)(z-b)$, con $a,\ b \in \mathbb{C}$ y $a \neq b$ y sea $S_\alpha(z)$ la función racional definida en (3.2.9), entonces si $\alpha \in B(-1,2) - \overline{B}(0,1)$, se tiene*

- *$z = 0$, $z = \infty$ y $z = 1$ son repulsores.*

Teorema 3.28 *Sea $p(z) = (z-a)(z-b)$, con $a,\ b \in \mathbb{C}$ y $a \neq b$ y sea $S_\alpha(z)$ la función racional definida en (3.2.9), entonces si $\alpha \in \partial B(-1,2) - \overline{B}(0,1)$, tenemos que*

- *$z = 0$ y $z = \infty$ son repulsores.*
- *$z = 1$ es indiferente.*

Teorema 3.29 *Sea $p(z) = (z-a)(z-b)$, con $a,\ b \in \mathbb{C}$ y $a \neq b$ y sea $S_\alpha(z)$ la función racional definida en (3.2.9), entonces si $\alpha \notin \overline{B}(-1,2)$, tenemos que*

- *$z = 0$ y $z = \infty$ son repulsores.*
- *$z = 1$ es atractor.*

Si ahora queremos estudiar la aparición de ciclos en la función $S_\alpha(z)$ obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.30 *Si $|\alpha + 2| < 1$, entonces la función $S_\alpha(z)$ definida en (3.2.9) tiene un 2-ciclo atractor.*

Demostración Teniendo el cuenta que un 2-ciclo cumple que

$$S_\alpha(S_\alpha(z)) = z \leftrightarrow S_\alpha(S_\alpha(z)) - z = 0$$

obtenemos 5 soluciones $z = 0$, $z = \infty$, $z = 1$ y las soluciones de la ecuación $z^2 + (\alpha+1)z + 1 = 0$.

Por otro lado si $\{u_1, u_2\}$ es un 2-ciclo, se cumple que $S_\alpha(u_1) = u_2$ y $S_\alpha(u_2) = u_1$. Ahora, para que sea atractor debe cumplir que

$$(S_\alpha^2)'(u_1) = S'_\alpha(S_\alpha(u_1))S'_\alpha(u_1) = S'_\alpha(u_1)S'_\alpha(u_2) = (\alpha+2)^2 < 1.$$

Por lo tanto, si $|\alpha + 2| < 1$, entonces $S_\alpha(z)$ tiene un 2-ciclo atractor, como queríamos demostrar. ∎

Teniendo en cuenta todo lo anterior se desprende la siguiente proposición.

Proposición 3.31 *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, si $|z| = 1$, entonces $|S_\alpha(z)| = 1$.*

Demostración Si $|z| = 1$, entonces z puede expresarse como $z = \cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta)i$, con $\beta \in [0, 2\pi)$. Ahora,

$$z^2 = \cos^2(\beta) - \operatorname{sen}^2(\beta) + 2\cos(\beta)\operatorname{sen}(\beta)i,$$

y

$$\alpha z = \alpha\cos(\beta) + \alpha\operatorname{sen}(\beta)i.$$

Sustituyendo ahora en $S_\alpha(z)$ obtenemos

$$S_\alpha(z) = \frac{(\cos^2(\beta) - \operatorname{sen}^2(\beta) + \alpha\cos(\beta)) + (2\cos(\beta)\operatorname{sen}(\beta) + \alpha\operatorname{sen}(\beta))i}{(\alpha\cos(\beta) + 1) + (\alpha\operatorname{sen}(\beta))i}.$$

Queremos ver que el módulo de $S_\alpha(z)$ es igual a 1, pero ésto ocurrirá si y sólo si se cumple que

$$|(\cos^2(\beta) - \operatorname{sen}^2(\beta) + \alpha\cos(\beta)) + (2\cos(\beta)\operatorname{sen}(\beta) + \alpha\operatorname{sen}(\beta))i|$$

$$= |(\alpha\cos(\beta) + 1) + (\alpha\operatorname{sen}(\beta))i|.$$

Calculando cada módulo por separado obtenemos que

- $|(\cos^2(\beta) - \operatorname{sen}^2(\beta) + \alpha\cos(\beta)) + (2\cos(\beta)\operatorname{sen}(\beta) + \alpha\operatorname{sen}(\beta))i|^2$

  $= \cos^4(\beta) + \operatorname{sen}^4(\beta) - 2\cos^2(\beta)\operatorname{sen}^2(\beta) + \alpha^2\cos^2(\beta) + 2\alpha\cos^3(\beta)$

  $-2\alpha\operatorname{sen}^2(\beta)\cos(\beta) + 4\cos^2(\beta)\operatorname{sen}^2(\beta) + \alpha^2\operatorname{sen}^2(\beta) + 4\cos(\beta)\operatorname{sen}^2(\beta)$

  $= (\cos^2(\beta) + \operatorname{sen}^2(\beta))^2 + \alpha(2\cos^3(\beta) + 2\operatorname{sen}^2(\beta)\cos(\beta)) + \alpha^2$

  $= 1 + \alpha^2 + 2\alpha\cos(\beta).$

- $|(\alpha\cos(\beta) + 1) + (\alpha\operatorname{sen}(\beta))i|^2$

  $= \alpha^2\cos^2(\beta) + 1 + 2\alpha\cos(\beta) + \alpha^2\operatorname{sen}^2(\beta)$

  $= 1 + \alpha^2 + 2\alpha\cos(\beta).$

Entonces, podemos concluir que $|S_\alpha(z)| = 1$, como queríamos demostrar. ∎

Sin embargo, este resultado no es aplicable para $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.1 *Sea $\alpha = i$, y tomemos $z_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, entonces:*

$$S_i(z) = \frac{z^2 + iz}{iz + 1}.$$

Notemos que $|z_0| = 1$ y $|S(z_0)| \approx 3.73205$.

Planos de parámetros

El estudio de las órbitas de los puntos críticos da mucha información sobre el comportamiento dinámico de un método. En concreto, para determinar si existen órbitas periódicas atractoras para $N_{\lambda,p}(z)$ distintas de las raíces de $p(z)$, debemos responder a la pregunta siguiente: ¿Para qué valores del parámetro, las órbitas de los puntos críticos libres son órbitas periódicas atractoras? Una manera de responder a la pregunta anterior es dibujar el espacio de parámetros $\lambda \in \mathbb{C}$ de acuerdo a la convergencia de los puntos críticos libres. Existirán zonas abiertas en el espacio de parámetros de forma que, la iteración del punto crítico no converge a ninguna de las raíces del polinomio $p(z)$, es decir, estas zonas van a parar a ciclos atractores. En lo que sigue, utilizaremos este concepto de planos de parámetros para el estudio de la dinámica del método de Newton amortiguado.

En este apartado vamos a considerar $R_\lambda(z)$, definido en (3.2.6) para $n = m = 1$, es decir,

$$R_\lambda(z) = \frac{(2-\lambda)z^2 + \lambda}{2z}. \tag{3.2.10}$$

y vamos a dibujar sus planos de parámetros asociados a los puntos críticos de $R_\lambda(z)$. Notemos que para $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 2$, esta función tiene dos puntos críticos diferentes que son

$$PC_1 = -\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2-\lambda}}$$

y

$$PC_2 = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2-\lambda}}.$$

Por otro lado, para $\lambda = 2$, se observa, por la forma del método,

$$R_2(z) = \frac{1}{z},$$

que la iteración de cada punto distinto de los puntos fijos ($z = 1$ y $z = -1$) y de $z = 0$ es un 2-ciclo de la forma

$$\left\{ z_0, \frac{1}{z_0} \right\}.$$

Las zonas en la que los puntos fijos cambian de carácter, se observan mejor en la Figura 3.10. Para profundizar en el estudio de la zona negra, vamos a dibujar los planos de parámetros asociados a los puntos críticos de la función $R_\lambda(z)$.

En las Figuras 3.11 y 3.12 pueden verse los planos de parámetros asociados a PC_1 y PC_2 respectivamente. Si nos fijamos primero en la Figura 3.11, observamos que para valores de $\lambda \in B(1,1)$, la órbita de PC_1 converge hacia la raíz $z = -1$, sin embargo, para valores de $\lambda \in B(3,1)$ converge hacia un 2-ciclo. Para valores del parámetro dentro de la bola $B(2,2)$, pero fuera de las bolas $\bar{B}(1,1)$ y $\bar{B}(3,1)$, vemos que las iteraciones convergen a n-ciclos, o incluso no hay convergencia. Si

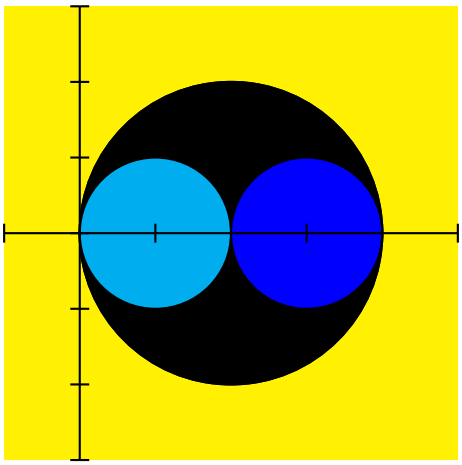


Figura 3.10: Regiones donde los puntos fijos cambian de carácter: En negro la zona en la que los tres puntos son repulsores, en cian $z = -1$ y $z = 1$ son atractores, mientras que $z = \infty$ es repulsor y en amarillo la zona en la que $z = \infty$ es atractor y los otros dos repulsores. En azul oscuro vemos la región en la que existen 2-ciclos atractores.

nos centramos ahora la Figura 3.12, las conclusiones son las mismas que para la Figura 3.11 con la única salvedad de que, para valores de $\lambda \in B(1,1)$, el punto crítico converge hacia la raíz $z = 1$ en lugar de hacia $z = -1$. En la Tabla 3.2, se muestran algunos de los ciclos encontrados para diferentes valores del parámetro λ. Además, en la galería I, Figura 3.13, vemos una selección de los fractales obtenidos para diferentes valores del parámetro λ, combinando regiones grandes con pequeñas para mostrar qué ocurre, ya que el dibujarlo en una región relativamente pequeña puede llevar a engaño como se muestra.

El caso $p(z) = (z-a)^2(z-b)$

Continuamos con el estudio de polinomios con dos raíces diferentes, pero ahora una de las raíces será simple y la otra tendrá multiplicidad 2. Estudiaremos la dinámica del método de Newton amortiguado aplicado a un polinomio con dos raíces de la forma $p(z) = (z-a)^2(z-b)$. La expresión del método aplicado a este tipo de polinomios es la siguiente

$$N_{\lambda,p}(z) = z - \lambda \frac{(z-a)^2(z-b)}{3z^2 - (4a+2b)z + a^2 + ab}.$$

Aplicando la transformación $M_2(z)$, definida en (3.1.7), podemos definir una nueva función racional que no depende de las raíces, cuya expresión es

$$S_\lambda(z) = \frac{2z^2 + (1-\lambda)z}{(2-\lambda)z + 1}, \tag{3.2.11}$$

Tabla 3.2: Valores aproximados de algunos de los ciclos que aparecen al aplicar el método de Newton amortiguado a un polinomio con dos raíces simples.

λ	Orden	n-ciclo al que converge PC_2
$2.5 + 0.5i$	2	$\{0.325923 - 1.22728i, -0.325923 + 1.22728i\}$
$3 + 1.6i$	3	$\{-2.12623 + 0.191114i, 0.549737 + 1.16929i$ $1.71483 - 1.81161i\}$
$2 + 1.8i$	4	$\{2.02712 - 0.902802i, -0.565867 - 1.27058i,$ $-2.02712 + 0.902802i, 0.565867 + 1.27058i\}$
$1.4 + 1.85i$	5	$\{2.09899 - 0.353353i, 0.555006 - 1.56443i,$ $-1.66478 - 0.398972i, -1.39205 + 0.990074i,$ $0.478117 + 0.905891i\}$
$1 + 1.6i$	6	$\{-1.18498 + 1.06062i, 0.357232 + 0.893774i,$ $1.85822 - 0.0127903i, 1.18498 - 1.06062i,$ $-0.357232 - 0.893774i, -1.85822 + 0.0127903i\}$
$0.38 - 0.79i$	7	$\{0.772719 + 0.323531i, 0.525213 + 0.0447538i,$ $0.703272 - 0.533547i, 1.22232 - 0.380772i,$ $1.37394 - 0.0760387i, 1.29666 + 0.202129i,$ $1.06714 + 0.3562i\}$
$0.7 + 1.36i$	8	$\{1.66999 + 0.294649i, 1.55879 - 0.585042i,$ $0.66868 - 0.984011i, -0.54188 - 0.529734i,$ $-1.66999 - 0.294649i, -1.55879 + 0.585042i,$ $-0.66868 + 0.984011i, 0.54188 + 0.529734i\}$

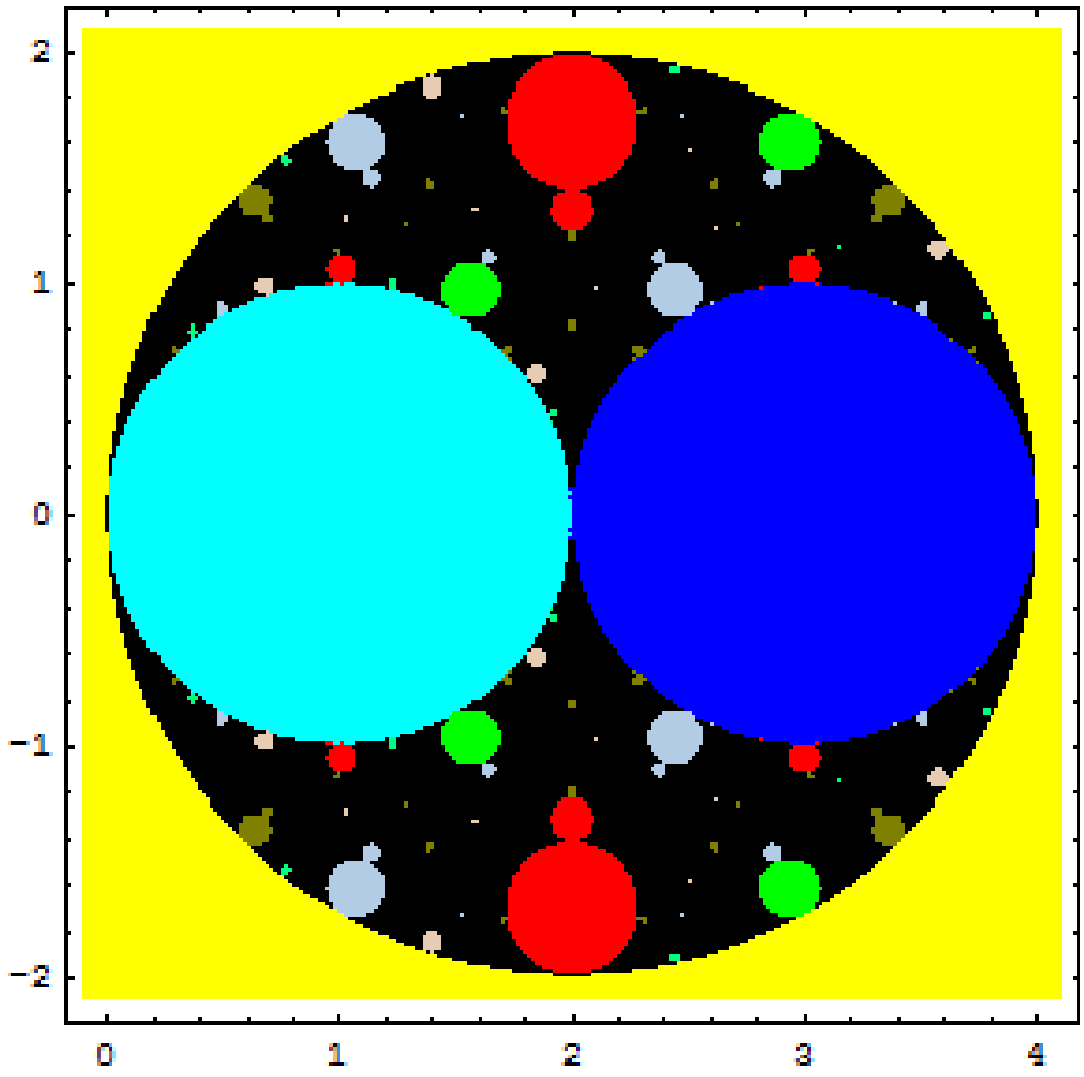


Figura 3.11: Plano de parámetros asociado al punto crítico PC_1. En negro aparece la zona de no convergencia. En cian aparece la convergencia hacia la raíz $z = -1$, en magenta aparece la convergencia hacia la raíz $z = 1$ y en amarillo la convergencia hacia el infinito. La convergencia a 2-ciclos aparece en azul oscuro, mientras que la convergencia a 3-ciclos aparece en verde y a 4-ciclos en rojo. El resto de colores se corresponden con la convergencia a n-ciclos de diferentes órdenes.

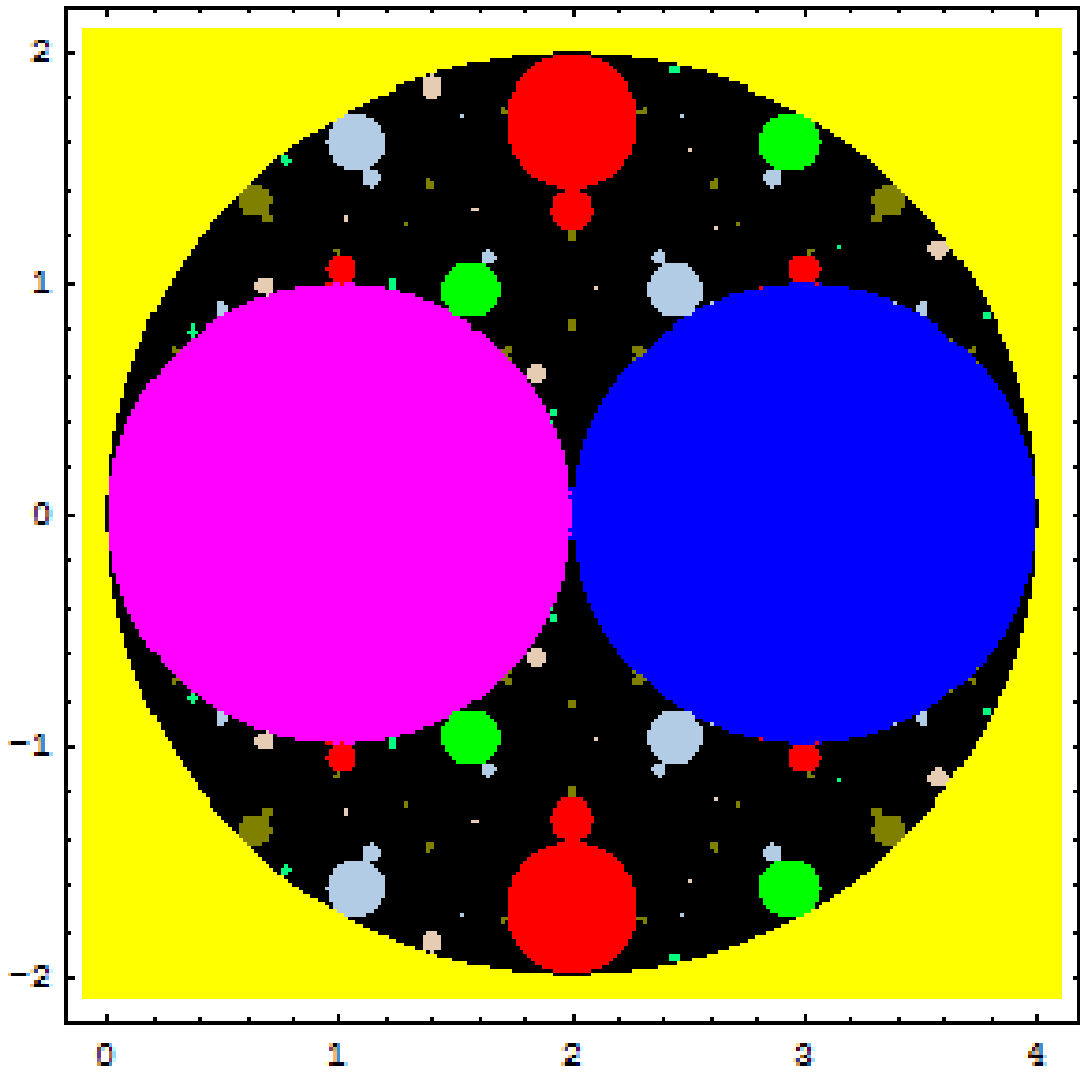
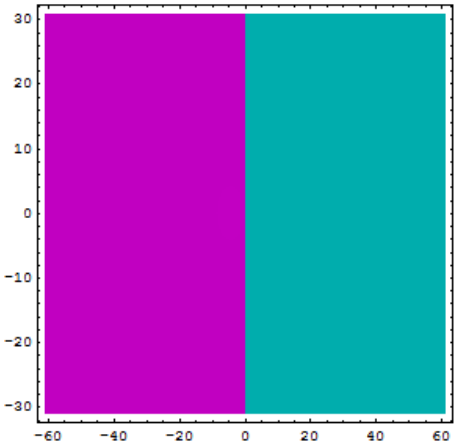
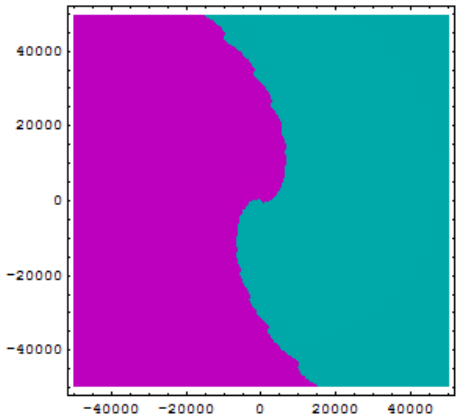


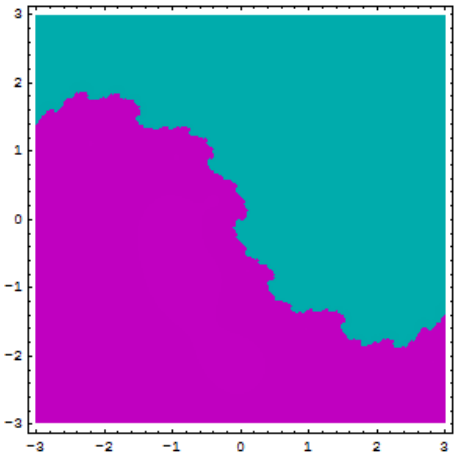
Figura 3.12: Plano de parámetros asociado al punto crítico PC_2. En negro aparece la zona de no convergencia. En cian aparece la convergencia hacia la raíz $z = -1$, en magenta aparece la convergencia hacia la raíz $z = 1$ y en amarillo la convergencia hacia el infinito. La convergencia a 2-ciclos aparece en azul oscuro, mientras que la convergencia a 3-ciclos aparece en verde y a 4-ciclos en rojo. El resto de colores se corresponden con la convergencia a n-ciclos de diferentes órdenes.



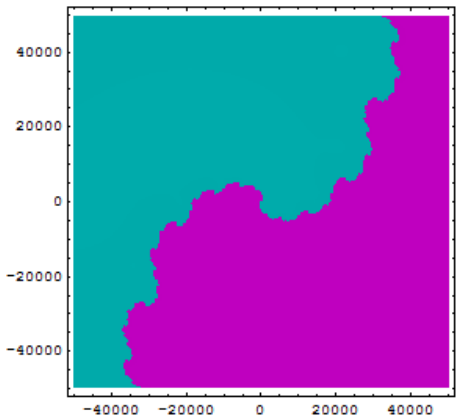
$\lambda = 1$



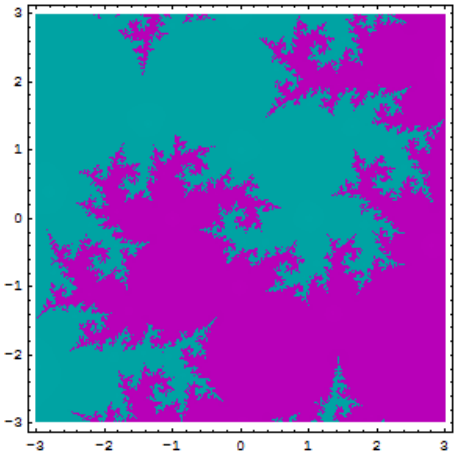
$\lambda = 0.5 + 0.25i$



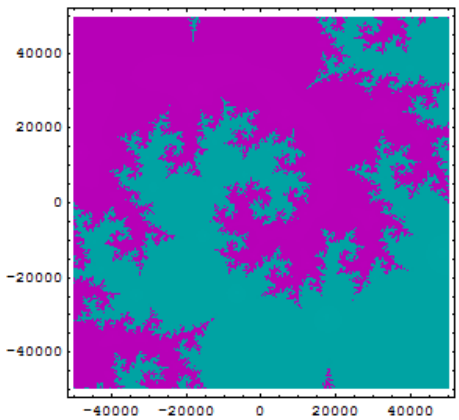
$\lambda = 1 + 0.5i$



$\lambda = 1 + 0.5i$



$\lambda = 1 + 0.99i$



$\lambda = 1 + 0.99i$

Figura 3.13: Galería I. Cuencas de atracción asociadas a los puntos fijos $z = -1$ (en magenta) y $z = 1$ (en cian) de la función $R_\lambda(x)$, definida en (3.2.10), para diferentes valores de λ y distintas regiones.

Tabla 3.3: Caracteres de los puntos fijos de $S_\lambda(z)$ para distintos valores reales de λ.

Intervalo de λ	0	1	∞
$(-\infty, 0)$	R	A	R
0	-	-	-
$(0, 1)$	A	R	A
1	A	R	SA
$(1, 2)$	A	R	A
2	SA	R	I
$(2, 3)$	A	R	R
3	A	-	R
$(3, 4)$	A	R	R
4	I	R	R
$(4, 6)$	R	R	R
6	R	I	R
$(6, \infty)$	R	A	R

que tiene por puntos fijos $z = 0$ con multiplicador asociado $\mu_0 = 1 - \frac{\lambda}{2}$, $z = 1$ con $\mu_1 = \frac{3}{\lambda - 3}$ y $z = \infty$ con $\mu_\infty = 1 - \lambda$.

Aplicando ahora, la transformación $M_1(z)$, definida en (3.1.11), definimos una nueva función racional cuya expresión es

$$R_\lambda(z) = \frac{(3-\lambda)z^2 - z + \lambda}{3z - 1}. \tag{3.2.12}$$

Valores reales del parámetro

En la Tabla 3.3 observamos los caracteres de los puntos fijos para distintos valores reales de λ, donde, como en el caso anterior, A significa atractor, R repulsor, I indiferente y SA superatractor. Notemos que en la tabla el intervalo $(0, 4)$ es la zona en la que nos interesa estudiar la dinámica del método, como buscador de soluciones. Sin embargo, cuando $\lambda = 3$, vemos que existe un problema con el punto fijo $z = 1$. Si obtenemos la expresión asociada al método, su forma es

$$S_3 = \frac{-z}{2},$$

y entonces, $z = 1$ deja de ser un punto fijo, por lo que, no podemos estudiar su carácter.

Para arrojar un poco más del luz al estudio para valores reales del parámetro, observamos en las Galerías II (Figura 3.14) y III (Figura 3.15), una selección de fractales representativos para diferentes valores del parámetro amortiguador λ. En concreto, en la Galería II, que puede verse en la Figura 3.14, se observan las cuencas de atracción asociadas a la función $R_\lambda(z)$, definida en (3.2.12). En

Tabla 3.4: Dimensiones fractales asociadas a $S_\lambda(z)$, definido en (3.2.11), para distintos valores reales de λ.

λ	Dimensión fractal
2.5	1.366
2.4	1.276
2.3	1.233
2.2	1.247
2.1	1.221
2.0	1.190
1.9	1.142
1.8	1.098
1.7	1.049
1.6	1.033
1.5	1.001

amarillo aparece la cuenca de atracción del punto fijo $z = -1$ y en rojo la del punto fijo $z = 1$, que proviene de la raíz doble. Se observa que, a medida que el parámetro se acerca a 2, aparece un conjunto de Mandelbrot y, para valores mayores o iguales a 2 la raíz simple pierde su carácter atractor. En la Galería III, que se observa en la Figura 3.15, aparecen las cuencas de atracción de $S_\lambda(z)$ definida en (3.2.11). En rojo se muestra la cuenca de atracción de $z = 0$, mientras que en negro se muestra la de $z = \infty$. Se observa, como a medida que aumenta el valor del parámetro el conjunto de Julia se va haciendo cada vez más intrincado. Además, en la Tabla 3.4, se observan algunas dimensiones fractales asociadas $S_\lambda(z)$, para los distintos valores de λ.

Valores complejos del parámetro

Como en el caso de una única raíz y el de dos raíces simples, también generalizaremos los resultados obtenidos para valores reales del parámetro, estudiando valores complejos del mismo. Omitiremos nuevamente las demostraciones de los resultados, ya que son simples comprobaciones matemáticas.

Teorema 3.32 *Sea $p(z) = (z-a)^2(z-b)$, con $a,\ b \in \mathbb{C}$ y $a \neq b$ y sea $S_\lambda(z)$ la función racional definida en (3.2.11), entonces*

- *Si $\lambda \in B(1,1)$, se tiene que $z = 0$ y $z = \infty$ son atractores (salvo en el caso $\lambda = 1$, que $z = \infty$ es superatractor) y $z = 1$ es repulsor.*
- *Si $\lambda \in \partial B(1,1)$, se tiene que $z = \infty$ es indiferente, $z = 1$ es repulsor y $z = 0$ es atractor, excepto para $\lambda = 2$ que es superatractor.*

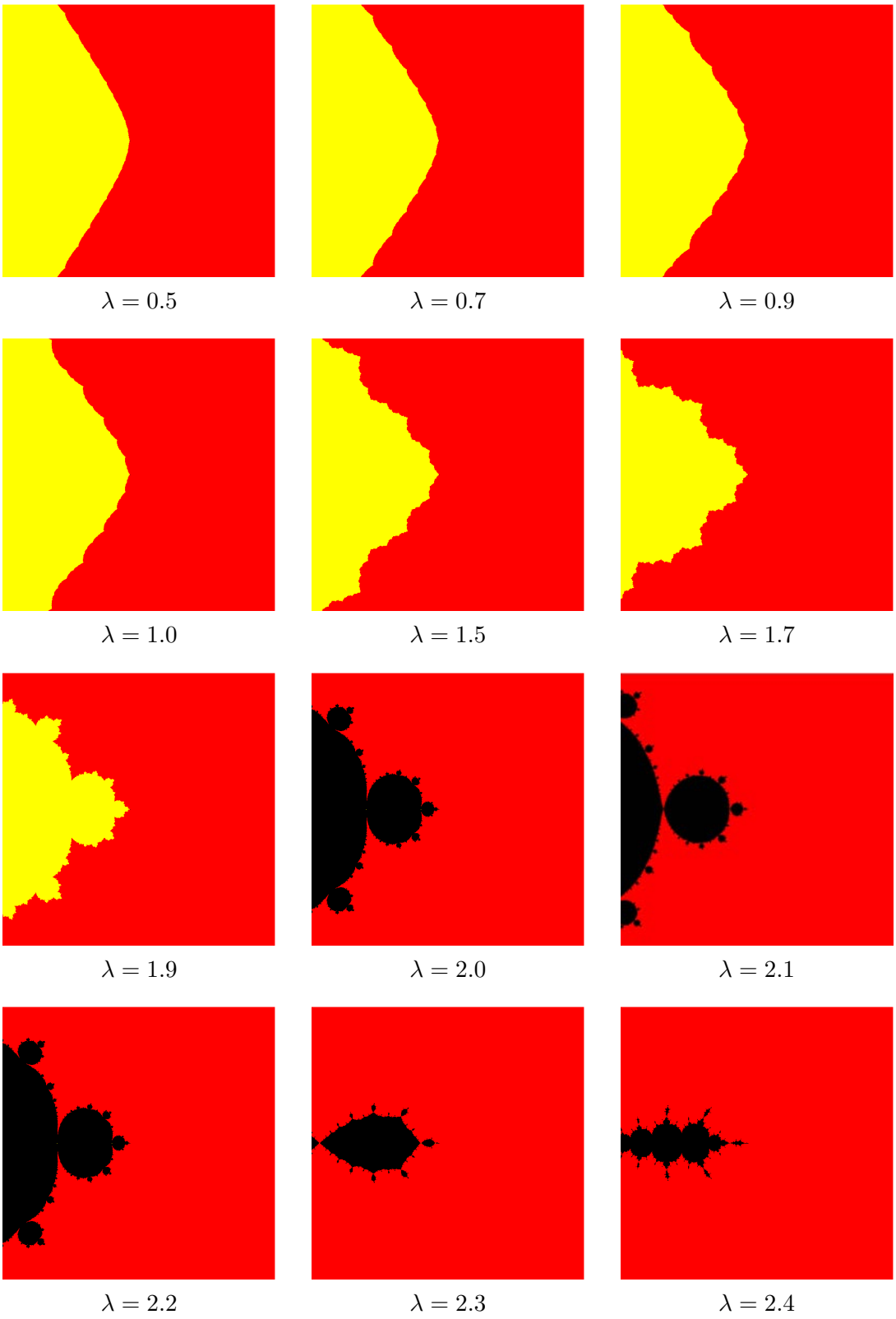


Figura 3.14: Galería *II*. Cuencas de atracción asociadas a los puntos fijos de $R_\lambda(z)$, definida en (3.2.12) para diferentes valores de λ. La cuenca de $z = -1$ aparece en amarillo, mientras que la cuenca de $z = 1$ se muestra en rojo.

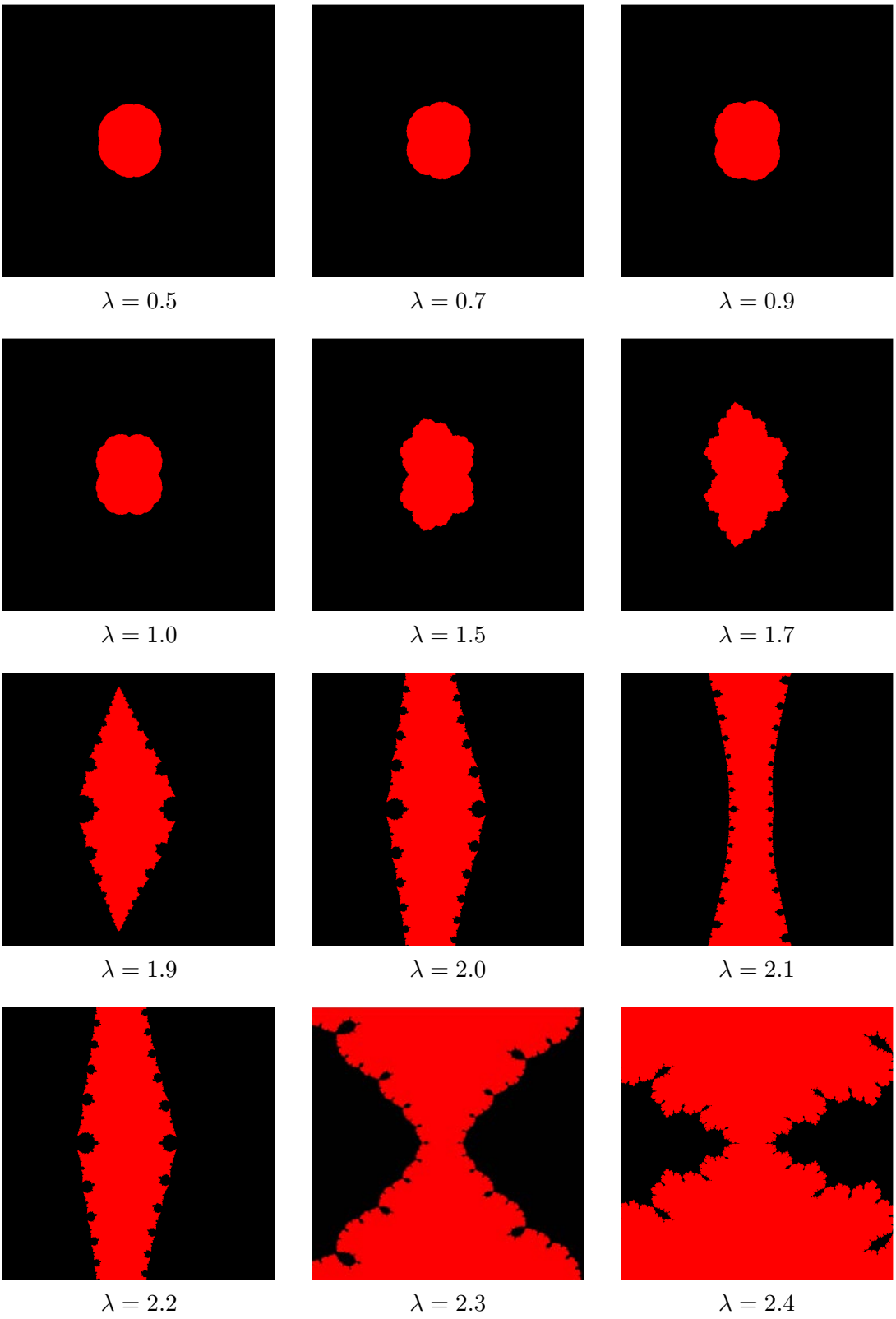


Figura 3.15: Galería *III*. Cuencas de atracción asociadas a los puntos fijos de $S_\lambda(z)$, definida en (3.2.11) para diferentes valores de λ. En negro se muestra la cuenca de $z = \infty$ y en rojo la de $z = 0$.

- *Si* $\lambda \in B(2,2) - \overline{B}(1,1)$*, tenemos que* $z = 0$ *es atractor y* $z = \infty$ *y* $z = 1$ *son repulsores. Salvo para* $\lambda = 3$*, valor para el que* $z = 1$ *deja de ser punto fijo.*

- *Si* $\lambda \in \partial B(2,2)$*, entonces* $z = \infty$ *y* $z = 1$ *son repulsores y* $z = 0$ *es indiferente.*

- *Si* $\lambda \in B(3,3) - \overline{B}(2,2)$*, tenemos que* $z = 0$*,* $z = 1$ *y* $z = \infty$ *son repulsores.*

- *Si* $\lambda \in \partial B(3,3)$*, se tiene que* $z = 0$ *y* $z = \infty$ *son repulsores y* $z = 1$ *es indiferente.*

- *Si* $\lambda \notin \overline{B}(3,3)$*, tenemos que* $z = 0$ *y* $z = \infty$ *son repulsores y* $z = 1$ *es atractor.*

Planos de parámetros

En este apartado vamos a considerar $R_\lambda(z)$, definida en (3.2.12)

$$R_\lambda(z) = \frac{(3-\lambda)z^2 - z + \lambda}{3z - 1}.$$

y vamos a dibujar sus planos de parámetros.

Los puntos críticos libres de esta función son

- Para $\lambda = 3$, $R_3'(z) = \frac{-8}{(3z-1)^2}$, y, por lo tanto, no tiene puntos críticos libres.

- Para $\lambda \neq 3$, obtenemos que este método tiene dos puntos críticos libres que son
$$PC_1 = \frac{3 - \lambda + 2\sqrt{2}\sqrt{3\lambda - \lambda^2}}{3\lambda - 9}$$
y
$$PC_2 = \frac{3 - \lambda - 2\sqrt{2}\sqrt{3\lambda - \lambda^2}}{3\lambda - 9}.$$

Por lo tanto, podemos concluir que el parámetro amortiguador aunque no introduce nuevos puntos fijos, sí modifica el carácter de los mismos y además, introduce nuevos puntos críticos libres. Además, hemos visto cómo este parámetro también modifica el aspecto de los conjuntos de Julia y de Fatou.

En la Figura 3.16 se observan las regiones en las que los puntos fijos cambian de carácter. De nuevo intentaremos profundizar en el estudio de la zona negra, para ello, vamos a dibujar los planos de parámetros asociados a los puntos críticos de la función $R_\lambda(z)$.

En las Figuras 3.17 y 3.20 pueden verse los planos de parámetros asociados a PC_1 y PC_2 respectivamente, y en las Figuras 3.18 y 3.19, se observan ampliaciones del plano de parámetros asociado al punto crítico PC_1.

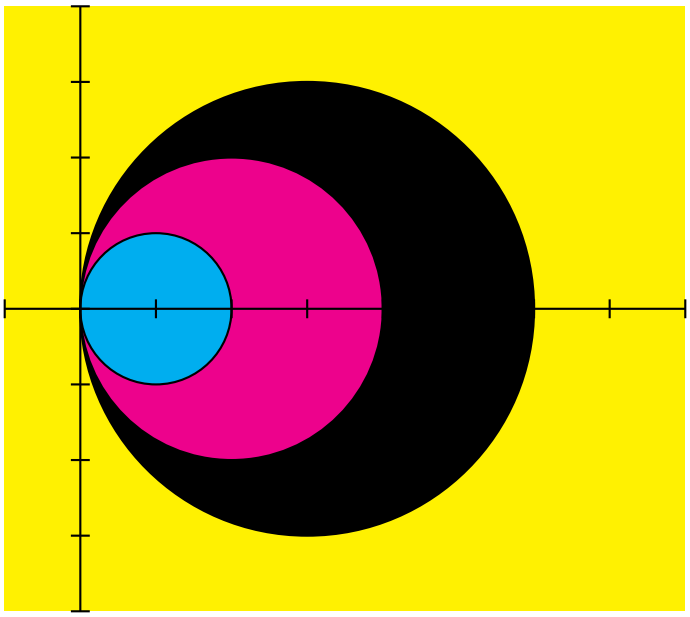


Figura 3.16: Regiones donde los puntos fijos cambian de carácter. En cian, $z = -1$ y $z = 1$ son atractores mientras que $z = \infty$ es repulsor, en magenta vemos la región en la que $z = 1$ es atractor mientras que $z = -1$ y $z = \infty$ son repulsores y en negro la zona en la que los tres puntos son repulsores. Por otro lado, en amarillo vemos la zona en la que $z = \infty$ es atractor y los otros dos repulsores.

Si observamos primero las Figuras 3.17, 3.18 y 3.19 observamos que para valores de $\lambda \in B(1,1)$, la órbita de PC_1 converge hacia la raíz $z = -1$, sin embargo, para valores de $\lambda \in B(2,1) \setminus B(1,1)$ hay zonas de convergencia hacia n-ciclos, aunque son menores que la zona de convergencia hacia la raíz $z = 1$. También, se observa como aparecen, zonas de ciclos muy extensas, como la región azul oscura (asociada a la convergencia a un 2-ciclo) que se observa a la derecha de la bola $B(2,2)$. Con respecto a la Figura 3.20, se observa como el comportamiento del punto crítico PC_2 es similar al del punto crítico PC_1, con la única diferencia que para valores del parámetro en la bola $B(2,2)$, sin excepciones, la iteración de PC_2 converge a la raíz $z = 1$. En la Tabla 3.5, se muestran algunos de los ciclos encontrados para diferentes valores del parámetro λ. Además, en las Galerías IV (Figura 3.21) y V (Figura 3.22), se muestran algunos de los fractales elegidos, combinando de nuevo regiones grandes con pequeñas para aclarar qué ocurre realmente.

Tabla 3.5: Valores aproximados de algunos de los ciclos que aparecen al aplicar el método de Newton amortiguado a un polinomio con una raíz simple y una doble.

λ	Orden	n-ciclo al que converge PC_1
2.2	2	$\{-0.679336, -1.82066\}$
$1.6 - i$	3	$\{-1.11313 - 0.250438i, -0.698687 - 0.0775908i, -1.19919 + 0.659447i\}$
$1 - 1.1i$	4	$\{-1.24742 - 0.049759i, -1.00609 - 0.239687i, -0.709386 - 0.0817838i, -0.904176 + 0.554326i\}$
$0.69 + 0.99i$	5	$\{-1.23496 - 0.0806827i, 1.15471 + 0.152789i, -0.938411 + 0.21877i, -0.717521 + 0.0513484i, -0.881431 - 0.433671i\}$
$0.49 + 0.91i$	6	$\{-0.681477 + 0.0616813i, -0.768309 - 0.463112i, -1.19462 - 0.177279i, -1.22236 + 0.0481123i, -1.10014 + 0.200937i, -0.896003 + 0.227477i\}$
$0.38 - 0.8i$	7	$\{-0.682494 - 0.0226797i, -0.824975 + 0.406189i, -0.824975 + 0.406189i, -1.22761 + 0.0280786i, -1.17147 - 0.130877i, -1.03399 - 0.219019i, -0.852442 - 0.201942i\}$
$0.9 - 0.71i$	8	$\{-1.08201 + 0.237149i, -1.18652 + 0.101586i, -1.19189 - 0.0366306i, -1.12525 - 0.145215i, -1.00773 - 0.20012i, -0.86276 - 0.176718i, -0.732007 - 0.0364468i, -0.786301 + 0.257789i\}$

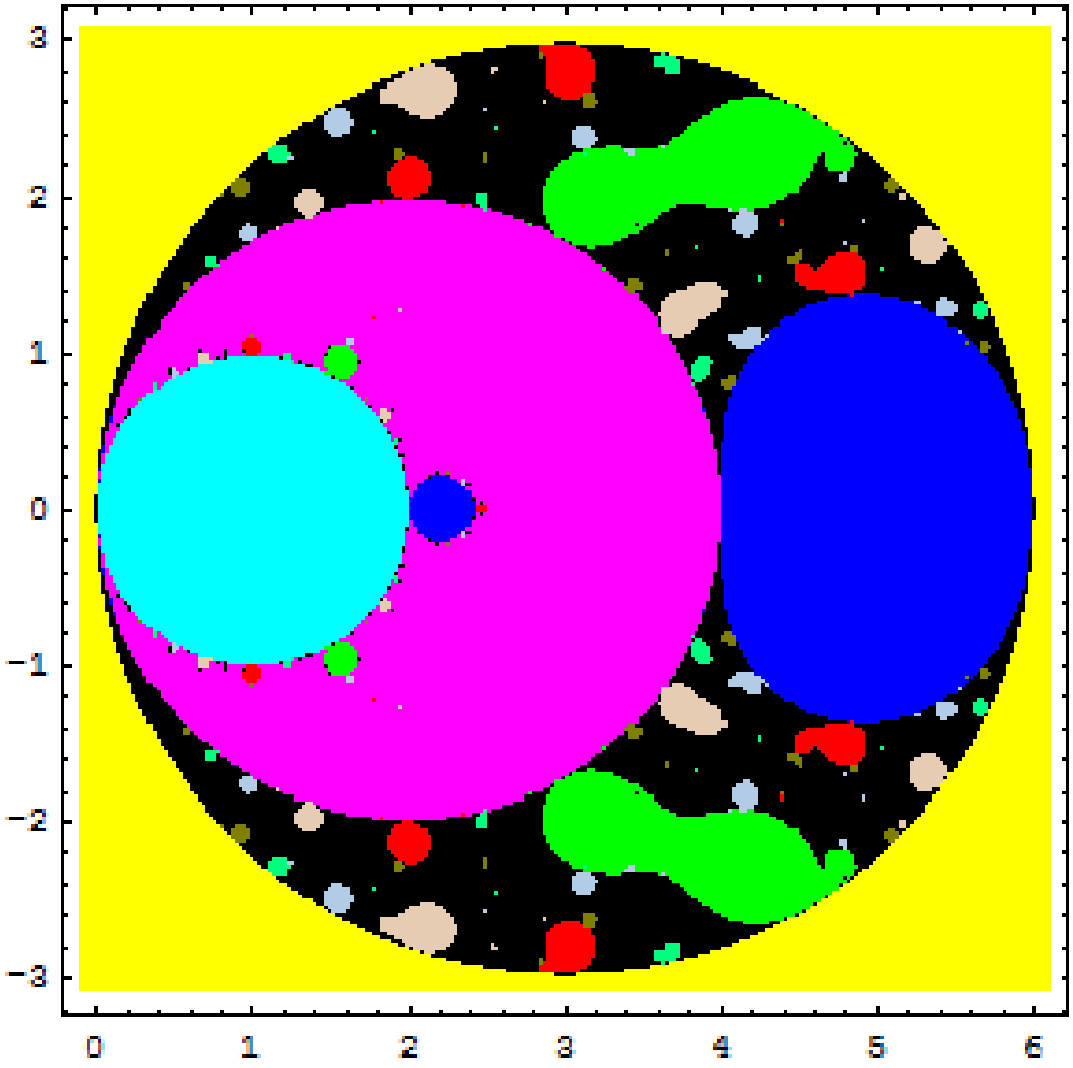


Figura 3.17: Plano de parámetros asociado al punto crítico PC_1. En negro aparece la zona de no convergencia. En cian aparece la convergencia hacia la raíz $z = -1$, en magenta aparece la convergencia hacia la raíz $z = 1$, en amarillo la convergencia hacia el infinito. La convergencia a 2-ciclos aparece en azul oscuro, mientras que la convergencia a 3-ciclos aparece en verde y a 4-ciclos en rojo. El resto de colores se corresponden con la convergencia a n-ciclos de diferentes órdenes.

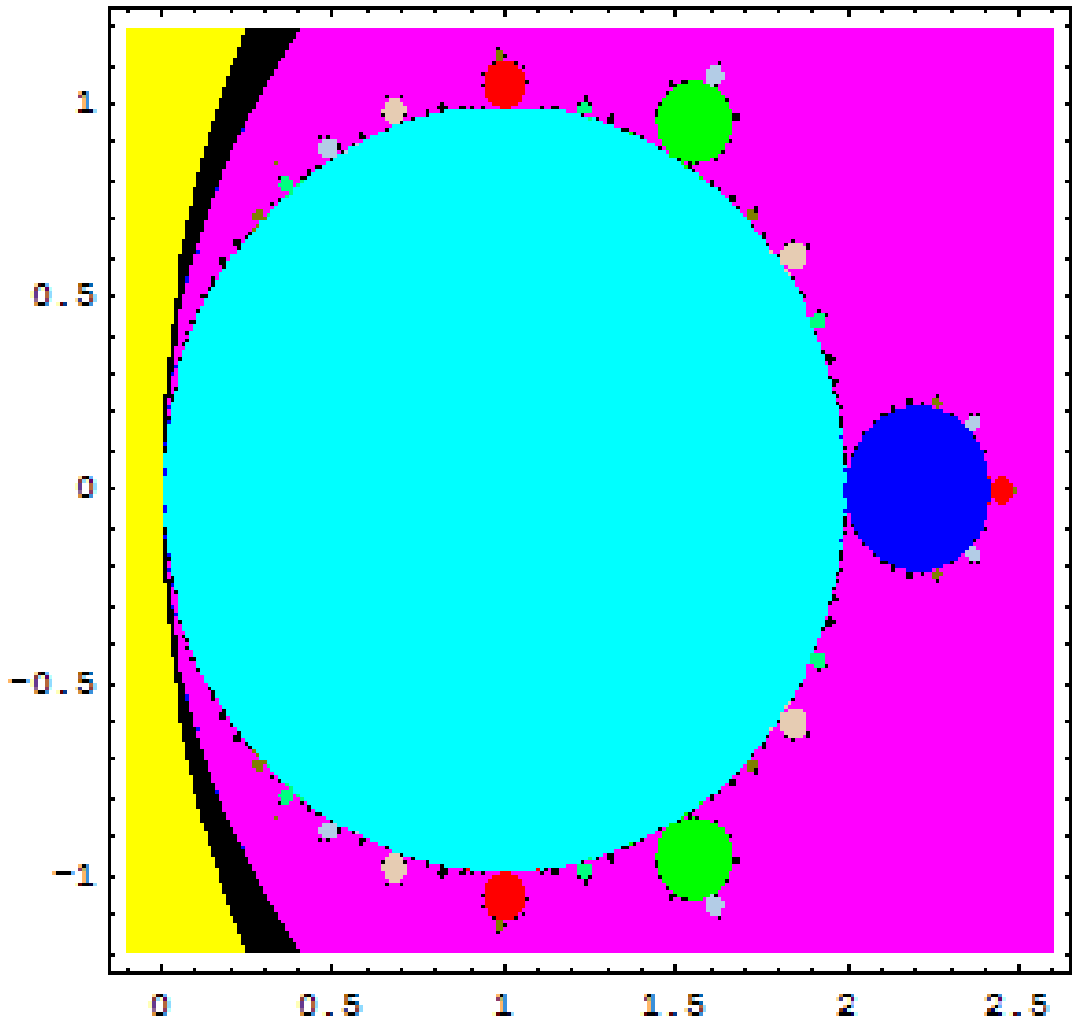


Figura 3.18: Zoom del plano de parámetros asociado al punto crítico PC_1. En negro aparece la zona de no convergencia. En cian aparece la convergencia hacia la raíz $z = -1$, en magenta aparece la convergencia hacia la raíz $z = 1$, en amarillo la convergencia hacia el infinito. La convergencia a 2-ciclos aparece en azul oscuro, mientras que la convergencia a 3-ciclos aparece en verde y a 4-ciclos en rojo. El resto de colores se corresponden con la convergencia a n-ciclos de diferentes órdenes.

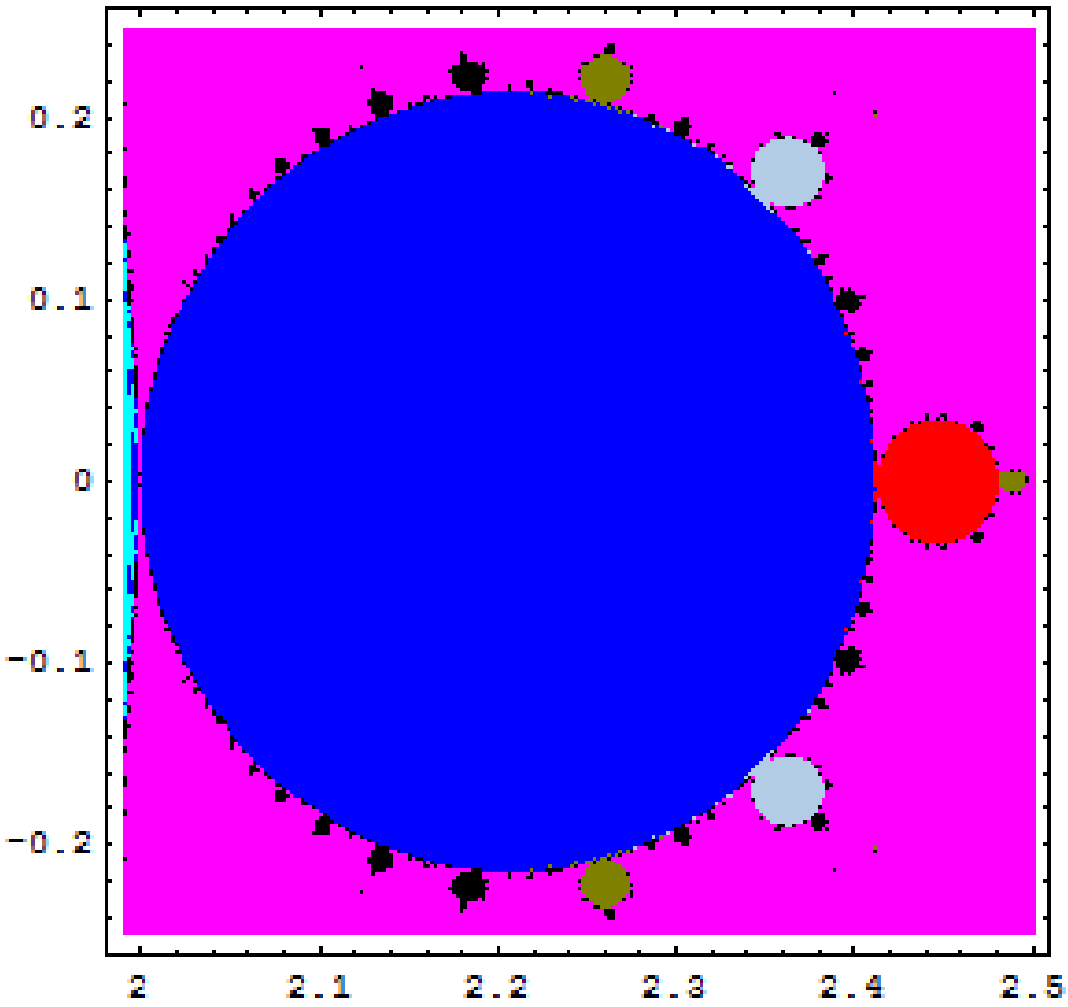


Figura 3.19: Zoom del plano de parámetros asociado al punto crítico PC_1. En negro aparece la zona de no convergencia. En cian aparece la convergencia hacia la raíz $z = -1$, en magenta aparece la convergencia hacia la raíz $z = 1$, en amarillo la convergencia hacia el infinito. La convergencia a 2-ciclos aparece en azul oscuro, mientras que la convergencia a 3-ciclos aparece en verde y a 4-ciclos en rojo. El resto de colores se corresponden con la convergencia a n-ciclos de diferentes órdenes.

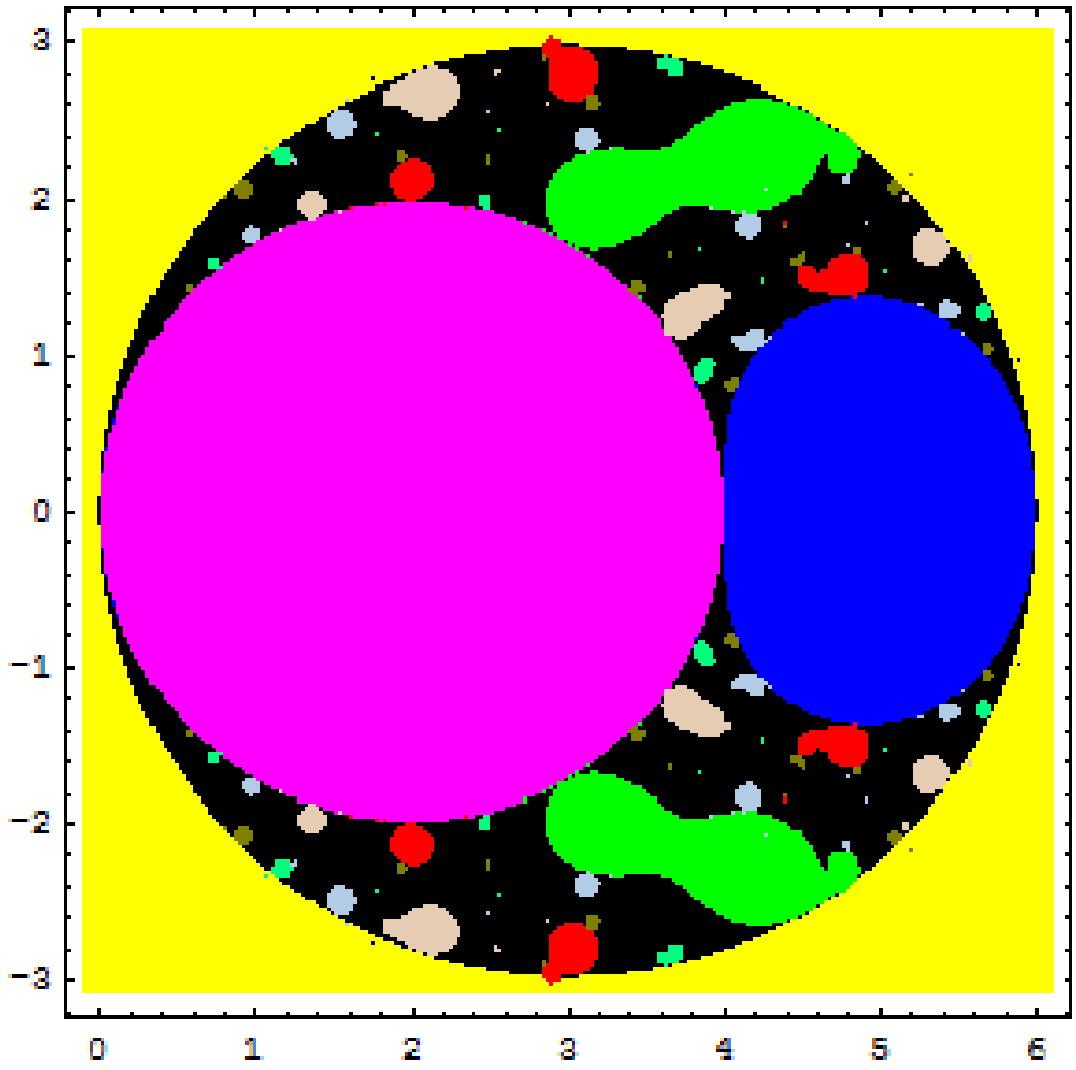
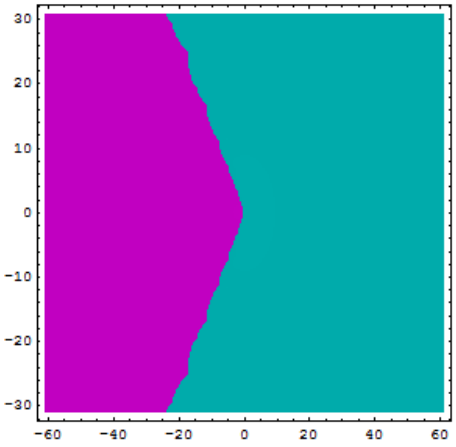
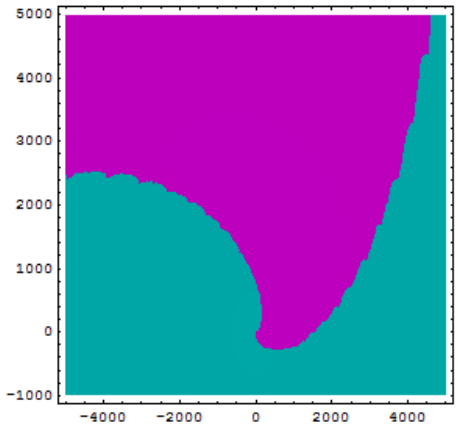


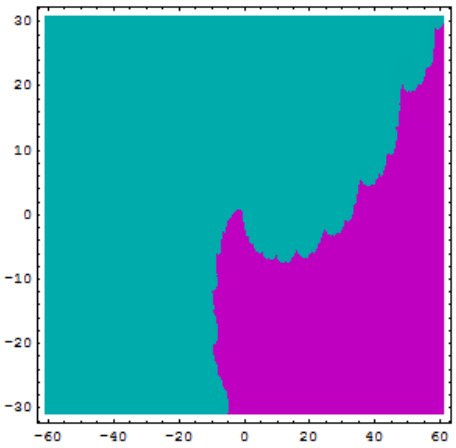
Figura 3.20: Plano de parámetros asociado al punto crítico PC_2. En negro aparece la zona de no convergencia. En cian aparece la convergencia hacia la raíz $z = -1$, en magenta aparece la convergencia hacia la raíz $z = 1$, en amarillo la convergencia hacia el infinito. La convergencia a 2-ciclos aparece en azul oscuro, mientras que la convergencia a 3-ciclos aparece en verde y a 4-ciclos en rojo. El resto de colores se corresponden con la convergencia a n-ciclos de diferentes órdenes.



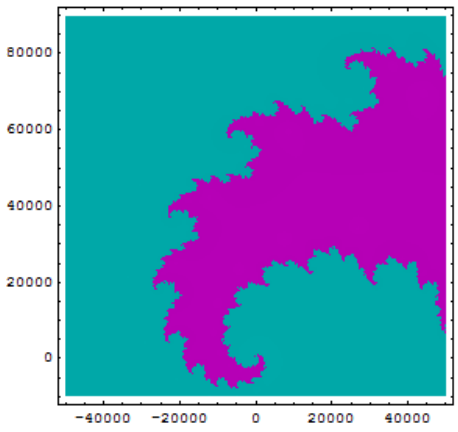
$\lambda = 1$



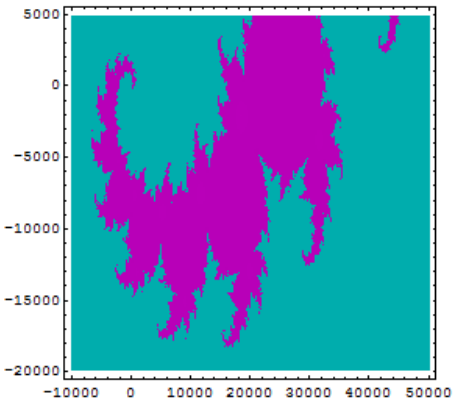
$\lambda = 0.5 + 0.25i$



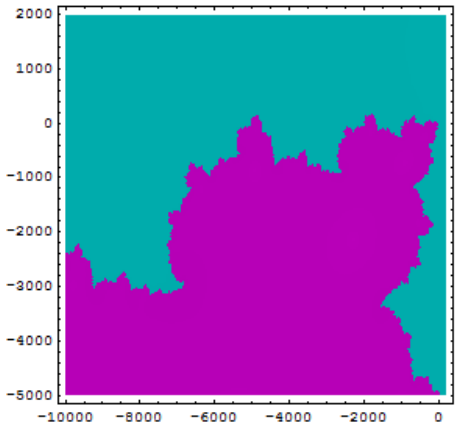
$\lambda = 1 + 0.5i$



$\lambda = 1 - 0.9i$

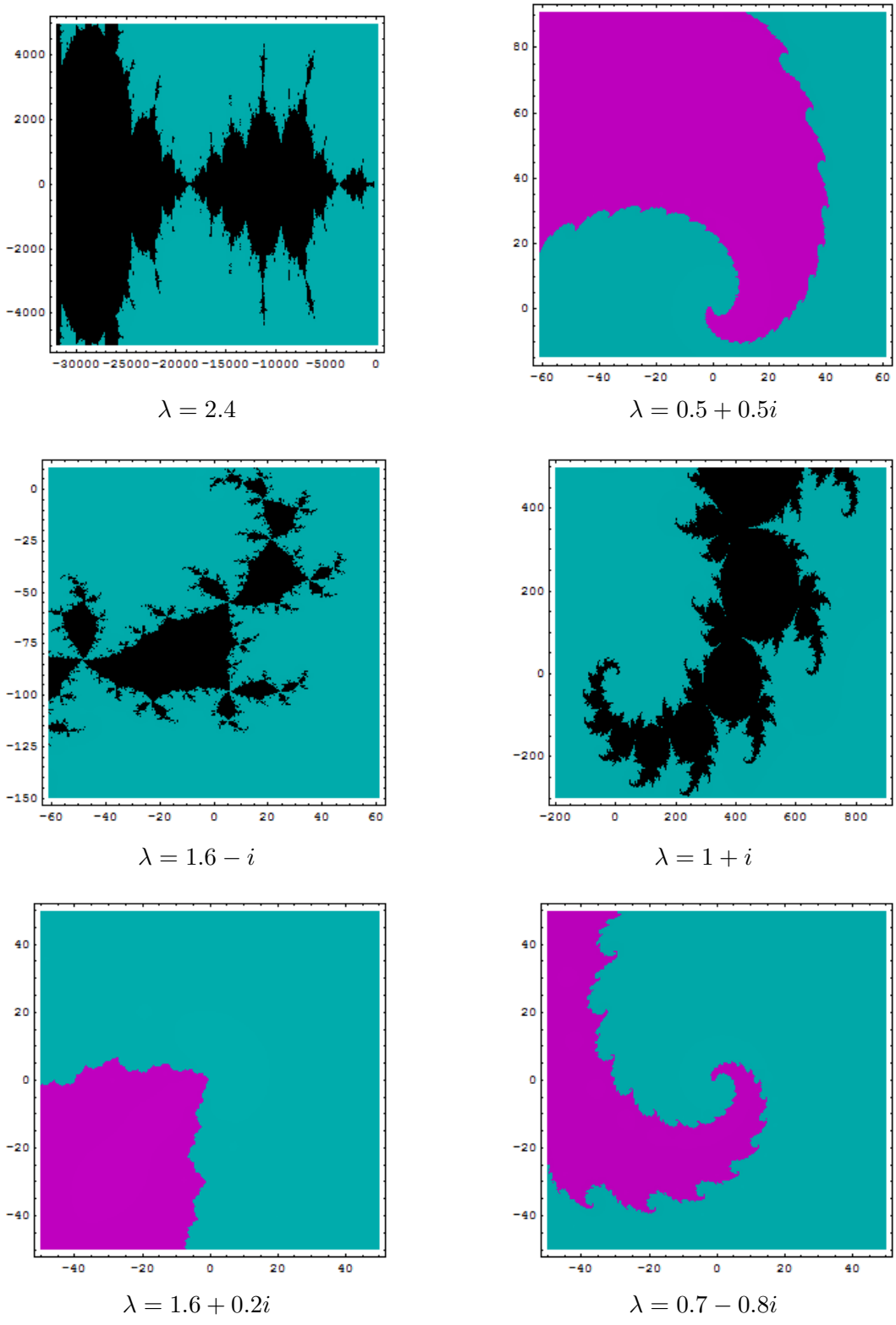


$\lambda = 1 + 0.99i$



$\lambda = 1.9 + 0.1i$

Figura 3.21: Galería IV. Cuencas de atracción asociadas a los puntos fijos de $R_\lambda(z)$, definida en (3.2.12) para diferentes valores del parámetro $\lambda \in \mathbb{C}$. La cuenca de $z = -1$ aparece en magenta, mientras que la cuenca de $z = 1$ se muestra en cian.



$\lambda = 2.4$ $\lambda = 0.5 + 0.5i$

$\lambda = 1.6 - i$ $\lambda = 1 + i$

$\lambda = 1.6 + 0.2i$ $\lambda = 0.7 - 0.8i$

Figura 3.22: Galería V. Cuencas de atracción asociadas a los puntos fijos de $R_\lambda(z)$, definida en (3.2.12) para diferentes valores del parámetro $\lambda \in \mathbb{C}$. La cuenca de $z = -1$ aparece en magenta, mientras que la cuenca de $z = 1$ se muestra en cian. Además, las zonas de no convergencia a raíces se muestran en negro.

El caso $p(z) = (z-a)^n(z-b)^n$

En esta sección vamos a extender el Teorema 1.4 que aparece en [116] para el método de Newton amortiguado. Este teorema dice lo siguiente.

Teorema 3.33 *Sea $p(z)$ un polinomio, entonces $\mathcal{J}(N_p(z))$ es una recta si y sólo si $p(z) = (z-a)^n(z-b)^n$ con $a \neq b$. Esta recta será la perpendicular al segmento que une a y b.*

Y la extensión que se ha obtenido se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 3.34 *Sea $p(z) = (z-a)^n(z-b)^n$ con $a \neq b$, $n \geq 1$ y sea $N_{\lambda,p}(z)$, el método de Newton amortiguado que viene definido por*

$$N_{\lambda,p}(z) = z - \lambda \frac{p(z)}{p'(z)}.$$

Si $\lambda \in (0, 2n)$, entonces $\mathcal{J}(N_{\lambda,p}(z))$ es la mediatriz del segmento que une las raíces a y b.

La demostración se omite por ser similar a la del Teorema 3.23.

3.2.3. El caso $p(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$

Para finalizar con el estudio del método de Newton amortiguado aplicado a polinomios de variable compleja, vamos a estudiar muy superficialmente lo que ocurre para un polinomio con tres raíces simples de la forma

$$p(z) = (z-a)(z-b)(z-c).$$

En concreto vamos a estudiar el polinomio $p(z) = z(z-1)(z+1)$. Para ello, procederemos a dibujar los planos de parámetros asociados a los puntos críticos de la función $N_{\lambda,p}(z)$, que en este caso son 4

$$PC_1 = -\frac{\sqrt{-\frac{3}{-3+\lambda} - \frac{\sqrt{3}\sqrt{4\lambda-\lambda^2}}{-3+\lambda}}}{\sqrt{3}},$$

$$PC_2 = \frac{\sqrt{-\frac{3}{-3+\lambda} - \frac{\sqrt{3}\sqrt{4\lambda-\lambda^2}}{-3+\lambda}}}{\sqrt{3}},$$

$$PC_3 = -\frac{\sqrt{-\frac{3}{-3+\lambda} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{4\lambda-\lambda^2}}{-3+\lambda}}}{\sqrt{3}}$$

y

$$PC_4 = \frac{\sqrt{-\frac{3}{-3+\lambda} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{4\lambda-\lambda^2}}{-3+\lambda}}}{\sqrt{3}}.$$

En las Figuras 3.23, 3.24, 3.25 y 3.26 se pueden ver los planos de parámetros asociados a los distintos puntos críticos, donde se observa que el comportamiento para cada uno de ellos es similar a excepción de que para valores del parámetro en la bola $B(1,1)$, se tiene que:

- PC_1 converge hacia $z = -1$.
- PC_2 hacia $z = 1$.
- PC_3 hacia $z = 0$.
- PC_4 hacia $z = 0$.

Otro hecho destacable, es que los valores para los que las órbitas convergen a 2-ciclos parece que aumentan considerablemente, ya que para valores de $\lambda \in B(4,2)$, la iteración de cada punto fijo converge a un 2-ciclo. Por último, destacar la simetría que existe con respecto al eje real.

Además, en las Galerías VI y VII, que aparecen respectivamente en las Figuras 3.27 y 3.28, puede verse una selección de fractales que genera el método para este tipo de polinomios. Destaca el hecho, de que cuanto mayor es la parte imaginaria del parámetro, más intrincado es el fractal y mayor giro le practica al gráfico. Notemos que se han tomado tanto valores reales, como complejos del parámetro y que se han dibujado en distintas regiones, combinando nuevamente regiones grandes con pequeñas.

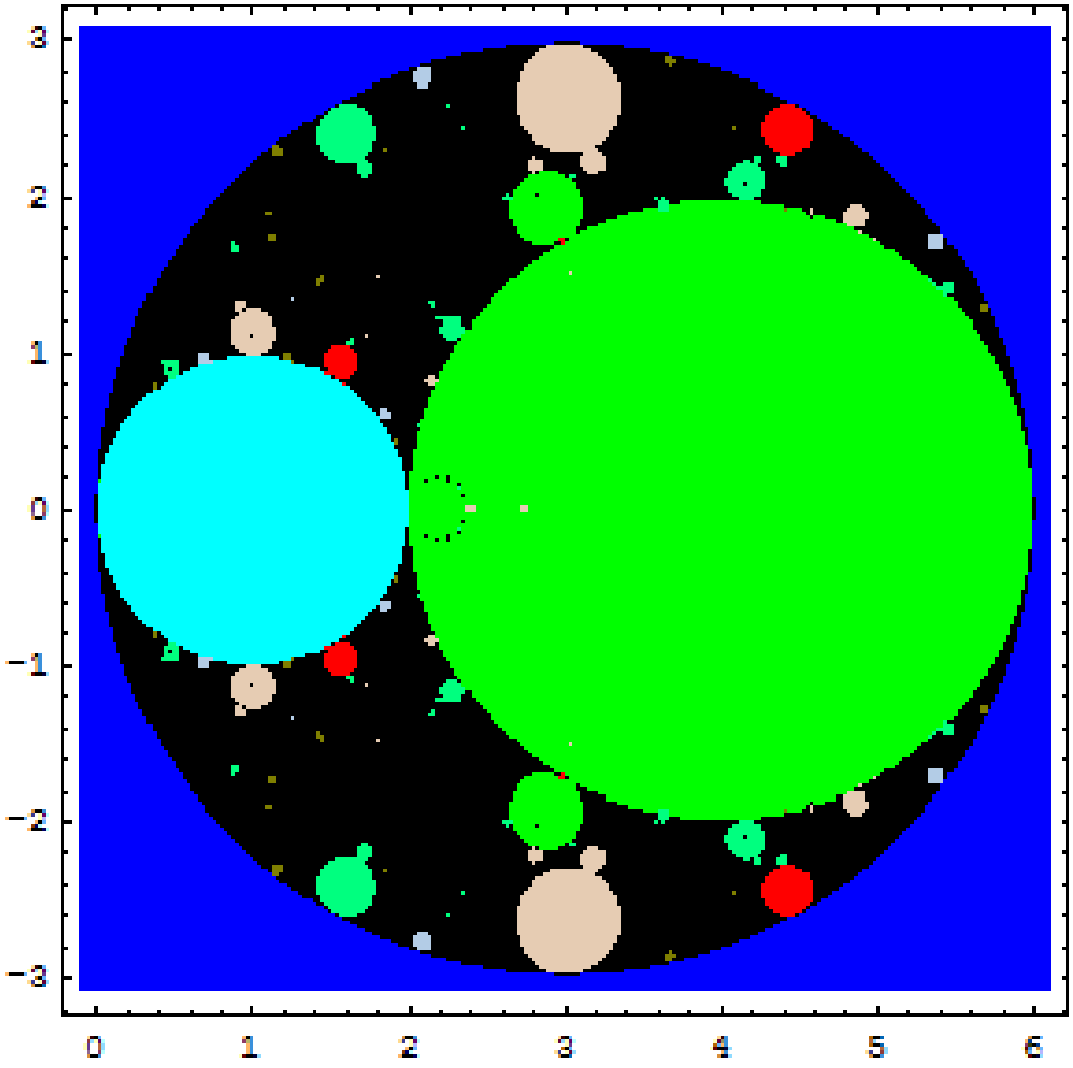


Figura 3.23: Plano de parámetros asociado al punto crítico PC_1. En negro aparece la zona de no convergencia. En cian aparece la convergencia hacia la raíz $z = -1$, en magenta aparece la convergencia hacia la raíz $z = 1$, en amarillo la convergencia hacia la raíz $z = 0$ y en azul oscuro la convergencia hacia el infinito. La convergencia a 2-ciclos aparece en verde, mientras que a 3-ciclos aparece en rojo. El resto de colores se corresponden con la convergencia a n-ciclos de diferentes órdenes.

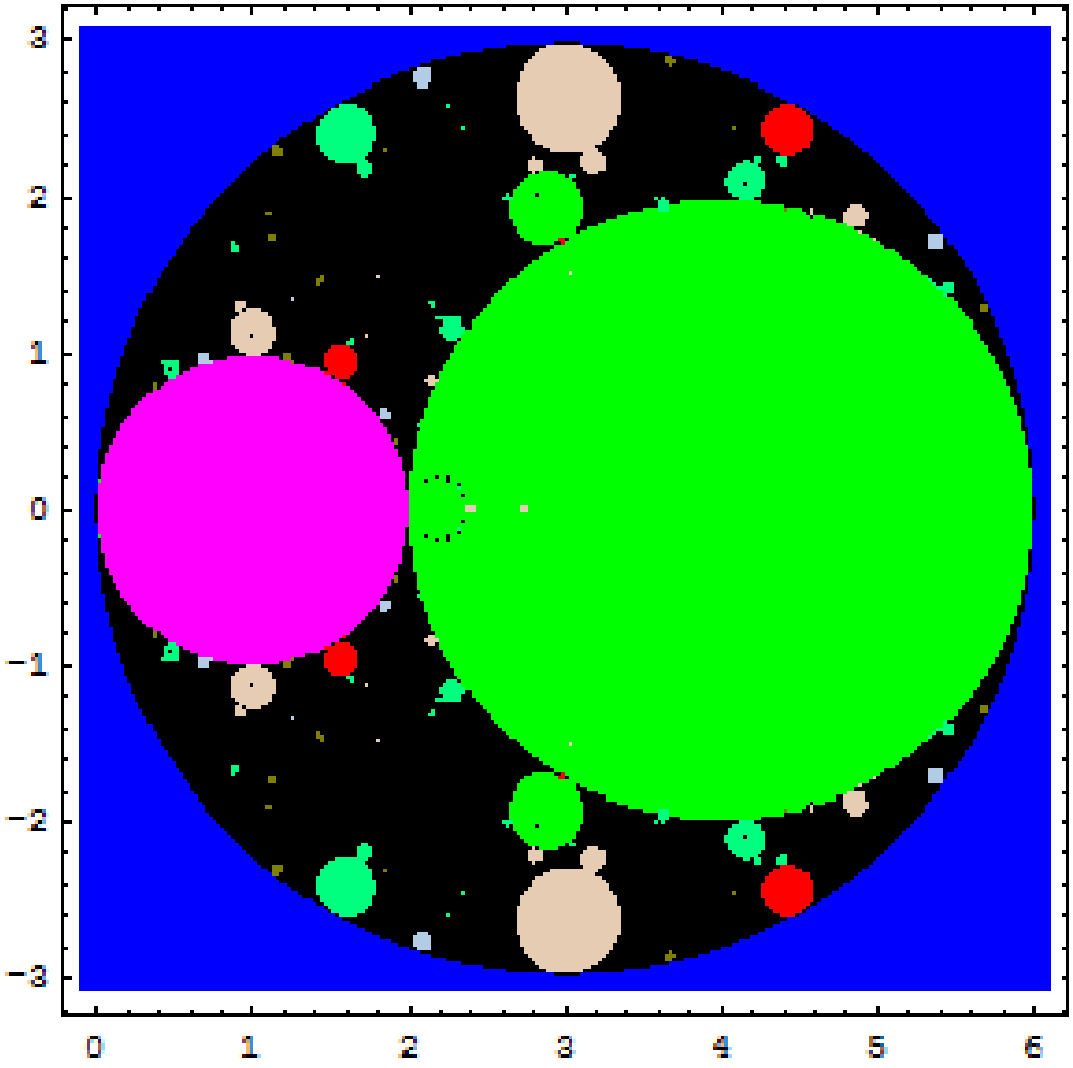


Figura 3.24: Plano de parámetros asociado al punto crítico PC_2. En negro aparece la zona de no convergencia. En cian aparece la convergencia hacia la raíz $z = -1$, en magenta aparece la convergencia hacia la raíz $z = 1$, en amarillo la convergencia hacia la raíz $z = 0$ y en azul oscuro la convergencia hacia el infinito. La convergencia a 2-ciclos aparece en verde, mientras que a 3-ciclos aparece en rojo. El resto de colores se corresponden con la convergencia a n-ciclos de diferentes órdenes.

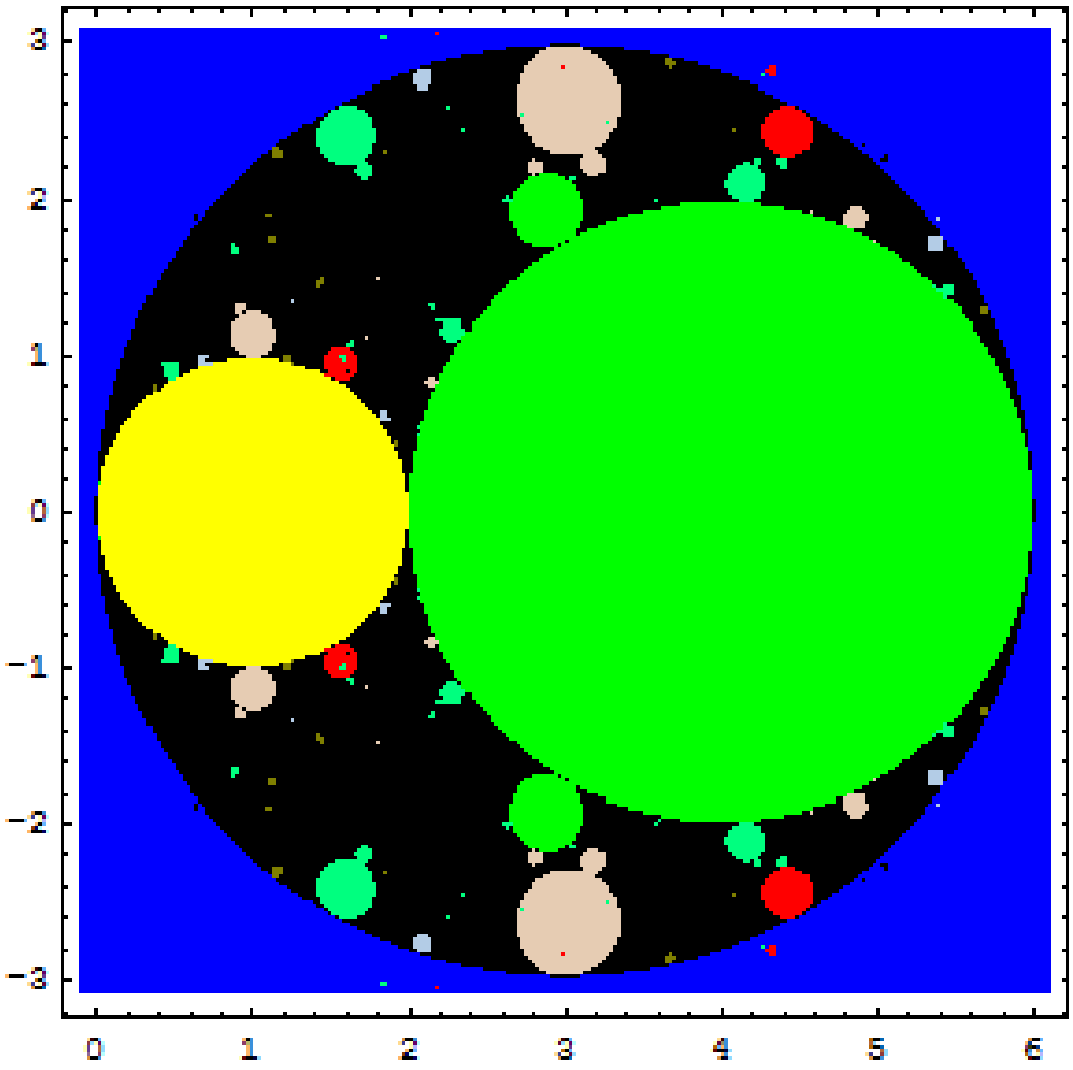


Figura 3.25: Plano de parámetros asociado al punto crítico PC_3. En negro aparece la zona de no convergencia. En cian aparece la convergencia hacia la raíz $z = -1$, en magenta aparece la convergencia hacia la raíz $z = 1$, en amarillo la convergencia hacia la raíz $z = 0$ y en azul oscuro la convergencia hacia el infinito. La convergencia a 2-ciclos aparece en verde, mientras que a 3-ciclos aparece en rojo. El resto de colores se corresponden con la convergencia a n-ciclos de diferentes órdenes.

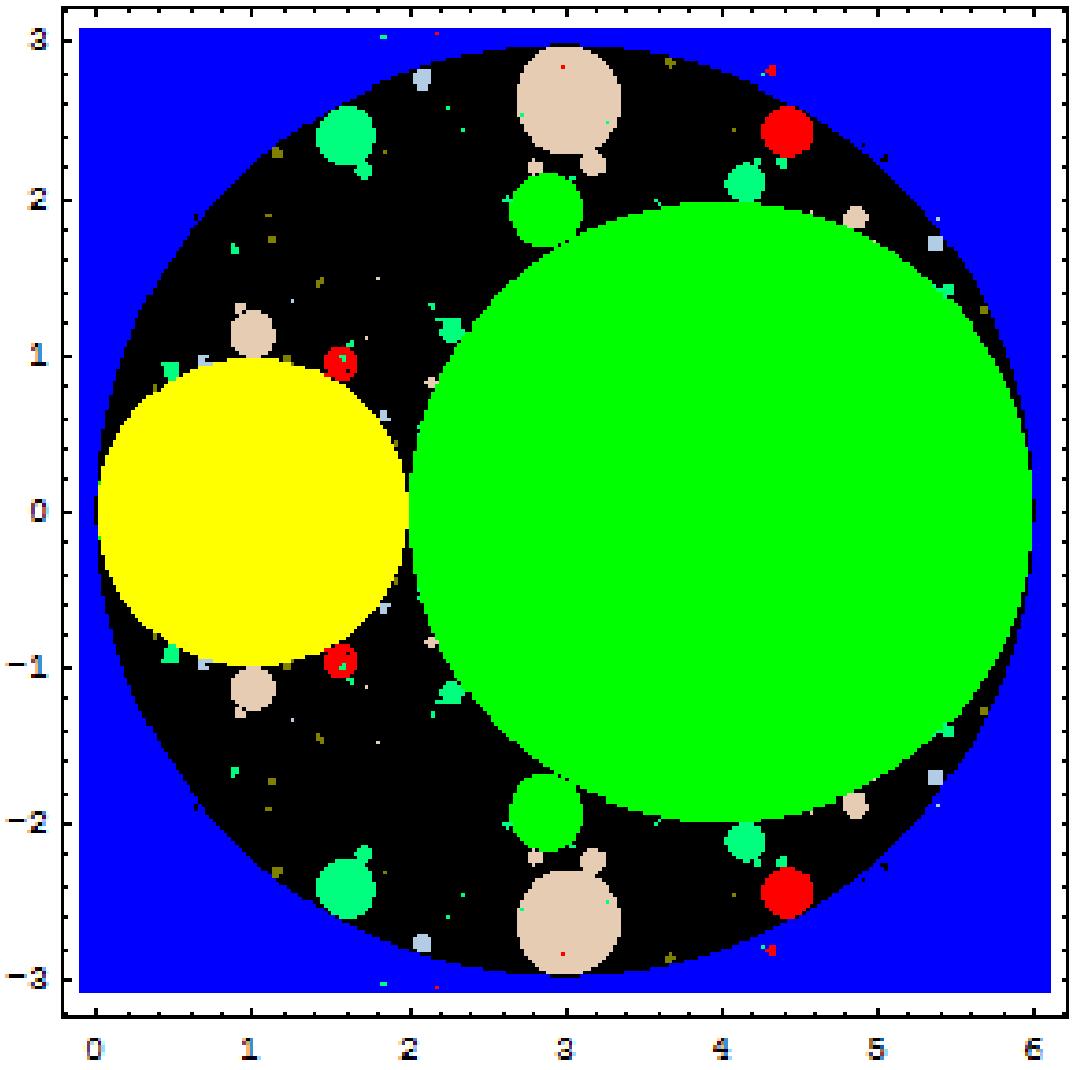


Figura 3.26: Plano de parámetros asociado al punto crítico PC_4. En negro aparece la zona de no convergencia. En cian aparece la convergencia hacia la raíz $z = -1$, en magenta aparece la convergencia hacia la raíz $z = 1$, en amarillo la convergencia hacia la raíz $z = 0$ y en azul oscuro la convergencia hacia el infinito. La convergencia a 2-ciclos aparece en verde, mientras que a 3-ciclos aparece en rojo. El resto de colores se corresponden con la convergencia a n-ciclos de diferentes órdenes.

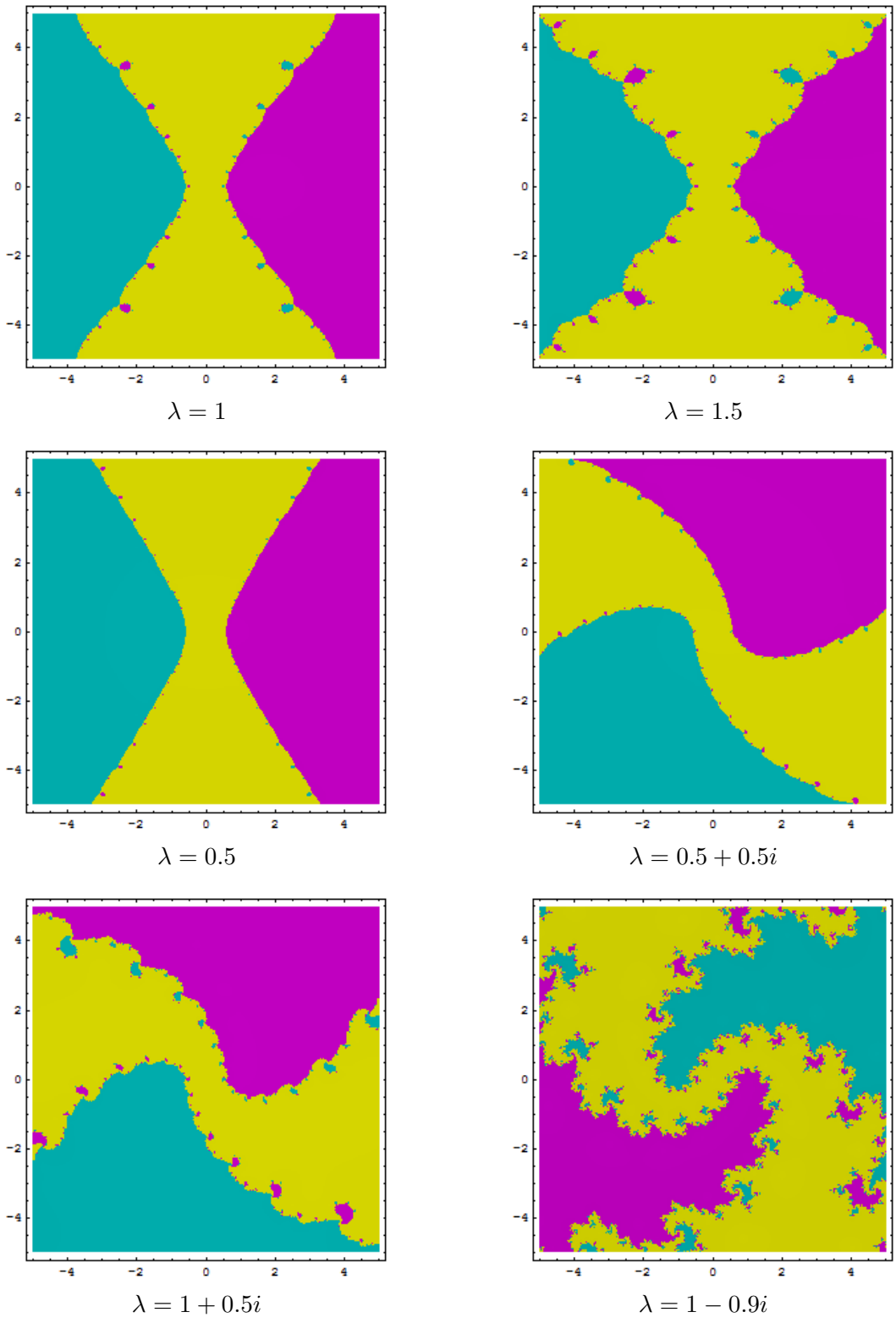
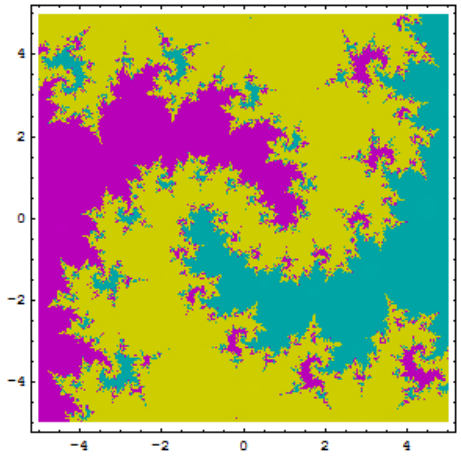
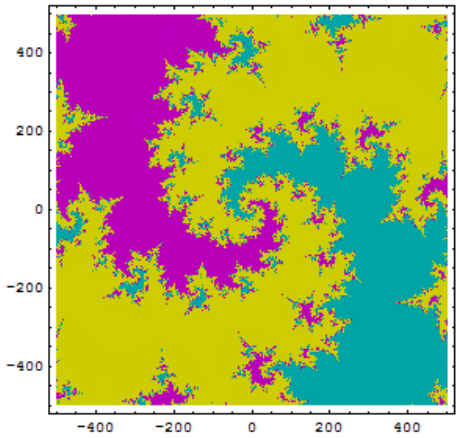


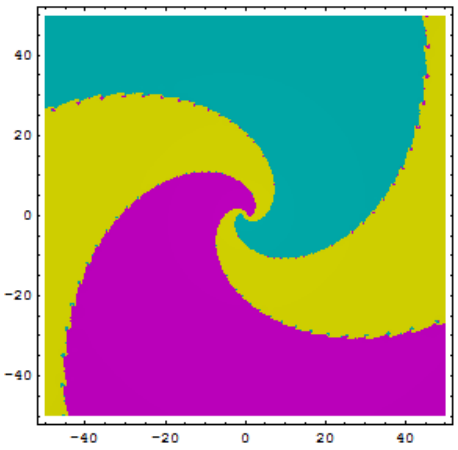
Figura 3.27: Galería VI. Cuencas de atracción asociadas al método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $p(z) = z(z-1)(z+1)$ para diferentes valores del parámetro $\lambda \in \mathbb{C}$. La cuenca de $z = 1$ aparece en magenta, mientras que la cuenca de $z = -1$ se muestra en cian y en amarillo aparece la cuenca de $z = 0$.



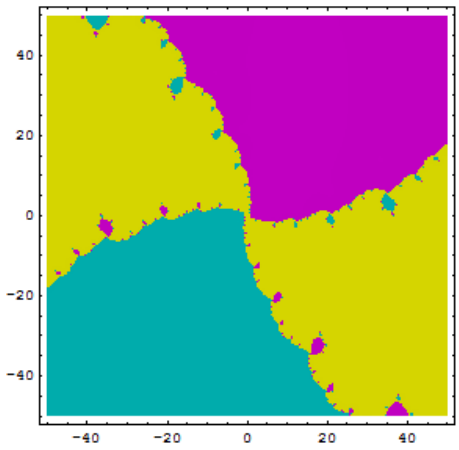
$\lambda = 1 + 0.99i$



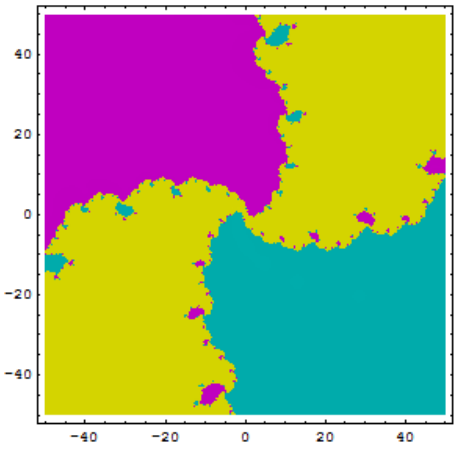
$\lambda = 1 - 0.99i$



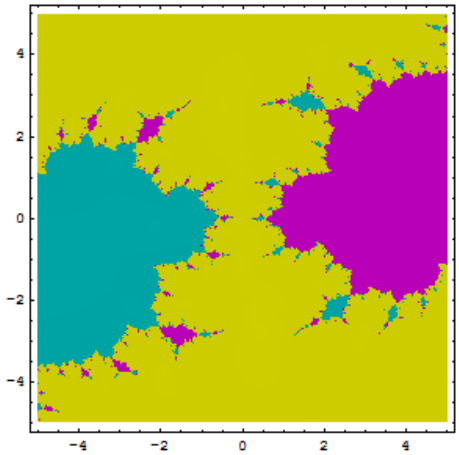
$\lambda = 0.25 + 0.25i$



$\lambda = 1.25 + 0.25i$



$\lambda = 1.25 + 0.5i$



$\lambda = 1.9 + 0.1i$

Figura 3.28: Galería VII. Cuencas de atracción asociadas al método de Newton amortiguado aplicado al polinomio $p(z) = z(z-1)(z+1)$ para diferentes valores del parámetro $\lambda \in \mathbb{C}$. La cuenca de $z = 1$ aparece en magenta, mientras que la cuenca de $z = -1$ se muestra en cian y en amarillo aparece la cuenca de $z = 0$.

Capítulo 4

El método de Newton amortiguado en espacios de Banach

4.1. El método de Newton-Kantorovich

En los capítulos previos hemos visto cómo se puede aplicar tanto el método de Newton como el método de Newton amortiguado a funciones de variable real o compleja, sin embargo, en este capítulo centraremos el estudio en espacios de Banach. La aplicación del método en este tipo de espacios se debe a Kantorovich, quien combinando técnicas de análisis funcional y numérico demostró un teorema de convergencia para el método de Newton en espacios de Banach. Los primeros pasos que dio en este sentido aparecieron en un trabajo sobre métodos iterativos para ecuaciones funcionales en espacios de Banach, que fue publicado en 1939 (véase [62]) y se apoyó en el principio de la aplicación contractiva de Banach.

Algunos años más tarde, en 1948 concretamente (véase [63]), Kantorovich estableció un teorema de convergencia semilocal para el método de Newton en espacios de Banach. Este teorema es conocido como el teorema de Kantorovich o de Newton-Kantorovich, y es un teorema de existencia y unicidad de solución. Además, proporciona resultados sobre estimaciones de errores, orden de convergencia, etc. La generalización del método de Newton a espacios de Banach se escribe de la forma

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n),\ n \geq 0 \tag{4.1.1}$$

donde $F : X \to Y$ es un operador definido entre dos espacios de Banach X e Y, siendo $F'(x_n)$ la derivada Fréchet del operador $F(x)$ en el punto x_n y $F'(x_n)^{-1}$ su operador inverso.

La principal aportación del teorema de Kantorovich no es el hecho en sí de haber probado un teorema de existencia y unicidad de solución, sino el haber

aplicado técnicas de análisis funcional para resolver problemas de análisis numérico. Este enfoque ha permitido poder utilizar el método de Newton para resolver ecuaciones no lineales, sistemas de ecuaciones no lineales, problemas de optimización, ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones integrales o incluso cálculo variacional, entre otras muchas otras.

Tres años después de presentar su teorema (véase [64]), Kantorovich introduce el conocido como *principio de la mayorante* para demostrar el teorema anterior, basándose en el concepto de *sucesión mayorizante*. Diremos que una sucesión de números reales $\{t_n\}$ mayoriza a una sucesión definida en un espacio de Banach $\{x_n\}$ si se verifica la siguiente condición

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq t_{n+1} - t_n,\ n \geq 0.$$

La importancia de este tipo de sucesiones mayorizantes reside en el hecho de que la convergencia de la sucesión mayorizante implica la convergencia de la mayorizada, ya que

$$\|x^* - x_n\| \leq t^* - t_n,\ n \geq 0.$$

La evolución del estudio del método ha llevado a la existencia de numerosas variantes del teorema presentado por Kantorovich (puede encontrarse un resumen en [94]) que involucran a la segunda derivada, a la tercera y otras muchas variantes, sin embargo, en esta tesis presentamos una versión actualizada que ha sido demostrada de múltiples maneras, y que involucra a la condición de Lipschitz. En estas variantes se modifican hipótesis, resultados e incluso las técnicas utilizadas. Así, diversos autores han utilizado condiciones sobre la derivada segunda (véase [80]), operadores Hölder-continuos (véase [59]), ω-condiciones (véase por ejemplo [37] o [38]) e incluso con la α-teoría de Smale (véase [105] o [119]).

Con respecto a las cotas de error cometido, también existen multitud de resultados obtenidos aplicando diferentes técnicas (véase [48], [67], [75], [76], [77], [84], [95], [96], [113] o [114]), destacando entre ellas la utilización de sucesiones recurrentes. Esta técnica tiene la ventaja de que, a parte de estimar el error cometido en cada iteración, a su vez también observan el comportamiento de la función o sus derivadas en cada aproximación. La idea principal consiste en construir un sistema de relaciones de recurrencia adimensionales que consiste en dos sucesiones de números reales positivos, que proporcionan una sucesión real positiva que mayoriza a la sucesión de Newton en espacios de Banach. La aplicación de esta técnica para el método de Newton-Kantorovich puede verse en [36].

Por lo tanto, es evidente que existen diferentes técnicas de demostración que pueden utilizarse para probar este teorema. En nuestro caso, introducimos una técnica novedosa que se apoya en la solución al problema 162 propuesto en la sección de problemas y soluciones de la Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española en 2011, vol. **14**, número 3 en las páginas 517–518.

Teorema 4.1 *(de Kantorovich) Sea $F : X \to Y$ un operador diferenciable Fréchet definido entre dos espacios de Banach X e Y satisfaciendo*

(i) *Existe la inversa de F en el punto x_0 y la denotaremos por $\Gamma_0 = F'(x_0)^{-1}$.*

(ii) $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq a,\ a > 0.$

(iii) $\|\Gamma_0[F'(x) - F'(y)]\| \leq b\|x - y\|,\ b > 0$, *para todo x, y en una bola $B(x_0, R)$.*

(iv) $h = ab < \frac{1}{2}$.

(v) $r^* = \frac{1-\sqrt{1-2h}}{b} \leq R$.

Entonces, el método de Newton dado en (4.1.1) *está bien definido y converge a x^*, solución de $F(x) = 0$. Por otra parte, x^* está localizada en la bola $B(x_0, r^*)$ y, además, es única en $B(x_0, r^{**})$, donde $r^{**} = \frac{1+\sqrt{1-2h}}{b}$.*

Demostración El primer paso consistirá en construir una sucesión mayorizante para $\{x_n\}$, la dada por el método de Newton, ya que al encontrarnos en espacios de Banach, si encontramos una sucesión mayorizante convergente podemos asegurar que la sucesión $\{x_n\}$ mayorizada es convergente también.

Notemos que $b\|x - x_0\|<1$ y, por tanto, aplicando el Lema de Banach de Inversión obtenemos la siguiente desigualdad, para cada $x \in B(x_0, r^*)$

$$\|F'(x)^{-1}F'(x_0)\| \leq \frac{1}{1 - b\|x - x_0\|}.$$

Si ahora realizamos una descomposición de tipo Ostrowski para $F(x_{k+1})$ obtenemos que

$$\begin{aligned} F(x_{k+1}) &= F(x_{k+1}) - F(x_k) - F'(x_k)(x_{k+1} - x_k) \\ &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} [F'(x) - F'(x_k)]\, dx \\ &= \int_0^1 [F'(x_k + t(x_{k+1} - x_k)) - F'(x_k)]\,(x_{k+1} - x_k)dt \end{aligned}$$

y, por lo tanto, obtenemos que

$$\|\Gamma_0 F(x_{k+1})\| \leq \frac{b}{2}\|x_{k+1} - x_k\|^2. \tag{4.1.2}$$

Definimos ahora la sucesión

$$\begin{cases} r_0 = 0 \\ r_1 = a \\ r_{n+1} = r_n + \dfrac{b}{2}\ \dfrac{(r_n - r_{n-1})^2}{1 - br_n}, \end{cases}$$

que será la que estudiemos.

Una vez que ya tenemos la sucesión mayorizante, veremos su convergencia, pero antes de nada haremos algunos cambios de variable. El primero consiste en llamar $t_n = br_n$ y nos transforma la sucesión en

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_1 = h \\ t_{n+1} = t_n + \dfrac{1}{2}\dfrac{(t_n - t_{n-1})^2}{1 - t_n}. \end{cases}$$

El siguiente cambio de variable es $y_n = 1 - r_n$, lo que nos lleva a

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_1 = 1 - h \\ y_{n+1} = y_n - \dfrac{1}{2}\dfrac{(y_n - y_{n-1})^2}{y_n}. \end{cases}$$

Por último, si llamamos $\theta_n = 1 - \frac{y_n}{y_{n-1}}$ obtenemos la siguiente sucesión recurrente en la que cada término sólo depende del término inmediatamente anterior

$$\begin{cases} \theta_1 = h \\ \theta_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\theta_n}{1 - \theta_n}\right)^2. \end{cases} \tag{4.1.3}$$

Denotemos ahora $\theta_{n+1} = G(\theta_n)$, donde $G(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^2$. Notemos que $G(\theta)$ tiene tres puntos fijos $\theta = 0,\ \theta = \frac{1}{2},\ \theta_2 = 2$. En la Figura 4.1 se observa la gráfica de la función $G(\theta)$.

La condición (iii) del teorema garantiza que la sucesión $\{\theta_n\}$ es monónotamente decreciente: $0 < \theta_{n+1} < \theta_n\ \forall n \geq 2$. Además,

$$\theta_{n+1} = \frac{\theta_n^2}{2(1-\theta_n)^2} \leq \frac{\theta_n^2}{2(1-h)^2} \leq NN^2(\theta_{n-1})^2 \leq \cdots \leq N^{2^n-1}\theta_1^{2^n} = \frac{1}{N}(N\theta_1)^{2^n},$$

con $N = \frac{1}{2(1-h)^2}$. De nuevo la condición (iii) nos garantiza que esta sucesión es convergente ya que si $h \leq \frac{1}{2}$ tenemos que $N < 1$ y, por lo tanto, la sucesión $\{\theta_n\}$ es convergente.

Ahora notemos que

$$y_n = (1 - \theta_n)y_{n-1} = (1 - \theta_n)(1 - \theta_{n-1})y_{n-2} = \cdots = (1 - \theta_n)\cdots(1 - \theta_1)y_0.$$

Entonces, queremos probar que

$$t_n = 1 - \prod_{j=1}^{n}(1 - \theta_j) = 1 - \sqrt{1 - 2h}.$$

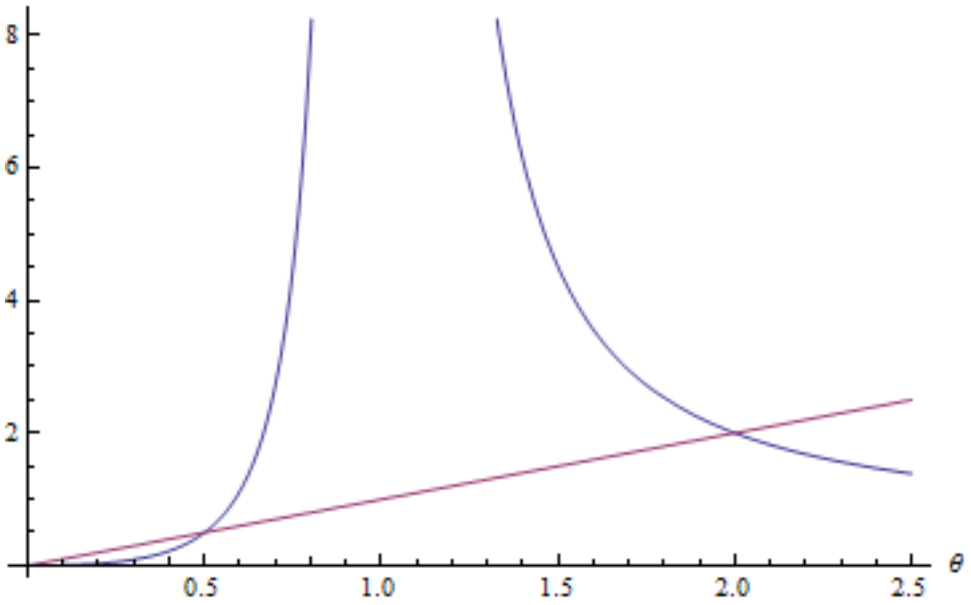


Figura 4.1: Gráfica de la función $G(\theta)$ junto con la identidad, en el intervalo $[0, 2.5]$ donde se observan los 3 puntos fijos en $\theta = 0$, $\theta = 0.5$ y $\theta = 2$.

Lo primero que queremos ver es que $\theta_n = \dfrac{1}{2\cosh^2(2^{n-1}t)}$, donde $t > 0$ y además verifica que $a = \dfrac{1}{2\cosh^2(t)}$. En efecto, si $n = 1$ y tenemos en cuenta que $\theta_1 = \dfrac{1}{2\cosh^2(t)}$, y que $\cosh^2(s) = 2\cosh^2(s) - 1$, obtenemos

$$\theta_2 = \frac{1}{2}\frac{x_1^2}{(1-x_1)^2} = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{4\cosh^4(t)}}{\frac{(2\cosh^2(t)-1)^2}{4\cosh^4(t)}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\cosh^2(t)}.$$

Veamos qué pasa con un n genérico

$$\theta_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{\theta_n^2}{(1-\theta_n)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{(2\cosh^2(2^{n-1}t)-1)^2} = \frac{1}{2\cosh^2(2^n t)}.$$

Una vez que ya tenemos probado ésto, podemos sustituirlo y entonces

$$\prod_{j=1}^{N}(1-\theta_j) = \prod_{j=1}^{N}\frac{\theta_j}{\sqrt{2\theta_{j+1}}} = \prod_{j=1}^{N}\frac{\cosh(2^j t)}{2\cosh^2(2^{j-1}t)}.$$

Ahora, teniendo en cuenta que $\operatorname{senh}(2s) = 2\operatorname{senh}(s)\cosh(s)$, obtenemos

$$\prod_{j=1}^{N}\left(\cosh(2^{j-1}t)\right) = \prod_{j=1}^{N}\frac{\operatorname{senh}(2^j t)}{2\operatorname{senh}(2^{j-1}t)} = \frac{\operatorname{senh}(2^N t)}{2^N\operatorname{senh}(t)},$$

de donde

$$\prod_{j=1}^{N} \frac{\cosh(2^j t)}{2\cosh^2(2^{j-1}t)} = \frac{\frac{\operatorname{senh}(2^{N+1}t)}{2^N \operatorname{senh}(2t)}}{2^N \frac{\operatorname{senh}^2(2^N t)}{(2^N \operatorname{senh}(t))^2}} = \frac{\operatorname{senh}^2(t)}{\operatorname{senh}(2t)} \frac{\operatorname{senh}(2^{N+1}t)}{\operatorname{senh}^2(2^N t)}.$$

Si ahora hacemos tender $N \to \infty$ y tenemos en cuenta que $\operatorname{senh}(s) \sim \frac{1}{2}e^s$ si $s \to \infty$, entonces

$$\prod_{j=1}^{n}(1-\theta_j) = \lim_{N\to\infty} \frac{\operatorname{senh}^2(t)}{\operatorname{senh}(2t)} \frac{\operatorname{senh}(2^{N+1}t)}{\operatorname{senh}^2(2^N t)} = \frac{2\operatorname{senh}^2(t)}{\operatorname{senh}(2t)} = \tanh(t).$$

Por último, como $\tanh^2(t) = 1 - \frac{1}{\cosh^2(t)} = 1 - 2h$, obtenemos

$$1 - \prod_{j=1}^{n}(1-\theta_j) = 1 - \sqrt{1-2h}.$$

Por tanto, podemos garantizar, tomando límites en (4.1.2), que x^* es solución de la ecuación $F(x) = 0$ y, además, está localizada en la bola $B(x_0, r^*)$ donde

$$r^* = \frac{1-\sqrt{1-2h}}{b}.$$

Para obtener la región en la que la solución es única, asumimos que $\hat{x}$ es otra solución localizada en la bola $B(x_0, r^{**})$. Entonces,

$$0 = \Gamma_0 \left[F(\hat{x}) - F(x^*)\right] = M(\hat{x} - x^*), \tag{4.1.4}$$

donde $M : X \to X$ denota el operador lineal definido por:

$$Mx = \left[\int_0^1 \Gamma_0 F'(x^* + t(\hat{x} - x^*))\, dt\right] x, \quad x \in X.$$

Como $\|\hat{x} - x_0\| < r^{**}$ y $\|x^* - x_0\| \leq r^*$ tenemos:

$$\begin{aligned} \|I - M\| &= \left\| \int_0^1 \Gamma_0 [F'(x^* + t(\hat{x} - x^*)) - F'(x_0)]\, dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 b\|x^* + t(\hat{x} - x^*) - x_0\|\, dt \\ &\leq \int_0^1 b\left((1-t)\|x^* - x_0\| + t\|\hat{x} - x_0\|\right)\, dt \\ &< \frac{b}{2}(r^* + r^{**}) = 1. \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Por el Lema de Inversión de Banach (véase [98]) tenemos que existe la inversa de M. Entonces, teniendo en cuenta (4.1.4), se tiene que $\hat{x} = x^*$, es decir, x^* es la única solución de $F(x) = 0$ en la bola $B(x_0, r^{**})$. Y ésto concluye la demostración. ∎

Además, el valor de h puede ampliarse hasta exactamente $\frac{1}{2}$ como asegura el siguiente resultado.

Teorema 4.2 *Bajo las condiciones del Teorema 4.1 pero con $h = \frac{1}{2}$, el método de Newton dado en (4.1.1) está bien definido y converge a x^* solución de $F(x) = 0$. Además, x^* está localizada y es única en la bola $\overline{B}(x_0, r^*)$ donde $r^* = \frac{1}{b}$.*

Demostración Siguiendo la demostración del Teorema 4.1, pero con $h = \frac{1}{2}$ tenemos que

$$\theta_n = \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, deshaciendo los cambios de variable obtenemos que

$$y_n = \frac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N},$$

entonces

$$t_n = 1 - \frac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

y, por lo tanto,

$$r_n = \frac{1}{b}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por último, se tiene lo siguiente

$$\|x^* - x_n\| \leq r^* - r_n \leq \frac{1}{b2^n},$$

concretamente para $n = 0$ tenemos

$$\|x^* - x_0\| \leq \frac{1}{b}.$$

Para obtener la región de unicidad de solución, asumimos que $\hat{x}$ es otra solución localizada en la bola $B(x_0, r^*)$. Entonces,

$$0 = \Gamma_0 \left[F(\hat{x}) - F(x^*)\right] = M(\hat{x} - x^*), \tag{4.1.6}$$

donde $M : X \to X$ denota el operador lineal definido por

$$Mx = \left[\int_0^1 \Gamma_0 F'(x^* + t(\hat{x} - x^*))\, dt\right] x, \quad x \in X.$$

Como $\|\hat{x} - x_0\| \leq r^*$ y $\|x^* - x_0\| \leq r^*$ tenemos

$$\begin{aligned} \|I - M\| &= \left\| \int_0^1 \Gamma_0 [F'(x^* + t(\hat{x} - x^*)) - F'(x_0)]\, dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 b\|x^* + t(\hat{x} - x^*) - x_0\|\, dt \\ &\leq \int_0^1 b\left((1-t)\|x^* - x_0\| + t\|\hat{x} - x_0\|\right)\, dt \\ &< \frac{b}{2}(r^* + r^*) = br^* = 1. \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Por el Lema de Inversión de Banach (véase [98]) tenemos que existe la inversa de M. Entonces teniendo en cuenta (4.1.6), se tiene que $\hat{x} = x^*$, es decir, x^* es la única solución de $F(x) = 0$ en la bola $B(x_0, r^*)$. Y ésto concluye la demostración. ∎

4.2. Convergencia local del método de Newton amortiguado

En esta sección vamos a estudiar el método de Newton amortiguado en espacios de Banach y presentaremos diferentes resultados sobre su convergencia con diferentes condiciones. El método de Newton amortiguado en espacios de Banach tiene la siguiente forma

$$x_{n+1} = x_n - \lambda F'(x_n)^{-1} F(x_n), 0 < \lambda < 1, \tag{4.2.1}$$

donde $F : X \to Y$ es un operador definido entre dos espacios de Banach X e Y, diferenciable Fréchet en un dominio Ω. El dominio Ω será una bola centrada en torno a la solución y exigiremos diferentes condiciones a la solución. Diversos autores han tomado diferentes valores del parámetro amortiguador, sin embargo, nos vamos a centrar en valores del parámetro, $0 < \lambda < 1$, para garantizar que son ciertos los resultados que damos en las siguientes secciones. Los resultados sobre convergencia local exigen condiciones sobre la solución en lugar de sobre el punto inicial como ocurre en la convergencia semilocal. El resultado sobre convergencia local permite encontrar un dominio de puntos de partida para los cuales el método converge a la raíz.

4.2.1. Convergencia local del método de Newton amortiguado con las condiciones de Kantorovich

En la presente sección vamos a estudiar la convergencia local del método de Newton amortiguado de una forma similar a como Ortega y Rheinboldt estudian el método de Newton en [85]. A continuación, se muestra un resultado de convergencia local para el método de Newton amortiguado.

Teorema 4.3 *Sea $F : X \to Y$ un operador definido entre dos espacios de Banach X e Y. Suponemos que existe x^*, solución de $F(x) = 0$, y que F es diferenciable Fréchet en la bola $B(x^*, R)$. Además, suponemos que las siguientes condiciones se cumplen:*

(i) *Existe* $\Gamma = F'(x^*)^{-1}$.

(ii) $\|\Gamma[F'(x) - F'(y)]\| \leq b\|x - y\|, b > 0,\ x, y \in B(x^*, R)$.

(iii) $\rho = \dfrac{2\lambda}{(4-\lambda)b} \leq R$, $0 < \lambda \leq 1$.

Entonces, la sucesión generada por el método de Newton amortiguado (4.2.1), *empezando en* $x_0 \in B(x^*, \rho)$ *converge a* x^*. *Además, esta solución es única en la bola* $B(x^*, \frac{2}{b})$.

Demostración Primero, veamos que si $x \in B(x^*, \rho)$, entonces

$$b\|x - x^*\| \leq b\rho \leq \frac{2\lambda}{(4-\lambda)} \leq \frac{2}{3} < 1.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\|I - \Gamma F'(x)\| \leq b\|x - x^*\| < 1.$$

Por el Lema de Inversión de Operadores de Banach podemos asegurar que existe el operador inverso de $\Gamma F'(x)$ y además

$$\|F'(x)^{-1}F'(x^*)\| \leq \frac{1}{1 - b\|x - x^*\|}.$$

Después, consideramos la siguiente descomposición de tipo Ostrowski

$$\begin{aligned}
x^* - x_{n+1} &= x^* - x_n + \lambda\Gamma_n F(x_n) - \Gamma_n F(x_n) + \Gamma_n F(x_n) \\
&= x^* - x_n + \Gamma_n F(x_n) + (\lambda - 1)\Gamma_n F(x_n) \\
&= -\Gamma_n \left[F(x^*) - F(x_n) - F'(x_n)(x^* - x_n) + (1-\lambda)F(x_n)\right] \\
&= -\Gamma_n \left[\int_{x_n}^{x^*} \left[F'(x) - F'(x_n)\right] dx + (1-\lambda)F(x_n)\right] \\
&= -\Gamma_n \left[\int_0^1 \left[F'(x_n + t(x^* - x_n)) - F'(x_n)\right](x^* - x_n)dt \right. \\
&\quad \left. +(1-\lambda)F(x_n)\right].
\end{aligned}$$

Tomando normas

$$\begin{aligned}
\|x^* - x_{n+1}\| &\leq \|\Gamma_n F'(x^*)\| \left[\frac{b}{2}\|x^* - x_n\|^2 + (1-\lambda)\|\Gamma F(x_n)\|\right] \\
&\leq \frac{1}{1 - b\|x^* - x_n\|} \left[\frac{b}{2}\|x^* - x_n\|^2 + (1-\lambda)\right. \\
&\quad \left. \times\left(\frac{b}{2}\|x^* - x_n\|^2 + \|x^* - x_n\|\right)\right] \\
&\leq \frac{1}{1 - b\|x^* - x_n\|} \left[b\left(\frac{2-\lambda}{2}\right)\|x^* - x_n\| + (1-\lambda)\right]\|x^* - x_n\|.
\end{aligned}$$

Ahora, llamando $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 - ba_n}\left(\dfrac{2-\lambda}{2}ba_n + 1 - \lambda\right)$, con $a_0 = \|x - x_0\|$ se tiene que

$$\|x^* - x_n\| \leq a_n \ \forall n.$$

Denotando $\epsilon_n = ba_n$, obtenemos que

$$\epsilon_{n+1} = \frac{\epsilon_n}{1 - \epsilon_n}\left(\frac{2-\lambda}{2}\epsilon_n + 1 - \lambda\right).$$

Usando un proceso inductivo probaremos que la sucesión $\{\epsilon_n\}$ converge a 0. Primero, veamos que $\epsilon_1 < \epsilon_0$:

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_0}{1 - \epsilon_0}\left(\frac{2-\lambda}{2}\epsilon_0 + 1 - \lambda\right) < \epsilon_0$$

si se cumple

$$\frac{1}{1 - \epsilon_0}\left(\frac{2-\lambda}{2}\epsilon_0 + 1 - \lambda\right) < 1.$$

Como

$$\epsilon_0 = ba_0 \leq b\rho = \frac{2\lambda}{4 - \lambda} < 1,$$

ésto es equivalente a

$$(2-\lambda)\epsilon_0 + 2 - 2\lambda < 2 - 2\epsilon_0,$$

lo cual es cierto, ya que $a_0 = \|x - x_0\| < \rho$ y, por tanto,

$$\epsilon_0 < b\rho.$$

Suponiendo que $\epsilon_n < \epsilon_{n-1}$ para $n \leq k$. Veamos que se cumple para $n = k+1$. Es trivial ver que $\epsilon_n < \epsilon_{n-1}$ y que $1 - \epsilon_n > 1 - \epsilon_{n-1}$. Además, como $0 < \lambda < 1$, entonces $\epsilon_{k+1} < \epsilon_k$.

Para obtener la región en la que la solución es única, asumimos que y^* es otra solución localizada en la bola $B(x^*, r^{**})$. Entonces, se tiene que:

$$F(x^*) = 0, \qquad F(y^*) = 0.$$

Entonces, ahora

$$0 = \Gamma\left[F(y^*) - F(x^*)\right] = \int_{x^*}^{y^*} \Gamma F'(x)dx = \int_0^1 \Gamma F'(x^* + t(y^* - x^*))dt(y^* - x^*).$$

Llamando ahora al operador $M = \displaystyle\int_0^1 \Gamma F'(x^* + t(y^* - x^*))dt$, se tiene que

$$I - M = \int_0^1 \Gamma\left[F'(x^*) - F'(x^* + t(y^* - x^*))\right]dt,$$

y ahora tomando normas

$$\|I - M\| \leq \int_0^1 b\|y^* - x^*\|tdt = \frac{b}{2}\|y^* - x^*\| < 1,$$

y, por tanto,

$$\|y^* - x^*\| < \frac{2}{b}.$$

Y ésto finaliza la demostración. ∎

4.2.2. Convergencia local del método de Newton amortiguado con condiciones centradas

En esta sección presentaremos un análisis diferente de la convergencia local del método de Newton amortiguado, basado en la condición de Lipschitz y la condición centrada de Lipschitz. Con la introducción de esta nueva condición podemos mejorar a la hora de acotar y, por lo tanto, podemos obtener un resultado mejor que el que se consigue al utilizar únicamente la condición de Lipschitz, es decir, el radio de la bola en la que podemos garantizar la convergencia hacia la solución es mayor al utilizar ambas condiciones.

Un resultado de convergencia local con condiciones Lipschitz y Lipschitz centradas aparece a continuación.

Teorema 4.4 *Sea $F : X \to Y$ un operador definido entre dos espacios de Banach X e Y. Suponemos que existe x^*, solución de $F(x) = 0$ y que F es diferenciable Fréchet en la bola $B(x^*, R)$. Si además, las siguientes condiciones se cumplen*

(i) *Existe* $\Gamma = F'(x^*)^{-1}$.

(i) $\|\Gamma[F'(x) - F'(y)]\| \leq b\|x - y\|, b > 0,\ x, y \in B(x^*, R)$.

(iii) $\|\Gamma[F'(x) - F'(x^*)]\| \leq \beta\|x - x^*\|, \beta > 0,\ x \in B(x^*, R)$.

(iv) $\rho = \dfrac{2\lambda}{3\beta + b - \beta\lambda} \leq R,\ 0 < \lambda \leq 1$.

Entonces, la sucesión generada por el método de Newton amortiguado (4.2.1)*, empezando en $x_0 \in B(x^*, \rho)$ converge a x^*.*

Demostración Comenzaremos viendo que si $x \in B(x^*, \rho)$, entonces

$$\beta\|x - x^*\| \leq \beta\rho \leq \frac{2\lambda\beta}{3\beta + b - \beta\lambda} = \frac{2\lambda}{\frac{1}{\gamma} + (3 - \lambda)} = \frac{2\lambda\gamma}{1 + (3 - \lambda)\gamma} < 1.$$

Por lo tanto,

$$\|I - \Gamma F'(x)\| \leq \beta\|x - x^*\| < 1.$$

Por el Lema de Inversión de Operadores de Banach podemos asegurar que existe el operador inverso de $\Gamma F'(x)$ y además:

$$\|F'(x)^{-1}F'(x^*)\| \leq \frac{1}{1-\beta\|x-x^*\|}.$$

Considerando ahora la siguiente descomposición de tipo Ostrowski

$$\begin{aligned}
x^* - x_{n+1} &= x^* - x_n + \lambda\Gamma_n F(x_n) - \Gamma_n F(x_n) + \Gamma_n F(x_n) \\
&= x^* - x_n + \Gamma_n F(x_n) + (\lambda-1)\Gamma_n F(x_n) \\
&= -\Gamma_n \left[F(x^*) - F(x_n) - F'(x_n)(x^*-x_n) + (1-\lambda)F(x_n)\right] \\
&= -\Gamma_n \left[\int_{x_n}^{x^*} \left[F'(x) - F'(x_n)\right] dx + (1-\lambda)F(x_n)\right] \\
&= -\Gamma_n \left[\int_0^1 \left[F'(x_n + t(x^*-x_n)) - F'(x_n)\right](x^*-x_n)dt \right. \\
&\left. +(1-\lambda)F(x_n)\right].
\end{aligned}$$

Y tomando normas

$$\begin{aligned}
\|x^* - x_{n+1}\| &\leq \|\Gamma_n F'(x^*)\| \left[\frac{b}{2}\|x^*-x_n\|^2 + (1-\lambda)\|\Gamma F(x_n)\|\right] \\
&\leq \frac{1}{1-\beta\|x^*-x_n\|}\left[\frac{b}{2}\|x^*-x_n\|^2 + (1-\lambda)\right. \\
&\left.\left(\frac{\beta}{2}\|x^*-x_n\|^2 + \|x^*-x_n\|\right)\right] \\
&\leq \frac{1}{1-\beta\|x^*-x_n\|}\left[\left(\frac{b}{2} + \beta\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\right)\|x^*-x_n\|\right. \\
&\left.+(1-\lambda)\right]\|x^*-x_n\|
\end{aligned}$$

Sea $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1-\beta a_n}\left(\left(\dfrac{1-\lambda}{2}\beta + \dfrac{b}{2}\right)a_n + 1 - \lambda\right)$, con $a_0 = \|x^*-x_0\|$, entonces

$$\|x^*-x_n\| \leq a_n \; n \geq 0,$$

y llamando $\epsilon_n = ba_n$ obtenemos

$$\epsilon_{n+1} = \frac{\epsilon_n}{1-\epsilon_n}\left(\frac{1+\gamma(1-\lambda)}{2}\epsilon_n + 1 - \lambda\right).$$

Usando un procedimiento inductivo probaremos que $\{\epsilon_n\}$ converge a 0. Primero, veamos que $\epsilon_1 < \epsilon_0$

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_0}{1-\epsilon_0}\left(\frac{1+\gamma(1-\lambda)}{2}\epsilon_0 + 1 - \lambda\right) < \epsilon_0$$

$$\frac{1}{1-\epsilon_0}\left(\frac{1+\gamma(1-\lambda)}{2}\epsilon_0+1-\lambda\right)<1$$

$$\left(\frac{1+\gamma(1-\lambda)}{2}\epsilon_0+1-\lambda\right)<1-\epsilon_0$$

$$\epsilon_0<\rho.$$

Suponiendo que $\epsilon_n < \epsilon_{n-1}\ \forall n \leq k$. Veamos que se verifica para $n = k+1$. Es fácil ver que $\epsilon_n < \epsilon_{n-1}$ y $1-\epsilon_n > 1-\epsilon_{n-1}$, además, como $0 < \lambda < 1$, $1+\gamma(1-\lambda) > 0$, y, por lo tanto, $\epsilon_{k+1} < \epsilon_k$. Con respecto a la unicidad de solución se sigue un procedimiento similar al utilizado en la demostración del Teorema 4.3, pero en lugar de utilizar la condición de Lipschitz para acotar se utiliza la condición de Lipschitz centrada y se obtiene que el radio de unicidad es $\frac{2}{\beta}$. La demostración está completa. ∎

Ilustremos estos resultados con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.1 *Sean $X = Y = \mathbb{R}^3$, $x^* = (0,0,0)$ y $R = 1$. Se define la función F en $B(x^*, R)$ por*

$$F(x,y,z) = (e^x - 1, y^2 + y, z). \tag{4.2.2}$$

Se tiene que para $u = (x,y,z)$

$$F'(u) = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & 2y+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.2.3}$$

Usando la norma del máximo de las filas junto con (4.2.2) y (4.2.3), se observa que para $F'(x^*) = diag\{1,1,1\}$, podemos definir los parámetros

$$b = e,$$

$$\beta = 2$$

y

$$\rho = \frac{2(1-(1-\lambda))}{e+(2+(1-\lambda))2} = \frac{2\lambda}{e+(3-\lambda)2} \leq 1. \tag{4.2.4}$$

Entonces, para cada $0 < \lambda < 1$, el método de Newton amortiguado (4.2.1) comenzando en $x_0 \in B(x^*, \rho)$ converge a x^*, solución de $F(x,y,z) = 0$. Notar que el radio de esta bola es mayor o igual que el que se obtendría si sólo se tuviera en cuenta la condición de Lipschitz.

En el siguiente ejemplo, se muestra que el hecho de utilizar la condición de Lipschitz centrada, además de la condición de Lipschitz, en lugar de utilizar sólo esta última, mejora el radio de la región de accesibilidad.

Ejemplo 4.2 *Sea $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, la función definida como $F(z) = z^3 - 1$ y sean $z^* = 1$, la única solución real de la ecuación $F(z) = 0$ y $R = 1$, el radio de la bola en la que la derivada verifica la condición de Lipschitz. Vamos a hacer una comparación de los radios de la región de accesibilidad utilizando, por un lado la condición de Lipschitz y la de Lipschitz centrada y por otro, únicamente la condición de Lipschitz para el método de Newton ($\lambda = 1$).*

Con dichos datos obtenemos los siguientes valores:

$$b = 4$$

y

$$\beta = 3.$$

Entonces, obtenemos que, sólo teniendo en cuenta la condición de Lipschitz, obtenemos que el radio de accesibilidad es

$$\rho = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

Mientras que si utilizamos ambas condiciones, tanto la de Lipschitz como la de Lipschitz centrada, obtenemos

$$\rho = \frac{2}{10} = \frac{1}{5},$$

que es mayor. Por lo tanto, la región de accesibilidad es mayor al utilizar ambas condiciones como puede verse en la Figura 4.2.

4.2.3. γ-teoría para el método de Newton amortiguado

En esta sección vamos a proceder con el estudio de la γ-teoría, entendiendo por γ-teoría el estudio de la convergencia local de un proceso iterativo, en este caso del método de Newton amortiguado, siguiendo las ideas y notaciones desarrolladas por Shub, Smale, Dedieu, Yakoubsohn y Blum, entre otros. Sea $F : U \subseteq X \to Y$ donde X e Y son espacios de Banach y U es un abierto de X donde existe solución x^*, de $F(x) = 0$ y donde además, F es analítica. Es decir, $\forall x \in U$, F se puede desarrollar en serie de Taylor en un entorno de x, es decir,

$$F(y) = F(x) + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} F^{(k)}(x)(y - x)^k.$$

Para simplificar las notaciones supondremos, sin pérdida de generalidad, que $U = B(x^*, R)$ (siempre podremos encontrar R tal que $B(x^*, R) \subseteq U$). Supongamos además que está definido

$$\Gamma = F'(x^*)^{-1}$$

y definimos

$$\gamma = \sup_{k \geq 2} \left(\frac{1}{k!} \| \Gamma F^{(k)}(x^*) \| \right)^{\frac{1}{k-1}},$$

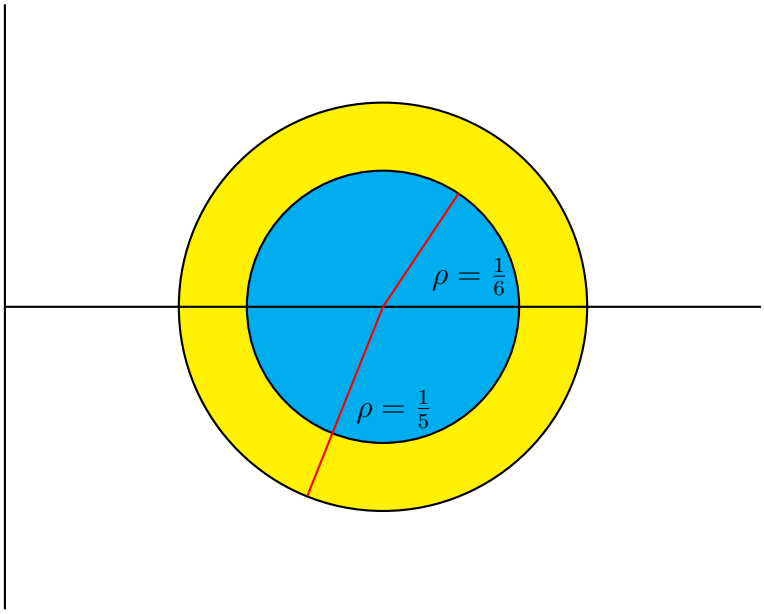


Figura 4.2: Regiones de accesibilidad a la solución. En azul la zona de accesibilidad que se obtiene al utilizar únicamente la condición de Lipschitz $B\left(1, \frac{1}{6}\right)$. En amarillo aparece la mejora que se obtiene al utilizar además, la condición de Lipschitz centrada, en este caso la región de accesibilidad es $B\left(1, \frac{1}{5}\right)$.

es decir, se verifica que

$$\frac{1}{k!}\|\Gamma F^{(k)}(x^*)\| \leq \gamma^{k-1}, \ k \geq 2.$$

La $\gamma-$teoría introducida por Shub y Smale y desarrollada, entre otros, por Dedieu (véase [33]), Yakoubsohn (véase [111]) o Blum et al. (véase [24]), permite caracterizar el dominio de accesibilidad a la solución, es decir, los puntos para los cuales el método de Newton amortiguado, definido en (4.2.1), converge a x^*. En concreto, podemos dar el siguiente resultado.

Teorema 4.5 *Si* $R_0 = \frac{\lambda+4-\sqrt{\lambda^2+16}}{4\gamma} \leq R$ *y* $\|x_0 - x^*\| \leq R_0$, *entonces el método de Newton amortiguado definido en* (4.2.1) *converge a* x^*.

Demostración En primer lugar, $\forall x_0 \in B(x^*, R_0)$ tenemos

$$\|\Gamma F'(x_0) - I\| \leq \|\Gamma[F'(x_0) - F'(x^*)]\| \leq \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!}\|\Gamma F^{(k+1)}(x^*)\|\|x_0 - x^*\|^k,$$

además, teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{(k+1)!}\|\Gamma F^{(k+1)}(x^*)\| \leq \gamma^k,$$

es claro que

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}\|\Gamma F^{(k+1)}(x^*)\|\|x_0-x^*\|^k \leq \sum_{k\geq 1}(k+1)\gamma^k\|x_0-x^*\|^k = \left[\sum_{k\geq 1}(\gamma\|x_0-x^*\|)^{k+1}\right]'.$$

Por otro lado, como

$$\left(\sum_{k\geq 1}x^{k+1}\right)' = \left[\frac{x^2}{1-x}\right]' = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}-1,$$

tenemos que

$$\|\Gamma F'(x_0)-I\| \leq \left[\sum_{k\geq 1}(\gamma\|x_0-x^*\|)^{k+1}\right]' = \frac{1}{(1-\gamma\|x_0-x^*\|)^2}-1.$$

Notemos que

$$\frac{1}{(1-\gamma\|x_0-x^*\|)^2}-1<1,$$

es decir,

$$1<2(1-\gamma\|x_0-x^*\|)^2$$

y, por tanto,

$$2(\gamma\|x_0-x^*\|)^2-4\gamma\|x_0-x^*\|+1>0.$$

Como

$$\gamma\|x_0-x^*\| \leq \gamma R_0 \leq \frac{\lambda+4-\sqrt{\lambda^2+16}}{4}$$

y además de la Figura 4.3 se deduce que

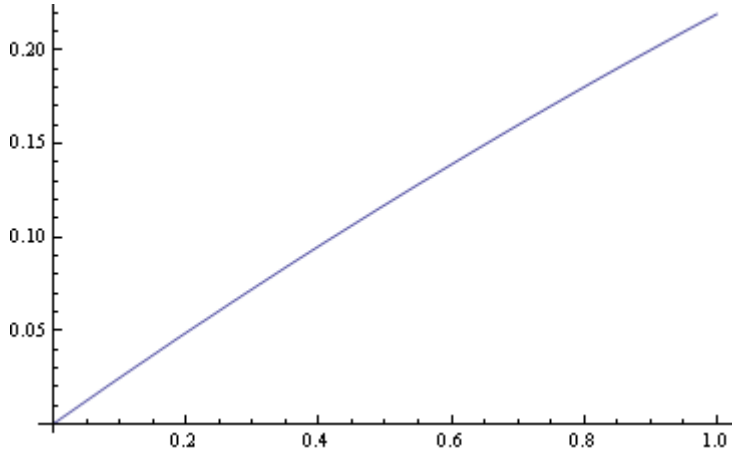


Figura 4.3: Gráfica de la función $F(\lambda) = \frac{\lambda+4-\sqrt{\lambda^2+16}}{4}$, donde se observa que $F(0)=0<F(\lambda)<F(1)=\frac{5-\sqrt{17}}{4}$, $\forall\lambda\in(0,1)$.

$$\frac{\lambda+4-\sqrt{\lambda^2+16}}{4} \leq \frac{5-\sqrt{17}}{4} \ \forall \lambda \in (0,1],$$

tenemos que $\|\Gamma F'(x_0) - I\| < 1$ y, por tanto, aplicando el Lema de Banach de Inversión de Operadores

$$\|F'(x_0)^{-1}F'(x^*)\| \leq \frac{1}{1-\left(\frac{1}{(1-\gamma\|x_0-x^*\|)^2-1}\right)} = \frac{(1-\gamma\|x_0-x^*\|)^2}{2(1-\gamma\|x_0-x^*\|)^2-1}. \quad (4.2.5)$$

Notemos ahora que

$$\begin{aligned}
N_{\lambda,F}(x_0) - x^* &= x_0 - \lambda\Gamma_0 F(x_0) - x^* \\
&= \Gamma_0 F'(x^*)\Gamma\left[F'(x_0)(x_0-x^*) - \lambda F(x_0)\right] \\
&= \Gamma_0 F'(x^*)\Gamma\left[F'(x_0)(x_0-x^*) - \lambda\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}F^{(k)}(x^*)(x_0-x^*)^k\right] \\
&= \Gamma_0 F'(x^*)\Gamma\left[\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}F^{(k+1)}(x^*)(x_0-x^*)^{k+1}\right. \\
&\quad \left. -\lambda\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}F^{(k)}(x^*)(x_0-x^*)^k\right] \\
&= \Gamma_0 F'(x^*)\Gamma\left[\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{(k-1)!}-\frac{\lambda}{k!}\right)F^{(k)}(x^*)(x_0-x^*)^k\right] \\
&= \Gamma_0 F'(x^*)\sum_{k\geq 1}\frac{k-\lambda}{k!}\Gamma F^{(k)}(x^*)(x_0-x^*)^k.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|N_{\lambda,F}(x_0) - x^*\| &\leq \|\Gamma_0 F'(x^*)\|\left[(1-\lambda)\|x_0-x^*\|\right. \\
&\quad \left. +\sum_{k\geq 2}(k-\lambda)\gamma^{k-1}\|x_0-x^*\|\right] \quad (4.2.6) \\
&= \|\Gamma_0 F'(x^*)\|\sum_{k\geq 1}(k-\lambda)\gamma^{k-1}\|x_0-x^*\|^k.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (4.2.5) y (4.2.6) y denotando $u_0 = \gamma\|x_0 - x^*\|$ y $\Psi(u_0) = 2u_0^2 - 4u_0 + 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|N_{\lambda,F}(x_0) - x^*\| &\leq \frac{(1-u_0)^2}{\Psi(u_0)}\left(\sum_{k\geq 1}(k-\lambda)u_0^{k-1}\right)\|x_0-x^*\| \\
&= \frac{(1-u_0)^2}{\Psi(u_0)}\left[\sum_{k\geq 1}ku_0^{k-1} - \lambda\sum_{k\geq 1}u_0^{k-1}\right]\|x_0-x^*\|.
\end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta que $\left(\sum_{k\geq 1} u^k\right)' = \left(\frac{u}{1-u}\right)' = \frac{1}{(1-u)^2}$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
&\frac{(1-u_0)^2}{\Psi(u_0)}\left[\sum_{k\geq 1} k u_0^{k-1} - \lambda \sum_{k\geq 1} u_0^{k-1}\right]\|x_0 - x^*\| \\
&= \frac{(1-u_0)^2}{\Psi(u_0)}\left[\frac{1}{(1-u_0)^2} - \frac{\lambda}{1-u_0}\right]\|x_0 - x^*\| \\
&= \frac{1-\lambda(1-u_0)}{\Psi(u_0)}\|x_0 - x^*\|.
\end{aligned}$$

Ahora bien, $\frac{1-\lambda(1-u_0)}{\Psi(u_0)} < 1$. En efecto,

$$1 - \lambda + \lambda u_0 < 2u_0^2 - 4u_0 + 1$$

$$2u_0^2 - (\lambda + 4)u_0 + \lambda > 0,$$

lo cual es cierto por la hipótesis $u_0 \leq \gamma R_0 < \frac{\lambda+4+\sqrt{\lambda^2+16}}{4}$.

En definitiva hemos probado que

$$\|x_1 - x^*\| = \|N_{\lambda,F}(x_0) - x^*\| \leq \|x_0 - x^*\| \leq R_0,$$

por lo que podríamos repetir el mismo razonamiento con x_1, en lugar de x_0. Ahora llamando $M = \frac{1-\lambda(1-u_0)}{\Psi(u_0)}$ y, por recurrencia sobre k,

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq M\|x_k - x^*\| \leq \cdots \leq M^{k+1}\|x_0 - x^*\|.$$

Como $M < 1$, entonces x_k converge a x^* con convergencia lineal. ∎

Corolario 4.6 *Para el método de Newton ($\lambda = 1$) se puede probar además que la convergencia es cuadrática si $\|x_0 - x^*\| \leq R_1 = \frac{3-\sqrt{7}}{2\gamma} < R$.*

Demostración Es una adaptación del Teorema 91 que aparece en [33], por simplicidad denotaremos $N_F(x) = N_{1,F}(x)$.

$$\|N_F(x_0) - x^*\| \leq \frac{u_0}{\Psi(u_0)}\|x_0 - x^*\|,$$

donde $u_0 = \gamma\|x_0 - x^*\|$. Denotando $u_k = \gamma\|x_k - x^*\|$ y razonando de forma

recursiva se tiene

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1}-x^*\| &= \|N_F(x_k)-x^*\| \\
&\leq \frac{\gamma}{\Psi(u_k)}\|x_k-x^*\|^2 \\
&\leq \frac{\gamma}{\Psi(u_k)}\frac{\gamma^2}{\Psi(u_{k-1})^2}\|x_{k-1}-x^*\|^{2^2} \\
&\leq \frac{\gamma^{1+2+2^2}}{\Psi(u_k)\Psi(u_{k-1})^2\Psi(u_{k-2})^{2^2}}\|x_{k-2}-x^*\|^{2^3} \\
&\quad \cdots \\
&\leq \frac{\gamma^{1+2+2^2+\cdots+2^k}}{\Psi(u_k)\Psi(u_{k-1})^2\cdots\Psi(u_0)^{2^k}}\|x_0-x^*\|^{2^{k+1}}.
\end{aligned}$$

Como $u_j=\gamma\|x_j-x^*\|\leq\gamma\|x_0-x^*\|=u_0\leq\frac{3-\sqrt{7}}{2}<1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ y la función $\Psi(u)$ es decreciente en el intervalo $\left(0,1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ se tiene

$$\Psi(u_j)\geq\Psi(u_0)\Rightarrow\frac{1}{\Psi(u_j)}\leq\frac{1}{\Psi(u_0)}$$

para $j=1,\ldots,k$, y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1}-x^*\| &\leq \left[\frac{\gamma}{\Psi(u_0)}\right]^{2^{k+1}-1}\|x_0-x^*\|^{2^{k+1}} \\
&= \left[\frac{\gamma}{\Psi(u_0)}\right]^{2^{k+1}-1}\|x_0-x^*\|^{2^{k+1}-1}\|x_0-x^*\| \\
&= \left[\frac{u_0}{\Psi(u_0)}\right]^{2^{k+1}-1}\|x_0-x^*\|.
\end{aligned}$$

Como $u_0\leq\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}$, $\dfrac{u_0}{\Psi(u_0)}\leq\dfrac{1}{2}$

$$2u_0\leq 2u_0^2-4u_0+1\Leftrightarrow 2u_0^2-6u_0+1\geq 0,$$

que es cierto, ya que $u_0\leq\frac{3-\sqrt{7}}{2}$. Por lo tanto, se tiene que

$$\|x_{k+1}-x^*\|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{2^k-1}\|x_0-x^*\|.$$

Y ésto concluye la demostración. ∎

Nota 4.1 *Para el método de Newton hemos obtenido el radio*

$$\gamma R_0=\frac{5-\sqrt{17}}{4}\approx 0.219924,$$

que mejora significativamente el obtenido en el Teorema 2.4 de [119]

$$\gamma R_0 = \frac{3-2\sqrt{2}}{2} \approx 0.085786.$$

Ejemplo 4.3 *Consideramos la ecuación $F(z) = z^3 - 1$, que tiene como solución real $z^* = 1$. Teniendo en cuenta la forma de $F(z)$, es claro que*

$$F'(z) = 3z^2,\ F''(z) = 6z,\ F'''(z) = 6$$

y

$$F^{(k)}(z) = 0, \quad \forall k \geq 4.$$

Por otro lado, obtenemos que

$$\Gamma = F'(z^*)^{-1} = \frac{1}{3}$$

y, por lo tanto,

$$\frac{1}{2}\Gamma F''(z^*) = 1,$$
$$\frac{1}{6}\Gamma F'''(z^*) = \frac{1}{3}$$

y

$$\frac{1}{k!}\Gamma F^{(k)}(z^*) = 0, \quad \forall k \geq 4.$$

Entonces, γ queda definida como

$$\gamma = \text{máx}\left\{\frac{1}{2}\|\Gamma F''(z^*)\|, \left(\frac{1}{6}\|\Gamma F'''(z^*)\|\right)^{\frac{1}{2}}\right\} = \text{máx}\left\{1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\} = 1.$$

Para Newton, $\lambda = 1$, el radio de accesibilidad que se obtiene es

$$R_0 = \frac{5-\sqrt{17}}{4\gamma} = \frac{5-\sqrt{17}}{4} \approx 0.219224,$$

que mejora el obtenido en el Ejemplo 4.2.

El siguiente ejemplo que vamos a considerar es uno de minimización.

Ejemplo 4.4 *El problema que queremos resolver es:*

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y),\ \textit{con}\ f(x,y) = \alpha(x-y^2)^2 + y^2,\ \alpha > 0.$$

Es inmediato darse cuenta que este problema tiene como solución

$$X^* = (x^*, y^*)^T = (0,0).$$

Definimos ahora la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *como el gradiente de la función* $f(x, y)$

$$F(X) = \nabla f(X) = \begin{pmatrix} 2\alpha\,(x - y^2) \\ 2y - 4\alpha y\,(x - y^2) \end{pmatrix},$$

entonces tenemos que

$$F'(X) = \begin{pmatrix} 2\alpha & -4\alpha y \\ -4\alpha y & 2 - 4\alpha x + 12\alpha y^2 \end{pmatrix},$$

y, por lo tanto,

$$F'(X^*) = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma = F'(X^*)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ahora, aplicando la siguiente descomposición

$$\begin{aligned} F(X) = \begin{pmatrix} 2\alpha x - 2\alpha y^2 \\ 2y - 4\alpha y x + 4\alpha y^3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2\alpha x \\ 2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\alpha y^2 \\ -4\alpha x y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4\alpha y^3 \end{pmatrix} \\ &= F'(X^*)X + \tfrac{1}{2}F''(X^*)X^2 + \tfrac{1}{6}F'''(X^*)X^3, \end{aligned}$$

podemos deducir que

$$\frac{1}{2}\Gamma F''(X^*)X^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\alpha y^2 \\ -4\alpha x y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^2 \\ -2\alpha x y \end{pmatrix}$$

y

$$\frac{1}{6}\Gamma F'''(X^*)X^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4\alpha y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha y^3 \end{pmatrix}.$$

Consideramos $\|X\| = \max\{|x|, |y|\}$. *Entonces,*

$$\frac{1}{2}\left\|\Gamma F''(X^*)X^2\right\| = \max\left\{y^2, 2\alpha x y\right\} \leq \max\{1, 2\alpha\}\|X\|^2,$$

y, por lo tanto,

$$\frac{1}{2}\left\|\Gamma F''(X^*)\right\| \leq \max\{1, 2\alpha\}.$$

Además,

$$\frac{1}{6}\left\|\Gamma F'''(X^*)X^3\right\| = \max\left\{0, 2\alpha y^3\right\} \leq 2\alpha\|X\|^3,$$

y, por lo tanto,

$$\frac{1}{6}\left\|\Gamma F'''(X^*)\right\| \leq 2\alpha.$$

Calculando ahora, γ *obtenemos que*

$$\gamma = \sup_{k\geq 2}\left(\frac{1}{k!}\left\|\Gamma F^{(k)}(X^*)\right\|\right)^{\frac{1}{k-1}} = \max\left\{\frac{1}{2}\left\|\Gamma F''(X^*)\right\|, \left(\frac{1}{6}\left\|\Gamma F'''(X^*)\right\|\right)^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Por lo tanto, tenemos que, el radio de accesibilidad es $R_0 = \frac{\lambda+4-\sqrt{\lambda^2+16}}{4\gamma}$, *donde*

- *Si* $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

$$\gamma = \text{máx}\left\{1, \sqrt{2\alpha}\right\} = 1$$

- *Si* $\alpha \geq \frac{1}{2}$

$$\gamma = \text{máx}\left\{2\alpha, \sqrt{2\alpha}\right\} = 2\alpha.$$

Por ejemplo, para el método de Newton, es decir, $\lambda = 1$*, tenemos los radios que aparecen en la Figura 4.4.*

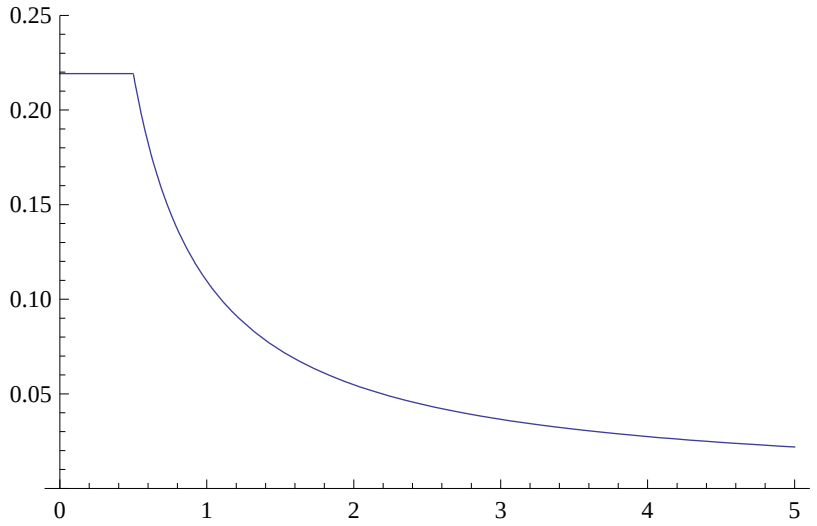


Figura 4.4: Radios de accesibilidad que se obtienen para distintos valores de α en el Ejemplo 4.4.

4.3. Convergencia semilocal del método de Newton amortiguado

En la siguiente sección vamos a proceder con el estudio de la convergencia semilocal del método de Newton amortiguado introducido en (4.2.1). A diferencia del estudio de la convergencia local que se vió en la sección anterior, donde se imponían condiciones sobre la solución x^* de una ecuación del tipo $F(x) = 0$, impondremos condiciones sobre el punto de partida, x_0, que será el centro de la bola que tomaremos como dominio.

Esta sección va a estar dividida en tres subsecciones bien diferenciadas, por un lado estudiaremos la convergencia semilocal bajo las condiciones de Kantorovich, por otro introduciremos condiciones centradas para poder afinar más el estudio y, por último, mostraremos los resultados relacionados con la α-teoría. Además en algunos de los resultados que se presentan en esta sección se amplia el rango de posibles valores del parámetro amortiguador a $\lambda \in (0, 2)$.

4.3.1. Convergencia semilocal del método de Newton amortiguado con las condiciones de Kantorovich

En la presente sección realizaremos un estudio de la convergencia semilocal del método de Newton amortiguado. Notemos que, al tratarse del estudio de la convergencia semilocal, obtendremos como dominio una bola centrada en el punto inicial, en el que podamos garantizar la convergencia de todo punto a la solución. Utilizaremos técnicas similares a las utilizadas por Kantorovich para el método de Newton. En concreto, la técnica que vamos a utilizar consiste en emplear un polinomio como función mayorizante y, por tanto, el resultado que vamos a obtener no depende del método utilizado (en este caso no depende del parámetro amortiguado λ), sino únicamente de los datos de la función F. Estudios similares, utilizando técnicas diferentes a las empleadas en esta sección pueden verse en [10], [50] y [100].

El primer resultado que obtenemos y que nos será de gran ayuda es el siguiente lema.

Lema 4.7 *Sea el polinomio*

$$p(r) = \frac{b}{2}r^2 - r + a \tag{4.3.1}$$

con $a, b > 0, ab < \frac{1}{2}$*, que se observa en la Figura 4.5, y sea* $r_0 = 0$*. Entonces la sucesión dada por* $r_{n+1} = N_{\lambda,p}(r_n)$ *converge a*

$$r^* = \frac{1 - \sqrt{1 - 2ab}}{b}, \tag{4.3.2}$$

donde

$$N_{\lambda,p}(r_n) = r_n - \lambda\frac{p(r_n)}{p'(r_n)}. \tag{4.3.3}$$

Demostración Primero veremos que es una sucesión creciente

$$r_1 = r_0 - \lambda\frac{p(r_0)}{p'(r_0)} = a > 0 = r_0.$$

Suponemos que se verifica para $n = k - 1$, es decir, $r_n > r_{n-1}, \forall n \leq k - 1$. Probemos que es cierto para $n = k$. Por la forma que tiene el polinomio, es inmediato ver que $p(r) > 0$, $p'(r) < 0$, $\forall r \in [0, r^*]$, por lo que $r_k > r_{k-1}$, y entonces, podemos asegurar que la sucesión $\{r_n\}$ es creciente.

Ahora, probaremos que esa sucesión está acotada superiormente por r^*. Procederemos de nuevo por inducción. Primero, es inmediato que

$$r^* - r_0 = r^* > 0.$$

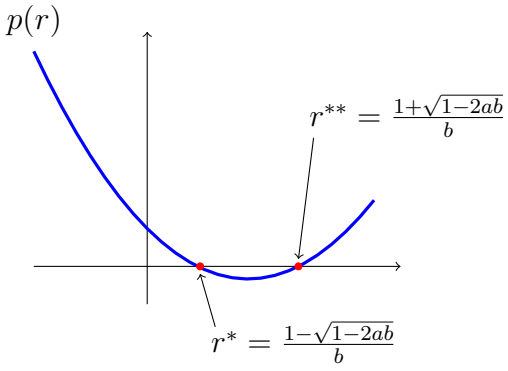


Figura 4.5: Gráfica del polinomio mayorizante $p(r) = \dfrac{b}{2}r^2 - r + a$.

Suponemos que es cierto para $n = k$, es decir, $r^* - r_k > 0$ y veamos que es cierto para $n = k + 1$

$$r^* - r_{k+1} = N_{\lambda,p}(r^*) - N_{\lambda,p}(r_k).$$

Aplicando ahora el Teorema del Valor Medio obtenemos que

$$N_{\lambda,p}(r^*) - N_{\lambda,p}(r_k) = N'_{\lambda,p}(\xi)(r^* - r_k), \xi \in (r_k, r^*),$$

y como $(r^* - r_k) > 0$ basta con ver que $N'_{\lambda,p}(\xi) > 0$, pero

$$N'_{\lambda,p}(\xi) = (1 - \lambda) + \lambda \frac{p(\xi)p''(\xi)}{p'(\xi)^2}.$$

Como $p(z)$ es positiva y convexa para todo $\xi \in (0, r^*)$ y $\lambda \in (0, 1)$ entonces $N'_{\lambda,p}(z) > 0$. Como consecuencia, la sucesión está acotada. Por lo tanto, la sucesión $\{r_n\}$ converge a un límite $L \leq r^*$. Tomando límites en (4.3.3), se tiene que $p(L) = 0$, luego $L = r^*$. Y ésto concluye la demostración. ∎

Utilizando sucesiones mayorizantes y el lema anterior obtenemos los siguientes resultados.

Teorema 4.8 *Sea $F : X \to Y$ un operador definido entre dos espacios de Banach X e Y diferenciable Fréchet en la bola $B(x_0, R)$. Asumimos que se verifican las siguientes condiciones:*

(i) *Existe la inversa de F' en el punto x_0 y la denotaremos por $\Gamma_0 = F'(x_0)^{-1}$.*

(ii) $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq a, a > 0.$

(iii) $\|\Gamma_0[F'(x) - F'(y)]\| \leq b\|x - y\|, b > 0,\ x, y \in B(x_0, R).$

(iv) $h = ab < \frac{1}{2}.$

(v) $r^* = \dfrac{1-\sqrt{1-2h}}{b} \leq R.$

Entonces la sucesión dada por

$$\begin{cases} r_0 = 0 \\ r_{n+1} = r_n - \lambda \dfrac{p(r_n)}{p'(r_n)}, n \geq 0, \end{cases}$$

donde $p(r)$ viene definido en (4.3.1)*, mayoriza a la sucesión generada por el método de Newton amortiguado, es decir, $\|x_{n+1} - x_n\| \leq r_{n+1} - r_n$. Además, la sucesión $\{x_n\}$ converge a x^* solución de $F(x) = 0$. Dicha solución está localizada en $\overline{B}(x_0, r^*)$ donde r^* viene definido en* (4.3.2) *y es única en $B(x_0, r^{**})$, donde*

$$r^{**} = \frac{1+\sqrt{1-2h}}{b} \leq R. \tag{4.3.4}$$

Demostración Teniendo en cuenta que $p'(r) = br - 1$ podemos definir la sucesión $\{r_n\}$ como

$$\begin{cases} r_0 = 0 \\ r_{n+1} = r_n - \lambda \dfrac{\frac{b}{2} r_n^2 - r_n + a}{br_n - 1}, n \geq 0. \end{cases} \tag{4.3.5}$$

El Lema 4.7 nos garantiza que la sucesión $\{r_n\}$ es creciente y converge a r^*. Veamos además que

(i_n) $\|F'(x_n)^{-1}F'(x_0)\| \leq \dfrac{p'(r_0)}{p'(r_n)}.$

(ii_n) $\|\Gamma_0 F(x_n)\| \leq -\dfrac{p(r_n)}{p'(r_0)}.$

(iii_n) $\|x_{n+1} - x_n\| \leq r_{n+1} - r_n.$

Para $n = 0$, se verifica lo anterior, ya que

(i_0) $\|F'(x_0)^{-1}F'(x_0)\| = 1 \leq \dfrac{p'(r_0)}{p'(r_0)}.$

(ii_0) $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq a = -\dfrac{p(r_0)}{p'(r_0)}.$

(iii_0) $\|x_1 - x_0\| \leq \lambda\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \lambda a = r_1 - r_0.$

Aplicando la hipótesis de inducción suponemos que es cierto para $n \leq k-1$, ahora queremos probar que es cierto para $n = k$. Para ello, primero debemos tener en cuenta que $\forall x \in B(x_0, r^*) \subseteq B(x_0, R)$ se verifica que

$$\|I - \Gamma_0 F'(x)\| \leq \|\Gamma_0 \left[F'(x) - F'(x_0)\right]\| \leq b\|x - x_0\| < br^* \leq 1,$$

por lo tanto, podemos aplicar el Lema de Inversión de Banach para asegurar que

$$\|F'(x)^{-1}F'(x_0)\| \leq \frac{1}{1-b\|x-x_0\|}.$$

Además, por hipótesis de inducción podemos concluir que

$$\|x_k - x_0\| \leq \|x_k - x_{k-1}\| + \cdots + \|x_1 - x_0\| \leq r_k - r_0 = r_k < r^*,$$

luego $x_k \in B(x_0, r^*)$. Por otro lado, realizando una descomposición de tipo Ostrowski

$$\begin{aligned} F(x_{k+1}) &= F(x_{k+1}) - \lambda F(x_k) - F'(x_k)(x_{k+1}-x_k) \pm F(x_k) \\ &= F(x_{k+1}) - F(x_k) - F'(x_k)(x_{k+1}-x_k) + (1-\lambda)F(x_k) \\ &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} [F'(x) - F'(x_k)]\, dx + (1-\lambda)F(x_k) \\ &= \int_0^1 [F'(x_k + t(x_{k+1}-x_k)) - F'(x_k)]\,(x_{k+1}-x_k)dt + (1-\lambda)F(x_k) \end{aligned}$$

y, por lo tanto, obtenemos que

$$\|\Gamma_0 F(x_{k+1})\| \leq \frac{b}{2}\|x_{k+1}-x_k\|^2 + (1-\lambda)\|\Gamma_0 F(x_k)\|.$$

Por último, repitiendo literalmente el proceso anterior obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} p(r_{k+1}) &= p(r_{k+1}) - \lambda p(r_k) - p'(r_k)(r_{k+1}-r_k) \pm p(r_k) \\ &= p(r_{k+1}) - p(r_k) - p'(r_k)(r_{k+1}-r_k) + (1-\lambda)p(r_k) \\ &= \int_{r_k}^{r_{k+1}} [p'(x) - p'(r_k)]\, dx + (1-\lambda)p(r_k) \\ &= \int_{r_k}^{r_{k+1}} b(x-r_k)dx + (1-\lambda)p(r_k) \\ &= \frac{b}{2}(r_{k+1}-r_k)^2 + (1-\lambda)p(r_k). \end{aligned}$$

Ahora, ya podemos seguir con el siguiente paso de inducción para demostrar que se verifica para $n = k$.

$$(i_k)\ \ \|F'(x_k)^{-1}F'(x_0)\| \leq \frac{1}{1-b\|x_k-x_0\|} \leq \frac{1}{1-br_k} \leq -\frac{1}{p'(r_k)} = \frac{p'(r_0)}{p'(r_k)}.$$

(ii_k)

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_0 F(x_k)\| &\leq \frac{b}{2}\|x_k - x_{k-1}\|^2 + (1-\lambda)\|\Gamma_0 F(x_{k-1})\| \\
&\leq \frac{b}{2}(r_k - r_{k-1})^2 - (1-\lambda)\frac{p(r_{k-1})}{p'(r_0)} \\
&= -\frac{1}{p'(r_0)}\frac{b}{2}(r_k - r_{k-1})^2 - (1-\lambda)\frac{p(r_{k-1})}{p'(r_0)} \\
&= -\frac{1}{p'(r_0)}\left[\frac{b}{2}(r_k - r_{k-1})^2 + (1-\lambda)p(r_{k-1})\right] \\
&= -\frac{p(r_k)}{p'(r_0)}.
\end{aligned}$$

(iii_k)

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x_k\| &\leq \lambda\|\Gamma_k F(x_k)\| \\
&\leq \lambda\|\Gamma_k F'(x_0)\|\|\Gamma_0 F(x_k)\| \\
&\leq \lambda\left(\frac{p'(r_0)}{p'(r_k)}\right)\left(-\frac{p(r_k)}{p'(r_0)}\right) \\
&= -\lambda\frac{p(r_k)}{p'(r_k)} = r_{k+1} - r_k.
\end{aligned}$$

Para obtener la región en la que la solución es única, asumimos que $\hat{x}$ es otra solución localizada en la bola $B(x_0, r^{**})$, donde r^{**} viene definida en (4.3.4). Entonces,

$$0 = \Gamma_0\left[F(\hat{x}) - F(x^*)\right] = M(\hat{x} - x^*), \tag{4.3.6}$$

donde $M : X \to X$ denota el operador lineal definido por

$$Mx = \left[\int_0^1 \Gamma_0 F'(x^* + t(\hat{x} - x^*))\, dt\right] x, \quad x \in X.$$

Como $\|\hat{x} - x_0\| < r^{**}$ y $\|x^* - x_0\| \leq r^*$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|I - M\| &= \left\|\int_0^1 \Gamma_0[F'(x^* + t(\hat{x} - x^*)) - F'(x_0)]\, dt\right\| \\
&\leq \int_0^1 b\|x^* + t(\hat{x} - x^*) - x_0\|\, dt \\
&\leq \int_0^1 b\left((1-t)\|x^* - x_0\| + t\|\hat{x} - x_0\|\right)\, dt \\
&< \frac{b}{2}(r^* + r^{**}) = 1.
\end{aligned}$$

Por el Lema de Inversión de Banach (véase [98]) tenemos que existe la inversa de M. Entonces teniendo en cuenta (4.3.6), se tiene que $\hat{x} = x^*$, es decir, x^* es la única solución de $F(x) = 0$ en la bola $B(x_0, r^{**})$. Y ésto concluye la demostración. ∎

Corolario 4.9 *Si $h = \frac{1}{2}$ la convergencia del método de Newton amortiguado a una raíz x^* también puede establecerse. Sin embargo, en este caso, $t^{**} = t^* = \frac{1}{b}$, y por lo tanto, el dominio de existencia y unicidad se reduce a la bola cerrada $\overline{B}(x_0, \frac{1}{b})$.*

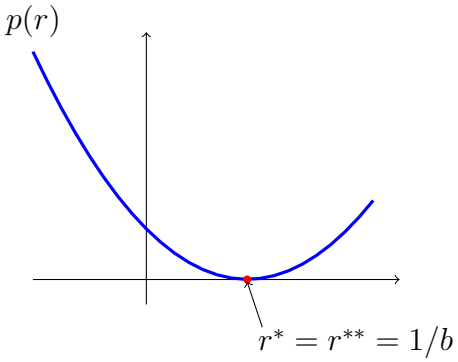


Figura 4.6: Gráfica del polinomio mayorizante $p(r) = \dfrac{b}{2}r^2 - r + a$, con $r^* = r^{**}$.

Demostración Siguiendo la demostración del Teorema 4.8, pero con $h = \frac{1}{2}$ se sigue que la sucesión $\{r_n\}$ converge a $r^* = \frac{1}{b}$. El polinomio mayorizante para este caso puede verse en la Figura 4.6.

Para obtener la región en la que la solución es única, asumimos que y^* es otra solución localizada en la bola $B(x_0, r^{**})$, donde $r^{**} = \frac{1}{b}$. Entonces

$$0 = \Gamma_0 \left[F(y^*) - F(x^*)\right] = M(y^* - x^*),$$

donde $M : X \to X$ denota el operador lineal definido por

$$Mx = \left[\int_0^1 \Gamma_0 F'(x^* + t(y^* - x^*))\, dt\right] x, \quad x \in X.$$

Como $\|y^* - x_0\| < \frac{1}{b}$ y $\|x^* - x_0\| \leq \frac{1}{b}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|I - M\| &= \left\| \int_0^1 \Gamma_0 [F'(x^* + t(y^* - x^*)) - F'(x_0)]\, dt \right\| \\
&\leq \int_0^1 b\|x^* + t(y^* - x^*) - x_0\|\, dt \\
&\leq \int_0^1 b\left((1-t)\|x^* - x_0\| + t\|y^* - x_0\|\right)\, dt \\
&< \frac{b}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Por el Lema de Inversión de Banach (véase [98]) tenemos que existe la inversa de M. Entonces teniendo en cuenta que $M(y^* - x^*) = 0$, se tiene que $y^* = x^*$, es decir, x^* es la única solución de $F(x) = 0$ en la bola $B(x_0, \frac{1}{b})$. Y ésto concluye la demostración. ∎

Una vez tenemos el resultado anterior de convergencia semilocal ya podemos hablar del orden de convergencia y de cotas del error. En primer lugar, por el teorema de Schröder, podemos calcular el orden de convergencia de la sucesión (4.3.5). Como $r_{n+1} = N_{\lambda,p}(r_n)$ con $N_{\lambda,p}(r_n)$ y $p(r)$ definidos en (4.3.3) y en (4.3.1) respectivamente, tenemos que

$$N'_{\lambda,p}(x) = 1 - \lambda(-L_p(x) + 1) = (1 - \lambda) + \lambda L_p(x),$$

lo cual nos permite asegurar que

$$\begin{aligned} r^* - r_{n+1} &= N_{\lambda,p}(r^*) - N_{\lambda,p}(r_n) \\ &= N_{\lambda,p}(r^*) - \left[N_{\lambda,p}(r^*) + N'_{\lambda,p}(r^*)(r_n - r^*) + O(r_n - r^*)^2\right] \\ &= N'_{\lambda,p}(r^*)(r^* - r_n) + O(r_n - r^*). \end{aligned}$$

Es decir, tenemos convergencia lineal, con constante de error asintótico $N'_{\lambda,p}(r^*) = (1 - \lambda)$. Es decir, que la velocidad de convergencia depende del parámetro amortiguador λ. Cuanto más próximo a 1 es dicho parámetro, más rápido se converge a la solución r^* (véase [86] o [87]).

Pasamos ahora a establecer unas cotas tanto inferiores como superiores para los términos del error. Para ello, seguimos una técnica introducida por Ostrowski.

Teorema 4.10 *Asumimos que se verifican las condiciones del Teorema 4.8. Entonces se obtienen las siguientes cotas de error para la sucesión* $\{x_n\}$ *dada por el método de Newton amortiguado*

$$\frac{r^*(r^{**} - r^*)(1 - \lambda)^n}{r^{**} - r^*(1 - \lambda)^n} \leq \|x^* - x_n\| \leq \frac{r^*(r^{**} - r^*)Q^n}{r^{**} - r^*Q^n}$$

donde $Q = \dfrac{r^* + (1 - \lambda)r^{**}}{r^{**} + (1 - \lambda)r^*}$ *y* r^* *y* r^{**} *vienen definidas en* (4.3.2) *y en* (4.3.4) *respectivamente.*

Demostración Denotamos $a_n = r^* - r_n$ y $b_n = r^{**} - r_n$. Entonces,

$$a_{n+1} = r^* - r_{n+1} = r^* - r_n + \lambda\frac{p(r_n)}{p'(r_n)} = a_n - \lambda\frac{a_n b_n}{a_n + b_n} = a_n\frac{a_n + (1 - \lambda)b_n}{a_n + b_n},$$

y análogamente

$$b_{n+1} = b_n\frac{b_n + (1 - \lambda)a_n}{a_n + b_n}.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n}{b_n}\frac{a_n + (1 - \lambda)b_n}{b_n + (1 - \lambda)a_n}. \tag{4.3.7}$$

Ahora bien, tenemos lo siguiente

$$\frac{a_n+(1-\lambda)b_n}{b_n+(1-\lambda)a_n}=\frac{r^*-r_n+(1-\lambda)(r^{**}-r_n)}{r^{**}-r_n+(1-\lambda)(r^*-r_n)}=\frac{r^*+(1-\lambda)r^{**}-r_n(2-\lambda)}{r^{**}+(1-\lambda)r^*-r_n(2-\lambda)}.$$

Si denotamos $f(x)=\frac{A-Bx}{C-Bx}$, y derivamos, obtenemos

$$f'(x)=\frac{-B(C-Bx)+B(A-Bx)}{(C-Bx)^2}=\frac{B(A-C)}{(C-Bx)^2}.$$

En nuestro caso

$$\begin{aligned}A-C &= r^*+(1-\lambda)r^{**}-r^{**}-(1-\lambda)r^*\\ &= (r^*-r^{**})+(1-\lambda)(r^{**}-r^*)\\ &= -\lambda(r^{**}-r^*)<0.\end{aligned}$$

Entonces, como $0\leq r_n<r^*$

$$f(0)\geq f(r_n)\geq f(r^*).$$

Calcularemos ahora la cota superior, denotando $q_n=\frac{a_n}{b_n}$, obtenemos

$$q_{n+1}\leq q_n\frac{r^*+(1-\lambda)r^{**}}{r^{**}+(1-\lambda)r^*}$$

y llamando $Q=\frac{r^*+(1-\lambda)r^{**}}{r^{**}+(1-\lambda)r^*}$, tenemos que

$$q_{n+1}\leq Qq_n\leq Q^2q_{n-1}\leq\cdots\leq Q^{n+1}q_0.$$

Teniendo en cuenta que, $q_n\leq Q^nq_0$, entonces,

$$a_n\leq q_0b_nQ^n=q_0(r^{**}-r_n)Q^n=q_0(r^{**}-r_n)Q^n=q_0(r^{**}-r^*+a_n)Q^n,$$

además, como $[1-q_0Q^n]\,a_n\leq q_0(r^{**}-r^*)Q^n$

$$a_n\leq\frac{q_0(r^{**}-r^*)Q^n}{1-q_0Q^n}.$$

Por otro lado, como $Q<1$, ya que $r^*+r^{**}-\lambda r^{**}<r^*-\lambda r^*+r^{**}$, podemos concluir que

$$a_n\leq\frac{r^*(r^{**}-r^*)Q^n}{r^{**}-r^*Q^n}.$$

Para calcular la cota inferior hay que tener en cuenta

$$\begin{aligned}q_{n+1} &\geq \frac{r^*+(1-\lambda)r^{**}-(2-\lambda)r^*}{r^{**}+(1-\lambda)r^*-(2-\lambda)r^*}\\ &= q_n\frac{r^*(\lambda-1)+(1-\lambda)r^{**}}{r^{**}-r^*}\\ &= q_n\frac{(1-\lambda)(r^{**}-r^*)}{r^{**}-r^*}=(1-\lambda)q_n\geq\cdots\geq(1-\lambda)^{n+1}q_0.\end{aligned}$$

Como $q_n \geq (1-\lambda)^n q_0$, entonces

$$a_n \geq (1-\lambda)^n b_n q_0 = (1-\lambda)^n (r^{**} - r^* + r^* - r_n) q_0 = (1-\lambda)^n (r^{**} - r^* + a_n) q_0.$$

Además, como $[1 - q_0(1-\lambda)^n]\, a_n \geq (r^{**} - r^*) q_0 (1-\lambda)^n$

$$a_n \geq \frac{r^*(r^{**} - r^*)(1-\lambda)^n}{r^{**} - r^*(1-\lambda)^n}.$$

Y ésto concluye la demostración. ∎

Además, si la función $Q(\lambda)$ es decreciente, es decir, que cuanto más cercano a uno sea el parámetro amortiguador, mayor será la convergencia. Probemos que $Q(\lambda)$ es decreciente.

$$Q = Q(\lambda) = \frac{r^* + (1-\lambda) r^{**}}{r^{**} + (1-\lambda) r^*} = \frac{1 - \frac{r^{**}}{r^* + r^{**}} \lambda}{1 - \frac{r^*}{r^* + r^{**}} \lambda}$$

Llamando ahora $A = \frac{r^{**}}{r^* + r^{**}}$ y $B = \frac{r^*}{r^* + r^{**}}$, tenemos que

$$Q(\lambda) = \frac{1 - A\lambda}{1 - B\lambda},$$

y ahora derivando obtenemos

$$Q'(\lambda) = \frac{B - A}{(1 - B\lambda)^2},$$

y como $B - A = \frac{r^* - r^{**}}{r^* + r^{**}} < 0$, entonces la función $Q(\lambda)$ es decreciente, por lo tanto, cuanto mayor es el parámetro λ, menor es $Q(\lambda)$ y más rápida es la convergencia.

Corolario 4.11 *Si $\lambda = 1$, de la ecuación* (4.3.7) *se deduce que*

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^2$$

y, por tanto, la convergencia es cuadrática (véase [86] o [87]).

Ejemplo 4.5 *Consideramos la siguiente ecuación no lineal de tipo Hammerstein*

$$x(s) = f(s) + \int_A^B G(s,t)\, \alpha (x(t) - f(t))^2 + \beta |x(t) - f(t)|\, dt, \quad s \in [A, B], \tag{4.3.8}$$

donde $x, f \in C[A, B]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y el núcleo G es la función de Green

$$G(s,t) = \begin{cases} \dfrac{(B-s)(t-A)}{B-A}, & t \leq s, \\ \dfrac{(s-A)(B-t)}{B-A}, & s \leq t. \end{cases}$$

Para simplificar el análisis elegimos $A = 0$, $B = 1$, $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ y $f(s) = 0$. Para resolver (4.3.8), la transformamos en un problema de dimensión finita usando un proceso de discretización. Para ello, aproximamos la integral que aparece en (4.3.8) por la fórmula de Gauss-Legendre

$$\int_0^1 h(t)\,dt \simeq \sum_{i=1}^{8} w_i h(t_i),$$

donde los nodos t_i y los pesos w_i, aproximados con 8 decimales, vienen dados por

$$\begin{array}{llll} t_1 = 0.01985507, & t_2 = 0.10166676, & t_3 = 0.23723379, & t_4 = 0.40828267, \\ t_5 = 0.59171732, & t_6 = 0.76276620, & t_7 = 0.89833323, & t_8 = 0.98014492, \\ w_1 = 0.05061426, & w_2 = 0.11119051, & w_3 = 0.15685332, & w_4 = 0.18134189, \\ w_5 = 0.18134189, & w_6 = 0.15685332, & w_7 = 0.11119051, & w_8 = 0.05061426. \end{array}$$

Ahora, si denotamos la aproximación $x(t_i)$ por x_i ($i = 1, 2, \ldots, 8$), entonces (4.3.8) es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones no lineales

$$x_i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{8} a_{ij}\,(x_j^2 + |x_j|), \quad j = 1, 2, \ldots, 8, \tag{4.3.9}$$

donde

$$a_{ij} = \begin{cases} w_j t_j (1 - t_i) & \text{if } j \le i, \\ w_j t_i (1 - t_j) & \text{if } j > i. \end{cases}$$

El sistema (4.3.9) se escribe ahora como $F(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ donde

$$F(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x} - \frac{1}{2}A\mathbf{v}_\mathbf{x}, \qquad G(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{2}A\mathbf{w}_\mathbf{x} \qquad F : \mathbb{R}^8 \longrightarrow \mathbb{R}^8,$$

y

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_8)^T,\ A = (a_{ij})_{i,j=1}^8,$$

$$\mathbf{v}_\mathbf{x} = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_8^2)^T, \mathbf{w}_\mathbf{x} = (|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_8|)^T.$$

Además, $F'(\mathbf{x}) = I - AD(\mathbf{x})$, donde $D(\mathbf{x}) = diag\{x_1, x_2, \ldots, x_8\}$. Tomando como punto inicial $\mathbf{x_0} = (1, 1, \ldots, 1)^T$ y la norma del máximo, obtenemos $a = 1.13821\ldots$, $b = \beta = 0.140636\ldots$, $k = 0.070318\ldots$. Tomando por ejemplo $\lambda = 0.9$ se sigue que $\mu = M + \lambda k = 0.535159\ldots < 1$ and $h_2 = 0.0400186\ldots$. Por el Teorema 4.8, el método de Newton relajado para $\lambda = 0.9$ converge a la solución trivial $\mathbf{x}^* = (0, 0, \ldots, 0)^T$ del sistema (4.3.9). La existencia de solución está garantizada en $\overline{B}(\mathbf{x_0}, 1.36529\ldots)$ y la unicidad en $B(\mathbf{x_0}, 11.8558\ldots)$.

Por último, en la Tabla 4.1 podemos establecer las siguientes estimaciones del error $\|\mathbf{x_n} - \mathbf{x}^*\|$.

Tabla 4.1: Estimaciones del error $\|\mathbf{x_n} - \mathbf{x}^*\|$ que se obtienen al aplicar el método de Newton amortiguado con $\lambda = 0.9$ y $\lambda = 1$ (Newton), para resolver el sistema (4.3.9).

n	$\lambda = 0.9$	$\lambda = 1$
1	$3.409021\ldots \times 10^{-1}$	$2.270807\ldots \times 10^{-1}$
2	$6.788876\ldots \times 10^{-2}$	$2.332819\ldots \times 10^{-2}$
3	$1.240100\ldots \times 10^{-2}$	$2.069182\ldots \times 10^{-3}$
4	$2.221346\ldots \times 10^{-3}$	$1.803860\ldots \times 10^{-4}$
5	$3.964426\ldots \times 10^{-4}$	$1.570110\ldots \times 10^{-5}$
6	$7.0706150\ldots \times 10^{-5}$	$1.366465\ldots \times 10^{-6}$
7	$1.2609058\ldots \times 10^{-5}$	$1.189218\ldots \times 10^{-7}$
8	$2.2485316\ldots \times 10^{-6}$	$1.034962\ldots \times 10^{-8}$

4.3.2. Convergencia semilocal del método de Newton amortiguado con condiciones centradas

En esta sección presentamos un análisis diferente de la convergencia semilocal del método de Newton amortiguado, basado en las condiciones de Lipschitz y Lipschitz centrada. Como en el caso local, la utilización de ambas condiciones nos va a permitir realizar acotaciones de forma más fina y, por tanto, obtener un radio de convergencia para el entorno, en este caso centrado en el punto de partida, mayor que al utilizar sólo la condición de Lipschitz. Para más información véase [7], [8], [50] o [51].

Primero, necesitamos un resultado sobre la sucesión escalar que será la sucesión que mayorice a $\{x_n\}$. A diferencia de secciones anteriores, en las que se estudia y se dan resultados de convergencia para valores del parámetro amortiguador $\lambda \in (0, 1)$, en esta sección la convergencia de las sucesiones se establece para valores del parámetro $\lambda \in (0, 2)$, lo cual obliga ya a tomar valores absolutos.

Lema 4.12 *Sean $a > 0$, $b > 0$, $\beta > 0$ y $\lambda \in (0, 2)$ parámetros dados. Sean $M = |1 - \lambda|$ y $\gamma = \frac{\beta}{b}$. Definimos el parámetro α de la siguiente forma*

$$\alpha = \frac{2(\lambda - 2M\gamma)}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 8\gamma(\lambda - 2M\gamma)}}. \tag{4.3.10}$$

Suponemos que para $\delta = ab\lambda\gamma$ se cumplen las siguientes condiciones:

$$2M\gamma < \lambda, \tag{4.3.11}$$

$$(\lambda - 2)\delta^2 + 2(2 + M)\delta - 2 < 0, \tag{4.3.12}$$

$$\left(\frac{\lambda^2}{\delta} - 4M - 4\alpha + 2\alpha\lambda\right)\delta^2 + 2\left(\frac{M}{\gamma}\lambda + 4\alpha + 2\alpha M\right)\delta + 4(M - \alpha) \leq 0, \tag{4.3.13}$$

y

$$(M+\alpha)\left(\lambda-2(1-\alpha)\right)\delta^2+2(M+(3-2\alpha)\alpha)\delta+2(1-\alpha)(M-\alpha)\leq 0. \quad (4.3.14)$$

Entonces, la sucesión escalar $\{t_n\}$ *definida por*

$$\begin{cases} t_0=0,\ t_1=\lambda a,\ t_2=t_1+\dfrac{1}{2(1-\gamma b t_1)}[\lambda\gamma b(t_1-t_0)+2M](t_1-t_0) \\ t_{n+2}=t_{n+1}+\dfrac{1}{2(1-\gamma b t_{n+1})}[\lambda b(t_{n+1}-t_n)+2M(1+\gamma b t_n)](t_{n+1}-t_n), \end{cases} \quad (4.3.15)$$

está bien definida, es creciente y acotada superiormente por

$$t^{**}=\left[1+\frac{\lambda\gamma b+2M}{2(1-\delta)(1-\alpha)}\right]\lambda a \quad (4.3.16)$$

y converge a su única cota superior t^* *que satisface*

$$t^*\in[t_n,t^{**}]. \quad (4.3.17)$$

Además, las siguientes estimaciones se cumplen para cada $n=1,2,\ldots$

$$0<t_{n+2}-t_{n+1}\leq\frac{\lambda\gamma b+2M}{2(1-\delta)}\alpha^n n.$$

Demostración Primero, notemos que por (4.3.10) y (4.3.11), $\alpha\in(0,1)$ y como $\lambda\in(0,2)$ se tiene que $M\in(0,1)$. Sea

$$\alpha_0=\frac{\lambda b(t_2-t_1)+2(\gamma b t_1+1)M}{2(1-\gamma b t_2)}.$$

Teniendo en cuenta (4.3.12) y (4.3.15) es claro que

$$\gamma b t_2<1. \quad (4.3.18)$$

Además, de (4.3.10), (4.3.13) y (4.3.18) se deduce que

$$0<\alpha_0\leq\alpha. \quad (4.3.19)$$

Después, probaremos usando inducción en el entero $k=1,2,\ldots$ que

$$0<\frac{\lambda b(t_{k+1}-t_k)+2M(\gamma b t_k+1)}{2(1-\gamma b t_2)}\leq\alpha. \quad (4.3.20)$$

La estimación (4.3.20) es cierta para $k=1$ por (4.3.19). Entonces, usando (4.3.15) para $n=1$ y (4.3.19), se obtiene que

$$0 \ < \ t_3-t_2\leq\alpha(t_2-t_1)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} t_3 &\leq t_2 + \alpha(t_2 - t_1) \\ &= t_2 + (1+\alpha)(t_2 - t_1) - (t_2 - t_1) \end{aligned}$$

y, entonces,

$$t_3 \leq t_1 + \tfrac{1-\alpha^2}{1-\alpha}(t_2 - t_1) < t^{**}.$$

Suponemos que (4.3.20) se verifica para cada k hasta un cierto m. Entonces, se tiene que

$$0 < t_{k+2} - t_{k+1} \leq \alpha^k (t_2 - t_1) \tag{4.3.21}$$

y

$$t_{k+2} \leq t_1 + \frac{1-\alpha^{k+1}}{1-\alpha}(t_2 - t_1). \tag{4.3.22}$$

Debemos ahora demostrar que

$$0 \leq \frac{\lambda b(t_{k+2} - t_{k+1}) + 2M(\gamma b t_k + 1)}{2(1 - \gamma b t_{k+1})} \leq \alpha. \tag{4.3.23}$$

Evidentemente, (4.3.23) se verifica si

$$\lambda b(t_{k+2} - t_{k+1}) + 2(\gamma b t_k + 1)M \leq 2\alpha(1 - \gamma b t_{k+1})$$

o teniendo en cuenta (4.3.21) y (4.3.22), llegamos a que

$$\begin{aligned} &\lambda b(t_2 - t_1)\alpha^k + 2M\gamma b \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}(t_2 - t_1) \\ &+2\alpha\gamma b \frac{1-\alpha^{k+1}}{1-\alpha}(t_2 - t_1) + 2(\delta M + \alpha\delta + M - \alpha) \leq 0. \end{aligned} \tag{4.3.24}$$

La estimación (4.3.24) motiva el uso de funciones recurrentes $f_k(t)$ definidas en $(0,1)$ como

$$\begin{aligned} f_k(t) &= \lambda b(t_2 - t_1)t^k + 2M\gamma b(t_2 - t_1)(1 + t + \cdots + t^{k-1}) \\ &+ 2\gamma b(t_2 - t_1)t(1 + t + \cdots + t^k) + 2((M\gamma b + t\gamma b)\lambda a + M - t) \end{aligned} \tag{4.3.25}$$

Necesitamos una relación entre dos funciones $f_k(t)$ consecutivas. De (4.3.25) tenemos que

$$f_{k+1}(t) = f_{k+1}(t) - f_k(t) + f_k(t) = f_k(t) + g(t)(t_2 - t_1)t^k, \tag{4.3.26}$$

donde

$$g(t) = 2\gamma b t^2 + \lambda b t + (2M\gamma - \lambda)b. \tag{4.3.27}$$

De (4.3.11) y (4.3.27) se sigue que el polinomio $g(t)$ tiene una única raíz positiva α dada en (4.3.10). De (4.3.25) se sigue que la estimación (4.3.24) se verifica si

$$f_k(\alpha) \leq 0. \tag{4.3.28}$$

Se define ahora la función $f_\infty(t)$ en $(0,1)$ por

$$f_\infty(t) = \lim_{k\to\infty} f_k(t). \tag{4.3.29}$$

Ahora, de (4.3.26) y (4.3.27) se tiene que

$$f_{k+1}(\alpha) = f_k(\alpha). \tag{4.3.30}$$

Entonces, de (4.3.29) y (4.3.30) se sigue que (4.3.28) se verifica si

$$f_\infty(\alpha) \leq 0. \tag{4.3.31}$$

Haciendo ahora $k \to \infty$ y de (4.3.14) tenemos que (4.3.31) es cierta, ya que

$$f_\infty(\alpha) = 2\left[M\delta + \alpha\delta + M - \alpha(1-\gamma) + \frac{M\gamma b}{1-\alpha}(t_2 - t_1) + \frac{\gamma b\alpha}{1-\alpha}(t_2 - t_1)\right] \leq 0.$$

La inducción para (4.3.20) está completa. Por lo tanto, la sucesión $\{t_n\}$ es creciente, acotada superiormente por t^{**} dada en (4.3.16) y tal que converge a su única cota superior que satisface (4.3.17). La demostración está completa. ∎

Nota 4.2 *Las inecuaciones cuadráticas* (4.3.12), (4.3.13) *y* (4.3.14) *describen lo cercano a* 0 *que está a y pueden resolverse para a. Sin embargo, hemos decidido dejarlo abierto ya que su representación es demasiado larga. Aplicando álgebra trivial se muestra que el caso interesante, cuando* $\lambda = 1$ *(el método de Newton), se reduce a (véase [11])*

$$h_* = La \leq \frac{1}{2} \tag{4.3.32}$$

donde

$$L = \frac{1}{8}\left(4b_0 + \sqrt{b_0 b + 8b_0^2} + \sqrt{b_0 b}\right).$$

Si $b_0 = b$, *entonces* (4.3.32) *se reduce a la famosa, por su simplicidad y claridad, hipótesis de Newton-Kantorovich dada en la condición* (iv) *del Teorema 4.8. Notemos que*

$$h \leq \frac{1}{2} \Rightarrow h_* \geq \frac{1}{2}, \tag{4.3.33}$$

pero no necesariamente viceversa, a menos que $b_0 = 0$ *y* $\frac{h_*}{h} \to 0$ *ya que* $\frac{b_0}{b} \to 0$. *Por lo tanto, la aplicabilidad del método de Newton se ha extendido.*

Introducimos ahora la siguiente notación para un $N = 0, 1, \ldots$ fijado

$$\delta_N = \gamma b(t_{N+1} - t_N).$$

Notemos que $\delta_0 = \delta$. Ahora, podemos presentar el siguiente resultado que requiere condiciones más suaves que el Lema 4.12 para la convergencia de la sucesión $\{t_n\}$.

Lema 4.13 *Suponemos que se verifican* (4.3.11), (4.3.12), (4.3.13) *y* (4.3.14) *con* δ_N *sustituyendo a* δ *para* $N = 0, 1, \ldots$ *fijado. Además, suponemos que*

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{N+1} < \frac{1}{\gamma b}.$$

Entonces, la sucesión escalar $\{t_n\}$*, dada en* (4.3.15) *está bien definida, es creciente y está acotada superiormente por*

$$t_N^{**} = t_{N-1} + \frac{1}{1-\alpha}(t_N - t_{N-1})$$

para cada $N = 1, 2, \ldots$ *y converge a su única cota superior* t_N^* *que verifica*

$$t_{N+1} \leq t_N^* \leq t_N^{**}.$$

Además, las siguientes estimaciones se verifican para cada $n = 0, 1, \ldots$

$$0 < t_{N+n} - t_{N+n-1} \leq \alpha^{n-1}(t_{N+1} - t_N).$$

Demostración La demostración es análoga a la del Lema 4.12, sustituyendo δ por δ_N con $N = 0, 1, \ldots$ fijado. ∎

Nota 4.3 *Si* $N = 0$*, el Lema 4.13 se reduce al Lema 4.12. Claramente, el Lema 4.13 es más suave que el Lema 4.12.*

Ahora, presentamos el resultado de convergencia semilocal del método de Newton amortiguado usando condiciones centradas, además de la condición de Lipschitz, para construir la sucesión $\{t_n\}$ que mayorice a la sucesión $\{x_n\}$ dada por el método de Newton amortiguado, comenzando en un punto x_0.

Teorema 4.14 *Sea* $F : \Omega \subset X \to Y$ *diferenciable Fréchet. Suponemos que existen* $x_0 \in \Omega$*,* $\beta > 0$*,* $b > 0$*,* $a > 0$*,* $\lambda \neq 0$ *tales que existe* $F'(x_0)^{-1}$*, y además, se verifican las siguientes condiciones*

(i) $\|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\| \leq a$,

(ii) $\|F'(x_0)^{-1}(F'(x) - F'(x_0))\| \leq \beta\|x - x_0\|, \ \forall x \in \Omega$,

(iii) $\|F'(x_0)^{-1}(F'(x) - F'(y))\| \leq b\|x - y\|, \ \forall x, y \in \Omega$,

(iv) $\overline{B}(x_0, t^*) \subseteq \Omega$,

y las hipótesis del Lema 4.12 o del Lema 4.13 se satisfacen. Entonces, la sucesión $\{x_n\}$ *generada por el método de Newton amortiguado está bien definida, permanece en* $\overline{B}(x_0, t^*)$ *para cada* $n = 0, 1, \ldots$ *y converge a una solución* $x^* \in \overline{B}(x_0, t^*)$ *de la ecuación* $F(x) = 0$*. Además, las siguientes estimaciones se verifican para cada* $n = 0, 1, \ldots$

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq t_{n+1} - t_n$$

y

$$\|x_n - x^*\| \leq t_n - t^*,$$

donde la sucesión $\{t_n\}$ *viene definida en* (4.3.15). *Si además existe* $R \geq t^*$ *tal que*

$$\overline{B}(x_0, t^*) \subseteq D$$

y

$$\beta(t^* + R) < 2,$$

entonces, la solución x^* *es única en* $\overline{B}(x_0, R)$.

Demostración La demostración es análoga a la demostración del Teorema 4.8 pero usando la descomposición de tipo Ostrowski

$$\begin{aligned} F'(x_0)^{-1}F(x_{n+1}) &= F'(x_0)^{-1}\int_0^1 [F'(x_n + t(x_{n+1} - x_n)) - F'(x_n)] \\ &\quad (x_{n+1} - x_n)dt \\ &+ \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\left(I + F'(x_0)^{-1}(F'(x_n) - F'(x_0))\right)(x_{n+1} - x_n) \end{aligned} \tag{4.3.34}$$

en lugar de la que aparece. Para las estimaciones de las cotas superiores en las normas $\|F'(x_n)^{-1}F'(x_0)\|$ y la unicidad usamos la condición de Lipschitz centrada que es más precisa y menor que la condición normal de Lipschitz. ∎

Nota 4.4 *Notemos que la definición de* t_2 *(véase* (4.3.15)*) está justificada por la representación de tipo Ostroswki* (4.3.34) *para* $n = 0$, *entonces la condición centrada de Lipschitz (y no la Lipschitz) se usa para obtener la estimación de*

$$\|F'(x_0)^{-1}\| \int_0^1 [F'(x_0 + t(x_1 - x_0)) - F'(x_0)]\, dt\| \leq \frac{\beta}{2}\|x_1 - x_0\|^2 \leq \frac{\beta}{2}(t_1 - t_0)^2,$$

en lugar de

$$\|F'(x_0)^{-1}\| \int_0^1 [F'(x_0 + t(x_1 - x_0)) - F'(x_0)]\, dt\| \leq \frac{b}{2}\|x_1 - x_0\|^2.$$

Completamos esta sección con otro resultado para el método de Newton amortiguado con condiciones de convergencia más simples que en el Teorema 4.14.

Teorema 4.15 *Sea* $F : \Omega \subset X \to Y$ *diferenciable Fréchet. Suponemos que existen* $x_0 \in \Omega$, $\beta > 0$, $b > 0$, $a > 0$, $\lambda \in (0, 2)$ *tales que existe* $F'(x_0)^{-1}$, *y además se verifican las siguientes condiciones:*

(i) $\|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\| \leq a$,

(ii) $\|F'(x_0)^{-1}(F'(x) - F'(x_0))\| \leq \beta\|x - x_0\|,\ \forall x \in \Omega$,

(iii) $\|F'(x_0)^{-1}(F'(x) - F'(y))\| \leq b\|x - y\|, \ \forall x, y \in \Omega.$

Suponemos que

$$h_1 = \lambda ab \operatorname{máx}\{\lambda, \gamma(1+M)\} \leq \frac{1}{2}(1-M)^2,$$

y

$$\overline{B}(x_0, s^*) \subseteq \Omega,$$

donde M *y* γ *vienen dadas en el Lema 4.12 y*

$$s^* = \frac{1 - M - \sqrt{(1-M)^2 - 2h_1}}{\sigma}$$

y

$$\sigma = b \operatorname{máx}\{\lambda, \gamma(1+M)\},$$

Entonces, la sucesión $\{x_n\}$ *generada por el método de Newton amortiguado está bien definida, permanece en* $\overline{B}(x_0, s^*)$ *para todo* $n \geq 0$ *y converge a una solución* $x^* \in \overline{B}(x_0, s^*)$ *de la ecuación* $F(x) = 0$*. Además, la ecuación* $F(x) = 0$*, tiene una única solución* $x^* \in S$*, donde*

$$S = \begin{cases} \overline{B}(x_0, s^*) \bigcap \Omega & si \ \ h_1 = \dfrac{1}{2}(1-M)^2 \\ \overline{B}(x_0, s^{**}) \bigcap \Omega & si \ \ h_1 < \dfrac{1}{2}(1-M)^2, \end{cases} \tag{4.3.35}$$

y

$$s^{**} = \frac{1 - M + \sqrt{(1-M)^2 - 2h_1}}{\sigma}.$$

Además, las siguientes estimaciones se verifican para cada $n = 0, 1, \ldots$

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq s_{n+1} - s_n \tag{4.3.36}$$

y

$$\|x_n - x^*\| \leq s^* - s_n, \tag{4.3.37}$$

donde la sucesión mayorizante $\{s_n\}$ *está definida por*

$$s_0 = 0, \ \ s_{n+1} = s_n + \frac{f(s_n)}{g(s_n)},$$

donde

$$f(t) = \frac{\sigma}{2}t^2 - (1-M)t + \lambda a$$

y

$$g(t) = 1 - \gamma bt.$$

Demostración De $2\sigma\lambda a \leq (1-M)^2$ se sigue que la función $f(t)$ tiene dos raíces positivas s^* y s^{**} con $s^* \leq s^{**}$. Además, $s_n \leq s_{n+1}$, por lo que la sucesión $\{s_n\}$ converge a s^*. Como en el Teorema 4.14 se obtiene $F'(x_n)^{-1} \in L(Y,X)$,

$$\|F'(x_n)^{-1}F'(x_0)\| \leq \frac{1}{1-\beta\|x_n - x_0\|} \leq \frac{1}{1-\beta s_n} \leq \frac{1}{1-b\gamma s_n} \leq \frac{1}{g(s_n)}$$

y

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}-x_n\| &\leq \frac{1}{g(s_n)}\left[\frac{\lambda b}{2}\|x_n - x_{n-1}\| + (M\gamma b\|x_n - x_0\| + M)\right] \\
&\quad \times\|x_n - x_{n-1}\| \\
&\leq \frac{1}{g(s_n)}\left(\frac{\sigma}{2}(s_n - s_{n-1})^2 + M(\gamma b s_{n-1} + 1)\right)(s_n - s_{n-1}) \\
&= \frac{1}{g(s_n)}\left(\frac{\sigma}{2}(s_n - s_{n-1})^2 + M\gamma b(s_n - s_{n-1})s_{n-1}\right. \\
&\quad \left. + M(s_n - s_{n-1}) - g(s_{n-1})(s_n - s_{n-1}) + f(s_{n-1})\right) \\
&= \frac{1}{g(s_n)}\left(\frac{\sigma}{2}s_n^2 - (1-M)s_n + \lambda a\right. \\
&\quad \left. -(\sigma - M\gamma b - \gamma b)s_{n-1}(s_n - s_{n-1})\right) \\
&\leq \frac{f(s_n)}{g(s_n)} = s_{n+1} - s_n.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que para algún n

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq s_{n+1} - s_n,$$

y, además,

$$\begin{aligned}
\|F'(x_0)^{-1}(F'(x_{n+1}) - F'(x_0))\| &\leq \beta\|x_{n+1} - x_0\| \\
&\leq \beta s_{n+1} \leq \gamma b s_{n+1} \\
&\leq \gamma b s^* < 1
\end{aligned}$$

y

$$\|x_n - x_0\| \leq s_n \leq s^*.$$

Se tiene que $x_n \in \overline{B}(x_0, s^*)$, la sucesión $\{x_n\}$ está bien definida y, además, está contenida en un espacio de Banach X y es tal que converge a algún $x^* \in \overline{B}(x_0, s^*)$ (ya que $\overline{B}(x_0, s^*)$ es cerrado). También se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty}(I + F'(x_0)^{-1}(F'(x_n) - F'(x_0))(x_n - x_{n-1})) \\
&= \lim_{n\to\infty} F'(x_0)^{-1}F(x_n) \\
&= F'(x_0)^{-1}F(x^*),
\end{aligned}$$

y así $F(x^*) = 0$. La estimación (4.3.37) se sigue de (4.3.36) usando la técnica de mayorización (véase [11] o [12]). Por último, la unicidad se consigue como en el Teorema 4.8. Y ésto concluye la demostración. ∎

Además, se debe tener en cuenta la siguiente nota.

Nota 4.5 *Las siguientes condiciones se verifican:*

(i) *La hipótesis* $h_1 \leq \frac{1}{2}(1-M)^2$ *para* $0 < \lambda \leq 1$ *se reduce a*

$$h_1 = ab\frac{\text{máx}\{\lambda, \gamma(2-\lambda)\}}{\lambda} \leq \frac{1}{2}$$

que es más suave que $h = ab \leq \frac{1}{2}$. *Sin embargo, la hipótesis* $h = ab \leq \frac{1}{2}$ *no puede ser usada como condición suficiente de convergencia para el método de Newton amortiguado para* $\lambda \in (1, 2)$. *En la práctica, se deben comprobar todos las hipótesis de «h» introducidas en el estudio para ver si alguna de ellas se satisface.*

(ii) *Resultados análogos al Lema 4.13 pueden obtenerse intercambiando la sucesión* $\{t_n\}$ *por* $\{s_n\}$.

Ejemplo 4.6 *Consideramos la función real,*

$$x^3 - 0.49 = 0. \tag{4.3.38}$$

Tomamos como punto de partida $x_0 = 1$ *y consideramos el dominio* $\Omega = B(x_0, 1)$. *En este caso se obtiene,*

$$a = 0.17,$$

$$b = 3.02,$$

$$\beta = 2.51$$

y

$$\gamma = 0.831126\ldots.$$

Notemos que la hipótesis de Kantorovich $h \leq 0.5$ *no se satisface. Ahora, tomando* $\lambda = 0.99$, *se obtiene que para* $\delta_1 = 0.160253\ldots$ *las hipótesis del Teorema 4.14 se cumplen, por lo que, el método de Newton amortiguado comenzando en* $x_0 = 1$ *converge a la solución de* (4.3.38).

4.3.3. α-teoría para el método de Newton amortiguado

En esta sección vamos a realizar el estudio de la α-teoría para el método de Newton amortiguado siguiendo el artículo de Wang Deren y Zhao Fengguang [119]. Por otro lado, Yakoubsohn en [112] y Dedieu en [33], realizan un estudio

diferente, buscando una constante universal para el método de Newton y otros métodos de tipo secante. Destaca también el artículo de Blum et al. [24].

La técnica que se desarrolla en esta tesis construye una función mayorizante. La condición que se obtiene asegura que dicha función tenga raíces reales, por lo que, en realidad, es independiente del método utilizado.

Sea $F : X \to Y$, donde X e Y son dos espacios de Banach, consideramos el método de Newton amortiguado

$$x_{n+1} = x_n - \lambda \Gamma_n F(x_n),\ \Gamma_n = F'(x_n)^{-1},\ 0 < \lambda \leq 1 \tag{4.3.39}$$

para resolver la ecuación $F(x) = 0$, donde F es una función analítica en un entorno $B(x_0, R)$ del punto de partida x_0.

Tomaremos como punto de partida las siguientes hipótesis:

(i) Existe $\Gamma_0 = F'(x_0)^{-1}$.

(ii) $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \beta$.

(iii) $\frac{1}{k!}\|\Gamma_0 F^{(k)}(x_0)\| \leq \gamma^{k-1}$ para $k \geq 2$.

(iv) $\alpha = \beta\gamma \leq 3 - 2\sqrt{2} \approx 0.17157$.

La convergencia del método de Newton amortiguado (4.3.39) en espacios de Banach se obtiene de la convergencia del método aplicado a la función auxiliar

$$\phi(t) = \beta - t + \sum_{k \geq 2} \gamma^{k-1} t^k. \tag{4.3.40}$$

Además si $\gamma t < 1$, esta función se reduce a

$$\phi(t) = \beta - t + \frac{\gamma t^2}{1 - \gamma t}. \tag{4.3.41}$$

Nota 4.6 *Wang Deren y Zhao Fengguang en [119], consideran en lugar de (iii) la siguiente condición*

$$(iii')\ \frac{1}{k!}\|\Gamma_0 F^{(k)}(x_0)\| \leq \gamma_k \text{ para } k \geq 2$$

y la función auxiliar

$$\phi_\omega(t) = \beta - t + \sum_{k \geq 2} \gamma_k t^k.$$

Lema 4.16 *Si $\alpha \leq 3 - 2\sqrt{2}$, la función (4.3.40) tiene 2 raíces reales t^* y t^{**}, como se aprecia en la Figura 4.7. Además, el método*

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_{n+1} = t_n - \lambda \dfrac{\phi(t_n)}{\phi'(t_n)}, n \geq 0 \end{cases}$$

converge a t^*.

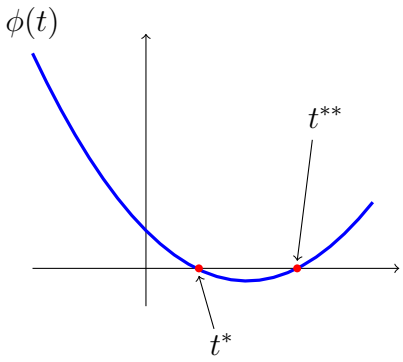


Figura 4.7: Gráfica de la función $\phi(t) = \beta - t + \dfrac{\gamma t^2}{1-\gamma t}$.

Demostración Primero veremos que es una sucesión creciente

$$t_1 = t_0 - \lambda \frac{\phi(t_0)}{\phi'(t_0)} = \lambda\beta > 0 = t_0.$$

Suponemos que se verifica para $n = k-1$, es decir, $t_n > t_{n-1}$, para cada $n \leq k-1$. Probemos que es cierto para $n = k$. Por la forma de la función $\phi(t) > 0$, $\phi'(t) < 0$, para cada $t \in [0, t^*]$, por lo tanto, $t_k > t_{k-1}$ y entonces, podemos asegurar que la sucesión $\{t_n\}$ es creciente. Ahora, probaremos que dicha sucesión está acotada superiormente por t^*. Procederemos de nuevo por inducción. Primero, es inmediato que

$$t^* - t_0 = t^* > 0.$$

Suponemos que es cierto para $n = k$, es decir, $t^* - t_k > 0$ y veamos que es cierto para $n = k + 1$

$$t^* - t_{k+1} = N_{\lambda,\phi}(t^*) - N_{\lambda,\phi}(t_k).$$

Aplicando ahora el Teorema del Valor Medio obtenemos que

$$N_{\lambda,\phi}(t^*) - N_{\lambda,\phi}(t_k) = N'_{\lambda,\phi}(\xi)(t^* - t_k), \xi \in (t_k, t^*),$$

y como $(t^* - t_k) > 0$, basta con ver que $N'_{\lambda,\phi}(\xi) > 0$, pero

$$N'_{\lambda,\phi}(\xi) = (1-\lambda) + \lambda \frac{\phi(\xi)\phi''(\xi)}{\phi'(\xi)^2}.$$

Como $\phi(\xi)$ es positiva y convexa para todo $\xi \in (0, t^*)$ y $\lambda \in (0, 1)$, entonces $N'_{\lambda,\phi}(z) > 0$. Como consecuencia, la sucesión está acotada. Por lo tanto, la sucesión $\{t_n\}$ converge a un límite $L \leq r^*$. Tomando límites, se tiene que $\phi(L) = 0$, luego $L = t^*$, como queríamos demostrar. ∎

Además, podemos dar el siguiente resultado.

Teorema 4.17 *En las condiciones* $(i)-(iv)$*, si además* $t^* \leq R$ *se verifica que:*

(i_n) $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \dfrac{\phi'(t_n)}{\phi'(t_0)}$.

(ii_n) *Existe* Γ_{n+1} *y* $\|\Gamma_{n+1}F'(x_0)\| \leq \dfrac{\phi'(t_0)}{\phi'(t_{n+1})}$.

(iii_n) $\dfrac{1}{k!}\|\Gamma_0 F^{(k)}(x_n)\| \leq -\dfrac{1}{(k!)}\dfrac{\phi'(t_n)}{\phi'(t_0)}$.

(iv_n) $\|x_{n+1}-x_n\| \leq t_{n+1}-t_n$.

Es decir, $\{t_n\}$ *es una sucesión mayorizante para* $\{x_n\}$.

Demostración Para $n=0$, (i_0), (ii_0) e (iii_0) se deducen de las hipótesis. Para (iv_0)

$$\|x_1-x_0\| = \lambda\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \lambda\beta = -\lambda\frac{\phi(t_0)}{\phi'(t_0)} = t_1 - t_0.$$

Supongamos ahora que (i_n), (ii_n), (iii_n) e (iv_n) son ciertas hasta un cierto n. Entonces

$$\begin{aligned} F(x_{n+1}) &= \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}F^{(k)}(x_0)(x_{n+1}-x_0)^k \\ &= F(x_0)+F'(x_0)(x_1-x_0)+\sum_{k\geq 2}\frac{1}{k!}F^{(k)}(x_0)(x_{n+1}-x_0)^k. \end{aligned}$$

Notemos que aplicando (iv_n) recursivamente se tiene que para $j=1,\ldots,n+1$

$$\|x_j-x_0\| \leq \|x_j-x_{j-1}\|+\cdots+\|x_1-x_0\| \leq t_j - t_0 = t_j < t^* \leq R.$$

Por lo tanto, $x_j \in B(x_0,R)$ y F es analítica en x_j, $j=1,\ldots,n+1$. En primer lugar, se tiene:

$$\begin{aligned} F'(x_{n+1}) &= \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}F^{(k+1)}(x_0)(x_{n+1}-x_0)^k \\ &= F'(x_0)+\sum_{k\geq 2}\frac{1}{(k-1)!}F^{(k)}(x_0)(x_{n+1}-x_0)^{k-1}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} &\|I-\Gamma_0 F'(x_{n+1})\| \\ &\leq \sum_{k\geq 2}\frac{1}{(k-1)!}\|\Gamma_0 F^{(k)}(x_0)\|\|x_{n+1}-x_0\|^{k-1} \\ &\leq -\sum_{k\geq 2}k\left(\frac{1}{k!}\frac{\phi^{(k)}(t_0)}{\phi'(t_0)}\right)(t_{n+1}-t_0)^{k-1} - \sum_{k\geq 2}\left(\frac{1}{k!}\frac{\phi^{(k)}(t_0)}{\phi'(t_0)}\right)(t_{n+1}-t_0)^{k-1} \\ &= 1-\frac{\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\phi^{(k+1)}(t_0)(t_{n+1}-t_0)^k}{\phi'(t_0)} = 1-\frac{\phi'(t_{n+1})}{\phi'(t_0)}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\|I - \Gamma_0 F'(x_{n+1})\| \leq 1 - \frac{\phi'(t_{n+1})}{\phi'(t_0)} < 1,$$

ya que $\phi'(t)$ tiene signo constante en $(0, t^*)$. Ahora, por el Lema de Banach de Inversión de Operadores (véase [98]), podemos asegurar que existe Γ_{n+1} y además

$$\|\Gamma_{n+1} F'(x_0)\| \leq \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{\phi'(t_{n+1})}{\phi'(t_0)}\right)} = \frac{\phi'(t_0)}{\phi'(t_{n+1})}. \tag{4.3.42}$$

Ahora, teniendo en cuenta que $x_{n+1} = x_n - \lambda \Gamma_n F(x_n)$, entonces

$$F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \lambda F(x_n) = 0,$$

y llamando $y = x_n + t(x_{n+1} - x_n)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 F(x_{n+1}) &= \Gamma_0 \left[F(x_{n+1}) - \lambda F(x_n) + F'(x_n)(x_{n+1} - x_n)\right] \\
&= \Gamma_0 \left[F(x_{n+1}) - F(x_n) + F'(x_n)(x_{n+1} - x_n)\right] + (1-\lambda)\Gamma_0 F(x_n) \\
&= \int_{x_n}^{x_{n+1}} \Gamma_0 \left[F'(x) - F'(x_n)\right] dx + (1-\lambda)\Gamma_0 F(x_n) \\
&= \int_{x_n}^{x_{n+1}} \int_{x_n}^{x} \Gamma_0 F''(y) dy dx + (1-\lambda)\Gamma_0 F(x_n) \\
&= \int_{x_n}^{x_{n+1}} \int_{y}^{x_{n+1}} \Gamma_0 F''(y) dx dy + (1-\lambda)\Gamma_0 F(x_n) \\
&= \int_{x_n}^{x_{n+1}} \Gamma_0 F''(y)(x_{n+1} - y) dy + (1-\lambda)\Gamma_0 F(x_n) \\
&= \int_0^1 \Gamma_0 F''(x_n + t(x_{n+1} - x_n))(1-t)(x_{n+1} - x_n)^2 dt \\
&\quad + (1-\lambda)\Gamma_0 F(x_n) \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \Gamma_0 F^{(k+2)}(x_0)[x_n - x_0 + t(x_{n+1} - x_n)]^k \right) \\
&\quad \times (1-t)(x_{n+1} - x_n)^2 dt + (1-\lambda)\Gamma_0 F(x_n).
\end{aligned}$$

Tomando normas, obtenemos la siguiente cota superior para $\|\Gamma_0 F(x_{n+1})\|$.

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k \geq 0} \frac{(k+2)(k+1)}{(k+2)!} \left\| \Gamma_0 F^{(k+2)}(x_0) \right\| \right) \\
&\times \int_0^1 [t_n - t_0 + t(t_{n+1} - t_n)]^k (1-t)(t_{n+1} - t_n)^2 dt + (1-\lambda)\|\Gamma_0 F(x_n)\|.
\end{aligned} \tag{4.3.43}$$

Ahora, si llamamos

$$\gamma^{k+1} = \sum_{k \geq 0} \frac{(k+2)(k+1)}{(k+2)!} \left\| \Gamma_0 F^{(k+2)}(x_0) \right\|,$$

y teniendo en cuenta que,

$$\phi'(t) = -1 + \sum_{k\geq 2} k\gamma^{k-1}t^{k-1}$$

y denotando $j = k-2$

$$\phi''(t) = \sum_{k\geq 2} k(k-1)\gamma^{k-1}t^{k-2} = \sum_{j\geq 0}(j+2)(j+1)\gamma^{j+1}t^j$$

se tiene que,

$$\begin{aligned}\|\Gamma_0 F(x_{n+1})\| &\leq \int_0^1 \phi''(t_n - t_0 + t(t_{n+1}-t_n))(t_{n+1}-t_n)^2(1-t)dt \\ &\quad -(1-\lambda)\tfrac{\phi(t_n)}{\phi'(t_0)} \\ &= -\frac{\phi(t_{n+1}) - \phi(t_n) + \phi'(t_n)(t_{n+1}-t_n)}{\phi'(t_0)} - (1-\lambda)\frac{\phi(t_n)}{\phi'(t_0)} \\ &= -\frac{\phi(t_{n+1})}{\phi'(t_0)}\end{aligned}$$

Es decir, se obtiene que

$$\|\Gamma_0 F(x_{n+1})\| \leq -\frac{\phi(t_{n+1})}{\phi'(t_0)}. \tag{4.3.44}$$

Finalmente, por (4.3.42) y (4.3.44)

$$\begin{aligned}\|x_{n+2} - x_{n+1}\| = \lambda\|\Gamma_{n+1}F(x_{n+1})\| &\leq \lambda\|\Gamma_{n+1}F'(x_0)\|\Gamma_0 F(x_{n+1})\| \\ &\leq -\lambda\frac{\phi'(t_0)}{\phi'(t_{n+1})}\frac{\phi(t_{n+1})}{\phi'(t_0)} = x_{n+1} - x_n,\end{aligned}$$

y de aquí se deduce (iv_{n+1}). Como $\{t_n\}$ es mayorizante de $\{x_n\}$, $t_n \to t^*$ y estamos en un espacio de Banach se tiene que $\{x_n\} \to x^*$. Además tomando límites en (i_n)

$$\|\Gamma_0 F(x^*)\| = \lim_{n\to\infty}\|\Gamma_0 F(x_n)\| \leq -\lim_{n\to\infty}\frac{\phi(t_n)}{\phi'(t_0)} = 0,$$

por lo que, $F(x^*) = 0$ y entonces, x^* es solución. Por lo tanto, existe x^* solución de $F(x) = 0$ y está localizada en $B(x_0, t^*)$.

Para obtener la región en la que la solución es única, asumimos que $\hat{x}$ es otra solución localizada en la bola $B(x_0, t^{**})$. Entonces

$$0 = \Gamma_0\left[F(\hat{x}) - F(x^*)\right] = M(\hat{x} - x^*), \tag{4.3.45}$$

donde $M : X \to X$ denota el operador lineal definido por

$$Mx = \left[\int_0^1 \Gamma_0 F'(x^* + t(\hat{x} - x^*))\,dt\right]x, \quad x \in X.$$

Como $\|\hat{x} - x_0\| < t^{**}$ y $\|x^* - x_0\| \leq t^*$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|I - M\| &= \left\| \int_0^1 \Gamma_0 [F'(x^* + t(\hat{x} - x^*)) - F'(x_0)]\, dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 b\|x^* + t(\hat{x} - x^*) - x_0\|\, dt \\ &\leq \int_0^1 b\left((1-t)\|x^* - x_0\| + t\|\hat{x} - x_0\|\right)\, dt \\ &< \frac{b}{2}(t^* + t^{**}) = 1. \end{aligned}$$

Por el Lema de Inversión de Banach (véase [98]) tenemos que existe la inversa de M. Entonces, teniendo en cuenta (4.3.45), se tiene que $\hat{x} = x^*$, es decir, x^* es la única solución de $F(x) = 0$ en la bola $B(x_0, t^{**})$. Y ésto concluye la demostración. ∎

Ejemplo 4.7 *Los problemas de posición que aparecen en el estudio de manipuladores paralelos, como el asociado a la conocida plataforma de Stewart-Gough (véase [32], [58], [74] o [90] entre otros), dan lugar a ecuaciones cúbicas definidas entre dos subespacios de $\mathbb{R}^n$, para distintos valores de n. Podemos denotar un operador cúbico definido de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera*

$$F(X) = CX^3 + BX^2 + AX + D,$$

siendo $X \in \mathbb{R}^n$ un vector formado por las incógnitas, $D \in \mathbb{R}^n$ es un vector, A es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, B es una aplicación bilineal de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ y C es una aplicación trilineal de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. En este problema A, B, C y D son conocidos.

Podemos entender los operadores derivada k-ésima de F, $F^{(k)}(X)$, como k-tensores cuyos elementos son

$$F^{(k)}(X) = \left(\frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}} \right)_{i, j_1, \ldots, j_k = 1, \ldots, n},$$

siendo f_i las funciones componentes de F evaluadas en X. En el caso de ecuaciones cúbicas, tenemos que $F^{(k)}(X) = 0$ si $k \geq 4$.

Para ilustrar la aplicación de la α-teoría de Smale a este tipo de problemas, consideramos el siguiente caso particular de sistema cúbico definido en $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} 3 + 20y + 2xy = 0 \\ 27 + 140x - 20y + 60z + 2z^2 = 0 \\ 147 + 700x + 280z + 20xyz = 0 \end{cases}$$

Si denotamos $X = (x, y, z)^T$ y $X_0 = (0, 0, 0)^T$ podemos escribir el sistema de una manera más sencilla usando la notación de k-tensores. En concreto, si $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, el sistema queda

$$F(X) = F(X_0) + F'(X_0)X + \frac{1}{2}F''(X_0)X^2 + \frac{1}{6}F'''(X_0)X^3. \tag{4.3.46}$$

Notemos que,

$$F(X) = \begin{pmatrix} 3 \\ 27 \\ 147 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20y \\ 140x - 20y + 60z \\ 147 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2xy \\ 2z^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20xyz \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$F'(X_0) = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 140 & -20 & 60 \\ 700 & 0 & 280 \end{pmatrix}$$

y

$$\Gamma_0 = F'(X_0)^{-1} = \frac{1}{140} \begin{pmatrix} -14 & -14 & 3 \\ 7 & 0 & 0 \\ 35 & 35 & -7 \end{pmatrix}.$$

Además,

$$\frac{1}{2}\Gamma_0 F''(X_0)X^2 = \Gamma_0 \begin{pmatrix} 2xy \\ 2z^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{xy+z^2}{5} \\ \frac{xy}{10} \\ \frac{xy+z^2}{2} \end{pmatrix}$$

y

$$\frac{1}{6}\Gamma_0 F'''(X_0)X^3 = \Gamma_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20xyz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3xyz}{7} \\ 0 \\ -xyz \end{pmatrix}.$$

Consideramos $\|X\| = \max\{|x|, |y|, |z|\}$. *Entonces,*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left\|\Gamma_0 F''(X_0)X^2\right\| &\leq \left\{-\frac{|xy+z^2|}{5}, \frac{|xy|}{10}, \frac{|xy+z^2|}{2}\right\} \\ &\leq \max\left\{\frac{2}{5}, \frac{1}{10}, 1\right\}\|X\|^2 \leq \|X\|^2, \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\frac{1}{2}\|\Gamma_0 F''(X_0)\| \leq 1.$$

Además,

$$\frac{1}{6}\left\|\Gamma_0 F'''(X_0)X^3\right\| = \max\left\{\frac{3|xyz|}{7}, 0, |xyz|\right\} \leq \|X\|^3,$$

y, por lo tanto,

$$\frac{1}{6}\|\Gamma_0 F'''(X_0)\| \leq 1.$$

De aquí, como $F^{(k)}(X) = 0\ \forall k \geq 4$, *obtenemos* γ *como sigue:*

$$\gamma = \sup_{k\geq 2}\left(\frac{1}{k!}\left\|\Gamma_0 F^{(k)}(X_0)\right\|\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

$$= \text{máx}\left\{\frac{1}{2}\left\|\Gamma_0 F''(X_0)\right\|, \left(\frac{1}{6}\left\|\Gamma_0 F'''(X_0)\right\|\right)^{\frac{1}{2}}\right\} = 1.$$

Por otra parte,

$$\beta = \|\Gamma_0 F(X_0)\| = \left\|\left(\frac{3}{20}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20}\right)\right\| = \frac{3}{20}.$$

Como $\alpha = \beta\gamma = \frac{3}{20} = 0.15 < 3 - 2\sqrt{2} \approx 0.171573$*, se tiene que existe una solución* X^* *del sistema y además* $X^* \in B(X_0, t^*)$*, siendo* t^* *la menor raíz positiva de la función mayorizante*

$$\phi(t) = \beta - t + \frac{\gamma t^2}{1 - \gamma t} = \frac{3}{20} - t + \frac{t^2}{1 - t},$$

es decir, $t^* = \frac{1}{5}$*. Además, la solución es única en* $B(X_0, t^{**})$*, donde* $t^{**} = \frac{3}{8}$*, es la otra raíz de* $\phi(t)$*.*

Notemos que los resultados obtenidos son coherentes con los obtenidos al utilizar el programa de cálculo simbólico MATHEMATICA, ya que nos da las siguientes soluciones del sistema

$$\{x = -9.9776,\ y = -66.9646,\ z = 0.501163\},$$

$$\{x = -10.7337,\ y = 2.04454,\ z = -46.3576\},$$

$$\{x = -8.39831,\ y = -0.936509,\ z = 13.1072\},$$

$$\{x = 0.612956,\ y = -0.141337,\ z = -2.0702\}$$

y

$$\{x = -0.137672,\ y = -0.152094,\ z = -0.180549\}.$$

Entre ellas encontramos que nuestra solución sería

$$\{x = -0.137672,\ y = -0.152094,\ z = -0.180549\},$$

la cual está dentro de la bola $B(X_0, t^*)$*, y que además, las demás soluciones están fuera de la bola* $B(X_0, t^{**})$*, ya que la más cercana sería* $\{x = 0.612956,\ y = -0.141337,\ z = -2.0702\}$*.*

Capítulo 5

Anexos: Códigos Mathematica utilizados

En este capítulo se presentan algunos de los códigos que se han utilizado en la elaboración de la tesis, en concreto, se muestran:

1. Anexo 1. En él se realiza un estudio real completo, en el que se definen y utilizan los exponentes de Lyapunov y los diagramas de Feigenbaum, además de realizarse un estudio gráfico mediante las imágenes de las órbitas de algunos puntos.

2. Anexo 2. En este anexo se realiza un estudio de los 2-ciclos atractores que introduce el parámetro amortiguador, en el que se muestran los cálculos que se llevaron a cabo para encontrar dichos ciclos atractores. Estos ciclos aparecen para valores del parámetro $\lambda \in (0, 1)$, pero no para $\lambda = 1$ (el método de Newton).

3. Anexo 3. En este anexo se muestra cómo se han programado los gráficos de los planos de parámetros, es decir, asignación de colores, número de píxeles, número de iteraciones máximo, etcétera.

4. Anexo 4. En este último anexo se puede ver el algoritmo que se ha seguido para dibujar conjuntos de Julia por iteración inversa, una técnica no usual, que consiste en calcular las preimágenes de los puntos fijos repulsores.

Anexo 1. Estudio de la dinámica del método de Newton amortiguado aplicado a $g(x) = x^3 + x$.

Definimos la función

```
Clear[r, g, x]

g[x_] := x^3 + x

Ng[x_] := x - λ * g[x] / g'[x]

Ng'[x] // Factor // Together
```

$$\frac{1 + 6\,x^2 + 9\,x^4 - \lambda - 3\,x^4\,\lambda}{\left(1 + 3\,x^2\right)^2}$$

Calculamos los puntos fijos y sus caracteres

```
Solve[Ng[x] == x, x]
```

$$\{\{x \to 0\}, \{x \to -i\}, \{x \to i\}\}$$

Calculamos los puntos críticos y vemos para que valores existen

```
Solve[Ng'[x] == 0, x]
```

$$\left\{\left\{x \to -\sqrt{\frac{1}{-3+\lambda} - \frac{\sqrt{4\,\lambda - \lambda^2}}{\sqrt{3}\ (-3+\lambda)}}\right\}, \left\{x \to \sqrt{\frac{1}{-3+\lambda} - \frac{\sqrt{4\,\lambda - \lambda^2}}{\sqrt{3}\ (-3+\lambda)}}\right\},\right.$$

$$\left.\left\{x \to -\sqrt{\frac{1}{-3+\lambda} + \frac{\sqrt{4\,\lambda - \lambda^2}}{\sqrt{3}\ (-3+\lambda)}}\right\}, \left\{x \to \sqrt{\frac{1}{-3+\lambda} + \frac{\sqrt{4\,\lambda - \lambda^2}}{\sqrt{3}\ (-3+\lambda)}}\right\}\right\}$$

```
Reduce[{4 λ - λ^2 ≥ 0, 1/(-3 + λ) - Sqrt[4 λ - λ^2]/(Sqrt[3] (-3 + λ)) ≥ 0}, λ]
```

$$1 \le \lambda < 3 \;||\; 3 < \lambda \le 4$$

```
Reduce[{4 λ - λ^2 ≥ 0, 1/(-3 + λ) + Sqrt[4 λ - λ^2]/(Sqrt[3] (-3 + λ)) ≥ 0}, λ]
```

$3 < \lambda \leq 4$

Para λ en (1,3) dos PC y en (3,4) cuatro PC

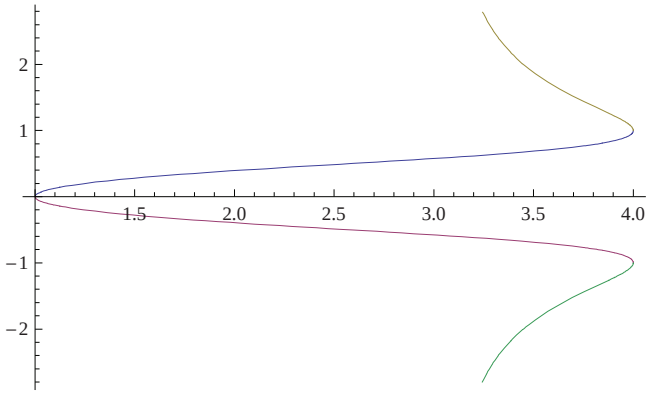
```
c1 = Sqrt[1/(-3 + λ) - Sqrt[4 λ - λ^2]/(Sqrt[3] (-3 + λ))];
```

```
c2 = -Sqrt[1/(-3 + λ) - Sqrt[4 λ - λ^2]/(Sqrt[3] (-3 + λ))];
```

```
c3 = Sqrt[1/(-3 + λ) + Sqrt[4 λ - λ^2]/(Sqrt[3] (-3 + λ))];
```

```
c4 = -Sqrt[1/(-3 + λ) + Sqrt[4 λ - λ^2]/(Sqrt[3] (-3 + λ))];
```

```
Plot[{c1, c2, c3, c4}, {λ, 1, 4}]
```



Calculamos los 2-ciclos

```
Reduce[{Ng[x] ≠ x, Ng[Ng[x]] == x, Im[λ] == 0, -1 ≤ Ng'[x] * Ng'[Ng[x]] ≤ 1}, x, Reals]
```

$2 < \lambda < 6 \;\&\&\; \left(x == -\sqrt{\frac{2-\lambda}{-6+\lambda}} \;||\; x == \sqrt{\frac{2-\lambda}{-6+\lambda}}\right)$

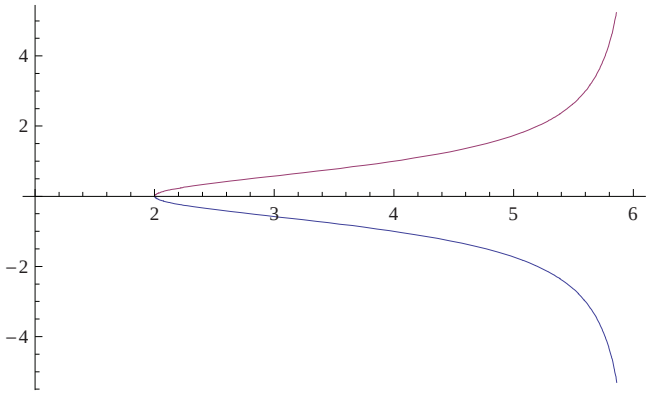
```
a1 = -Sqrt[(2 - λ)/(-6 + λ)];
```

```
a2 = Sqrt[(2 - λ)/(-6 + λ)];
```

```
Reduce[{Ng'[a1] * Ng'[a2] < 1, Ng'[a1] * Ng'[a2] > -1, λ ≥ 2, λ < 6}, λ]
```

$2 < \lambda < 6$

```
Plot[{a1, a2}, {λ, 1, 6}]
```



- **El único 2 ciclo atractor es a1-a2, que son las raíces de $-2+\lambda+(\lambda-6)\,x^2=0$ para valores de λ en (2,6)**

Vamos a ver las bifurcaciones

```
Orbit[map_, x0_, n_] := NestList[map, x0, n];
IterativeProcess[map_, x0_, {min_, max_}] := Module[{fr, orb}, orb = Orbit[map, x0, 50];
  fr = MapThread[Line[{{#1, #1}, {#1, #2}, {#2, #2}}] &, {Drop[orb, -1], Drop[orb, 1]}];
  Show[Plot[{map[x], x}, {x, min, max}], Graphics[{fr}]]]
```

```
Bifurcation[map_, {p_, pi_, pf_, np_}, n_] :=
 Module[{pp}, ListPlot[Flatten[Table[({pp, #}) & /@
      Drop[Orbit[map /. p → pp][0.5, n + 50], 50], {pp, pi, pf, (pf - pi) / np}], 1],
   Axes → False, Frame → True, PlotStyle → {PointSize[0.003]}]]
```

```
LyapunovExp[map_, x0_, n_] := Plus @@
   (Function[x, Evaluate[Log[Abs[D[map[x], x]]]] /@ Drop[Orbit[map, x0, n + 500], 500]) / n
```

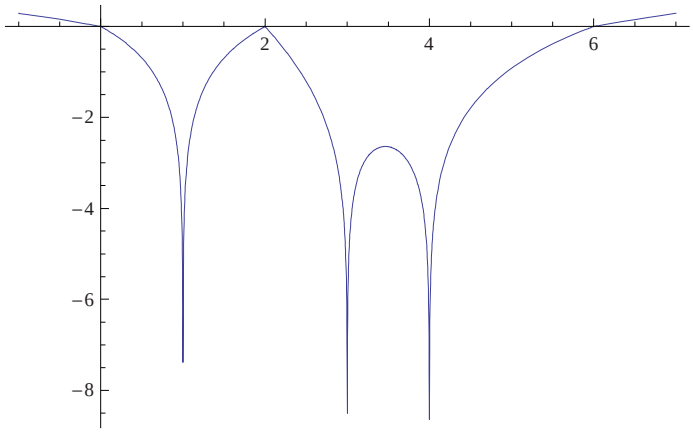
```
Clear[f, λ]
```

```
Bifurcation[map_, {p_, pi_, pf_, np_}, n_] :=
 Module[{pp}, ListPlot[Flatten[Table[({pp, #}) & /@
      Drop[Orbit[map /. p → pp][0.5, n + 50], 50], {pp, pi, pf, (pf - pi) / np}], 1],
   Axes → False, Frame → True, PlotStyle → {PointSize[0.003]}]]
```

```
LyapunovExp[map_, x0_, n_] := Plus @@
   (Function[x, Evaluate[Log[Abs[D[map[x], x]]]] /@ Drop[Orbit[map, x0, n + 500], 500]) / n
```

```
NN[λ_] := Function[x, x - λ * g[x] / g'[x]];
```

```
Plot[LyapunovExp[NN[λ], c1, 500], {λ, -1, 7}]
```




```
Ng[x] // Together // Factor
```

$$-\frac{x\left(-1-3x^2+\lambda+x^2\lambda\right)}{1+3x^2}$$

```
Clear[λ]
```

```
c2
```

$$-\sqrt{\frac{1}{-3+\lambda}-\frac{\sqrt{4\lambda-\lambda^2}}{\sqrt{3}\ (-3+\lambda)}}$$

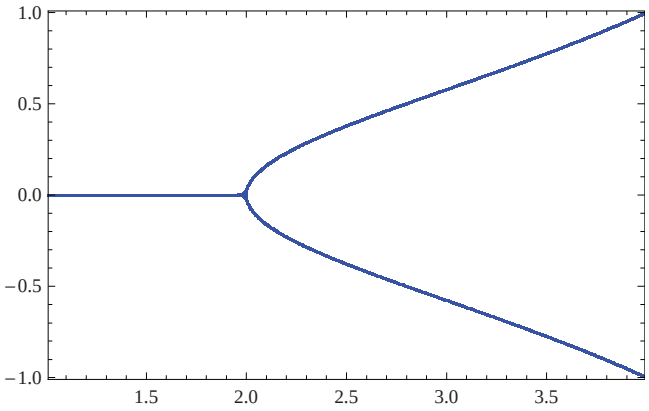
Y ahora el diagrama de Feigenbaum

```
(*  λ es el parametro   *)
Clear[f,x,λ,firstIt,iterates,seed,pmin,pmax,γ,psteps,step,bifurcList,data];
f = Compile[{{x,_Real},{λ,_Real}},-(x (-1 - 3 x^2 + λ + x^2 λ))/(1 + 3 x^2)];
(* firstIt es el primer iterado mostrado,
    iterates es el número maximo de iteraciones
    que calculados después de firstIt,
    condición inicial de partida. *)
firstIt = 100;
iterates = 500;
seed = c2;
(*  pmin y pmax define las cotas del parámetro,
        psteps es el numero de valores del  parametro usados.  *)
pmin =  1.01; pmax =  3.99; psteps = 1000; λ = N[pmin];
step = N[(pmax - pmin)/psteps];
bifurcList[λ_] := Module[
    {startPoint = Nest[f[#,λ]&,seed,firstIt]},
    Map[{λ,#}&, FixedPointList[f[#,λ]&, startPoint, iterates,SameTest -> (#2 == startPoir
Timing[data =   Partition[Flatten[Table[bifurcList[t],{t,pmin,pmax,N[(pmax-pmin)/psteps]}
Length[data]
```

```
{1.344, Null}
```

```
195 729
```

```
(*  verticalMin and verticalMax define
    las cotas de ploteo.  *)

verticalMin =  -1.01;
verticalMax =  1.01;

feigen1=
    ListPlot[data,
        PlotRange -> {{pmin,pmax},{verticalMin,verticalMax}},
        AxesOrigin->{pmin,verticalMin},
        PlotStyle->{RGBColor[0,0,1],PointSize[.00001]},
        Frame -> True]
```



Vamos a calcular ahora las órbitas

```
Clear[λ]
```

$$\texttt{Orbita}[\lambda_] := \texttt{Function}\left[x, -\frac{x\left(-1+\lambda-3x^2+\lambda x^2\right)}{1+3x^2}\right];$$

```
C1 = c1 /. λ → 1.5;

NestList[Orbita[1.5], C1, 10000]
```

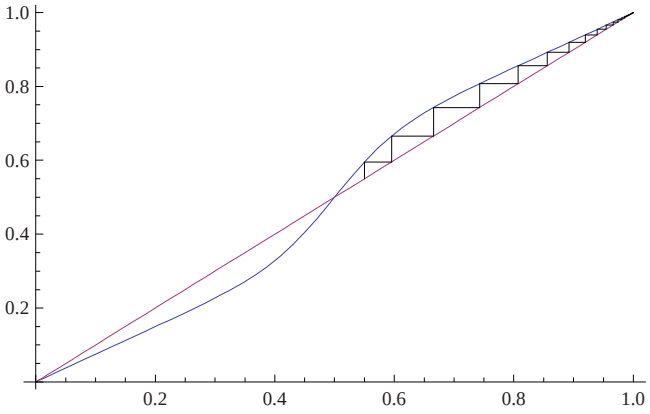
A very large output was generated. Here is a sample of it:

```
{0.280516, -0.0866843, 0.0414311, -0.0205033, 0.0102258,
 -0.00510971, 0.00255445, -0.00127718, 0.000638582, -0.00031929,
 0.000159645, -0.0000798225, 0.0000399112, -0.0000199556, 9.97781×10^-6,
 <<9972>>, -6.712565764567672×10^-3008, 3.356282882283836×10^-3008,
 -1.678141441141918×10^-3008, 8.390707205709589×10^-3009, -4.195353602854795×10^-3009,
 2.097676801427397×10^-3009, -1.048838400713699×10^-3009, 5.244192003568493×10^-3010,
 -2.622096001784247×10^-3010, 1.311048000892123×10^-3010, -6.555240004460617×10^-3011,
 3.277620002230308×10^-3011, -1.638810001115154×10^-3011, 8.194050005575771×10^-3012}
```

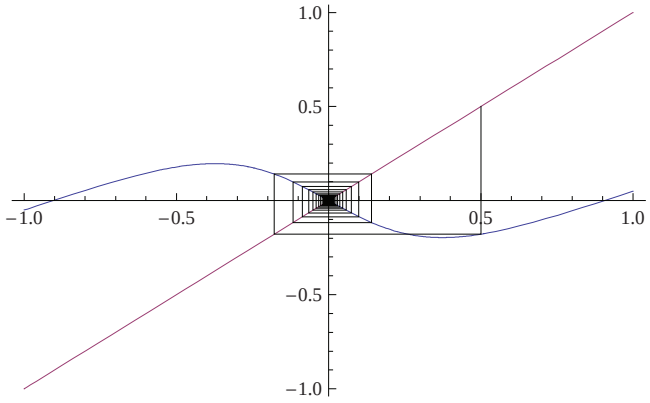
Show Less | Show More | Show Full Output | Set Size Limit...

Dibujos de Órbitas

```
Compactificacion[λ_] := Function[x, (π - 2 ArcTan[Cot[π x] + λ (-Cot[π x] - Cot[π x]^3) / (1 + 3 Cot[π x]^2)]) / (2 π)];

Orbit[map_, x0_, n_] := NestList[map, x0, 50];
IterativeProcess[map_, x0_, {min_, max_}] := Module[{fr, orb}, orb = Orbit[map, x0, 1];
  fr = MapThread[Line[{{#1, #1}, {#1, #2}, {#2, #2}}] &, {Drop[orb, -1], Drop[orb, 1]}];
  Show[Plot[{map[x], x}, {x, min, max}], Graphics[{fr}]]]

IterativeProcess[Compactificacion[-1.0], 0.55, {0, 1}]
```




```
IterativeProcess[Orbita[1.9], 0.5, {-1, 1}]
```



Anexo 2. 2-ciclos que aparecen en el método de Newton amortiguado aplicado a $g(x) = x^3 + \gamma x + 1$ y que no aparecen en el método de Newton.

```
Clear[λ, g, x, γ]

g[x_] := x^3 + γ * x + 1

Ng[x_] := x - λ * g[x] / g'[x]; Newton[x_] := x - g[x] / g'[x] // Factor

Reduce[{Newton[Newton[x]] - x ≠ 0, g[x] ≠ 0,
   Ng[Ng[x]] == x, 0 < λ < 1, Im[x] == 0, -1 < Ng'[x] * Ng'[Ng[x]] < 1}, x] // N
```

$$
\begin{aligned}
&\Big(-1.27416 < \gamma \le -1.25315 \;\&\&\\
&\quad \text{Root}\Big[518\,400\,\gamma^3 - 1\,503\,360\,\gamma^3\,\#1 + \left(666\,792 + 1\,980\,576\,\gamma^3\right)\#1^2 + \left(-1\,587\,600 - 1\,563\,168\,\gamma^3\right)\#1^3 +\\
&\qquad \left(1\,632\,204 + 819\,824\,\gamma^3\right)\#1^4 + \left(-945\,432 - 299\,040\,\gamma^3\right)\#1^5 + \left(337\,122 + 76\,944\,\gamma^3\right)\#1^6 +\\
&\qquad \left(-75\,708 - 13\,808\,\gamma^3\right)\#1^7 + \left(10\,449 + 1656\,\gamma^3\right)\#1^8 + \left(-810 - 120\,\gamma^3\right)\#1^9 + \left(27 + 4\,\gamma^3\right)\#1^{10}\,\&,\, 2\Big] <\\
&\quad \lambda < 1.\;\&\&\; \Big(x == \text{Root}\Big[-3\,\lambda^2 + \lambda^3 - 2\,\gamma^3 + \lambda\,\gamma^3 + \left(6\,\lambda\,\gamma - 9\,\lambda^2\,\gamma + 2\,\lambda^3\,\gamma\right)\#1 +\\
&\qquad \left(-18\,\gamma^2 + 15\,\lambda\,\gamma^2 - 6\,\lambda^2\,\gamma^2 + \lambda^3\,\gamma^2\right)\#1^2 + \left(18\,\lambda - 15\,\lambda^2 + 2\,\lambda^3\right)\#1^3 +\\
&\qquad \left(-54\,\gamma + 51\,\lambda\,\gamma - 18\,\lambda^2\,\gamma + 2\,\lambda^3\,\gamma\right)\#1^4 + \left(-54 + 45\,\lambda - 12\,\lambda^2 + \lambda^3\right)\#1^6\,\&,\, 1\Big] \;||\\
&\quad\; x == \text{Root}\Big[-3\,\lambda^2 + \lambda^3 - 2\,\gamma^3 + \lambda\,\gamma^3 + \left(6\,\lambda\,\gamma - 9\,\lambda^2\,\gamma + 2\,\lambda^3\,\gamma\right)\#1 +\\
&\qquad \left(-18\,\gamma^2 + 15\,\lambda\,\gamma^2 - 6\,\lambda^2\,\gamma^2 + \lambda^3\,\gamma^2\right)\#1^2 + \left(18\,\lambda - 15\,\lambda^2 + 2\,\lambda^3\right)\#1^3 +\\
&\qquad \left(-54\,\gamma + 51\,\lambda\,\gamma - 18\,\lambda^2\,\gamma + 2\,\lambda^3\,\gamma\right)\#1^4 + \left(-54 + 45\,\lambda - 12\,\lambda^2 + \lambda^3\right)\#1^6\,\&,\, 2\Big]\Big) \;||\\
&\Big(-1.25315 < \gamma < 0.\;\&\&\; \text{Root}\Big[518\,400\,\gamma^3 - 1\,503\,360\,\gamma^3\,\#1 + \left(666\,792 + 1\,980\,576\,\gamma^3\right)\#1^2 +\\
&\qquad \left(-1\,587\,600 - 1\,563\,168\,\gamma^3\right)\#1^3 + \left(1\,632\,204 + 819\,824\,\gamma^3\right)\#1^4 +\\
&\qquad \left(-945\,432 - 299\,040\,\gamma^3\right)\#1^5 + \left(337\,122 + 76\,944\,\gamma^3\right)\#1^6 + \left(-75\,708 - 13\,808\,\gamma^3\right)\#1^7 +\\
&\qquad \left(10\,449 + 1656\,\gamma^3\right)\#1^8 + \left(-810 - 120\,\gamma^3\right)\#1^9 + \left(27 + 4\,\gamma^3\right)\#1^{10}\,\&,\, 2\Big] <\\
&\quad \lambda < \text{Root}\Big[6912\,\gamma^3 - 10\,368\,\gamma^3\,\#1 + \left(8748 + 6912\,\gamma^3\right)\#1^2 + \left(-8748 - 2592\,\gamma^3\right)\#1^3 +\\
&\qquad \left(3159 + 576\,\gamma^3\right)\#1^4 + \left(-486 - 72\,\gamma^3\right)\#1^5 + \left(27 + 4\,\gamma^3\right)\#1^6\,\&,\, 2\Big]\;\&\&\\
&\quad \Big(x == \text{Root}\Big[-3\,\lambda^2 + \lambda^3 - 2\,\gamma^3 + \lambda\,\gamma^3 + \left(6\,\lambda\,\gamma - 9\,\lambda^2\,\gamma + 2\,\lambda^3\,\gamma\right)\#1 + \left(-18\,\gamma^2 + 15\,\lambda\,\gamma^2 - 6\,\lambda^2\,\gamma^2 + \lambda^3\,\gamma^2\right)\#1^2 +\\
&\qquad \left(18\,\lambda - 15\,\lambda^2 + 2\,\lambda^3\right)\#1^3 + \left(-54\,\gamma + 51\,\lambda\,\gamma - 18\,\lambda^2\,\gamma + 2\,\lambda^3\,\gamma\right)\#1^4 +\\
&\qquad \left(-54 + 45\,\lambda - 12\,\lambda^2 + \lambda^3\right)\#1^6\,\&,\, 1\Big] \;||\; x == \text{Root}\Big[-3\,\lambda^2 + \lambda^3 - 2\,\gamma^3 + \lambda\,\gamma^3 +\\
&\qquad \left(6\,\lambda\,\gamma - 9\,\lambda^2\,\gamma + 2\,\lambda^3\,\gamma\right)\#1 + \left(-18\,\gamma^2 + 15\,\lambda\,\gamma^2 - 6\,\lambda^2\,\gamma^2 + \lambda^3\,\gamma^2\right)\#1^2 + \left(18\,\lambda - 15\,\lambda^2 + 2\,\lambda^3\right)\#1^3 +\\
&\qquad \left(-54\,\gamma + 51\,\lambda\,\gamma - 18\,\lambda^2\,\gamma + 2\,\lambda^3\,\gamma\right)\#1^4 + \left(-54 + 45\,\lambda - 12\,\lambda^2 + \lambda^3\right)\#1^6\,\&,\, 3\Big]\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

Caso 1: $\gamma \in$(-1.27416,-1.25315]

```
P1[t_] :=
 518 400 ɣ^3 - 1 503 360 ɣ^3 t + (666 792 + 1 980 576 ɣ^3) t^2 + (-1 587 600 - 1 563 168 ɣ^3) t^3
+ (1 632 204 + 819 824 ɣ^3) t^4 + (-945 432 - 299 040 ɣ^3) t^5 + (337 122 + 76 944 ɣ^3) t^6 +
  (-75 708 - 13 808 ɣ^3) t^7 + (10 449 + 1656 ɣ^3) t^8 + (-810 - 120 ɣ^3) t^9 + (27 + 4 ɣ^3) t^10;

DC[t_] := -3 λ^2 + λ^3 - 2 ɣ^3 + λ ɣ^3 + (6 λ ɣ - 9 λ^2 ɣ + 2 λ^3 ɣ) t
+ (-18 ɣ^2 + 15 λ ɣ^2 - 6 λ^2 ɣ^2 + λ^3 ɣ^2) t^2 + (18 λ - 15 λ^2 + 2 λ^3) t^3
+ (-54 ɣ + 51 λ ɣ - 18 λ^2 ɣ + 2 λ^3 ɣ) t^4 + (-54 + 45 λ - 12 λ^2 + λ^3) t^6;

t^3 (18 λ - 15 λ^2 + 2 λ^3) + t^2 (-18 ɣ^2 + 15 λ ɣ^2 - 6 λ^2 ɣ^2 + λ^3 ɣ^2)

ɣ = -1.26;

Reduce[{P1[t] == 0, Im[t] == 0}]

t == 0.728197

λ = 0.99;

Reduce[{DC[t] == 0, Im[t] == 0}]

t == -0.0425216
```

Caso 2: $\gamma \in$(-1.25315,0)

```
Clear[ɣ, λ, t]

P2[t_] := 6912 ɣ^3 - 10 368 ɣ^3 t + (8748 + 6912 ɣ^3) t^2 + (-8748 - 2592 ɣ^3) t^3
+ (3159 + 576 ɣ^3) t^4 + (-486 - 72 ɣ^3) t^5 + (27 + 4 ɣ^3) t^6;

DC2[t_] := -3 λ^2 + λ^3 - 2 ɣ^3 + λ ɣ^3 + (6 λ ɣ - 9 λ^2 ɣ + 2 λ^3 ɣ) t
+ (-18 ɣ^2 + 15 λ ɣ^2 - 6 λ^2 ɣ^2 + λ^3 ɣ^2) t^2 + (18 λ - 15 λ^2 + 2 λ^3) t^3
+ (-54 ɣ + 51 λ ɣ - 18 λ^2 ɣ + 2 λ^3 ɣ) t^4 + (-54 + 45 λ - 12 λ^2 + λ^3) t^6;

t^3 (18 λ - 15 λ^2 + 2 λ^3) + t^2 (-18 ɣ^2 + 15 λ ɣ^2 - 6 λ^2 ɣ^2 + λ^3 ɣ^2)

ɣ = -1.;

Reduce[{P1[t] == 0, Im[t] == 0}] // N

t == -54.9009

Reduce[{P2[t] == 0, Im[t] == 0}] // N

t == -1.42946
```

$\lambda \in$(0.734243,0.746483)

```
λ = 0.74;

Reduce[{DC2[t] == 0, Im[t] == 0}]

t == 0.0696294
```

Anexo 3. Planos de parámetros asociados a los puntos críticos del método de Newton amortiguado aplicado a p(z) = (z-1)(z+1).

Definimos la función y los puntos críticos

```
p = Compile[{{z, _Complex}}, (z - 1) (z + 1)]
```

```
CompiledFunction[{z}, (z - 1) (z + 1), -CompiledCode-]
```

```
dp = Compile[{{z, _Complex}}, 2 z]
```

```
CompiledFunction[{z}, 2 z, -CompiledCode-]
```

```
iterNewtonLamda = Compile[{{z, _Complex}, {λ, _Complex}}, z - λ * p[z] / dp[z]]
```

$$\text{CompiledFunction}\left[\{z, \lambda\}, z - \frac{\lambda\, p[z]}{dp[z]}, -\text{CompiledCode}-\right]$$

$$\text{PC1} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2-\lambda}};$$

$$\text{PC2} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2-\lambda}};$$

Definimos las raíces de la función y la posición que se les otorga

```
rootf[1] = 1;
rootf[2] = -1;
```

```
rootPosition = Compile[{{z, _Complex}},
  Which[Abs[z - rootf[1]] < 10.0^(-6), 2,
       Abs[z - rootf[2]] < 10.0^(-6), 1,
       Abs[z ] > 10.0^(6), 3,
      True, 0],
  {{rootf[_], _Complex}}
]
```

```
CompiledFunction[{z}, Which[Abs[z - rootf[1]] < 1. × 10^-6, 2,
  Abs[z - rootf[2]] < 1. × 10^-6, 1, Abs[z] > 1. × 10^6, 3, True, 0], -CompiledCode-]
```

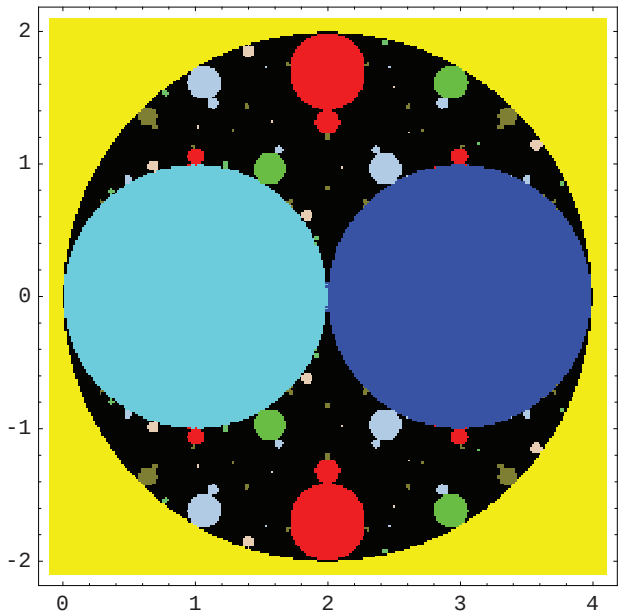
PC1

```
Clear[iterColorAlgorithm, fractalColor, plotColorFractal]

iterColorAlgorithm[iterMethod_, x_, y_, lim_] :=
  Block[{z6, z7, z8, z, z5, z4, z3, z1, z2, λ, kt, ct, r},
  z = PC1; λ = x + y I; kt = 0; ct = 0; r = rootPosition[z];
    While[(r == 0) && (ct < lim / 4), ++ct; z = iterMethod[z, λ]; r = rootPosition[z];];
  If[r == 0, z1 = iterMethod[z, λ]; z2 = iterMethod[z1, λ];
    If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 5, z2 = iterMethod[z2, λ];
     If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 6, z2 = iterMethod[z2, λ];
      If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 7, z2 = iterMethod[z2, λ];
       If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 8, z2 = iterMethod[z2, λ];
        If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 9, z2 = iterMethod[z2, λ];
         If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 10, z2 = iterMethod[z2, λ];
          If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 11]]]]]]]]]
    While[(r == 0) && (ct < lim / 2), ++ct; z = iterMethod[z, λ]; r = rootPosition[z];];
  If[r == 0, z1 = iterMethod[z, λ]; z2 = iterMethod[z1, λ];
    If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 5, z2 = iterMethod[z2, λ];
     If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 6, z2 = iterMethod[z2, λ];
      If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 7, z2 = iterMethod[z2, λ];
       If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 8, z2 = iterMethod[z2, λ];
        If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 9, z2 = iterMethod[z2, λ];
         If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 10, z2 = iterMethod[z2, λ];
          If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 11]]]]]]]]]
   While[(r == 0) && (ct < 3 * lim / 4), ++ct; z = iterMethod[z, λ]; r = rootPosition[z];];
  If[r == 0, z1 = iterMethod[z, λ]; z2 = iterMethod[z1, λ];
    If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 5, z2 = iterMethod[z2, λ];
     If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 6, z2 = iterMethod[z2, λ];
      If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 7, z2 = iterMethod[z2, λ];
       If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 8, z2 = iterMethod[z2, λ];
        If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 9, z2 = iterMethod[z2, λ];
         If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 10, z2 = iterMethod[z2, λ];
          If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 11]]]]]]]]]
   While[(r == 0) && (ct < lim), ++ct; z = iterMethod[z, λ]; r = rootPosition[z];];
  If[r == 0, z1 = iterMethod[z, λ]; z2 = iterMethod[z1, λ];
    If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 5, z2 = iterMethod[z2, λ];
     If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 6, z2 = iterMethod[z2, λ];
      If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 7, z2 = iterMethod[z2, λ];
       If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 8, z2 = iterMethod[z2, λ];
        If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 9, z2 = iterMethod[z2, λ];
         If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 10, z2 = iterMethod[z2, λ];
          If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 11]]]]]]]]]
   If[Head[r] == Which, r = 0]; (* "Which" unevaluated *)
   Return[N[r + ct / (lim + 0.001)]]
  ]
```

```
fractalColor[p_] :=
  Block[{pp = 0},
    Switch[IntegerPart[11 p],
               4, CMYKColor[1., 1., 1., pp],
              11, CMYKColor[0.5, 0.5, 1., pp],
               10, CMYKColor[1, 0, 0.5, pp],
               9, CMYKColor[0.3, 0.2, 0.1, pp],
               8, CMYKColor[0.1, 0.2, 0.3, pp],
               7, CMYKColor[0., 1., 1., pp],
               6, CMYKColor[1., 0.0, 1., pp],
               5, CMYKColor[1., 1., 0., pp],
               3, CMYKColor[0., 0.0, 1., pp],
               2, CMYKColor[0., 1., 0., pp],
               1, CMYKColor[1., 0., 0.0, pp],
               0, CMYKColor[0., 0., 0., 1.]
    ]
  ]

plotColorFractal[iterMethod_, points_] :=
    DensityPlot[iterColorAlgorithm[iterMethod, x, y, limIterations],
             {x, xxMin, xxMax}, {y, yyMin, yyMax},
             PlotRange -> {0, 11}, PlotPoints -> points, Mesh -> False,
             ColorFunction -> fractalColor
        ] // Timing
```

Plano de parámetros

```
numberPoints = 256; limIterations = 10 000;
xxMin = -0.1; xxMax = 4.1; yyMin = -2.1; yyMax = 2.1;
Off[General::ovfl];  Off[General::unfl];  Off[Infinity::indet]
Off[CompiledFunction::cccx];  Off[CompiledFunction::cfn];
Off[CompiledFunction::cfcx];  Off[CompiledFunction::cfex];
Off[CompiledFunction::crcx];  Off[CompiledFunction::cfse];
Off[CompiledFunction::ilsm];  Off[CompiledFunction::cfsa];
plotColorFractal[iterNewtonLamda, numberPoints]
```




```
{5195.27 Second, - DensityGraphics -}
```

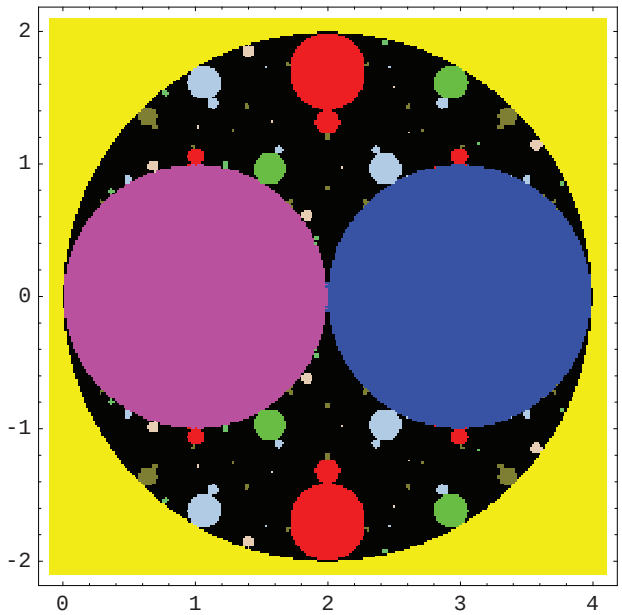
PC2

```
Clear[iterColorAlgorithm, colorLevel, fractalColor, plotColorFractal]

iterColorAlgorithm[iterMethod_, x_, y_, lim_] :=
  Block[{z6, z7, z8, z, z5, z4, z3, z1, z2, λ, kt, ct, r},
  z = PC2; λ = x + y I; kt = 0; ct = 0; r = rootPosition[z];
    While[(r == 0) && (ct < lim / 4), ++ct;
    z = iterMethod[z, λ];
    r = rootPosition[z];
        ];
  If[r == 0, z1 = iterMethod[z, λ]; z2 = iterMethod[z1, λ];
    If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 5, z2 = iterMethod[z2, λ];
     If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 6, z2 = iterMethod[z2, λ];
      If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 7, z2 = iterMethod[z2, λ];
       If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 8, z2 = iterMethod[z2, λ];
        If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 9, z2 = iterMethod[z2, λ];
         If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 10, z2 = iterMethod[z2, λ];
          If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 11]]]]]]]]]
    While[(r == 0) && (ct < lim / 2), ++ct; z = iterMethod[z, λ]; r = rootPosition[z];];
  If[r == 0, z1 = iterMethod[z, λ]; z2 = iterMethod[z1, λ];
    If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 5, z2 = iterMethod[z2, λ];
     If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 6, z2 = iterMethod[z2, λ];
      If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 7, z2 = iterMethod[z2, λ];
       If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 8, z2 = iterMethod[z2, λ];
        If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 9, z2 = iterMethod[z2, λ];
         If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 10, z2 = iterMethod[z2, λ];
          If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 11]]]]]]]]]
   While[(r == 0) && (ct < 3 * lim / 4), ++ct; z = iterMethod[z, λ]; r = rootPosition[z];];
  If[r == 0, z1 = iterMethod[z, λ]; z2 = iterMethod[z1, λ];
    If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 5, z2 = iterMethod[z2, λ];
     If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 6, z2 = iterMethod[z2, λ];
      If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 7, z2 = iterMethod[z2, λ];
       If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 8, z2 = iterMethod[z2, λ];
        If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 9, z2 = iterMethod[z2, λ];
         If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 10, z2 = iterMethod[z2, λ];
          If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 11]]]]]]]]]
   While[(r == 0) && (ct < lim), ++ct; z = iterMethod[z, λ]; r = rootPosition[z];];
  If[r == 0, z1 = iterMethod[z, λ]; z2 = iterMethod[z1, λ];
    If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 5, z2 = iterMethod[z2, λ];
     If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 6, z2 = iterMethod[z2, λ];
      If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 7, z2 = iterMethod[z2, λ];
       If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 8, z2 = iterMethod[z2, λ];
        If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 9, z2 = iterMethod[z2, λ];
         If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 10, z2 = iterMethod[z2, λ];
          If[Abs[z2 - z] < 10^(-6), r = 11]]]]]]]]]
   If[Head[r] == Which, r = 0]; (* "Which" unevaluated *)
   Return[N[r + ct / (lim + 0.001)]]
  ]
```

```
fractalColor[p_] :=
  Block[{pp = 0},
    Switch[IntegerPart[11 p],
               4, CMYKColor[1., 1., 1., pp],
              11, CMYKColor[0.5, 0.5, 1., pp],
               10, CMYKColor[1, 0, 0.5, pp],
               9, CMYKColor[0.3, 0.2, 0.1, pp],
               8, CMYKColor[0.1, 0.2, 0.3, pp],
               7, CMYKColor[0., 1., 1., pp],
               6, CMYKColor[1., 0.0, 1., pp],
               5, CMYKColor[1., 1., 0., pp],
               3, CMYKColor[0., 0.0, 1., pp],
               2, CMYKColor[0., 1., 0., pp],
               1, CMYKColor[1., 0., 0.0, pp],
               0, CMYKColor[0., 0., 0., 1.]
    ]
  ]

plotColorFractal[iterMethod_, points_] :=
    DensityPlot[iterColorAlgorithm[iterMethod, x, y, limIterations],
             {x, xxMin, xxMax}, {y, yyMin, yyMax},
             PlotRange -> {0, 11}, PlotPoints -> points, Mesh -> False,
             ColorFunction -> fractalColor
        ] // Timing
```

Plano de parámetros

```
numberPoints = 256; limIterations = 10 000;
xxMin = -0.1; xxMax = 4.1; yyMin = -2.1; yyMax = 2.1;
Off[General::ovfl];  Off[General::unfl];  Off[Infinity::indet]
Off[CompiledFunction::cccx];  Off[CompiledFunction::cfn];
Off[CompiledFunction::cfcx];  Off[CompiledFunction::cfex];
Off[CompiledFunction::crcx];  Off[CompiledFunction::cfse];
Off[CompiledFunction::ilsm];  Off[CompiledFunction::cfsa];
plotColorFractal[iterNewtonLamda, numberPoints]
```




```
{6372.02 Second, - DensityGraphics -}
```

Anexo 4. Dibujo de conjuntos de Julia, por iteración inversa, asociados al método de Newton amortiguado aplicado a p(z)=(z-a)(z-b). Conjuntos de Cantor.

- **Definimos la función racional**

```
Clear[λ]

p[z_] := (z - a) (z - b); Np[z_] := z - λ * p[z] / p'[z] // Simplify

moeb[z_] := (z - a) / (z - b); invmoeb[z_] := (b * z - a) / (z - 1);
S[z_] = moeb[Np[invmoeb[z]]] // Simplify
```

$$\frac{z\,(1+z-\lambda)}{1+z-z\,\lambda}$$

- **Llamamos 1-λ=α**

```
Clear[α]

Sp[z_] := z (α + z) / (1 + α * z); Sp'[z] // Together // Simplify
```

$$\frac{2\,z+\alpha+z^2\,\alpha}{(1+z\,\alpha)^2}$$

```
moeb2[z_] := Sqrt[2] / Sqrt[α - 1] * (z + 1) / (z - 1);
invmoeb2[z_] := (z + Sqrt[2] / Sqrt[α - 1]) / (z - Sqrt[2] / Sqrt[α - 1]);
T[z_] := moeb2[Sp[invmoeb2[z]]] // Together
```

- **Puntos fijos y su carácter**

```
Solve[T[z] == z, z]
```

$$\left\{\left\{z \to -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-1+\alpha}}\right\}, \left\{z \to \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-1+\alpha}}\right\}\right\}$$

```
T'[Sqrt[2]/Sqrt[-1+α]] // Simplify
```

$$\alpha$$

```
T'[-Sqrt[2]/Sqrt[-1+α]] // Simplify
```

$$\alpha$$

```
Tinf[z_] = 1 / T[1 / z] // Simplify
```

$$\frac{2\,z}{1-2\,z^2+\alpha}$$

```
Tinf'[0]
```

$$\frac{2}{1+\alpha}$$

Método para dibujar conjuntos de Julia por iteración inversa

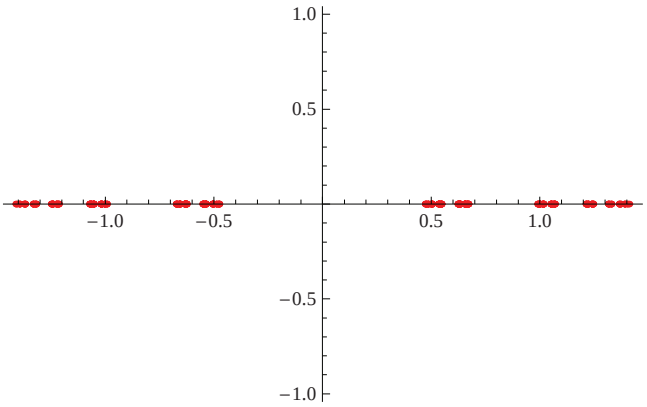
Lo que hace la orden random es tomar una de las dos definiciones, para la función prueba, con probabilidad 0.5.

La inversa es:

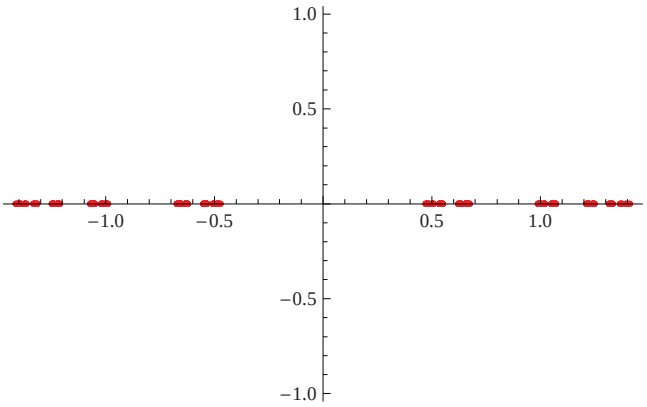
$$\frac{z-\sqrt{z^2+2\,(\alpha+1)}}{(\alpha+1)}$$

■ Julia para α=2

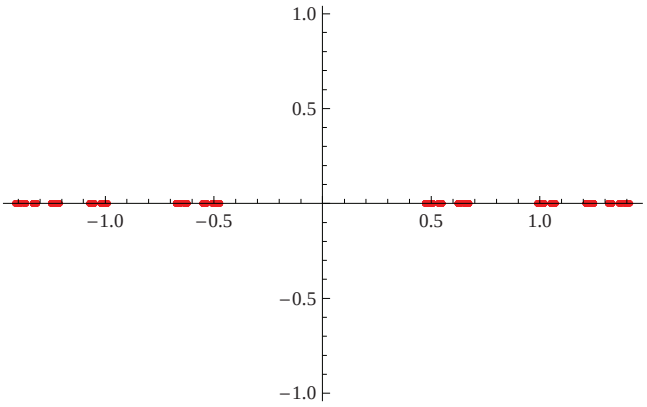
```
α = 2.; inverseJulia[z_] := (z - Sqrt[z^2 + 2 (α + 1)]) / (α + 1) /; Random[] < 0.5;
inverseJulia[z_] := (z + Sqrt[z^2 + 2 (α + 1)]) / (α + 1);

puntos1 = NestList[inverseJulia, Sqrt[2] / Sqrt[-1 + α], 1000];

puntos2 = Table[{puntos1[[k]], 0}, {k, 1, 1000}];
dib1 = ListPlot[puntos2, PlotStyle → {PointSize[0.01], RGBColor[1, 0, 0]}]
```




```
α = 2.; inverseJulia[z_] := (z - Sqrt[z^2 + 2 (α + 1)]) / (α + 1) /; Random[] < 0.5;
inverseJulia[z_] := (z + Sqrt[z^2 + 2 (α + 1)]) / (α + 1);

puntos1 = NestList[inverseJulia, -Sqrt[2] / Sqrt[-1 + α], 1000];

puntos2 = Table[{puntos1[[k]], 0}, {k, 1, 1000}];
dib2 = ListPlot[puntos2, PlotStyle → {PointSize[0.01], RGBColor[1, 0, 0]}]
```

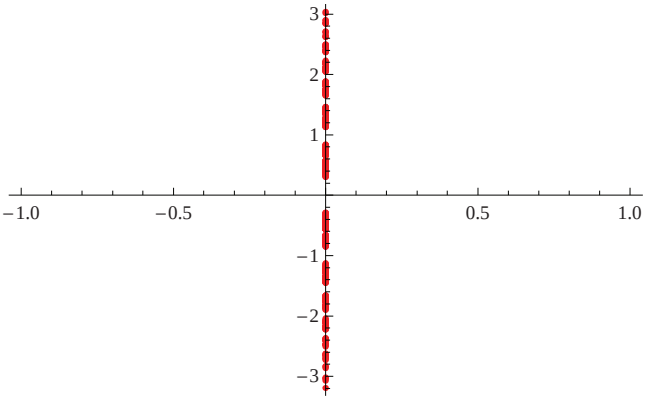


```
Show[dib1, dib2]
```

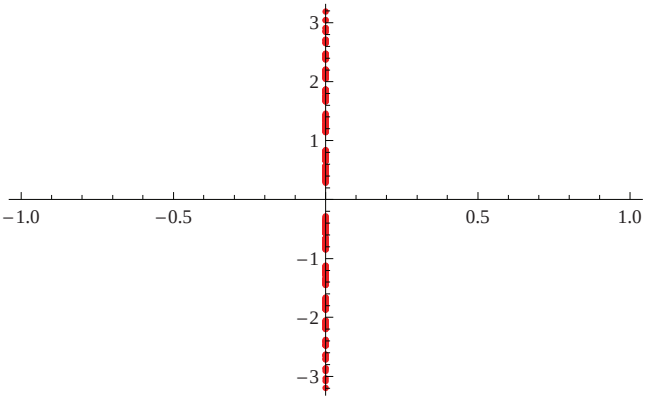


■ Julia para α=-3.1

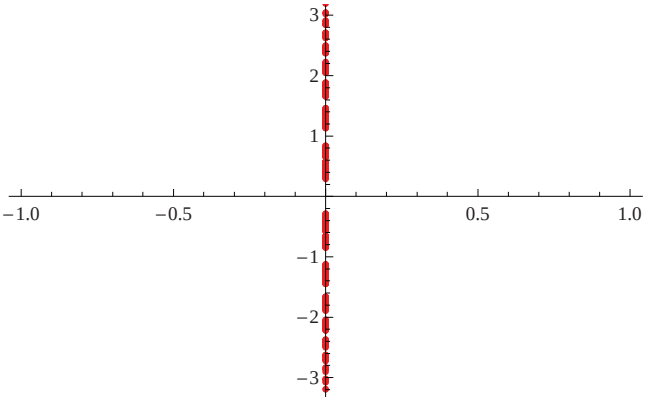
```
α = -3.1; inverseJulia[z_] := (z - Sqrt[z^2 + 2 (α + 1)]) / (α + 1) /; Random[] < 0.5;
inverseJulia[z_] := (z + Sqrt[z^2 + 2 (α + 1)]) / (α + 1);

puntos1 = Im[NestList[inverseJulia, Sqrt[2] * I / Sqrt[1 - α], 1000]];

puntos2 = Table[{0, puntos1[[k]]}, {k, 1, 1000}];
dib1 = ListPlot[puntos2, PlotStyle → {PointSize[0.01], RGBColor[1, 0, 0]}]
```



```
α = -3.1; inverseJulia[z_] := (z - Sqrt[z^2 + 2 (α + 1)]) / (α + 1) /; Random[] < 0.5;
inverseJulia[z_] := (z + Sqrt[z^2 + 2 (α + 1)]) / (α + 1);
puntos1 = Im[NestList[inverseJulia, (-Sqrt[2] * I)/Sqrt[1 - α], 1000]];
puntos2 = Table[{0, puntos1[[k]]}, {k, 1, 1000}];
dib2 = ListPlot[puntos2, PlotStyle → {PointSize[0.01], RGBColor[1, 0, 0]}]
```




```
Show[dib1, dib2]
```



Resumen de las conclusiones extraídas durante la elaboración de la tesis doctoral

Para poner el punto final a esta tesis vamos a presentar una lista de las principales conclusiones que se han extraído durante el periodo de elaboración de la misma. Vamos a dividir las conclusiones en 3 apartados diferenciados que se corresponden con los Capítulos 2, 3 y 4 de esta tesis.

Dinámica real del método de Newton amortiguado

En el Capítulo 2 se ha estudiado el comportamiento dinámico del método de Newton amortiguado para polinomios de grados 2 y 3, aparte de estudiar algunos casos seleccionados para grados superiores. Se ha observado la gran influencia que ejerce el parámetro amortiguador en la convergencia del método. Además, se han utilizado herramientas tales como diagramas de Feigenbaum y exponentes de Lyapunov que, a pesar de no ser concluyentes (si se iteran diferentes puntos pueden encontrarse distintos comportamientos), sí nos han permitido encontrar comportamientos dinámicos interesantes, tales como convergencia de órbitas a n-ciclos, divergencia hacia infinito, comportamiento caótico, etc.

Dinámica compleja del método de Newton amortiguado

En el Capítulo 3 se ha estudiado la dinámica compleja del método de Newton amortiguado comparando los resultados con el método de Newton. Se ha observado que la inclusión del parámetro amortiguador influye directamente en la dinámica del método. Se han estudiado polinomios con una única raíz, dos diferentes, variando la multiplicidad de alguna de ellas, e incluso tres. En todos los casos se ha caracterizado qué es lo que ocurre con el método para diferentes valores del parámetro utilizando código MATHEMATICA y apoyándonos en estudios gráficos, tales como planos de parámetros y cuencas de atracción asociadas a las raíces.

El método de Newton amortiguado en espacios de Banach

En el Capítulo 4 se ha estudiado el método de Newton amortiguado en espacios de Banach obteniendo resultados sobre la convergencia local y semilocal. Con respecto a la convergencia local, se han obtenido resultados bajo condiciones de Kantorovich, con condiciones de Kantorovich centradas y utilizando la γ-teoría. Por otro lado, con respecto a la convergencia semilocal, se han obtenido resultados bajo condiciones de Kantorovich, con condiciones centradas y utilizando la α-teoría de Smale. Los resultados teóricos se han ilustrado con aplicaciones a problemas diversos: ecuaciones integrales, problemas de optimización, sistemas de ecuaciones, problemas de posición, etc.

Bibliografía

[1] V. S. Adamchik and D. J. Jeffrey: Polynomial Transformations of Tschirnhaus, Bring and Jerrard, *ACM SIGSAM Bull.*, **37** 3 (2003), 90–94.

[2] S. Amat, S. Busquier and Á. A. Magreñán: Reducing chaos and bifurcations in Newton-type methods, *Abst. Appl. Anal.* (2013), Volume 2013, Article ID 726701, 10 pages `http://dx.doi.org/10.1155/2013/726701`.

[3] S. Amat, S. Busquier and S. Plaza: Review of some iterative root-finding methods from a dynamical point of view, *Scientia, Series A: Math. Sci.*, **10** (2004), 3–35.

[4] S. Amat, Á. A. Magreñán and N. Romero: On a family of two step Newton-type methods, *Appl. Math. Comput.*, **219** 4 (2013), 11341–11347.

[5] I. K. Argyros: *Convergence and applications of Newton-type iterations*. Springer, New York, 2008.

[6] I. K. Argyros, Y. J. Cho and S. Hilout: *Numerical methods for equations and its applications*. CRC Press/Taylor and Francis, New York, 2012.

[7] I. K. Argyros and J. M. Gutiérrez: A unified approach for enlarging the radius of convergence for Newton's method and applications, *Nonl. Funct. Anal. Appl.*, **10** (2005), 555–563.

[8] I. K. Argyros and J. M. Gutiérrez: A unifying local and semilocal convergence analysis of Newton-like methods, *Adv. Nonl. Var. Ineq.*, **10** 1 (2007), 1–11.

[9] I. K. Argyros, J. M. Gutiérrez, Á. A. Magreñán and N. Romero: Convergence of the relaxed Newton's method, *Journal of the Korean Mathematical Society*, Aceptado, (2013).

[10] I. K. Argyros and S. Hilout: On the semilocal convergence of damped Newton's method, *Appl. Math. Comput*, **219** 5 (2012), 2808–2824.

[11] I. K. Argyros and S. Hilout: Weaker conditions for the convergence of Newton's method, *J. Complex.*, **28** (2012), 364–387.

[12] I. K. Argyros and S. Hilout: Estimating upper bounds on the limit points of majorizing sequences for Newton's method, *Numer. Alg.*, **62** 1 (2013), 115–132.

[13] I. K. Argyros and Á. A. Magreñán: General convergence conditions of Newton's method for m-Fréchet differentiable operators, *J. Appl. Math. Comput.* (2013), **43** 1-2 (2013), 491–506.

[14] I. N. Baker: An entire function which has wondering domains, *J. Austral. Math. Soc.*, **22** Ser. A (1976), 173–176.

[15] F. Balibrea, J. O. Freitas and J. S. Ramos: Newton maps for quintic polynomials, `http://arxiv.org/pdf/math/0501327.pdf`

[16] F. Balibrea y M. Zamora: Propiedades dinámicas de las funciones de Newton asociadas a polinomios. Conjetura de Holmgren, *XXI Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones, XI Congreso de Matemática Aplicada*, (2009), 1–10.

[17] S. Banach: *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Varsovia, 1932.

[18] B. Barna: Über die Divergenzpunkte des Newtonschen Verfahrens zur Bestimmung von Wurzeln algebraischer Gleichungen. I, *Publ. Math. Debrecen*, **3** (1953), 109–118.

[19] A. F. Beardon: *Iteration of rational functions*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[20] A. S. Besicovitch: On Linear Sets of Points of Fractional Dimensions, *Math. Ann.*, **101** 1 (1919), 161–193.

[21] L. Billings, J. H. Curry and V. Robins: *Chaos in Relaxed Newton's Method: The Quadratic Case*, Academic Press, University of Colorado at Boulder, 1999.

[22] A. K. Bisoi: Newton Raphson Method, Scaling at Fractal Boundaries and MATHEMATICA, *Math. Comput. Modelling*, **21** 10 (1995), 91–102.

[23] P. Blanchard: Complex analytic dynamics on the Riemann sphere. *Bull. of AMS* (new series) **11**, 1 (1984), 85–141.

[24] L. Blum, F. Cucker, M. Shub and S. Smale: *Complexity and real computation*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[25] A. D. Bryuno: Convergence of transformations of differential equations to normal forms, *Dock. Akad. Nauk URSS*, **165** (1965), 987–989.

[26] L. Carleson and T. Gamelin: *Complex Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[27] H. Cartan: *Calcul différentiel*, Hermann, Paris, 1971.

[28] A. Cayley: The Newton-Fourier imaginary problem, *Amer. J. Math.*, **2** (1879), 97–97.

[29] F. Chicharro, A. Cordero, J. M. Gutiérrez and J. R. Torregrosa; Complex dynamics of derivative-free methods for nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.*, **19** 12 (2013), 7023–7035.

[30] A. Cordero, J. R. Torregrosa and P. Vindel: Dynamics of a family of Chebyshev-Halley type methods, *Appl. Math. Comput.*, **219** 16 (2013), 8568–8583.

[31] H. Cremer: Zum Zentrumproblem, *Math. Ann.*, **98** (1927), 151–163.

[32] B. Dasgupta and T.S. Mruthyunjaya: The Stewart platform manipulator: a review, *Mechanism and Machine Theory*, **35** (2000), 15–40.

[33] J. P. Dedieu: *Points fixes, zéros et la méthode de Newton*, Mathématiques et Applications, Springer Verlag, Berlin, **54**, 2006.

[34] R. Devaney: *An introduction to Chaotic Dynamical Systems,* 2^{nd} *edition*, Addison-Wesley, Redwood City, California, 1989.

[35] B. I. Epureanu and H. S. Greenside: Fractal basins on the attraction associated with a damped Newton's method, *SIAM Rev.*, **40** (1998), 102–109.

[36] J. A. Ezquerro, J. M. Gutiérrez, M. Á. Hernández, N. Romero y M. J. Rubio: El método de Newton: de Newton a Kantorovich, *La Gaceta de la RSME*, **13** 1 (2010), 53–76.

[37] J. A. Ezquerro and M. Á. Hernández: Generalized differentiability conditions for Newton's method, *IMA J. Numer. Anal*, **22** 1 (2002), 187–205.

[38] J. A. Ezquerro and M. Á. Hernández: On an application of Newton's method to nonlinear operators with ω-conditioned second derivative, *BIT*, **42** 3 (2002), 519–530.

[39] N. Fagella: Invariants en dinàmica compleja, *Bull. Soc. Mat. Cat.*, **23** 1 (2007), 29–51.

[40] N. Fagella y X. Jarque: *Iteración compleja y fractales*, Vicens Vives, Barcelona, 2007.

[41] P. Fatou: Sur les équations fonctionelles, *Bull. Soc. Math. France*, **47** (1919), 161–271.

[42] J. Garay and M. Á. Hernández: *Degree of logarithmic convexity*, Publicaciones del Sem. Mat. García Galdeano. Serie II, **26**, Zaragoza, 1988.

[43] M. García-Olivo: *El método de Chebyshev para el cálculo de las raíces de ecuaciones no lineales (Tesis Doctoral)*, Pendiente de publicación.

[44] W. J. Gilbert: The complex dynamics of Newton's method for a double root, *Computers Math. Applic.*, **22** 10 (1991), 115–119.

[45] W. J. Gilbert: Generalizations of Newton's method, *Fractals*, **9** 3 (2001), 251–262.

[46] A. Giraldo y M. A. Sastre: *Sistemas dinámicos discretos y caos*, Fundación general de la Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, 2002.

[47] D. González: *Problemas de valor inicial en la construcción de sucesiones mayorizantes para el método de Newton en espacios de Banach (Tesis Doctoral)*, Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja, 2012.

[48] W. B. Gragg and R. A. Tapia: Optimal error bounds for the Newton-Kantorovich theorem, *SIAM J. Numer. Anal.*, **11** (1974), 10–13.

[49] M. Grau-Sánchez y J. M. Gutiérrez: Some variants of the Chebyshev-Halley family of methods with fifth-order of convergence, *Int. J. Comput. Math.*, **87** 4 (2010), 818–833.

[50] J. M. Gutiérrez: *El método de Newton en espacios de Banach (Tesis Doctoral)*, Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja, 1995.

[51] J. M. Gutiérrez, Á. A. Magreñán and N. Romero: On the semilocal convergence of Newton-Kantorovich method under center-Lipschitz conditions, *Appl. Math. Comput.*, (2013), `http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2013.05.078`.

[52] J. M. Gutiérrez, Á. A. Magreñán and J. L. Varona: The "Gauss-Seidelization" of iterative methods for solving nonlinear equations in the complex plane, *Appl. Math. Comp*, **218** (2011), 2467–2479.

[53] J. M. Gutiérrez y S. Plaza: *Estudio dinámico del método de Newton para resolver ecuaciones no lineales*, Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja, 2013.

[54] F. von Haeseler and H. Kriete: Surgery for damped Newton's method, *Complex Variables and Elliptic Equations*, **22** 1 (2010), 129–143.

[55] F. von Haeseler and H.-O. Peitgen: Newton's method and complex dynamical systems, *Acta Appl. Math.*, **13** (1988), 3–358.

[56] F. Hausdorff: Dimension und äuβeres Maβ, *Mathematische Annalen*, **79** 1-2 (1919), 157–179.

[57] J. Head: *The combinatorics of Newton's method for cubic polynomials*, Ph. D. thesis, Cornell Univ., Ithaca, United States of America, 1987.

[58] A. Hernández: *Cinemática de mecanismos. Análisis y diseño*, Editorial Síntesis, Madrid, 2007.

[59] M. Á. Hernández: The Newton's method for operators with Hölder continuos first derivative, *J. Optim. Theory Appl.*, **109** (2001), 631–648.

[60] J. Hubbard, D. Schleider and S. Sutherland: How to find all roots of complex polynomials by Newton's method, *Invent. math.*, **146** (2001), 1–33.

[61] G. Julia: Memoire sur l'iteration des fonctions rationelles, *J. de Math. pures et appliquées*, **8** 1 (1918), 47–215.

[62] L. V. Kantorovich: The method of successive approximations for functional analysis, *Acta. Math.*, **71** (1939), 63–97.

[63] L. V. Kantorovich: On Newton's method for functional eqations, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **59** (1948), 1237–1240.

[64] L. V. Kantorovich: The majorant principle and Newton's method, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **76** (1951), 17–20.

[65] L. V. Kantorovich and G. P. Akilov: *Functional analysis*, Pergamon Press, Oxford, 1982.

[66] K. Kneisl: Julia sets for the super-Newton method, Cauchy's method and Halley's method, *Chaos*, **11** 2 (2001), 359–370.

[67] H.-C. Lai and P.-Y. Wu: Error bounds of Newton type process on Banach spaces, *Numer. Math.*, **39** (1982), 175–193.

[68] T.-Y. Li and J. A. Yorke: Period Three Implies Chaos, *The Amer. Math. Monthly*, **82** 10 (1975), 985-992.

[69] Á. A. Magreñán: *Medición experimental de la dimensión fractal*, Proyecto fin de carrera, Universidad de La Rioja, 2011.

[70] Á. A. Magreñán and I. K. Argyros: Two-step Newton methods, *Journal of Complexity*, (2013), http://dx.doi.org/10.1016/j.jco.2013.10.002.

[71] B. Mandelbrot: *The fractal geometry of nature*, W. H. Freeman & Co., 1977.

[72] B. Mandelbrot: *Los objetos fractales: Forma, azar y dimensión*, Tustquets, 1987.

[73] J. B. McLaughlin: Convergence of the relaxed Newton's method for cubic equations, *Computers chem. Eng.*, **17** 10 (1993), 971–983.

[74] J.P. Merlet: Solving the forward kinematics of a Gough-type parallel manipulator with interval analysis, *Int. J. of Robotics Research*, **23** (2004), 221–235.

[75] G. J. Miel: The Kantorovich theorem with optimal error bounds, *Amer. Math. Monthly*, **86** (1979), 212–215.

[76] G. J. Miel: Un updated error analysis for Newton-type methods, *Numer. Math.*, **33** (1979), 391–396.

[77] G. J. Miel: Majorizing sequences and error bounds for iterative methods, *Math. Comput.*, **34** (1980), 185–202.

[78] J. Milnor: *Dynamics in one complex variable: Introductory lectures. Third edition*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2006.

[79] P. Montel: *Leçons sur les familles normales des fonctions analytiques et leurs applications*, Gauthier-Villars, Paris, 1927.

[80] I. P. Mysosvskikh: On convergence of L. V. Kantorovich's method for functional equations and its applications, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **70** (1950), 565–568.

[81] J. W. Neuberger: Continuous Newton's Method for polynomials, *Math. Intel.*, **21** 2 (1999), 18–23.

[82] P. Niamsup: Dynamics of Newton's functions of Barna's polynomials, *Int. J. of Math. and Math. Sci.*, **29** 2 (2002), 79–84.

[83] K. Nishizawa and M. Fujimura: Families of rational maps and convergence basins of Newton's method, *Proc. Japan Acad.*, **68** Ser. A (1992), 143-147.

[84] J. M. Ortega: The Newton-Kantorovich theorem, *Amer. Math. Monthly*, **75** (1968), 658–660.

[85] J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt: *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, Academic Press, New York, 1970.

[86] A. M. Ostrowski: *Solution of equations and systems of equations*, *Academic Press*, New York, 1966.

[87] A. M. Ostrowski: *Solution of equations in euclidean and Banach spaces*, Academic Press, New York, 1973.

[88] H.-O. Peitgen, H. Jürgens and D. Saupe: *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science. Second Edition*, Springer-Verlag, New York, 2004.

[89] H.-O. Peitgen, D. Saupe and F. von Haeseler: Cayley's problem and Julia Sets, *The Math. Intel.*, **6** 2 (1984), 3–358.

[90] V. Petuya, J. M. Gutiérrez, A. Alonso, O. Altuzarra and A. Hernández: A numerical procedure to solve non-linear kinematic problems in spatial mechanisms, *Int. J. for Numer. Methods in Eng.*, **73** Issue 6 (2008), 825–843.

[91] S. Plaza: Dinámica del método de Newton, *Actas coloquios nacionales de Sistemas Dinámicos (1991)*, (1992), 82–119.

[92] S. Plaza: Conjugacies classes of some numerical methods, *Proyecciones*, **20** 1 (2001), 1–17.

[93] S. Plaza and N. Romero: Attracting cycles for the relaxed Newton's method, *J. Comput. Appl. Math.*, **235** 10 (2011), 3238–3244.

[94] B. T. Polyak: Newton-Kantorovich method and its global convergence, *J. Math. Sci.*, **133** 4 (2006), 1513–1523.

[95] F. A. Potra and V. Pták: Sharp error bounds for Newton's process, *Numer. Math.*, **34** (1980), 63–72.

[96] V. Pták: The rate of convergence of Newton's process, *Numer. Math.*, **25** (1976), 279–285.

[97] L. B. Rall: Quadratic equations in Banach spaces, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **10** (1961), 314–332.

[98] L. B. Rall: *Computational Solution of Nonlinear Operator Equations*, *Robert E. Krieger Publishing Company, Inc.*, California, 1979.

[99] G. H. Roberts and J. Horgan-Kobleski: Newton's versus Halley's method: A dynamical system approach, *Int. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Eng.*, **14** 10 (2004), 3459–3475.

[100] N. Romero: *Familias paramétricas de procesos iterativos de alto orden de convergencia (Tesis Doctoral)*, Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja, 2006.

[101] G. Saunder: *Iteration of rational functions in one complex variable and basins of attractive points*, Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley, 1984.

[102] E. Schöder: Über unendich viele Algorithmn zur Auflösung der Gleichungen, *Math. Ann.*, **2** (1870), 317–365.

[103] M. Shishikura: The connectivity of the Julia set and fixed points, *Complex dynamics: families and friends (Ed. by D. Schleicher), A. K. Peters*, (2009), 257–276.

[104] C. L. Siegel: Iteration of analytic functions, *Ann. of Math.*, **43** (1942), 607–612.

[105] S. Smale: Newton's method estimates from data at one point, *R. Ewing, K. Gross, C. Martin (Eds.), The Merging of Disciplines: New Directions in Pure, Applied and Computational Mathematics, Springer, New York*, (1986), 185–196.

[106] D. Sullivan: Quasi conformal homeomorphisms and dynamics I. Solution of Fatou-Julia problem wandering domains, *Ann. Math.*, **122** 2 (1985), 401–418.

[107] P. Touhey: Yet another definition of chaos, *Amer. Math. Monthly*, **104** (1997), 411–415.

[108] J. F. Traub: *Iterative methods for the solution of equations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.

[109] J. L. Varona: Graphic and numerical comparison between iterative methods, *The Math. Intel.*, **24** 1 (2002), 37–46.

[110] J. L. Varona: Representación gráfica de fractales mediante un programa de cálculo simbólico, *La Gaceta de la RSME*, **6** (2003), 213–230.

[111] J. C. Yakoubsohn: A universal constant for the convergence of Newton's method and an application to the classical homotopy method, *Numer. Alg.*, **9** 3-4 (1995), 223–244.

[112] J. C. Yakoubsohn: Finding zeros of analytic functions: a theory for secant type methods, *J. Complex.*, **15** 2 (1999), 239–281.

[113] T. Yamamoto: Error bounds for Newton's iterates derived from the Kantorovich theorem, *Numer. Math.*, **4** (1986), 91–98.

[114] T. Yamamoto: A method for finding sharp error bounds for Newton's method under the Kantorovich assumptions, *Numer. Math.*, **49** (1986), 203–220.

[115] T. Yamamoto: Historical developments in convergence analysis for Newton's and Newton-like methods, *J. Comput. Appl. Math.*, **124** (2000), 1–23.

[116] W. Yang: Symmetries of the Julia sets of Newton's method for multiple roots, *Appl. Math. Comput.*, **217** (2010), 2490–2494.

[117] T. J. Ypma: Historical development of the Newton-Raphson method, *SIAM Rev.*, **37** (1995), 531-551.

[118] J. Walsh: The dynamics of Newton's method for cubic polynomials, *College Math. J.*, **26** 1 (1995), 22-28.

[119] D. R. Wang and F. G. Zhao: The theory of Smale's point estimation and its applications, *J. Comput. Appl. Math.*, **60** (1995), 253-269.

[120] S. Wong: Newton's method and symbolic dynamics, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **91** (1984), 245–253.

[121] Zuse Institute Berlin: Software repository for Peter Deuflhards Book "Newton Methods for Nonlinear Problems-Affine Invariance and Adaptative Algorithms", `http://www.zib.de/Numerik/NewtonLib/index.en.html`