Sobre los Principios Fundamentales de la geometría

Luis Javier Hernández Paricio

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Sobre los Principios Fundamentales de la Geometría

Luis Javier Hernández Paricio

Sobre los Principios Fundamentales de la Geometría

Lección inaugural de apertura del curso académico 2000-2001
Universidad de La Rioja

Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones

publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

ISBN: 978-84-697-0038-9

Presentación

Excmo. Sr. Presidente del Gobierno de la Comunidad Autónoma.
Excmo. Sr. Rector Magnífico de la Universidad de La Rioja.
Excmas. e Ilmas. Autoridades Civiles, Eclesiásticas y Militares.
Compañeros universitarios: Profesores, Alumnos y Personal de Administración y Servicios.
Señoras y Señores.
Amigos todos.

El pasado curso se me comunicó que, por las razones reglamentarias que marcan el protocolo de las lecciones inaugurales de la Universidad de La Rioja, me correspondía pronunciar la lección inaugural del curso que hoy iniciamos.

La ocasión era importante y enseguida acepté el honor que suponía dirigirme a mis compañeros universitarios, a la sociedad riojana y a sus representantes, que han impulsado la creación de esta institución universitaria.

Nuestra Universidad surgió a partir de las antiguas Escuelas Universitarias y del Colegio Universitario de la Rioja que dependían de la Universidad de Zaragoza, la cual fue fundada en 1583 por Pedro Cerbuna. En aquella lejana ocasión, la lección de apertura la realizó fray Jerónimo Xavierre y versó, entre otras materias, sobre la "Encarnación del Verbo Divino".

La Universidad de La Rioja tiene una corta historia y frente a la solera y raigambre de otras Universidades exhibe un gran entusiasmo y la ventaja de su juventud que, en mi opinión, la hace más moldeable y adaptable a los tiempos actuales.

Varias circunstancias concurren en este momento. El curso que hoy inauguramos, el 2000-2001, es un curso puente entre dos milenios y entre dos siglos. Una situación anecdótica en nuestro sistema de medir el tiempo, pero que invita, por una parte, a la reflexión sobre los principales hechos y objetivos alcanzados en el milenio que se consume y, por otra, a esbozar algunas hipótesis de cómo va a transcurrir el tiempo futuro.

Las matemáticas, disciplina en la que imparto mi docencia, no han quedado fuera de este espíritu de análisis y reflexión y ello queda patente en las numerosas celebraciones y múltiples congresos que se están realizando durante este año 2000. Señalemos que la UNESCO ha patrocinado el 2000 como Año Mundial de las Matemáticas, apoyando una iniciativa de la Unión Matemática Internacional. Con ello se reconocen las aportaciones que la Matemática, en su papel de lenguaje de la ciencia y portadora del pensamiento racional, ha realizado al progreso de la humanidad.

El Comité Riojano del Año Mundial de las Matemáticas también ha participado en este evento organizando exposiciones, conferencias y la Semana de la Matemáticas, que se celebró del 8 al 12 de Mayo y en la que se analizó el papel de las Matemáticas y los matemáticos en la sociedad actual, y se realizaron algunas hipótesis sobre su posible futuro.

Examinando las posibles materias a las que podía dedicar mi lección inaugural, y teniendo en cuenta que mi especialización se desenvuelve en temas geométricos y topológicos, he creído conveniente dedicarla al desarrollo histórico de los principios fundamentales de la geometría, particularmente al principio denominado "Axioma de las Paralelas" cuya clarificación necesitó que durante más de dos mil años numerosos escolares dedicaran muchos años de meditación, críticas de todo tipo y grandes esfuerzos, y que culminó finalmente con el nacimiento de las geometrías no euclidianas en el siglo XIX. Varias son las razones que finalmente me han llevado a esta elección:

La primera es que, desde mi punto de vista, el descubrimiento de la geometría no euclidiana es uno de los avances más espectaculares que se ha realizado durante el segundo milenio en el mundo del pensamiento matemático.

La segunda trataría de compensar la poca repercusión y reconocimiento que este descubrimiento ha tenido en la sociedad científica española.

La tercera es la de afianzar una de las misiones de la universidad, que además de ser una institución dedicada a la formación e investigación, origen fundamental de nuestra sociedad del bienestar, tiene también la sagrada misión de preservar y cultivar los avances importantes de la ciencia. En el caso del descubrimiento de las geometrías no euclidianas, se ha necesitado que numerosos estudiosos de diversas razas y culturas hayan dedicado su esfuerzo y tiempo a desentrañar el misterio el quinto postulado de Euclides.

La cuarta es poder celebrar este año mundial de las matemáticas con el recuerdo gratificante de que, en el caso que nos ocupa, el hombre con su inteligencia fue capaz de desvelar el misterio. Éste se reveló de forma magnífica y no se destruyó el pensamiento geométrico anterior, sino todo lo contrario, se fortaleció su consistencia y rigor. Se abrió un resquicio por el que surgió un mundo nuevo y extraño pero tan verdadero como el antiguo. Ambos mundos son igualmente consistentes y cada cual explica distintas facetas de una realidad compleja. La existencia de mundos no euclidianos no implica la destrucción de la geometría euclidiana clásica. La convivencia entre estas geometrías opuestas es, sin embargo, lógica y armónica.

Finalmente, aunque sea de soslayo, esta historia permite reflejar la naturaleza deductiva de las matemáticas. Una vez encontrados los principios fundamentales de una teoría, el resto de las propiedades de ésta se establecen y prueban por el método deductivo. Esta forma de trabajo, que contrasta con el carácter empírico de otras ciencias, ha maravillado a muchos científicos, entre ellos a Einsten, que admiraba el hecho de que una ciencia deductiva pudiera explicar tan magníficamente muchas de las observaciones empíricas de otras ciencias más experimentales.

Es nuestro caso, la teoría a la que nos vamos a referir es la Geometría y los principios que vamos a analizar son los postulados euclidianos.

EUCLIDES

Empezaremos mencionando las siete artes liberales del curriculum medieval. El trivium, que consistía en la gramática, la lógica y la retórica, se añadió al quadrivium que estaba integrado por las "mathemata" o temas de estudio que procedían de los tiempos de los últimos pitagóricos. Antiguamente las matemáticas era una terminología utilizada para designar todo el conocimiento que necesitaba de estudio riguroso para su comprensión. En la antigua Grecia, las cuatro materias del quadrivium se denominaron: Aritmética, Armónica, Geometría y Astrología. Hoy en día se llamarían: Aritmética, Música, Geometría y Astronomía.

Uno de los más ilustres personajes griegos que escribió sobre todos los temas de estudio del quadrivium fue Euclides (a la derecha, según un grabado italiano). Sus Elementos de Música se han perdido completamente, pero se conserva su obra "Fenómenos" que versa sobre geometría esférica para la Astronomía. Y no es necesario decir que Euclides escribió un tratado sobre Aritmética y Geometría que se llama los Elementos. Los Elementos de Euclides y la Biblia están entre los libros más editados, más estudiados y más divulgados en la historia de la humanidad. Desde su primera impresión en 1482 se han realizado más de mil ediciones.

Señalemos algunos aspectos de este tratado:

Primero; Este tratado funda una disciplina científica: La Geometría.

Segundo; Durante más de veinte siglos ha representado el rigor y la norma de esta disciplina y de otras afines.

Y tercero; Introduce el método deductivo en las Matemáticas.

La fortuna institucional del tratado hizo que se perdieran los rastros de otros "Elementos" anteriores sobre los que seguramente se elaboró. También hizo que se velara el rostro del autor y que su nombre se transformara en un nombre para la geometría.

Euclides es un oscuro autor e incierto personaje. Parece haber dos referencias relativamente dignas de crédito. La primera, que fue posterior que los discípulos de Platón (muerto en el 347 a. C.), anterior a Arquímedes (nacido hacia el 287 a.C.) y coetáneo de Tolomeo Sóter (367-283 a. C.) instaurador de la dinastía de los tolomeos (en otras transcripciones aparece como Tolemeo). Y, la segunda, que enseñó y formó escuela en Alejandría.

La fuente principal de información relacionada con la geometría griega muy antigua es el llamado Sumario de Eudemo, de Proclo (Constantinopla 412-Atenas 485). Éste es un resumen muy breve de la geometría griega desde los tiempos primitivos hasta Euclides basado en una historia anterior realizada por Eudemo. Además disponemos de unos cuantos comentarios que Proclo escribió sobre los Elementos de Euclides en su "Libro I, Comentarios sobre Euclides".

Proclo introduce a Euclides con los siguientes términos:

> *"No mucho más joven que Hermótimo de Colofon y Filipo de Medma (discípulos de Platon) es Euclides, quien compiló los elementos poniendo en orden varios teoremas de Eudoxo, perfeccionando muchos resultados de Teeteto y dando asimismo pruebas incontestables de aquello que sus predecesores sólo habían probado con escaso rigor."*

La segunda referencia procede de Pappo (siglo IV d. C.) que en su Colección cuenta que Apolonio de Perge habría frecuentado durante algún tiempo (en torno al 250 a. C.) a los discípulos de Euclides.

Teniendo en cuenta los datos anteriores y otras informaciones adicionales, se puede estimar que Euclides alcanzó la madurez hacia el 300 a. C.. Es hacia entonces cuando por convención se suele fechar los Elementos.

Euclides, con el transcurrir del tiempo, devino en un personaje de historias y leyendas.

Según Estobeo, en cierta ocasión, uno de sus oyentes, nada más escuchar la demostración del primer teorema, se habría apresurado a preguntar la ganancia que podía obtener con cosas de ese género; Euclides, volviéndose hacia un sirviente, habría ordenado: *"Dale 3 óbolos, pues necesita sacar provecho de lo que aprende"*.

También se cuenta que el rey Tolomeo Sóter se habría interesado, seguramente por cortesía, por una vía de acceso al conocimiento geométrico menos fatigosa, más rápida y llana que la de los Elementos; la respuesta atribuida a Euclides habría sido algo seca y cortante, se dice que le contestó: *"Mi señor, no hay caminos de reyes en geometría"*.

Los polígrafos árabes imaginaron leyendas más audaces: Euclides habría sido hijo de Naucrates, nieto de Zenarco (y tal vez de Berenice); habría nacido en Tiro y residido en Damasco, pero sin renegar de su linaje y sus hábitos griegos. Por lo demás no había hecho sino refundir el trabajo anterior de un tal Apolonio, que, por más señas, era carpintero (Casiri, Biblioteca Arabico-Hispana Esculiarensis I 339).

Pero dejemos estas leyendas y pasemos a comentar cómo sus famosos Elementos se han transmitido a través de manuscritos, traducciones y ediciones desde tiempos de Euclides hasta nuestra época:

TRANSMISIÓN DE LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

No se ha hallado ninguna copia de los Elementos de Euclides que date realmente de la época del autor. Las ediciones modernas de los Elementos se basan en una revisión preparada por Teón de Alejandría casi después de 700 años de que se realizara el trabajo original. Además, a principios del siglo XIX, se encontró un manuscrito en la biblioteca del Vaticano que corresponde a un arquetipo anterior a la versión de Teón de la que muestra diferencias menores. Un estudio cuidadoso de las citas y comentarios de escritores antiguos indica que las definiciones, los axiomas y postulados iniciales del tratado original difieren algo de las revisiones, pero las proposiciones y sus demostraciones han permanecido en gran parte tal y como Euclides las escribió.

La forma principal de transmisión de los Elementos se aviene a la pauta que parecen seguir los textos científicos más afortunados del legado griego: versiones griegas manuscritas; traducciones del griego al árabe en el siglo IX; traducciones latinas de las versiones árabes en el siglo XII; impresión de versiones y exposiciones en latín a finales del siglo XV; poco después, edición de versiones latinas a partir del griego y aparición de la "editio princeps" del propio texto griego; más tarde, versiones en lenguas vernáculas y, por fin, edición crítica del texto griego en las últimas décadas del siglo XIX.

También La Rioja tiene su lugar en la transmisión de Los Elementos desde la época de Euclides hasta nuestros días como vamos a relatar a continuación:

En la primera mitad del siglo XV Gutenberg (1394-1468) introdujo la imprenta y uno de los primeros impresores fue Erhard Ratdolt, que perteneció a una familia de artistas de Augsburgo, donde nació hacia 1443. Habiendo aprendido el oficio de impresor en su propia familia, y posiblemente habiendo sido discípulo directo o indirecto de Gutenberg, se trasladó a Venecia en 1475, donde fundó la que sería una famosa imprenta que regentó durante 11 años.

En 1482, durante su etapa veneciana, Erhard Ratdolt realizó la primera impresión latina de los elementos de Euclides. Un ejemplar de esta primera edición impresa de los Elementos de Euclides se guarda en el Monasterio de Yuso de San Millán de la Cogolla. Este ejemplar presenta dos curiosidades: El encabezamiento del texto del autor hecho con tinta roja (el resto del libro esta hecho con tinta negra) y las admirables figuras geométricas que aparecen en sus márgenes. En el ejemplar del Monasterio de Yuso aparecen algunos comentarios manuscritos en latín en los márgenes de los cinco primeros libros. Por las consultas realizadas se sabe que, en España, existen otros seis como el de Yuso. Algunos de estos ejemplares no están tan bien conservados como el de San Millán de la Cogolla e incluso algunos de ellos tienen los márgenes, donde se encuentran las figuras, guillotinados.

Un hecho que refuerza la importancia de este incunable es el de que el ilustre matemático francés Laurent Siebenmann, que participó en el "Workshop on proper homotopy" organizado por el Colegio Universitario de La Rioja en el año 1989, prolongó su visita una semana más exclusivamente para estudiar las características del ejemplar del Monasterio de Yuso.

En el prefacio, dedicado al Príncipe Mocenigo de Venecia, el impresor comenta que frecuentemente se había preguntado por qué en una ciudad tan poderosa como Venecia, en la que en sus numerosas imprentas se publicaban cada día volúmenes de autores antiguos y modernos, no se había publicado nada sobre matemáticas, la más noble de las disciplinas. También dice que cuando indagó sobre el tema encontró que la razón de esta ausencia de publicaciones se debía a la dificultad de imprimir las figuras geométricas que aparecen en los volúmenes matemáticos y sin las cuales son difícilmente inteligibles. Sin embargo, él, después de mucho trabajo, encontró la forma de poder imprimir figuras geométricas con la misma facilidad que los caracteres de las letras. También dice que gracias a su invención, pronto se podrán ilustrar muchos volúmenes de matemáticas y otras ciencias.

Teniendo en cuenta que estamos en el año mundial de las matemáticas no me he podido resistir a seguir incluyendo algún comentario más que el impresor Ratdolt realiza en el prefacio de este incunable de gran valor. Dice que tanto los Dialécticos como los Filósofos admiten que sus libros contienen muchas cosas que difícilmente se entenderían sin el razonamiento matemático. También comenta que hasta el divino Platón, en su búsqueda de los secretos de la verdad, se embarcó para visitar a Teodoro de Cirene, uno de los grandes matemáticos de su tiempo. Asegura que, sin esta facultad de las matemáticas, el modo de vida de su época estaría imperfectamente constituido. Se pregunta si sin la aritmética y la geometría que nos enseñan números y otras medidas podría ser nuestra vida tan civilizada y cómoda. Finaliza el prefacio asegurando que Euclides de Megara completó consumadamente todo el conocimiento geométrico en quince libros y que él, con mucho cuidado y diligencia, lo ha llevado a su imprenta ya que no existe un modelo anterior.

Es un reconocido error histórico el atribuir a Euclides de Megara la autoría de los Elementos. Éste fue un filósofo que vivió un siglo antes que el verdadero Euclides autor de los elementos. Esta versión incluye dos libros más que los compuestos por Euclides, el XIV y el XV. El libro XIV continúa con la comparación hecha por Euclides de los sólidos regulares inscritos en la esfera y es atribuido a Hipsicles (segunda mitad del siglo II a. C.) que fue discípulo de Euclides en Alejandría. El libro XV se considera obra (al menos en parte) de Isidoro de Mileto (532 d. C.), el arquitecto de la catedral de la Santa Sabiduría en Constantinopla.

Esta primera edición impresa de los "Elementos" de Euclides reproduce una versión latina compuesta en el año 1260 por el eminente matemático Campano de Novara capellán del papa Urbano IV, y para la cual utilizó diversas fuentes árabes y una de las versiones latinas de Adelhard of Bath (Adelardo de Bath). La versión adelardiana utilizada por Campano parece que debió ser compuesta antes del periodo 1142-1146 en el que Adelhard of Bath redactó su obra sobre el astrolabio. El inglés Adelhard of Bath viajó para aprender árabe a través de Asia Menor, Egipto y, finalmente, estuvo en Córdoba alrededor de 1120, donde obtuvo una copia de un texto morisco de los Elementos de Euclides. La traducción del árabe al latín se realizó por lo tanto entre 1120 y 1142.

Señalaremos que además de la traducción de Adelardo existen numerosos manuscritos latinos con traducciones de textos árabes de Los Elementos. Uno de ellos es una traducción de Gerardo de Cremona (1114-1187), el más prolífico de los traductores de Toledo, asistido en esta ocasión por un ayudante mozárabe ("Gallipus mixtarabus"). Esta versión es considerada como la más acorde con la tradición griega de entre las versiones arábigo-latinas y no tuvo el influjo de las versiones adelardianas. Además de los Elementos, Gerardo de Cremona (1114-1187) tradujo al latín más de noventa trabajos árabes, entre los que se encuentra el Almagesto de Tolomeo.

La recuperación del Euclides pristino es, hoy en día, una ilusión excesiva. El texto de los Elementos, que hoy cabe considerar como el más aproximado al original, es el establecido por la edición crítica de J.L. Heiberg y H. Menge (véase [12]). Esta edición se realizó cotejando siete manuscritos principales y el uso adicional de un palimpsesto del British Museum que contiene varios fragmentos del libro X y alguno del libro XIII. También toma en cuenta noticias existentes en comentarios y referencias de Pappo, Sexto Empírico, Proclo y Simplicio.

Existen también numerosas ediciones en lenguas vernáculas, citaremos brevemente la edición monumental en inglés de T. S. Herth, véase [14]. Por su detallada introducción, sus copiosas notas y referencias a lo largo del texto es una versión frecuentemente citada por historiadores de matemáticas y de la ciencia en general.

Un importante estudio de las ediciones castellanas de los Elementos es el elaborado por Luis Vega en el prólogo de la última edición de los Elementos de Euclides realizada en España que es una traducción realizada por María Luisa Puertas Castaños, véase [7], del texto griego fijado por la edición de J.L. Heiberg y H. Menge. Luis Vega menciona, al menos, quince ediciones anteriores al siglo XX y cuatro más que corresponden al siglo XX.

Tras analizar brevemente alguna de las curiosidades de cómo se han transmitido los Elementos desde Euclides a nuestra época y resaltar la importancia del incunable de Yuso, pasaremos a examinar brevemente el contenido de los Elementos, especialmente el del Libro I.

Comentarios sobre los Elementos

Se llamaban "elementos" las proposiciones que desempeñaban un cometido capital en la organización deductiva de otros resultados. De este modo, los "Elementos", con mayúscula, venían a ser un tratado donde se exponían con más o menos acierto los "elementos" de algún campo científico. También se distinguía entre una significación más amplia en la que todo lo que sirve para establecer un resultado es uno de sus elementos y, otra significación más restringida, en la que se denomina "elementos" a un grupo selecto de asunciones y proposiciones: Las que tienen el estatuto de principios dentro de una disciplina y son la base de partida sobre la que se teje la trama deductiva de las demás proposiciones y el cuerpo de sus conocimientos.

En una descripción somera de los "Elementos" se puede empezar diciendo que este tratado se compone de trece libros que contienen 465 proposiciones que, contrariamente a la impresión popular, además de geometría tratan de aritmética y álgebra geométrica griega. Más concretamente tenemos que:

Los cuatro primeros Libros desarrollan la teoría elemental de la geometría plana.

Los Libros V y VI contienen la teoría generalizada de la proporción.

La Teoría de la Aritmética corresponde a los Libros VII, VIII y IX.

El Libro X, denominado por algunos como "La cruz de los matemáticos", se dedica al estudio de segmentos rectilíneos que son inconmensurables respecto a un segmento rectilíneo dado; esto es, al estudio de los irracionales.

Los últimos Libros (XI, XII y XIII) se dedican a la Geometría del espacio.

El Libro I de los Elementos empieza con 23 definiciones que introducen términos tales como punto, línea, línea recta, superficie, superficie plana, ángulo, ángulo recto, ángulo obtuso, ángulo agudo, círculo y circunferencia, centro, diámetro, semicírculo, triláteros, cuadriláteros y multiláteros.

Entre los triláteros, introduce el triángulo equilátero, el isósceles y el escaleno. De entre las figuras cuadriláteras, define cuadrado como la que es equilátera y rectangular; rectángulo la que es rectangular pero no equilátera; rombo la que es equilátera pero no rectangular; romboide la que tiene lados y ángulos opuestos iguales entre sí, pero no es equilátera ni rectangular, y llama trapecios a las demás figuras cuadriláteras.

La definición 23 dice que "Son rectas paralelas las que estando en el mismo plano siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a la otra en ninguno de ellos."

Tras las definiciones y pese a su simpleza gramatical viene uno de los textos científicos más notables que jamás se haya escrito. Se trata de los Postulados y Nociones Comunes, que expondremos a continuación siguiendo una traducción literal de la versión de Heiberg y Menge.

POSTULADOS

1. Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.
2. Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta.
3. Y el describir un círculo con cualquier centro y distancia.
4. Y el ser todos los ángulos rectos iguales entre sí.
5. Y que si una recta, al incidir sobre dos rectas, hace que los ángulos internos del mismo lado (sean) menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos.

NOCIONES COMUNES

1. Las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí.
2. Y si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales.
3. Y si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales.
4. Y las cosas que pueden superponerse entre sí son iguales entre sí.
5. Y el todo es mayor que la parte.

El método utilizado por Euclides se basa en la utilización de cadenas deductivas que obtienen nuevos elementos a partir de otros anteriores. Puesto que no se puede retroceder infinitamente en la búsqueda de elementos anteriores, en un momento determinado hay que establecer unos que serán los principios fundamentales de la teoría y que en Los Elementos de Euclides se denominaron Postulados y Nociones Comunes. Los primeros son propios del campo científico considerado y los segundos, también llamados axiomas, son comunes para todas las ciencias.

Las nociones comunes y los postulados fueron ampliamente criticados y completados por comentadores y copistas. En los diferentes manuscritos y versiones impresas aparecen en formas diferentes. Por ejemplo, en la primera versión impresa en ingles por J. Willianson, el que hemos denominado quinto postulado aparece entre las nociones comunes como la número once, y es bien conocido que János Bolyai se refiere al quinto postulado como el Axioma XI de Euclides.

Poco a poco se fueron descubriendo las lagunas del sistema de postulados y axiomas de Euclides; señalemos, por ejemplo, la sobrecarga lógica de las definiciones, la falta de recursos para realizar las superposiciones y la ausencia de criterios para asegurar la existencia de intersecciones en ciertas figuras formadas por rectas y circunferencias.

Habría que esperar hasta finales del siglo XIX para que en los trabajos de Pasch (Vorlesungen über nuere Geometrie, 1882), Peano (I principii di geometria, logicamente esposti, 1889) y Pieri (Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo, 1899) se desarrollara una axiomatización de la geometría más acorde con la exigencia creciente del rigor matemático. No obstante, el sistema axiomático más difundido y aceptado es el que Hilbert [13] publicó en el año 1899 en su obra "Fundamentos de la Geometría". El tratamiento axiomático de la Geometría en nuestra época necesita de tres objetos primitivos que no necesitan ser definidos: punto, recta y plano. Y, para expresar las relaciones, tres palabras primitivas: pertenece, entre y congruente. El sistema axiomático de Hilbert completado y perfeccionado se suele presentar en cinco grupos de axiomas: (a) ocho axiomas de enlace o pertenencia; (b) cuatro axiomas de orden; (c) cinco axiomas de congruencia; (d) axioma de paralelismo; (e) dos axiomas de continuidad: el de Arquímedes y el de completitud lineal.

El sistema actual no diferencia entre nociones comunes y postulados y no incluye definiciones. Es interesante observar que este sistema axiomático contiene al llamado axioma del paralelismo o axioma de las paralelas. El axioma de las paralelas, que fue popularizado por John Playfair (1748-1819), es equivalente al quinto postulado y su enunciado es el siguiente:

Axioma de las paralelas: Por un punto dado que no esté en una recta dada sólo se puede trazar una única línea recta paralela.

Señalaremos que sin cambiar los objetos y palabras primitivos es posible encontrar otros grupos de axiomas básicos a partir de los cuales se pueden encontrar los mismos teoremas y proposiciones. Notemos que, en la misma teoría, un axioma se puede considerar una proposición con respecto a otro grupo distinto de axiomas.

También se pueden cambiar los objetos y palabras primitivos y elaborar teorías diferentes. En el caso en el que las teorías sean equivalentes se pueden encontrar descripciones de los objetos y palabras primitivos de una teoría en función de la otra.

Volviendo a Los Elementos de Euclides, se observa que, una vez concluida la redacción de los postulados y nociones comunes, sin más preámbulos, vienen las 48 proposiciones del Libro I. Una proposición prueba que se verifica una determinada propiedad o que se puede realizar cierta construcción utilizando únicamente los postulados, nociones comunes y proposiciones anteriores.

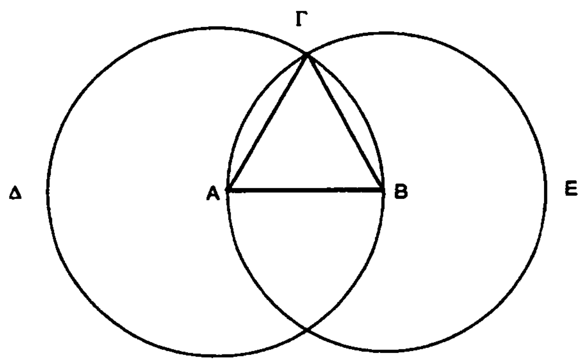
Para satisfacer nuestra curiosidad, y para ver cómo se utiliza el modo deductivo, tomemos la primera proposición:

Proposición 1. Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada.

Sea AB la recta finita dada.

Así pues, hay que construir sobre la recta dada un triángulo equilátero.

Descríbase con el centro A y la distancia AB el círculo ΒΓΔ [Post. 3], y con el centro B y la distancia BA descríbase a su vez el círculo ΑΓΕ [Post. 3], y a partir del punto Γ donde los círculos se cortan entre sí, trácense las rectas ΓΑ, ΓΒ hasta los puntos A , B [Post. 1].



Y puesto que el punto A es el centro del círculo ΓΔΒ, ΑΓ es igual a ΑΒ [Def. 15]; puesto que B es a su vez el centro del círculo ΓΑΕ, ΒΓ es igual a ΒΑ [Def. 15]; pero se ha demostrado que ΓΑ es igual a ΑΒ; por tanto, cada una de las (rectas) ΓΑ, ΓΒ es igual a ΑΒ. Ahora las cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí [N.C. 1]; por tanto, ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ son iguales entre sí.

Por consiguiente, el triángulo ABΓ es equilátero y ha sido construido sobre una recta finita dada AB. Que es lo que había que hacer.

Señalaremos que las proposiciones de los Elementos suelen discurrir por los siguientes pasos canónicos: Enunciado; exposición, en la que se utilizan letras para designar los puntos, las rectas y los datos dados; determinación, en la que se recuerda lo que hay que hacer o lo que hay que probar; demostración propiamente dicha y conclusión. No siempre siguen esta pauta pero lo que nunca falta es la proposición o enunciado, la demostración y la conclusión.

En la demostración anterior se hace uso de las definiciones, postulados y nociones comunes anteriores como se indica en los corchetes. Naturalmente, al tratarse de la primera proposición, no se hace uso de otras proposiciones anteriores.

Citemos también como ejemplo la siguiente propiedad:

Proposición 5. En los triángulos isósceles los ángulos de la base son iguales entre sí y, prolongadas las dos rectas iguales, los ángulos situados bajo la base serán iguales entre sí.

Una diferencia entre las dos proposiciones citadas es que en la primera se trata de resolver el problema de cómo hay que realizar una construcción, y, en la siguiente, se trata de describir una propiedad de una figura dada. El primer tipo de proposiciones se llamaban problemas, y las del segundo tipo, teoremas.

El nombre popular de este último teorema es el de "pons asinorum"; es decir, el puente de los asnos. Probablemente provenga de la apariencia de puente que tiene la figura de la demostración de Euclides, por cierto bastante complicada, y de la idea de que cualquiera que no lo cruce ha de ser un borrico. Afortunadamente, Pappo de Alejandría dio hacia el 340 d. C. una demostración más sencilla.

Con permiso de los asnos, mencionaremos otra anécdota que relaciona a éstos con el contenido de la siguiente:

Proposición 20. En todo triángulo, dos lados tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante.

Proclo dice que los epicúreos acostumbraban a ridiculizar este teorema porque "*era evidente incluso para un asno y no requería prueba*". La afirmación de que el teorema era comprensible incluso para un asno, se basaba en que si se colocaba forraje en un vértice y el asno en el otro, el hambriento animal no iría en busca de su pitanza a través de dos lados de un triángulo, sino sencillamente a través de aquél que le separaba de la comida. También se dice que al escuchar esta historia, Saville exclamó que los autores de estos argumentos eran dignos de compartir el heno con el asno.

El mismo Proclo replica estos comentarios aclarando que la percepción de la verdad de un teorema es algo diferente de la prueba científica del mismo. No obstante, los epicúreos no andaban muy desencaminados; esta propiedad, actualmente, se denomina como la desigualdad triangular y es tomada como un axioma en la teoría de espacios métricos que tiene una gran repercusión en la matemática actual. Éste es un ejemplo más de una afirmación que en una teoría matemática es una proposición y sin embargo en otra es simplemente un axioma.

Una proposición particularmente importante es la Proposición 29, pues es en esta proposición en la que por primera vez se utiliza el quinto postulado de Euclides. Ello significa que cualquier geometría que verifique los cuatro primeros postulados, junto con las nociones comunes, satisface las primeras 28 proposiciones de Euclides. Por lo tanto, los criterios que determinan la congruencia de triángulos, la existencia de perpendiculares y de bisectrices de ángulos y puntos medios de segmentos son también válidos en las geometrías que no asuman el quinto postulado. Esta proposición tiene el enunciado siguiente:

Proposición 29. La recta que incide sobre rectas paralelas hace los ángulos alternos iguales entre sí, y el (ángulo) externo igual al interno y opuesto, y los (ángulos) internos del mismo lado iguales a dos rectos.

La familia de proposiciones que se pueden probar sin utilizar el quinto postulado se suele denominar actualmente como geometría absoluta. En los Elementos de Euclides, además de las primeras 28 proposiciones, existen otros resultados que forman parte de la geometría absoluta, para ello bastaría extractar aquellas proposiciones que no utilizan el quinto postulado en ningún punto de la correspondiente cadena deductiva.

De gran interés en esta historia de los fundamentos de la geometría es la proposición siguiente que no utiliza el quinto postulado.

Proposición 31. Por un punto dado trazar una línea recta paralela a una recta dada.

Nótense los dos matices en los que difieren la proposición 31 y el axioma de las paralelas: el primero es que en el axioma de las paralelas se exige que el punto no esté en la recta dada, y el segundo matiz consiste en que además de la existencia se requiere la unicidad de la paralela trazada. Recordemos que el quinto postulado es equivalente al axioma de las paralelas; sin embargo la proposición anterior no necesita del quinto postulado para su demostración. Debido a la equivalencia del quinto postulado y el axioma de las paralelas, y a la influencia de los trabajos de Playfair, en muchos libros de texto de geometría el quinto postulado de Euclides se sustituyó por el axioma de las paralelas.

Destacaremos a continuación resultados de los Elementos que sí utilizan el quinto postulado, con el objetivo de una posterior comparación con los resultados análogos de otras geometrías que no lo utilizan:

Proposición 32. En todo triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo es igual a los dos ángulos internos y opuestos, y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos.

La demostración de esta proposición utiliza la proposición 29 que a su vez utiliza el postulado quinto.

La siguiente nos da el área de un triángulo:

Proposición 41. Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y está entre las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triángulo.

La penúltima proposición del Libro I contiene el célebre teorema de Pitágoras y la última es precisamente su recíproco.

Proposición 47. En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.

Un comentario de Proclo dice que

> *"Si escuchamos a quienes gustan de narrar cosas antiguas, hallaremos que atribuyen este teorema a Pitágoras y dicen que sacrificó un buey por su descubrimiento. Por mi parte, aunque admiro a los que conocieron primero este teorema, más me maravilla el autor de los Elementos, no sólo por establecerlo mediante una clara demostración, sino por haber sentado en el libro sexto (VI, 31) una proposición aún más general con las pruebas incontestables de la ciencia."*

No obstante, aclararemos que se conoce un uso más antiguo de triángulos pitagóricos por culturas como la antigua egipcia, la babilonia, la india y la china.

Finalizamos estos comentarios del primer libro de Euclides con algunas observaciones: La primera es la redacción compleja e intrincada del quinto postulado de Euclides, que le da un carácter un poco distinto de los demás que aparecen más simples y en los que su sencillez hace que su carácter de principio fundamental sea fácilmente aceptado. En segundo lugar, los Elementos de

Euclides contienen un subconjunto de proposiciones que no requieren del quinto postulado, es decir que no se alude a éste en la cadena deductiva de su demostración. Esta geometría, que no depende del quinto postulado, se llama geometría absoluta. Señalemos también que los Elementos contienen importantes proposiciones que sí que dependen del quinto postulado.

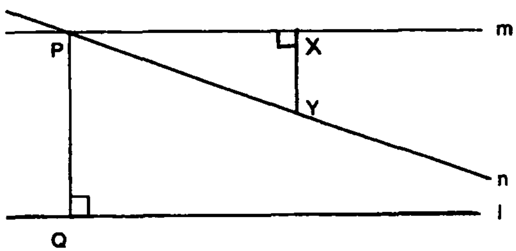
Parece ser que el mismo Euclides no estaba muy seguro de si su quinto postulado era o no demostrable a partir de los demás, ya que pospuso su utilización todo lo posible. Así que podemos iniciar con el mismo Euclides una historia que iba a durar mas de dos mil años y cuyo objetivo consistía en probar que el quinto postulado no era un principio fundamental de la geometría sino un teorema de la geometría absoluta. De los muchísimos intentos de demostración del quinto postulado vamos a seleccionar algunos de ellos, realizados a lo largo de más de dos mil años.

INTENTOS DE DEMOSTRACIÓN DEL QUINTO POSTULADO

En el siglo V, Proclo, en sus comentarios, criticó el quinto postulado del siguiente modo:

> *"Debe ser borrado por completo de los postulados porque se trata de un teorema henchido de dificultades, que Tolomeo se puso a resolver en un libro, y su demostración requiere varias definiciones y teoremas. Más aún: La proposición conversa es efectivamente demostrada por el propio Euclides como un teorema. La afirmación de que puesto que cuando las rectas son prolongadas más y más, alguna vez se cortarán parece plausible pero no necesaria. Por esto, es claro que debemos dar una prueba de este teorema, que es ajeno al carácter especial de los postulados"*

El mismo Proclo dio la siguiente demostración del quinto postulado:



"Dadas dos rectas paralelas m y l. Suponer que n es distinta de m y que corta a m en P. Sea Q el pie de la perpendicular desde P a l. Veamos que n corta a l. Si n coincide con la recta PQ, n corta a l. Si n no coincide con la recta PQ una de las semirectas de n la PY está entre la semirecta PQ y una semirecta de m. Sea X el pie de la perpendicular de Y hasta m. Ahora si Y se desliza hasta el final de n, el segmento XY crece indefinidamente y como la distancia entre m y l es constante, en algún momento deberá cruzar l."

Destaquemos dos claros errores en el argumento anterior: En primer lugar, una magnitud puede crecer indefinidamente sin rebasar un tope prefijado. Y en segundo lugar, no podemos presuponer que la distancia entre m y l es constante. Si se dice que son paralelas, son paralelas (no se cortan) y nada más.

La huida de Mahoma de la Meca a Medina en 622 d. C. inició la época de dominación árabe. En un siglo, su influencia se había extendido desde la India hasta Persia, Mesopotamia, Norte de África y España. En 641 Alejandría cayó bajo el imperio árabe y con el paso del tiempo Bagdad se convirtió en la "nueva Alejandría". Los Califas de Bagdad no sólo gobernaron sabia y correctamente sino que muchos fueron protectores de la cultura invitando a escolares de prestigio a sus cortes. Numerosos trabajos hindúes y griegos en astronomía, medicina y matemáticas fueron diligentemente traducidos al árabe y así se salvaron hasta que posteriormente traductores realizaran versiones en latín y otras lenguas vernáculas. Un ejemplo importante de este proceso de transmisión lo constituye el Codex Vigilamus, que se escribió en Albelda el año 957, y que es el primer manuscrito occidental en el que aparecen las cifras indo-arábigas de nuestro sistema decimal de numeración. Actualmente este manuscrito está depositado en la Biblioteca de San Lorenzo del Escorial.

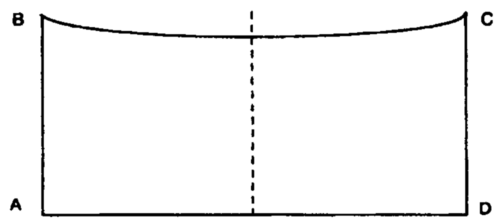
Uno de los primeros centros de enseñanza occidentales fue el creado por Gerberto (940-1003) en la ciudad francesa de Reims. En su escuela Gerberto enseñaba numerosos métodos de cálculo con la importante novedad de que también empleo los guarismos indo-árabes. Entre los libros escritos por Gerberto citamos su "Geometría" en la que podemos encontrar la siguiente descripción:

> *"Dos líneas rectas distintas continuamente una de la otra por el mismo espacio y que cuando se prolongan indefinidamente nunca se cortan se denominan paralelas; es decir, equidistantes."*

Esta definición de rectas paralelas recoge dos aspectos: El primero es que no tengan puntos comunes y, el segundo, que la distancia entre estas sea constante. Hacemos notar que la segunda propiedad no es obvia y su demostración depende del quinto postulado. Desde 999 hasta 1003 en el que murió, Gerberto fue el papa romano Silvestre II.

Las matemáticas de los árabes fueron excelentes en álgebra aritmética y trigonometría. La teoría de las paralelas fue también estudiada aunque sin grandes resultados. Ibn-al-Haitham (en torno a 965-1039), conocido como Alhazen en Occidente, dio una demostración del quinto postulado argumentando que, si un cuadrilátero tiene tres ángulos rectos, también es recto el cuarto. En su demostración supuso que el lugar geométrico de los puntos equidistantes a una recta dada era de nuevo una recta. Cayó en la trampa de la línea equidistante. La simple afirmación de que existan dos rectas equidistantes es equivalente al quinto postulado. Por otro lado, la propiedad que afirma que en un cuadrilátero si tres de sus ángulos son rectos también lo es cuarto, es también equivalente al quinto postulado.

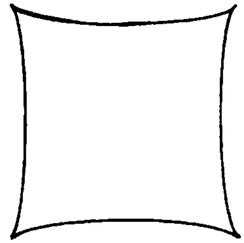
Para los árabes el nombre de Omar Khayyam (en torno a 1050-1123) es conocido por sus contribuciones en astronomía y álgebra. Los esfuerzos de Omar en la teoría de las paralelas se pueden encontrar en "La Verdad de las Paralelas y Discusión sobre la famosa duda" que es la parte I de su Discusión sobre las dificultades de Euclides. Omar Khayyam estudió, 600 años antes que Saccheri, cuadriláteros ABCD en los que AB es congruente con CD y los ángulos en A y en D son rectos.



Probó que los ángulos superiores del cuadrilátero eran congruentes. También demostró que la perpendicular por el punto medio de la base corta perpendicularmente en el punto medio del lado opuesto. Además obtuvo el siguiente resultado: "En el cuadrilátero anterior la longitud del BC es mayor que la de AD si y sólo si el ángulo en B es agudo; BC es congruente a AD si y sólo si el ángulo en B es recto y BC es mayor que AC si y sólo si el ángulo en B es obtuso. La posibilidad de que este ángulo fuera agudo o obtuso fue negada a partir del argumento de que *"la distancia entre rectas paralelas ni se expande ni se contrae, que es por lo menos lo que en verdad los filósofos piensan."*

Mencionaremos también al astrónomo árabe Nasir Eddin (1201-1274) que trabajó para Hulagu Khan, hermano de Kublai Khan y nieto de Genghis Khan. Realizó una versión de los Elementos de Euclides y entre las proposiciones 28 y 29 dio una demostración del quinto postulado. Supuso incorrectamente que si un cuadrilátero ABCD tiene ángulos rectos en A y en D, entonces el ángulo en B es agudo si y sólo si el ángulo en C es obtuso. De nuevo encontramos una propiedad que se verifica en geometría euclidiana y que en geometría absoluta es equivalente al quinto postulado.

Probablemente el primer occidental que analizó el postulado de las paralelas fuera el rabí de Aviñon conocido por Gersónides(1288-1344), que trabajó con cuadriláteros equiláteros y equiángulos. Aquí tenemos que la proposición que afirma que los ángulos de un cuadrilátero equilátero y equiángulo son rectos es también equivalente al quinto postulado.



Posteriormente, y a través de una imprenta, Clavio realizó una edición comentada de los Elementos de Euclides en la ciudad de Roma en 1584. En esta edición, a las 468 proposiciones de Euclides, se añadieron 671 más de su propia invención creando un universo de 1234 proposiciones. Se realizó incluso una edición china (1603-1607) de la primera parte de esta versión comentada de Clavio. Mencionaremos que, posteriormente, tanto Saccheri como Descartes aprendieron geometría de la edición de Clavio. En su versión monumental, Clavio, llamado por algunos el Euclides del siglo XVI, también incluyó una demostración del quinto postulado en la que otra vez se utilizaba el argumento erróneo de que una línea equidistante a una línea recta es una recta.

John Wallis (1616-1703) siendo profesor de la Universidad de Oxford se interesó en el trabajo de Nasir Eddin, y tradujo al latín los comentarios del astrónomo persa sobre las paralelas. Como consecuencia de este interés, John Wallis dio una nueva demostración en el año 1663. Para ello Wallis presuponía que, dado un triángulo, siempre existían triángulos similares a éste y no congruentes. Sin embargo, esta afirmación es equivalente al quinto postulado.

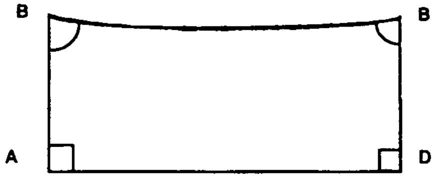
Mención especial requiere el italiano Girolamo Saccheri (1667-1733). Éste ingresó en los Jesuitas a los 23 años, fue profesor de Teología en un Colegio Jesuita de Milán y posteriormente enseño Filosofía en Turín. Más tarde fue profesor de Matemáticas en la Universidad de Pavía. En este periodo aplicó su método favorito "la reducción al absurdo" para probar el quinto postulado. Saccheri estudió cuadriláteros ABCD en los que AB es congruente con DC y los ángulos en A y D son rectos, exactamente iguales que los que había estudiado Omar Khayyam.

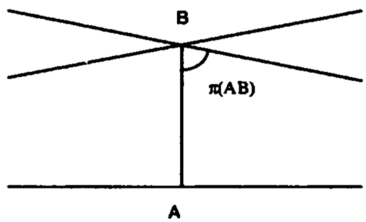
En los cuadriláteros que denominaremos de Saccheri, existen tres casos posibles:

1º) Los ángulos en B y C son rectos.

2º) Estos ángulos son obtusos.

3º) Dichos ángulos son agudos.





En las condiciones habituales de la geometría absoluta, se puede probar que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero de Saccheri es menor o igual que dos llanos. Así que el segundo caso queda descartado. Sin embargo, por mucho que lo intentó, no consiguió llegar a una contracción suponiendo que se verificara el tercer caso. Por esta razón la llamo la enemiga hipótesis del Ángulo Agudo. Bajo la hipótesis del Ángulo Agudo, Saccheri probó numerosos resultados de la geometría no euclidiana. En particular citemos el siguiente resultado:

Proposicón IX. Bajo las hipótesis del Ángulo Recto, Ángulo Obtuso o Ángulo Agudo, respectivamente se tiene que la suma de los ángulos de un triángulo es dos rectos, mayor que dos rectos o menor que dos rectos.

También probó que, bajo la hipótesis del Ángulo Agudo, dada una recta y un punto exterior, en el haz de rectas que pasan por el punto exterior existen dos rectas asintóticas que dividen al haz en dos partes. En una parte están las rectas que cortan a la recta dada y en la otra, las rectas que no la cortan. El ángulo π(AB), formado por la recta AB y una de las semirectas asintóticas, se llama ángulo de paralelismo asociado a la distancia AB.

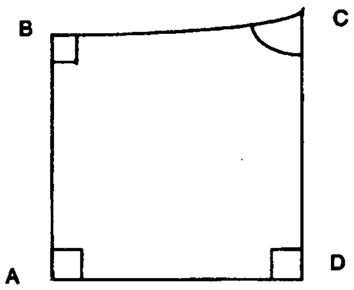
Observemos que la geometría resultante, cuando consideramos la hipótesis el Ángulo Agudo, no es compatible con el quinto postulado y aparecen proposiciones diferentes a las de la geometría euclidiana. Recordemos que la Proposición 29 de los Elementos asegura que la suma de los ángulos de un triángulo es dos rectos.

No obstante, la conclusión final de su trabajo se basa más en la intuición y en su creencia en la validez del quinto postulado que en la lógica. Su argumento final se apoya en la afirmación de que bajo la hipótesis del Ángulo Agudo se pueden construir dos rectas paralelas distintas que tendrían una perpendicular común en el punto del infinito, lo que es contrario a la naturaleza de la línea recta. Es decir que la hipótesis del Ángulo Agudo es falsa porque repugna la naturaleza de la línea recta.

Ciertamente, Saccheri había probado muchos teoremas de la geometría no euclidiana pero no fue capaz de valorar el tesoro que había encontrado. Lo desechó a causa de su fe ciega en la validez del quinto postulado.

El fruto de sus investigaciones fue recogido en su libro "Euclides ab omni naevo vindicatus". Saccheri murió el 25 de Octubre de 1733; poco antes había recibido el permiso para imprimir el citado libro, de la Inquisición, con fecha 13 de Julio, y del Provincial de los Jesuitas con fecha 16 de Agosto. El libro de Saccheri atrajo una considerable atención en el tiempo de su publicación. En las historias de matemáticas realizadas en Alemania y Francia durante el siglo XVIII se menciona dicho libro. Sin embargo, en Francia e Italia pronto se olvidó esta obra aunque no ocurrió lo mismo en Alemania.

Posteriormente, el suizo Johann Heinrich Lambert (1728-1777) escribió la obra "Die Theorie der Parallellinien" (La teoría de las Paralelas) que se publicó después de su muerte. En su trabajo Lambert se preguntó si el quinto postulado se podría deducir a partir de los demás o si sería necesaria alguna hipótesis adicional. Después dio diferentes afirmaciones que necesitaban ser probadas pero que implicaban el quinto postulado. En la parte final consideró cuadriláteros pero con tres ángulos rectos. De nuevo tenía las tres hipótesis posibles respecto al cuarto ángulo. Bajo la hipótesis del Ángulo Agudo, Lambert probó que el área de un triángulo es proporcional a su defecto, que es la diferencia entre un llano y la suma de sus ángulos interiores.



Observemos aquí la diferencia del área de un triángulo establecida en la Proposición 41 de los Elementos como la mitad de un rectángulo con la misma base que el triángulo y su misma altura. Bajo la hipótesis del Ángulo Agudo existe una cota superior constante de modo que el área de cualquier triángulo es siempre más pequeña que esa cota superior. En la geometría euclidiana esa área se puede hacer tan grande como queramos. En la geometría no euclidiana los triángulos con área pequeña tienen ángulos interiores cuya suma es próxima a dos rectos y en los triángulos de área grande la suma de los ángulos será tan pequeña como deseemos.

También conjeturó que la hipótesis del Ángulo Agudo se podría verificar en una esfera de radio imaginario puro. Quizás llegó a esta conclusión al analizar la fórmula $(A+B+C-\pi)r^2$ que determina el área de un triángulo esférico de ángulos A, B y C en una esfera de radio r. Si se toma como radio r=si, donde i es el imaginario puro, se obtiene que el área sería s^2 (π -A-B-C) es decir el área sería proporcional al defecto.

Adrian Marie Legendre (1752-1833) fue un eminente y quizás el más infatigable en la búsqueda de la demostración del quinto postulado. Sus varios intentos aparecieron en las doce ediciones de sus "Élements de géométrie" desde 1794 hasta 1823. Su monografía "Réflexions sur differéntes maniéres de démostrer la théorie des paralléles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle" apareció en 1833, véase [15], cien años después de la publicación del libro de Saccheri. Aunque la publicación del libro de Saccheri produjo curiosidad sus contenidos no eran muy conocidos, de modo que en sus trabajos aparece de nuevo el resultado de que en geometría absoluta la suma de los ángulos de un triángulo es menor o igual que dos rectos; también prueba que si existe un triángulo cuyos ángulos suman dos rectos, entonces todos los triángulos tienen esa propiedad. Estos resultados ya habían sido probados en el libro de Saccheri que a su vez contenía resultados ya probados por Omar Khayyam. Después de sus variadas demostraciones e investigaciones, Legendre pensó que finalmente había removido las dificultades de la fundamentación de la geometría. En sustancia, sin embargo, no aportó nada a los resultados obtenidos por sus predecesores en la teoría de las paralelas.

Del análisis basado en comentarios de historiadores antiguos, manuscritos y libros impresos antiguos se desprende:

Que son muy numerosos los intentos que desde el siglo III a. C. hasta el siglo XIX se realizaron para probar el quinto postulado de Euclides. Estos estudios los realizaron personas de distintas religiones y culturas. Recordemos al rabí Gersónides con sus cuadriláteros equiláteros y equiángulos, al musulmán Omar Khayyam o al jesuita Girolamo Saccheri.

Que todas las demostraciones contenían algún fallo que normalmente consistía en una afirmación que es correcta en geometría euclidiana y que en cierto sentido parece que sea algo evidente que no sea preciso demostrar. Algunas de estas "verdades evidentes", que de modo erróneo se utilizaron para purificar los fundamentos de la geometría, son las siguientes:

"existen dos rectas equidistantes"

"la distancia entre rectas paralelas ni se expande ni se contrae"

"una línea equidistante a una línea recta es una recta"

"en un cuadrilátero, si tres de sus ángulos son rectos también lo es cuarto"

"si un cuadrilátero ABCD tiene ángulos rectos en A y en D y AB es congruente con DC, entonces el ángulo en B es agudo si y sólo si el ángulo en C es obtuso"

"los ángulos de un cuadrilátero equilátero y equiángulo son rectos"

"existen dos triángulos similares pero no congruentes"
"dado un triángulo siempre existen triángulos similares a éste y no congruentes"
"por un punto que no esté en una recta dada pasa una única paralela"
"por tres puntos no colineales pasa una única circunferencia"
"la suma de los ángulos de un triángulo es dos rectos"

Todas estas afirmaciones y otras muchas más en la geometría absoluta son equivalentes al quinto postulado. Es decir, que se puede sustituir el quinto postulado por una cualquiera de ellas. En este caso la afirmación elegida adquiere el carácter de postulado, el quinto postulado abandona su carácter axiomático para convertirse en una proposición que necesita demostración y también serán proposiciones o teoremas el resto de las afirmaciones.

Especial mención requieren los resultados obtenidos por Saccheri, que indudablemente son los primeros resultados de importancia en la geometría no euclidiana. El método de trabajo de Saccheri, de que negando el quinto postulado se acabaría encontrado una contradicción, abrió la puerta al descubrimiento de la geometría no euclidiana. Realmente Saccheri había descubierto la geometría no euclidiana pero su fe ciega en la verdad del quinto postulado lo llevó a recurrir a falacias más o menos elaboradas para que la enemiga hipótesis del Ángulo Agudo se destruyera a sí misma.

No sabemos si Saccheri o Lambert hicieron experimentos realizando mediciones de los ángulos interiores de un triángulo. No obstante, el margen de error de los instrumentos de medición angular de la época les dejaba un margen suficientemente grande para poder haber asegurado que también existía una geometría en la que la suma de los ángulos de un triángulo era menor que dos rectos. No lo afirmaron porque pensaban que no podía existir más que una geometría correcta para describir el espacio, la euclidiana.

FUNDADORES DE LA GEOMETRÍA NO EUCLIDIANA

A finales de siglo XVIII y principios del XIX aparecieron los tres principales artífices en la historia de la geometría no euclidiana: Karl Friedrich Gauss (Grunswick, 1777-Gotinga, 1855), Nikolai Ivanovich Lobachevski (Bajo Novgorod, actual Gorki, 1792-1856), János Bolyai (Kolozsvár, actual Cluj-Napoca, Rumania, 1802-1860). Gauss fue reconocido en su tiempo como un gran matemático. Muchos de los sucesos que precedieron a la publicación de la existencia de geometrías no euclidianas aparecen reflejados en la correspondencia de Gauss (véase el grabado de la derecha).

Carl Friedrich Gauss

Incluimos también imagenes, desafortunadamente de baja calidad, de Nikolai Lobachevsky y de János Bolyai

Nikolai Ivanovich Lobachevsky

Bolyai

Hay evidencias de que efectivamente Gauss se ocupó de la teoría de las paralelas a finales del siglo XVIII. El 16 de Noviembre de 1799, escribió una carta a Farkas Bolyai (padre de János Bolyai) en la que, además de pedir excusas por no haber discutido en sus tiempos de estudiantes la teoría de las paralelas, le decía:

> *"... en verdad que la mayor parte de los argumentos que se aceptarían como una demostración, a mis ojos, prueban tanto como nada; por ejemplo, si existe un triángulo cuya área fuese mayor que la de una superficie dada, entonces yo mismo podría establecer rigurosamente toda la geometría."*

Farkas Bolyai, el padre de János Bolyai, que era, según Gauss, el más raro de los espíritus que había conocido, también había dedicado gran parte de su tiempo a la investigación de la ciencia de las paralelas; por ejemplo, había probado que el quinto postulado de Euclides era equivalente a la afirmación de que tres puntos no colineales determinan una única circunferencia.

El resultado mencionado por Gauss en su carta a Farkas es obvio si se tiene en cuenta las conclusiones de Lambert; es decir, que el defecto de un triángulo es menor que un llano. Se sabe que Gauss conocía los trabajos de Saccheri y Lambert, así lo prueban las anotaciones realizadas por Gauss en los márgenes de los trabajos de éstos y la constancia de que los trabajos de Lambert fueron consultados por Gauss en 1795 y de nuevo en 1799.

En 1816 escribía a su colaborador, el astrónomo C.L. Gerling:

> *"Es fácil de probar que si la geometría euclidiana no es la verdadera, entonces no existen figuras similares... Incluso sería deseable que la geometría euclidiana fuera falsa, porque entonces tendríamos una unidad de longitud universal..."*

Friedrick Ludwing Wachter (1792-1817), fue un estudiante de Gauss que se dedicó a la teoría de las paralelas; a la geometría resultante de la negación del postulado de Euclides la denominó Geometría Anti-euclidiana. En una carta que escribió a Gauss en Diciembre de 1816, Wachter probaba que la superficie a la que tiende una esfera cuando su radio tiende al infinito no es un plano en la Geometría Anti-euclidiana sino que la geometría de esta superficie es idéntica a la del plano euclidiano. Wachter había profundizado enormemente en la teoría de las paralelas y pudo haber influido mucho en Gauss. El 3 de Abril de 1817 Wachter se fue a dar su habitual paseo nocturno y ya jamás regresó. El misterio de la desaparición del que podría haber sido el inventor de la geometría no euclidiana nunca se esclareció.

En el año 1816, Ferdinand Karl Schweikart (1780-1859) había avanzado más que Gauss en 1817. Este profesor de leyes, resumió su trabajo en un Memorandum de una página y en Diciembre de 1818, le pidió a su compañero Gerling en Marburg que lo enviara a Gauss para pedirle su opinión sobre sus trabajos. Dicho Memorandum empieza diciendo:

> *"Existe una geometría de dos hojas, -una geometría en sentido estricto- la geometría euclidiana; y la geometría astral."*

Aunque el resto del Memorandum es consecuencia de los resultados de Saccheri, con los que estaba familiarizado, es el primer pronunciamiento sobre la existencia de una geometría no euclidiana. El nombre de astral vendría de que la unidad de longitud que corresponde a la mitad de un recto tendría dimensiones astronómicas. Gauss contestó a Gerling:

> *"El Memorandum del Profesor Schweikart me ha sido muy grato y te pido que le trasmitas mis felicitaciones. Para mí es como si hubiera escrito mis más profundos pensamientos."*

Schweikart no publicó ninguno de sus resultados sobre geometría astral.

Otra evidencia de que Gauss se había ocupado de la geometría no euclidiana se percibe claramente en una carta fechada el 8 de Noviembre de 1824 en la que contesta a Taurinos, quién investigaba la geometría de la esfera de radio imaginario, y le decía:

> *"El supuesto de que la suma de los triángulos es menor que 180º conduce a una curiosa geometría, completamente diferente de la nuestra, pero totalmente consistente, y que he desarrollado para mi satisfacción, de modo que he podido resolver en ella cada problema con la excepción de una constante que no puede ser designada a priori. Cuanto más grande se toma esta*

> *constante más próximo se está de la geometría euclidiana, y si se toma infinitamente grande las dos coinciden. Los teoremas de esta geometría parecen paradójicos, y al no iniciado absurdos; pero calma, una firme reflexión revela que no contienen nada imposible. Por ejemplo, los tres ángulos de un triángulo pueden llegar a ser tan pequeños como deseemos, para ello basta tomar los lados suficientemente grandes. El área de un triángulo no excede de un límite definitivo... . Todos mis esfuerzos en encontrar una contradicción en esta geometría no euclidiana han sido infructuosos... en cualquier caso, por favor, mira esto como una comunicación privada, de la que no sea haga uso público o se le dé publicidad. Si alguna vez estuviera menos ocupado que ahora podría poner en orden y publicar mis investigaciones."*

Franz Adolf Taurinos (1794-1874) estudio Derecho, no obstante, debido a las influencias de su tío Ferdinand Karl Schweikart y la influencia de Gauss se interesó por los temas de la geometría y la ciencia de las paralelas. Siempre estuvo convencido de la absoluta verdad del postulado de las paralelas de Euclides. En 1826 publicó, su "Geometriae Prima Elementa" en el que descarta la hipótesis del Ángulo Agudo argumentando que la existencia de una unidad de longitud absoluta es algo imposible. Es este trabajo desarrolló completamente la idea de Lambert de estudiar la trigonometría en la esfera imaginaria. Como utilizó logaritmos con frecuencia en sus cálculos, la llamo geometría esférico-logarítmica. Con una mirada retrospectiva, podemos decir que la geometría esférico-logarítmica de Taurinos da una prueba de la consistencia relativa de la geometría hiperbólica. El libro de Taurinos tuvo poco éxito y Taurinos, disgustado, quemó las copias que sobraron.

Un mes antes de que János Bolyai enviara en 1831 por primera vez su trabajo a Gauss, que por cierto parece que no llegó a su destino, éste último había escrito una carta a su amigo H. C. Schumacher en la que decía:

> *"En las pasadas semanas he empezado a escribir mis propias meditaciones (sobre la teoría de las paralelas), algunas de las cuales me ocupan desde hace 40 años. No las he puesto nunca por escrito, así que las he repasado tres o cuatro veces para tenerlas frescas en mi mente. También desearía que no perecieran conmigo."*

En esta misma carta Gauss daba la longitud de la circunferencia de radio r en la forma

$$\pi k(e^{-(r/k)} - e^{(r/k)})$$

donde k es la constante no determinada a priori a la que se refería Gauss. Esta fórmula con funciones hiperbólicas se expresa como $2\pi\kappa$ senh (r/κ).

Notemos que esta fórmula nos sugiere un posible procedimiento para determinar si la geometría del espacio que nos rodea es o no es euclidiana. Para ello habría que buscar circunferencias perfectas en la naturaleza y medir su longitud y su radio. Por ejemplo, la circunferencia de radio uno tiene en el plano euclídeo la longitud de 2π, y tomando $\kappa=10^6$ la circunferencia de radio uno tiene una longitud un poco mayor que la euclidiana. Se empiezan a diferenciar en la cifra decimal duodécima. Naturalmente, si tomamos como $\kappa=10^{1000}$, la diferencia se empezara a notar a partir de la cifra decimal situada en el lugar dos mil. Además de los problemas que se plantean a la hora de buscar una circunferencia perfecta en la naturaleza y los sistemas de medida que se van a emplear, la cuestión planteada no va a tener una respuesta, ya que, aunque los errores de medida sean muy pequeños, basta tomar la constante κ suficientemente grande, para que la posible diferencia que se produzca entre la longitud no euclidiana y la euclidiana no sepamos si se debe a los límites de exactitud de la medida experimental realizada o al hecho de que el ambiente que nos rodea sea de naturaleza no euclidiana.

El segundo de los personajes citados, János Bolyai fue un oficial húngaro en el ejercito de Austria que iba a compartir con Lobachevski el honor del descubrimiento de las geometrías no euclidianas.

En su juventud demostró una gran capacidad para las matemáticas, materia en la que fue instruido por su padre Farkas Bolyai. Las enseñanzas de su padre hicieron que enseguida pusiera su atención el postulado de las paralelas. Así, la teoría de las paralelas fue la ocupación favorita de János durante su estancia en el Colegio Real de Ingenieros Militares en Viena. Estos estudios fueron compartidos con Carl Szász. En sus conversaciones utilizaron los conceptos de línea equidistante a una línea recta y la importante idea de paraciclo. Ellos observaron que el Axioma XI de Euclides (postulado quinto) se obtendría si se probara que un paraciclo es una recta. Hasta 1820 estuvo obsesionado con la idea de encontrar una demostración del Axioma XI, e incluso pensó que había logrado su objetivo.

Su padre intentó disuaduirle y le aconsejó que cesará en sus intentos. Farkas escribió a su hijo:

"No debes intentar el problema de las paralelas. Conozco este camino hasta el final. Yo atravesé esa noche profunda, y extinguió la luz y la alegría de mi vida. Te suplico que dejes en paz la ciencia de las paralelas... Pensé que me sacrificaría por descubrir la verdad. Estaba preparado para llegar a ser un mártir que removiera los fallos de la geometría y así retornarla purificada a la humanidad. Realicé trabajos enormemente monstruosos, mis creaciones son mejores que las de otros y todavía no he logrado una satisfacción completa... . Lo abandoné cuando vi que nadie puede alcanzar la profundidad de la noche. Volví desconsolado, apenado de mí mismo y de la humanidad.

Confieso que desconfío que desvíes tu línea. Me parece que he estado en estas regiones, que he viajado por los arrecifes de este infernal mar profundo y siempre he vuelto con el mástil roto y las velas desgarradas. Arriesgué sin pensarlo mi vida y mi felicidad."

Pero el joven Bolyai no oyó los consejos de su padre. Examinó y reconoció los errores que había cometido y se encaminó hacía nuevos descubrimientos por un nuevo camino. Se puso él mismo a construir el espacio absoluto, utilizando el método deductivo de los griegos, pero sin decidir a priori la certera o falsedad del Axioma XI (quinto postulado).

En 1823 ya había descubierto la verdadera naturaleza del problema e incluso había encontrado la fórmula del ángulo de paralelismo en función de la distancia

$$e^{-(a/k)} = \tan\left(\frac{\pi(a))}{2}\right)$$

que es la clave de la trigonometría no euclidiana. Los descubrimientos que en esta época había realizado János quedan reflejados en el siguiente extracto de una carta que el 3 de Noviembre de 1823 escribió a su padre:

> *"Ahora he decidido publicar un trabajo sobre las paralelas, en cuanto tenga puesto el material en orden, y mis circunstancias lo permitan. Todavía no he completado este trabajo, pero el camino que he seguido da una positiva evidencia de que la meta puede ser alcanzada, si es que ello es posible; no la he alcanzado completamente, pero he descubierto tales maravillas que estoy asombrado, sería causa de un gran pesar si éstas se perdieran.*
>
> *Cuando tú, mi querido padre, las veas, las entenderás; de momento no puedo decir sino esto: que de la nada he creado un nuevo y extraño universo. Lo que te he enviado antes es como una casa de naipes en comparación con una torre. Estoy completamente convencido de que esto me traerá honores, como si ya hubiera completado el descubrimiento "*

Algunas veces una nueva idea se les ocurre, más o menos simultáneamente, a varias personas. Cuando el joven Bolyai anunció privadamente sus descubrimientos en geometría no euclidiana, su padre le contestó:

> *"Me parece aconsejable, si ya tienes la solución del problema, que su publicación debe ser acelerada, por dos razones: la primera, porque las ideas pasan fácilmente de unos a otros, y en este caso se pueden anticipar en su publicación; la segunda, porque parece cierto, como ya ha sucedido, que muchas cosas tienen una época en las que son descubiertas en varios lugares simultáneamente, exactamente como las violetas que en primavera aparecen en todos los lados. También una batalla científica es una guerra seria, en la que no se sabe cuando llegará la paz. De este modo debemos conquistar cuanto podamos, puesto que la ventaja es siempre la primera conquista."*

No sospechaba Farkas que su presentimiento era el fiel reflejo de la realidad: El descubrimiento simultáneo de la Geometría no euclidiana en los trabajos de Gauss, Taurinus y Lobachesvki.

János Bolyai publicó su trabajo como un apéndice del primer volumen del libro de su padre titulado "Tentamen Juventutem Studiosam in Elementa Matheseos" cuyo primer volumen fue publicado en 1832. El título de este famoso apéndice es:

"Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei, a priori haud unquanm decidenta, independentem: adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica."

Es decir, este apéndice versa sobre la ciencia del espacio absoluto con una demostración de la independencia del Axioma XI, que no se puede decidir a priori, y, en adición, la cuadratura del círculo en caso de falsedad.

Señalemos el hecho anecdótico de que János Bolyai, por sus 36 páginas de gloria eterna, tuvo que contribuir con un poco más de 104 florines para que su trabajo fuera publicado.

Este apéndice fue enviado a Gauss en Junio de 1831, pero no llegó a su destino; fue enviado por segunda vez en 1832, y, después de siete semanas (6 de marzo de 1832) Gauss contestaba a Farkas del siguiente modo:

> *"Si empiezo manifestando que soy incapaz de elogiar este trabajo, de momento te sobresaltarás. Pero no puedo hacer otra cosa. Elogiarlo supondría elogiarme a mí mismo. En verdad, la totalidad del trabajo, el camino que ha tomado tu hijo y los resultados a los que ha llegado, coinciden casi completamente con mis meditaciones que han ocupado parte de mi pensamiento en los últimos treinta o treinta y cinco años. Por eso me encuentro sorprendido en extremo. En referencia a mis trabajos, de los cuales hasta ahora poco ha sido publicado, mi intención era que no fueran publicados en vida. La mayor parte de la gente no tiene la mentalidad necesaria para entender nuestras conclusiones y sólo algunos podrían mirar con especial interés lo que les he comunicado sobre este tema. Para entender estas cosas, se debe tener una percepción muy fina de lo que se necesita y sobre este punto la mayoría esta muy confusa. Por otro lado, mi intención era escribir todo esto más tarde o más temprano para que al menos no pereciera conmigo. Así que estoy muy sorprendido de que se me haya resuelto este problema y estoy muy contento de que sea el hijo de un viejo amigo quien me aventaje de tan notable manera."*

Farkas comunicó el contenido de la carta de Gauss a su hijo añadiendo:

> *"La respuesta de Gauss con relación a tu trabajo es muy satisfactoria y redundará en el honor de nuestro país y nuestra nación"*

Diferente efecto produjo la carta de Gauss en János. Era incapaz de convencerse a sí mismo de que otros, y de modo independiente, hubieran llegado antes que él a la Geometría no euclidiana. János siempre miró a Gauss, el príncipe de los geómetras, con una injustificable aversión.

Quizás es cierto que, como dicen algunos comentaristas, János Bolyai tuviera un carácter difícil y altanero, como lo prueba el hecho de que se involucrara en un duelo contra trece oficiales de caballería con la condición de poder tocar un poco el violín después de cada duelo. János salió victorioso de los trece duelos, pero a causa de este incidente fue retirado de la carrera militar.

Al margen de cómo fuera el carácter de János, lo que sí que es cierto es que un pequeño comentario público de Gauss en favor de János le hubiera proporcionado un lugar de honor entre los científicos de la época.

János Bolyai, en su Ciencia del Espacio Absoluto, tuvo el acierto de desarrollar todos los resultados que pudo sin utilizar el Axioma XI (quinto postulado) de Euclides. Después analizó las dos geometrías posibles según se admitiera como cierto el Axioma XI o su negación. Además de calcular el ángulo de paralelismo en función de la distancia, podemos resumir sus resultados en el siguiente comentario:

Bajo hipótesis no euclidianas existen tres clases de superficies uniformes que son regidas por la trigonometría no euclidiana, trigonometría ordinaria y trigonometría esférica. La primera clase es la de las hiperesferas, que son aquellas superficies equidistantes a un plano, y que en particular contiene a los planos; esta clase de superficies es regulada por la trigonometría no euclidiana. La segunda clase es la de las paraesferas, o esferas de radio infinito, en la que se aplica la trigonometría ordinaria, y finalmente, la clase de las esferas, en las que se aplica la trigonometría esférica y cuya geometría es independiente del Axioma XI.

El tercer personaje que hemos mencionado, Nikolai Ivanovich Lobachevski, también iba a ser uno de los cofundadores de la Geometría no euclidiana, nació en el Bajo Novgorod (actualmente ciudad de Gorki) en la familia de un humilde funcionario. Terminó sus estudios en la Universidad de Kazán (sur de Rusia) en 1811. Tuvo como profesor al alemán J.M.C. Bartels (1769-1836), que fue amigo de Gauss y que posiblemente lo introdujo en el estudio de los problemas geométricos de la época. Lobachevski fue profesor de esta universidad en 1816, donde impartió diferentes materias matemáticas, física y astronomía. Posteriormente, desde 1827 hasta 1846, fue rector de dicha universidad.

El 11 (12 según otras fuentes) de febrero del año 1826, en una reunión de la sección de ciencias físico-matemáticas de la Universidad de Kazán, Lobachevski informó sobre su obra "Exposición breve de los fundamentos de la geometría no euclidiana con una demostración lógica del teorema de las paralelas". Parece ser que se realizó un manuscrito sobre los contenidos de esta exposición, pero desafortunadamente se ha perdido y no hay constancia alguna sobre éste. En su conferencia, Lobachevski aseguraba la existencia de una geometría basada en el principio de que a través de un punto exterior a una recta se podían trazar dos paralelas distintas y en la que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos.

Después de tres años, en 1829, editó las partes esenciales de su exposición, completada con algunas aplicaciones de la nueva teoría al análisis, bajo la denominación: "Sobre los principios de la geometría", véase [16]. Este resumen, escrito en ruso, consta de sesenta y seis páginas. Posteriormente desarrolló más esta geometría publicando una serie de trabajos: "Geometría imaginaria", "Aplicaciones de la geometría imaginaria a algunas integrales" , y "Nuevos principios de la geometría con una teoría completa de las paralelas", véanse [17,18,19]. En un intento de propagar sus resultados, en 1837 publicó en francés, "Géométrie imaginaire", véase [20], y un pequeño libro en alemán "Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien", véase [21].

Mirando el trabajo de Lobachevski de 1840, vemos que Lobachesvki introduce la noción de horoesfera y horociclo que se corresponden con las nociones de paraesfera y paraciclo de Bolyai. Lobachevski obtuvo el siguiente notable resultado: "La geometría Euclidiana y, en particular, la trigonometría plana ordinaria, se verifican en la horoesfera."

Utilizando esta propiedad y otra que relaciona horociclos coaxiales; es decir, circunferencias concéntricas de radio infinito, Lobachevski obtuvo las fórmulas para la trigonometría del plano no euclidiano y para la trigonometría esférica. La formula del ángulo de paralelismo es obtenida por Lobachevski en la forma:

$$\tan\left(\frac{\pi(x)}{2}\right) = a^{-x}.$$

Describiremos brevemente los resultados de Lobachevski del modo siguiente: En los triángulos cuyos lados son muy pequeños podemos utilizar geometría euclidiana ordinaria si despreciamos infinitésimos de orden superior. Si en la trigonometría no euclidiana se sustituyen las magnitudes que corresponden a los lados del triángulo por las magnitudes imaginarias puras, se obtienen las fórmulas de la trigonometría esférica. También observó que si se introducen sistemas de coordenadas de modo similar a las coordenadas cartesianas se pueden calcular longitudes, áreas y volúmenes por los métodos de la geometría analítica.

La acogida proporcionada a la geometría de Lobachevski fue más que desalentadora. Los académicos, entre ellos Ostrogradski (1801-1861), daban valoraciones negativas sobre sus obras y se editaban libelos contra Lobachevski. Se requería valor, fe en su verdad científica y en el significado de sus investigaciones, para hacer frente a estos hechos. Lobachevski tuvo las cualidades necesarias, luchó insistentemente, y, pese a ello, en 1856 murió incomprendido y no reconocido.

Lobachevski, bajo la forma de un aparente ascenso y en contra de su voluntad, fue retirado de su cargo de rector. En 1855, estando ciego, dictó en ruso y en francés su obra "Pangeometría", véase [22], donde se precisa la geometría fundada sobre la teoría general y rigurosa de las paralelas y se extienden los métodos analíticos a la geometría no euclidiana. Esta falta de reconocimiento de la grandeza de su obra tiene una notable excepción, Gauss consiguió que Lobachevski fuera elegido miembro de la Sociedad Científica de Gotinga en 1842.

A pesar de las diferencias entre los trabajos de Bolyai y Lobachevski, son notorias las analogías: Ambos empiezan con el ángulo de paralelismo; ambos notan la naturaleza euclidiana de la geometría de la paraesfera (horoesfera); ambos comparan longitudes en paresferas concéntricas; y ambos encuentran la relación con la trigonometría esférica y observan la independencia de la geometría esférica del axioma de las paralelas.

Lobachevski tuvo como profesor al alemán J.M.C. Bartels que, como ya hemos mencionado, fue amigo de Gauss. Incluso estuvieron juntos durante dos años en Brunswick, precisamente los dos anteriores al desplazamiento de Bartels a Kazán en 1807. Este hecho da lugar a numerosas conjeturas e hipótesis. El hecho de que Gauss estuviera pensando en esta geometría durante 30 o 35 años anteriores a 1832, que fuera amigo común de Farkas, padre de János Bolyai, y de Bartels, profesor de Lobachevski, da lugar a la pregunta siguiente: ¿Fue realmente Gauss el medio de transmisión, quizás de modo involuntario, entre ambos investigadores?

Antes de 1807, parece que Gauss habría intentado, sin conseguirlo, probar el quinto postulado. También parece que Gauss no tuvo contacto con Bartels después de 1807, así que se ha admitido que Lobachevski desarrolló de modo independiente la geometría no euclidiana.

El siguiente extracto de "Nuevos principios de la geometría, con una teoría completa de las paralelas" explica las razones que llevaron a Lobachevski a formular su geometría:

> *"La falta de éxito de los intentos realizados, desde tiempos de Euclides, por el espacio de 2000 años, hizo surgir en mí la sospecha de que la verdad que se quería probar no estaba en los datos mismos; que para establecerla se necesitaba la ayuda de un experimento, por ejemplo, de observaciones astronómicas para el caso de otras leyes de la naturaleza. Cuando finalmente me convencí a mí mismo de la justicia de mi conjetura y creí que había resuelto esta difícil cuestión, escribí en 1826, una memoria sobre este tema."*

La pregunta: ¿A quiénes debemos atribuir el honor del descubrimiento de la geometría no euclidiana?, se puede contestar del siguiente modo:

Se podría decir que Saccheri encontró la geometría hiperbólica y que Gauss la descubrió. No obstante, tanto Bolyai como Lobachevski afirmaron, de modo independiente, su consistencia en sendas publicaciones. Así que los honores del descubrimiento de la geometría de Saccheri, Lambert, Wachter, Schweikart, Gauss, Taurinos, Bolyai y Lobachesvski se podrían adjudicar a Bolyai y a Lobachevski si se utiliza como criterio la existencia de una publicación no privada en la que se afirme de modo razonado que tal geometría es posible. No obstante, un cambio de criterio puede hacer que los honores sean adjudicados a alguno de los otros matemáticos mencionados.

ALGUNOS ASPECTOS SOBRE LA EVOLUCIÓN POSTERIOR DE LA GEOMETRÍA

A mediados del siglo XIX apareció un nuevo principio general de qué es lo que se puede entender por una Geometría. Esta idea fue expuesta por Riemann en el año 1854 en una conferencia titulada "Sobre las hipótesis que yacen en los fundamentos de la Geometría"; posteriormente, esta conferencia que ha sido frecuentemente citada, se publicó en 1867.

Según Riemann, para la construcción de una Geometría es necesario dar: una variedad de elementos, las coordenadas de estos elementos y la ley que mide la distancia entre elementos de la variedad infinitamente próximos. Para ello se supone que las partes infinitesimales de la variedad se miden euclidiamente. Esto significa que hay que dar en su forma más general el elemento de arco en función de las coordenadas:

$$ds^2 = \sum g_{ij} dx_i dx_j$$

Se definen como transformaciones aquellas aplicaciones que dejan invariante el elemento de arco. Esta forma de concebir el espacio evolucionó con el tratamiento dado a comienzos del siglo XX en los trabajos de los matemáticos italianos R. Ricci-Curbastro y T. Levi-Civita hasta la noción que hoy denominamos como variedad riemanniana.

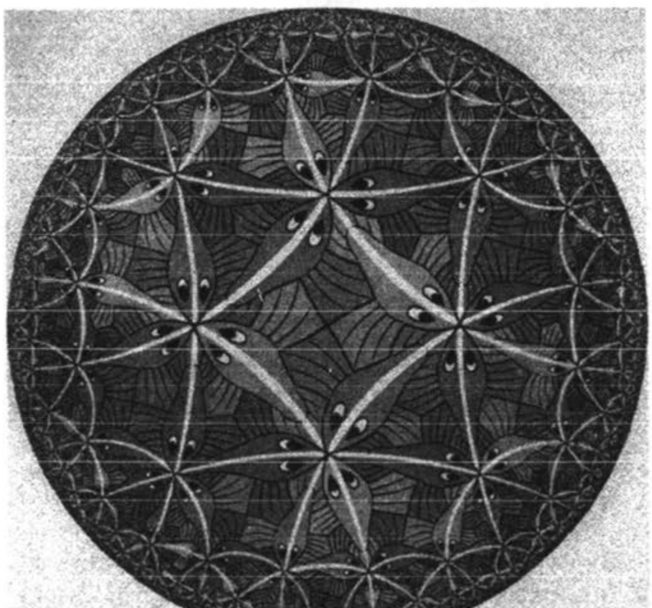
En una variedad riemanniana se dispone de una forma en el espacio tangente de cada punto de la variedad que nos permite medir longitudes de vectores tangentes y el ángulo determinado por dos vectores. Ello permite determinar longitudes de las curvas que se consideren en dicha variedad, también se pueden calcular el volumen de adecuadas partes de la variedad. Dados dos puntos "suficientemente próximos" se pueden considerar todas las curvas que existan en la variedad entre esos dos puntos. Existe una curva especial que es la que realiza el recorrido con menos longitud entre esos dos puntos. Estas curvas se denominan geodésicas.

También se introducen la noción de curvatura riemanniana que asocia un escalar a cada plano tangente a cada punto de la variedad y que para el caso de superficies coincide con la noción de curvatura de Gauss. En los casos en que la curvatura sea cero la variedad riemanniana se dice que es parabólica, si es constante y mayor que cero se dice que es elíptica, y, si es constante y negativa se dice que es una variedad hiperbólica.

Este modelo matemático denominado variedad riemanniana contiene la mayor parte de los modelos geométricos estudiados hasta el siglo XX. Por una parte, los espacios euclídeos se pueden considerar como variedades riemannianas con curvatura de Riemann nula; las esferas y espacios proyectivos, de los que a pesar de su importancia nada hemos mencionado, tienen estructura de variedades riemannianas elípticas, y los espacios no euclidianos son casos particulares de variedades riemannianas hiperbólicas. Además, las superficies e hipersuperficies de los espacios euclidianos admiten también de modo natural estructura de variedad riemanniana.

Estas propiedades hacen que la geometría riemanniana sea un marco adecuado para el estudio de la geometría. No obstante, existen otras formas de abordar el estudio de la geometría; por ejemplo, el estudio de grupos discontinuos de transformaciones da una forma de presentar la geometría como el estudio de propiedades de grupos de transformaciones tal y como la presentó Klein en su famoso programa de Erlangen. Hemos de decir que existen modelos más amplios que generalizan simultáneamente la geometría riemanniana y el enfoque de geometría como estudio de las propiedades de los grupos de transformaciones.

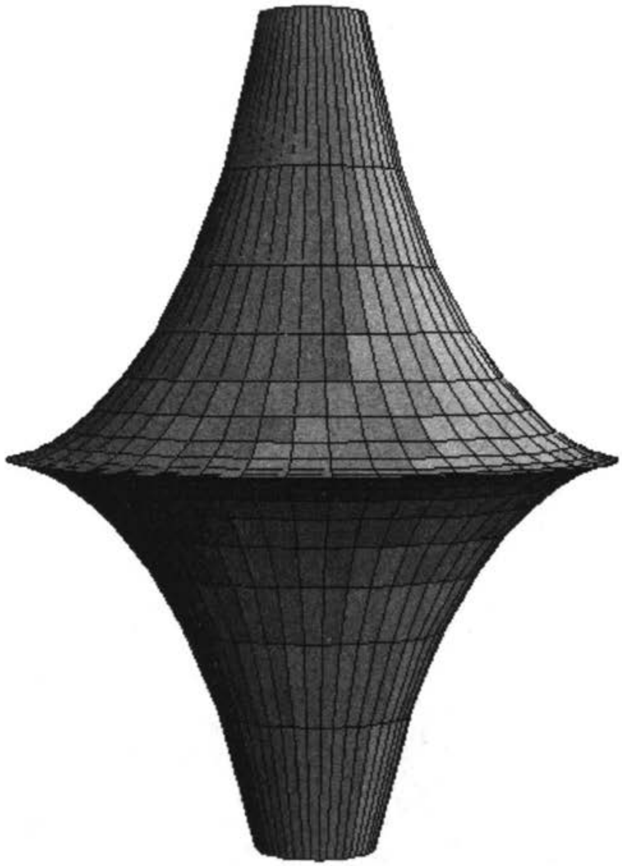
Señalaremos que la consistencia (relativa) de la geometría hiperbólica quedó confirmada a través de los modelos de Klein y Poincaré.



Poincare

La figura anterior muestra el plano de Poincaré ilustrado por Escher mediante peces de colores obtenidos por simetrías que cubren todo el plano hiperbólico. En este modelo, se toman como puntos aquellos que están en la bola (círculo) abierta de radio uno y como rectas los arcos de circunferencias ortogonales a la circunferencia exterior y que están contenidos en su interior y también los diámetros de dicha circunferencia.

Por otra parte, Beltrami probó que el plano hiperbólico es localmente isométrico a la Pseudoesfera.



En este caso, el "interior" de un horociclo recubre de modo isométrico la parte superior de la Pseudoesfera. Es decir, que un sector de horociclo es isométrico a la parte superior de la Peudoesfera menos una de sus generatrices.

Actualmente, Thurston, medallista Field de Matemáticas, y sus discípulos, han estudiado las variedades hiperbólicas de dimensión tres y su relación con la Conjetura de Poincaré. Ésta asegura que una variedad de dimensión tres que sea homotópicamente equivalente a la 3-esfera es homeoforma a la 3-esfera. A pesar de los miles de intentos, la Conjetura de Poincaré, no ha podido ser probada en el presente siglo y es una de las cuestiones pendientes que más ha llamado la atención a geómetras y topólogos, siendo su resolución uno de los retos pendientes para el siglo XXI.

Mencionaremos también la repercusión que las geometrías no euclidianas han tenido sobre las ideas filosóficas del espacio. La consistencia de la geometría no euclidiana es contraria a las ideas manifestadas por Kant [9] en "La crítica de la razón pura" (1781). Según Kant, "el espacio y las propiedades geométricas son intuiciones que tienen que hallarse en nosotros a priori , es decir, previamente a toda percepción de objetos, y consiguientemente, han de ser intuiciones puras, no empíricas". Sin embargo, la capacidad deductiva de Bolyai y Lobachevski llevó a dejar abierta la posibilidad de que el espacio físico que nos rodea pudiera ser explicado de modo consistente por dos geometrías diferentes, la euclidiana y la hiperbólica.

Finalmente, señalaremos que la teoría de relatividad generalizada se modela sobre variedades de dimensión cuatro con curvatura constante. Ello deja abierta tres posibilidades: Una de tipo elíptico, en la que el universo es finito y cerrado, y dos formas de espacio no cerradas una parabólica o pseudo-euclidiana y otra hiperbólica. De este modo, los modelos hiperbólicos seguirán formando parte de las futuras teorías cósmicas del próximo siglo.

Con esta breve mención de la relación de las variedades hiperbólicas con la conjetura de Poincaré, las ideas filosóficas del espacio y las teorías cósmicas terminó esta lección. También quiero agradecer su atención y manifestar mis mejores deseos, tanto para el curso que iniciamos, como para el próximo siglo XXI. Muchas gracias.

Nota: Quiero agradecer las sugerencias realizadas por la Dra. María Teresa Rivas Rodríguez y el Dr. José Ignacio Extremiana Aldana que han completado y orientado esta panorámica sobre la evolución de la teoría de las paralelas. Quiero aclarar que se han omitido muchos datos de interés ya que, en ningún caso, he pretendido realizar un estudio exhaustivo sobre este tema.

Referencias

[1] R. Bonola, *"Non-euclidean Geometry"*, Dover Publications, Inc., New York, 1955.

[2] W. Bolyai (con apéndice de J. Bolyai), *"Tentamen Juventutem Studiosam in Elementa Matheseos"*, 1832. (*Ensayos sobre elementos de matemáticas para jóvenes estudiosos*).

[3] R. Cámara Angulo, *"Libros de Matemáticas y Astronomía en la Biblioteca del Monasterio de Yuso de San Millan de la Cogolla "*

[4] J.L. Coolidge, *"A history of Geometrical methods"*, First edition 1940, University Press, Oxford, 1947.

[5] H.S. M. Coxeter, *"Fundamentos de Geometría "*, De Limusa-Wiley, Mexico, 1971.

[6] A. Dou, *"Orígenes de la Geometría no euclídea"*, Historia de la matemática en el siglo XIX, Real Academía de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid 43-65, (1992).

[7] Euclides, *"Elementos, Libros I-IV, V-IX,X-XII "*, Introducción de Luis Vega. Traducción de María Luisa Puertas Castaños. Editorial Gredos, Biblioteca Clásica Gredos, vol. 191 (1991), 155 (1994) y 228 (1996).

[8] H. Eves, *"Estudio de las Geometrías"* Tomos I y II, UTEHA, Mejico, 1969.

[9] I. Kant, *"Crítica de la razón pura"*. (Prólogo, Traducción, Notas e Índices de Pedro Ribas), Alfaguaras, Madrid, 1988.

[10] F. Kárteszi y B. Szénássy, *"Janos Bolyai, Appendix the theory of Space"*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1987.

[11] M.J. Greenberg, *"Euclidean and non-euclidean geometries"*, Freeman, San Francisco, 1980.

[12] J.L. Heiberg y H. Menge, *"Euclidis opera omnia "*, Leipzip, 1883-1916, vols. VI-VIII.

[13] D. Hilbert, *"Grundlagen der Geometrie "* (1899). *"Foundations of Geometry "*, 2nd English de, Open Court, La Salle, 1971.

[14] T. S. Herth, *"The Thirteen Book of Euclid´s Elementes"*, Cambridge, (1909, edición revisada 1926), Nueva York (1956).

[15] A.M. Legendre, *"Réflexions sur differéntes manières de démostrer la théorie des paralléles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle"*, Mém. Ac. Sc. Paris, T. XIII, 1833.

[16] N.I. Lobachesvki, *"Sobre los principios de la geometría"*, Kasan Bulletin, (1829-1830). Trabajos geométricos de Lobachesvki (primera parte obras publicadas en ruso, segunda parte, obras publicadas en frances y alemán). Kazán (1883-1886), Vol. I, p. I-67.

[17] N.I. Lobachesvki, *"Geometría imaginaria"*, Publicaciones científicas de la Universidad de Kazán (1835-38). Obras geométricas, Vol. I, 71-120.

[18] N.I. Lobachesvki, *"Aplicaciones de la geometría imaginaria a algunas integrales"*, Publicaciones científicas de la Universidad de Kazán (1835-38). Obras geométricas, Vol. I, 121-218.

[19] N.I. Lobachesvki, *"Nuevos principios de la geometría, con una teoría completa de las paralelas"*, Publicaciones científicas de la Universidad de Kazán (1835-38). Obras geométricas, Vol. I, 219-486.

[20] N.I. Lobachesvki, *"Géométrie Imaginaire"*, Crelle's Journal, Bd. XVII, 295-320.

[21] N.I. Lobachesvki, *"Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien"*, Berlin, (1840). Publicaciones científicas de la Universidad de Kazán (1840). Obras geométricas, Vol. II, 553-558.

[22] N.I. Lobachesvki, *"Pangeometría donde se precisa la geometría fundada sobre la teoría general y rigurosa de las paralelas"*, Colleción de Memorias de Profesores de la Universidad de Kazán en el cincuenta aniversario de su fundación, Vol. I, (1855) 279-340.

[23] A. Logunov and M. Mestvirishvili, *"The Relativistic Theory of Gravitation"*, Mir Publisers Moscow, 1989.

[24] J.M. Montesinos *"Las geometrías no euclídeas: Gauss, Lobatcheswsky y Bolyai"*, Historia de la matemática en el siglo XIX, Real Academía de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid 65-105 (1992).

[25] G.E. Martin, *"The foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane"*, Springer, UTM, 1998.

[26] K. Ríbnikov, *"Historia de las Matemáticas"*, Editorial Mir, Moscú, 1987.

[27] A.S. Smogorzhevski, *"Acerca de la Geometría de Lobachevski"*, Lecciones populares de matemáticas, Editorial MIR, Moscú, 1978.

Índice

UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA