CONSIDERACIONES FILOSOFICAS SOBRE LA TEORIA DE CONJUNTOS II*

Lorenzo Peña

Sección 2.- DEL SISTEMA ML DE QUINE AL SISTEMA COMBINATORIO CD

Apartado 1.- La escapatoria de Frege y el planteamiento de Quine

Al tomar conocimiento del descubrimiento por R de la célebre antinomia en su sistema, lo remendó F del siguiente modo. Detectó primero el origen de la dificultad, que era PA, a saber (escribiendo en todo este apartado "p'" en lugar de una fórmula igual a p sólo que conteniendo ocurrencias libres de 'z' únicamente dondequiera que p contenga sendas ocurrencias libres de 'x'): Uz($\hat{x}$pz≡p'). Luego procedió a debilitar ese axioma reemplazándolo por éste: Uz($\hat{x}$pz≡.≠$\hat{x}$p.p'). Lo cual significa que el c. de entes tales que p abarca a un ente ssi ese ente es diverso del propio c. en cuestión y es además tal que p. Es curioso que esa tesis tiene algo en común con el principio de predicatividad o (de exclusión) del círculo vicioso, a saber: un c. no puede ser un ente cuya especificación conlleve que uno de los entes que satisfagan la condición de membría estipulada en tal especificación sea el propio ente en cuestión; al revés, la especificación de un c. cualquiera, $\hat{x}$p, se hará siempre sobreentendiéndose que el c. de entes que p no tiene por qué abarcar a todos los entes que p, sino tan sólo a aquellos que, no siendo (idénticos a) ese mismo c. ($\hat{x}$p), sean tales que p. En otro sentido, sin embargo, ese nuevo postulado infringe, por supuesto, el principio del círculo vicioso, toda vez que la especificación de $\hat{x}$p de alguna manera presupondrá la existencia de $\hat{x}$p, o sea contendrá un cuantificador cuya variable tendrá un campo de variación en el que forzosamente esté el propio $\hat{x}$p. Y es que, a tenor de tal postulado, $\hat{x}$p=$\hat{x}$(x≠$\hat{x}$p.p): el c. de entes que p es (lo mismo que) el c. de entes que, siendo diversos del c. de entes tales que p, son tales que p.

Como lo demuestra Q en (Q4) (pp.492ss (N.23)) el sistema fregeano así enmendado da lugar a demostrar que sólo existe un único objeto, la clase universal, la cual sin embargo no abarcará nada; esa clase sería idéntica a la clase nula o vacía, pues abarcaría a todo objeto existente diverso de sí mismo, o sea a ninguno: ella sería el único objeto.

En (Q4) analiza Q las raíces de esa escapatoria de F --a partir de una sugerencia de Geach. Tenemos el PA, ya citado. Tenemos el principio de coextensión, PCE para abreviar, a saber $Ux(p\equiv qC.\hat{x}p=\hat{x}q)$. Tenemos el converso de éste, CPCE, a saber $Ux(\hat{x}p=\hat{x}qC.p\equiv q)$ (o sea, desprenexado: $\hat{x}p=\hat{x}qC\ Ux(p\equiv q)$). Un c. puede que venga especificado de algún modo, puede que no. Lo que nos preocupa es qué pasa cuando sí viene así especificado, qué sucede con un c. que para cierta matriz o fórmula "q" es $\hat{x}q$. Lo primero que parece no hemos de cuestionar es PCE, pues sin ese principio podría suceder que, p.ej., el c. de entes que sufren fuera diverso del de los que sufren y sufren, pese a la idempotencia de la conyunción (identidad entre p y p-y-p). En cambio CPCE ya no es tan evidente. Muestra Q que este principio viene entrañado por PA --pero, habría que precisar, supuesto PE, o sea $Ey(xy\equiv zyC.x=z)$. La reconstrucción intentada por F conllevaba un sacrificio de CPCE (o una matización, lo que para el caso es igual). Con ello había también de abandonar la versión irrestricta de PA.

Para Q conculcar PA sin cejar en la utilización del signo '$\hat{x}p$' encierra una grave dificultad: la de que no parece tener sentido seguir empleando la locución "el c. de entes que p" cuando ese c. o no abarca a todos los entes que p o abarca a algún ente que no p. (La negación es aquí --como en todos los autores de los que vengo ocupándome en el presente artículo-- siempre negación fuerte, equivaliendo, pues, a 'no... en absoluto'; únicamente en el último apartado de esta Sección se introducirá una negación no fuerte. En ese como en otros lugares presupone Q que, si existe *el* c. de (todos los) entes que p entonces es *un* c. de todos esos entes, y, por lo tanto, entonces existe un c. tal, o sea un c. que, para esa matriz p, satisface PA. Un fallo de PA conllevaría, pues, inexistencia del respectivo c. de los entes que p. Hasta tal punto está normalmente convencido de ello que en muy diversos lugares equipara sin más ambas cosas. Para Q PA equivale al principio de agregación, P.Ag, a saber: $EyUx(yx\equiv p)$, suponiendo que 'y' carezca de ocurrencias en "p". En (Q4) sostiene que la ventaja de P.Ag. estriba en que éste no emplea la expresión "el c. de entes que p", o sea "$\hat{x}p$", de suerte que negar una instancia de P.Ag. no acarrea decir que $\hat{x}p$, el c. que abarca sólo a todos los entes que p no es un c. que abarque sólo a todos los entes que p. Ahora bien, esas consideraciones de Q no son tan sin vuelta de hoja como pudiera parecer a sobrehaz. En efecto, distingamos tanto de PA cuanto de P.Ag. el principio de comprensión, PC, a saber "Existe $\hat{x}p$". Supuesto PC, PA entraña P.Ag. El entrañamiento inverso suele meramente estipularse decretando que cada instancia de PA es una mera abreviación de la correspondiente instancia de P.Ag. (o sea estipulando que "x̂pz" abrevia "EyUx(yx≡p.yz)". Sin embargo, en (Q3), con la introducción, utilísima, de la notación de "clases virtuales", PA resulta válido por definición, mientras que P.Ag. no es verdadero en general (por no serlo PC). Pero, si bien PC es una premisa requerida para deducir --a menos de hacerlo por estipulación definicional-- P.Ag. de PA, una instancia de PC no entraña por sí sola ni la correspondiente de PA ni tampoco la correspondiente de P.Ag. ¿Por qué iba a entrañarlas? ¿Síguese de que exista el c. de holgazanes que a ese c. pertenecen sólo todos los holgazanes? Así sin más, no. ¿Qué premisa adicional es menester aducir para que se siga eso? Hace falta alegar que el c. de todos los holgazanes es un c. de (sólo) todos los holgazanes. Alegato que puede basarse en el argumento de que la descripción definida entraña la indefinida: "el ente que p, si existe, es un ente que p"; si veo al cartero, veo a un cartero. Llamemos a ese esquema el principio de descripción, PD. Puede invocarse a su favor el principio de especificación, a saber "El ente que p es tal que p". Ninguna teoría de descripciones definidas puede defender una forma tan irrestricta de este último principio salvo cayendo en resultados difícilmente admisibles (n.25). Pero el PD es, en cambio, mayoritariamente admitido. Mas no unánimemente. En teorías de descripciones definidas como la de F para lenguajes formales, las de Carnap y el propio Q admítese en ciertos casos la existencia del ente que p sin que sea (en absoluto) un ente que p, a saber: cuando "p" es satisfecho por varios entes o no lo es por ninguno (en absoluto): entonces "el ente que p" denota al c. vacío. Y hay mucho que decir a favor de una opción así. Pero hay un defecto común a todas las teorías de descripciones hoy disponibles (incluidas las dos propuestas por el autor de estas páginas), a saber: no toman previsiones para el caso en que, no existiendo (en absoluto) un solo ente que p (o hay varios o no hay ninguno en absoluto), sí hay un ente que es el único en ser tal que q, donde "q" está suficientemente "próximo" a "p" en "significado" (o incluso, en vez de que haya un único ente que q, hay varios pero uno de ellos se destaca de los demás por algo --mayor grado de satisfacción del predicado o lo que sea-- que hace más "propio" decir que él es tal que q). En un caso así no es seguro que el uso cotidiano del lenguaje imponga abstenerse de reconocer la existencia del ente que p, el cual será, en tal caso, no un ente que p, mas sí un ente que q. Algunos tratadistas de estas cuestiones (como Saul Kripke y Ruth Barcan Marcus) hacen hincapié en una dizque discontinuidad radical y tajante entre nombres y descripciones definidas; cuando se reconoce la existencia del ente que p sin reconocerse la de un ente que p --nos dicen--, está usándose la expresión "el ente que p" como un mero nombre propio, denotativa mas no "connotativamente"; así en 'el Sacro Imperio Romano Germánico'. Dudo que lleven razón. La discrepancia no es tan tajante. Porque hay grados de propiedad en la aplicación de una denominación o un predicado. Así es menos inapropiado llamar 'Imperio Romano Germánico" al de los Otones --de la Casa de Sajonia-- que al de José II. También hay grados de metaforicidad. No es tan metafórico llamar a Somoza 'el monarca de Nicaragua' como lo sería llamar a Rodrigo Borja 'el monarca del Ecuador'; de hecho lo primero es casi, casi literal.

Apartado 2.- <u>El Principio de Comprensión: ¿catervas o corrillos?</u>

Teniendo todo eso en cuenta, podemos aceptar una instancia de PC sin aceptar la correspondiente de PA. Y de hecho eso es lo que viene a hacer Q en (Q4), sólo que, más que usando, en el vernáculo idioma, "el c. de entes que p", valiéndose de la expresión "$\hat{x}p$" o "la extensión correspondiente al predicado "p"", o circunloquios así. Dejando de lado esa cuestión (n.26) como si fuera una logomaquia, vea_ mos lo que nos dice Q sobre su propio sistema ML. De cuantas tcc axiomáticas han sido propuestas (dentro del marco de la lógica clásica) es ML (el sistema expuesto en (Q2)) la única que permite introducir un operador '$\hat{x}$' de <u>extensión de</u> (para cualquier predicado dado) de manera general. Y ¿por qué? Porque para que sea aplicable en general ese operador hace falta que haya de entre todos los cc. uno que sea el que esté más cerca de ser el de los entes que p. Y es eso lo que pasa en el sistema ML. Aunque fracasado, el intento de recomposición de su sistema llevado a cabo por F en 1903 iba en tal sentido, en el sentido de poder seguir usando siempre ese operador de extensión como la mejor aproximación a lo que idealmente sería, en cada caso, el c. que abarca sólo a todos los entes que p; sacri_ ficando con ello, eso sí, el CPCE (vide al comienzo del precedente Apartado), o sea Ux($\hat{x}p=\hat{x}q$C.p$\equiv$q).

Si, como es obvio, no podemos postular, en general y sin reservas o restricciones, P.Ag., ni por tanto PA, pero queremos abrazar el irrestricto PC (a saber $\hat{x}p$ existe), entonces habrá que adoptar medidas compensatorias adecuadas. El c. de entes que p será, a veces, un c. que abarque sólo a cuantos entes sean tales que p; pero otras veces no. Cuando no lo sea, ¿qué será? Ofrécense dos alternativas. La primera es que abarque a algo más; pero (esperamos) que sea el más pequeño de cuantos cc. abarquen a todos los entes que p. Ni F ni Q ni nadie hasta ahora ha explorado esa vía. Y es que hay motivos para no optar por ella, según lo vamos a ver. Un c. que sea así (el más pequeño de los que abarquen a todos los entes que p pero abarcando a algo más) vendrá ahora llamado una <u>caterva</u>, la de los entes que p. En cambio, a un c. que sea el mayor de cuantos abarquen sólo a entes que p podrá llamarse _el corrillo_ de entes que p.

Tanto F cuanto Q (y, a la zaga de éste, el autor de estas páginas en precedentes trabajos) (n.27) han preferido la postulación de corrillos a la de catervas. ¿Por qué? Probablemente porque a menudo queremos averiguar características de las cosas sabiendo que vienen abarcadas por determinados cc. (a saber: averiguamos que cumplen sendas condiciones características de pertenencia a esos cc.), lo cual no es posible si tales cc. son catervas. Verdad es que, a cambio, resultaría más fácil demostrar que algo pertenece a un c. si no hubiera corrillos aunque sí hubiera catervas. Pero esa ventaja sería seguramente menos importante, porque en las aplicaciones más interesantes de la tcc pueden tomarse ajustadas medidas adicionales --aunque sean un poquitín _ad hoc_-- para contrarrestar la pérdida, en general, de PA. Y no resulta quizá ni tan claro ni tan plausible ni acaso tan fácil tomar medidas adecuadas en caso de postulación de catervas.

En efecto, si hay corrillos, podemos suponer que el c. de entes que p, $\hat{x}p$, será una clase que abarque a todo lo que cumpla dos condiciones: 1ª) ser tal que p; 2ª) alguna adicional (quizá especificable para todos los casos, quizá no). Con idóneas postulaciones podemos asegurar que en muchísimos casos, por lo demás inocuos mas no anodinos, se cumple esa segunda condición. Alternativamente, si lo que postulamos son catervas tendremos que $\hat{x}p$ será una clase que abarque a entes que: o bien son tales que p; o bien cumplan una condición alternativa. Aunque determinemos que algo cumple esta última condición y que, por ende, es abarcado por $\hat{x}p$, no descubrimos nada sobre si es tal que p. En general el camino epistémico de saber que algo es abarcado por una clase a saber cómo es parece mucho más frecuentemente practicable que el inverso. En particular las aplicaciones matemáticas de la tcc parecen mejor aseguradas con sistemas que --como le sucede a ML-- aceptan corrillos que con otros que sólo acepten catervas.

Y ¿por qué no intentaré una solución ecléctica, la de aceptar para unas especificaciones corrillos y para otras catervas? Porque seguramente una tcc así sería tremendamente inmanejable. No podríamos tener en ella ninguna de las dos mitades de PA, a saber: ni $Uz(\hat{x}pzCp')$ ni $Uz(p'C\hat{x}pz)$ (mantengo aquí la convención sobre "p" del apartado anterior). Y sin duda deseamos que al menos una de esas dos mitades sí sea teoremática en nuestro sistema, junto con la mayor aproximación posible a la otra mitad.

Ilustremos todo eso con un ejemplo: el c. de R. Sabemos que, si vale PA, y si además aceptamos PC irrestricto, o sea que $\hat{x}p$ existe, entonces $\hat{x}N(xx)\hat{x}N(xx) \equiv N(\hat{x}N(xx)\hat{x}N(xx))$:

el c. de R se abarca a sí mismo ssi no lo hace. Para evitar esa contradicción, podemos pensar o que $\hat{x}N(xx)$ es un corrillo, o que es una caterva. Si lo primero, entonces, aunque cumplirá la condición para la pertenencia a sí mismo, no se pertenecerá, sino que se dejará ("indebidamente" o "inesperadamente", en todo caso anómalamente) fuera de sí mismo. Si lo segundo, si es una caterva, entonces sí se pertenecerá a sí mismo, pero sin cumplir la condición (normal) para tal pertenencia: "indebida" o insólitamente se abarca a sí mismo sin ser una de las cosas que no se abarcan a sí mismas.

Aunque las precedentes observaciones no pretenden ni mucho menos desalentar exploraciones que averigüen cuán viable, plausible o fecunda sea una tcc que postule catervas, prefiero aquí seguir pensando (conjeturando) que es más útil y más fundado en cómo es la realidad el postular corrillos pero no catervas.

Apartado 3.- Los elementos y la condición de estratificación: New Foundations

Ya vimos cuáles eran los corrillos de F: $\hat{x}p$ era el de los entes $x \neq \hat{x}p$ tales que p. En el sistema de Q ML $\hat{x}p$ es el corrillo de elementos tales que p. Un elemento es algo perteneciente a uno u otro c. (La idea fue elaborada en 1925 por von Neumann, pero, al igual que tantas otras, tiene sus precursores (n.28).) Conque el PA de ML dice que viene abarcado por $\hat{x}p$ todo ente que, viniendo abarcado por uno u otro c., es tal que p. Y ¿cuáles entes son elementos? Hay en ML un esquema axiomático adicional, el principio de elementaridad, que dice que es un elemento todo c. $\hat{x}p$ tal que la matriz "p" cumple ciertas condiciones, a saber: 1) "p" está estratificada; 2) cada cuantificador en "p" está restringido a elementos; 3) además la instancia en cuestión de ese esquema es afirmada sólo condicionalmente, como apódosis de una premisa que diga "Si es un elemento x^1, y lo es también x^2, ..., y lo es también x^n" donde $x^1,\ldots,x^n$ son todas las variables que figuren libres en "p".

La condición (3) asegura que no se cuelen indirectamente entre los elementos entes que no puedan serlo. Algo similar pasa con la condición (2) (n.29). Bien, lo único que nos ha de ocupar ahora es la condición (1). El punto de partida es la teoría simple de tipos. En ella una concatenación o yuxtaposición "xy" está sintácticamente bien formada sólo si 'x' es del tipo inmediatamente superior a 'y'. En la teoría de tipos originaria había también tipos de relaciones; una concatenación '$xy^1\ldots y^n$' que no sea una subconcatenación de otra más larga está bien formada si (expresando por 't(z)' el tipo de la variable 'z', para cualquier "z") $t(x) = \langle t(y^1),\ldots,t(y^n)\rangle$. Wiener y Kuratowski contribuyeron a idear un procedimiento para prescindir de tipos no monádicos. En vez de concebir una relación diá dica r como un algo que venga atribuido en cada caso a dos entes "tomados en cierto orden", pasa r a ser concebida como una <u>propiedad</u> (monádica) no de esos entes, u,v, sino de la <u>díada</u> (dúo ordenado) $\langle u,v \rangle$, donde tal díada viene definida como el dúo $\{\{u\},\{u,v\}\}$, o sea un dúo (c. de dos miembros) que abarca sólo, por un lado a $\{u\}$, por el otro lado a $\{u,v\}$; $\{u\}$ es $\hat{x}(x=u)$, al paso que $\{u,v\}$ es $\hat{x}(x=u$ o bien $x=v)$. (Hubiera podido definirse $\{u,v\}$ como $\{\{v\},\{u,v\}\}$ desde luego; poco importa, con tal de que se haga siempre igual.) El tratamiento de las relaciones según ese procedimiento de Kuratowski suscita un cierto número de dificultades (n.30). Así y todo, imaginemos aquí que resuelve satisfactoriamente los problemas y, en adelante, limitémonos a las propiedades monádicas (salvo lo que se dirá más abajo, en el Ap. siguiente, sobre el tratamiento combinatorio).

El requisito (1) para cualquier instancia del principio de elementaridad es que "p" sea una fórmula que, traducida al lenguaje de la teoría (simple) de tipos, tendría sentido en la misma. Como ML no es una teoría de tipos, las variables no llevan índices superescritos o suscritos, sino que son generales. Pero, si tradujéramos a la teoría de tipos una fórmula de ML, deberíamos en cada caso asignar a cada variable uno u otro tipo. Bien, si hay una traducción así de una fórmula p de ML que sea una fórmula correctamente formada de la teoría de tipos, entonces (con tal de que se cumplan los otros dos requisitos para "p") $\hat{x}p$ es un elemento. Lo cual significa que toda clase cuya existencia tenga sentido afirmar en la teoría de tipos será un elemento en ML. En la teoría de tipos sólo tiene sentido afirmar la existencia de un c. cuando es teoremática esa afirmación; por ende, sólo tiene sentido negar la existencia de un c. cuando tal negación es declarada falsa por la propia teoría. Al pasarse de la teoría de tipos a ML sucede, en cambio, que todo c. que la teoría de tipos declara ser un elemento --y la teoría de tipos declara que cada conjunto es un elemento-- es también reconocido como un elemento por ML; los demás cc. son reconocidos como existentes, pero no siempre como elementos. Muchos cc. cuya existencia o inexistencia no tenía sentido decir en la teoría de tipos son proclamados en ML como no-elementos, entes inclasificables, pero así y todo cc. Aunque habrá algunas de tales clases que en ML no sólo existan sino que sean elementos (su condición de tales vendrá probada indirectamente). Así pasa con la clase universal, $V(=\hat{x}(x=x))$. Como la matriz "x=x" cumple los tres requisitos, $\hat{x}(x=x)$ resulta ser un elemento; y, una vez probado eso, resulta así ya sin sujeción ninguna a tipos. En teoría de tipos para cada variable 'x' existe $\hat{x}(x=x)$, pero eso disimula el hecho de que no existe ningún c. universal sino uno para cada nivel o tipo. En ML es transitorio el paso por las horcas caudinas de las construcciones sintácticas de la teoría de tipos; una vez efectuado, se emancipa la expresión de toda sujeción a tipos. (Además demuéstrase en ML que $\hat{x}(x=x)$, o sea V, es idéntico a $\hat{x}Ey(yy.yx..x=x)$, aunque en teoría de tipos la matriz que figura en este último designador de clase ni siquiera está bien formada.)

¡De qué no se habrá motejado a tal principio de elementaridad! (En otro lugar discutiré esas objeciones.) La verdad es que, cualquiera que sea la base "intuitiva" de la teoría de tipos (y alguna habrá que reconocerle, ¿no?), se conserva incólume en ML, sólo que mucho mejor (n.31). En efecto: ¿para qué tildar de "sin sentido" ciertos asertos cuando se evitan las paradojas reputando muchos de esos dizque sinsentidos meramente como afirmaciones falsas --y alguno que otro, de paso, como una tesis verdadera, puesto que sólo a causa de un rebote indeseado venía excluido por las draconianas restricciones de la teoría de tipos? El engorro de tener que adjudicar tipos a las variables ya no es aquí --sí lo era en teoría de tipos-- un amargo vía crucis que había que seguir recorriendo a todo lo largo de cualquier demostración de arriba abajo --y de cualquier serie de ellas--, sino tan sólo un requisito para aseverar una instancia cualquiera del principio de elementaridad.

Sin detenernos en esta cuestión, sí conviene apuntar algo sobre la relación entre ese sistema propuesto por Q en 1940 (ML) --ulteriormente perfeccionado por Hao Wang para curarlo de su inconsistencia inicial-- y otro propuesto por Q tres años antes, NF, hasta ahora resistente a intentos de probar que es incoherente (Hao Wang ha probado que, si no lo es, tampoco lo es ML). En NF --al igual que en la teoría de tipos-- todo ente es un elemento (y, por supuesto, viceversa), pero no se postula el PC, "$\hat{x}p$ existe" (en general), sino un PC más restringido: Si "p" es una fórmula estratificada, $\hat{x}p$ existe. La relación entre ML y NF es, más o menos, ésta: todo c. cuya existencia viene afirmada en NF es un elemento en ML; pero en ML existen además otros entes, que son cc., pero que no vienen abarcados por nada aunque ellos sí abarcan algo. Cuando NF asevera la existencia de $\hat{x}p$, ¿cuál es el ente, $\hat{x}p$, que en ML es un elemento? Aquel cuyas variables vienen restringidas a entes cuya existencia se postulaba en NF --para lo cual están las condiciones (2) y (3) del principio de elementaridad. (Restringir a elementos los cuantificadores significa que no hay ninguna cuantificación universal, "Uxq", que no sea "Ux(*elem*xCq')", ni cuantificación existencial alguna "Exq" que no sea de la forma "Ex(*elem*x.q')" --donde "*elem*x" significa "x es un elemento".) La relación entre NF y la teoría de tipos es ésta: todo c. que en ésta última viene reconocido como existente también lo es en NF; casi todos los demás son considerados como inexistentes en NF (a saber los no elementos de ML), pero, al igual que en

ML, en NF algunos cc. inaceptables en teoría de tipos consiguen, indirectamente, el reconocimiento de ser elementos.

No permitiéndome la angostura de espacio explayarme en estos temas, diré no más para concluir este apartado, que tanto NF cuanto ML son sistemas filosóficamente plausibles, muy potentes, basados en consideraciones juiciosas, exentos de la tremenda adhocidad de las postulaciones de casos particulares del PC que con cuentagotas vienen efectuadas en otras tcc (la teoría estándar, tan en boga entre los matemáticos, de ZF y otras afines como NB). NF ofrece la ventaja adicional de que *puede* ser verdadera --*puede* en el sentido epistémico de 'poder', a saber: el de que no tenemos pruebas suficientemente fuertes de que sea falsa--, al paso que, desgraciadamente, no les sucede lo propio ni a ML ni a ninguna versión de la teoría estándar; porque para que sea verdadera una tcc hace falta que sea verdadero lo que dice; NF dice que hay un c. universal y que él abarca a todo; ML dice que lo hay pero no abarca a todo; la teoría estándar dice que no lo hay. Pero, si es verdadera una tcc, entonces tiene un modelo, *que es la Realidad*; si existe ésta, existe el c. universal; si deja sin abarcar algo, ese algo no es real. Luego sólo NF cumple la condición de poder tener a la Realidad como modelo. (Sólo, de entre esas alternativas, claro.) Lo malo es que NF no carece de inconvenientes. Paso por alto el que con ella se prueban resultados reputados "raros" pues las matemáticas pululan en consecuencias sorprendentes, que lo dejan a uno de piedra. No, lo malo de NF es que no permite probar ninguna versión fuerte del principio de inducción matemática. Y malo también es que no acepte en general PC, la existencia de $\hat{x}p$, para cualquier "p". (Con lo cual, por cierto, vienen consiguientemente restringidos los dos principios Pa y P.Ag., el primero con una premisa de existencia de $\hat{x}p$, el segundo con la condición de estratificación de "p".) En cualquier caso, lo que no cabe soslayar es que tanto NF como ML, heredando ambas cuanta base justificativa sana pudiera abonar a favor de la teoría simple de tipos, están exentas de las dificultades filosóficas que asediaban a esa teoría, como su inefabilidad, la plurivocidad de los prefijos cuantificacionales 'U' y 'E' y la falta de una noción general de existencia --con lo cual ni siquiera estaba claro qué se quería decir al proferir las oraciones (condenadas, por lo demás, como sinsentidos por la propia teoría) que aseveraban la existencia en lo real tanto de entes de cierto nivel cuanto de entes o cc. de niveles superiores. Si algún núcleo de verdad había en la teoría simple de tipos, agotábase en brindar una manera de obviar las paradojas aduciendo el comportamiento "normal" del abarque --o no abarque-- de cc. de nivel inferior por los de nivel inmediatamente superior. La realidad será --así lo reconocen ML y NF-- normal en los más casos; pero no en todos.

Apartado 4.- Una alternativa difusa, paraconsistente y combinatoria: CD

No sólo en la lógica clásica (LC en adelante) sino también en la mayor parte de los sistemas de lógicas no-clásicos el cálculo cuantificacional (de primer orden) es una extensión del sentencial, al paso que la tcc es una extensión del cálculo cuantificacional. (Según lo ha puesto de relieve Q en diversos lugares, los llamados cálculos cuantificacionales de órdenes superiores a 1 no son sino tcc de la índole, precisamente, de teorías de tipos; son, pues, tcc plurisortales, donde un sistema es plurisortal si tiene varios tipos de variables no intercambiables, e. d. si es tal que, no porque dos signos, 'f','x', se combinen, por separado, con un mismo prefijo cuantificativo 'U' (o 'E') para formar cuantificadores 'Uf','Ux', no por eso van a ser reemplazables en otros contextos esos dos signos sin desmedro de la corrección sintáctica.) Las lógicas combinatorias son en cambio sistemas en los cuales existen ciertos signos primitivos, entre ellos unos combinadores, de tal índole que mediante concatenaciones cualesquiera de ellos se obtienen las fórmulas no sólo del cálculo sentencial y del cuantificacional, sino también de la tcc. (O sea: al venir reducidas a notación primitiva, las fórmulas del cálculo sentencial y del cuantificacional son ya fórmulas de la tcc; en vez, pues, de que venga ésta construida con vocabulario adicional al del cálculo cuantificacional, éste está formado por fórmulas que son abreviaciones de sendos asertos teórico-conjuntuales. Eso no obsta para que, en un sentido menos fuerte, también en una lógica combinatoria la tcc propiamente dicha sea extensión del cálculo cuantificacional, a saber: éste es un subc. propio de los teoremas, al paso que aquélla no lo es.) Los axiomas, postulados y reglas de inferencia aseguran que el sistema tenga, así, toda la fuerza de una tcc al par que, con ello naturalmente también, de un cálculo cuantificacional y, por ende, de un cálculo sentencial. Además, las tcc así obtenidas pueden ser muy potentes; aunque habrá que pagar el precio de que el cálculo sentencial sacrifique algo del de LC, so pena de incoherencia (delicuescencia).

Un combinador es un signo \$ que viene caracterizado porque, para todos (o muchos) signos $p^1,p^2,\ldots,p^n$, la concatenación $\$p^1p^2\ldots p^n$ (con asociatividad hacia la izquierda --o sea pqr=(pq)r etc.) es reemplazable con verdad, en virtud de los postulados del sistema por otra en la que ya no figura la ocurrencia inicial de \$ y que es el resultado de combinar de diversos modos $p^1,\ldots,p^n$; o sea, la nueva concatenación es la concatenación de concatenaciones de... de concatenaciones de $p^1,\ldots p^n$ (no forzosamente de todos ellos). En un sistema combinatorio, cualquier combinación o concatenación (yuxtaposición) de signos es también un signo. Una manera particularmente elegante de introducir un cálculo combinatorio es con ayuda de dos combinadores primitivos, Σ,Λ, tales que, para todos (o muchos) símbolos p,qr: Σpqr=pr(qr) ; Λpq=p. 'Σ' denotará a la relación que se da, p.ej., entre el admirar, la belleza y Narciso, puesto que Narciso admira su propia belleza --o sea: Narciso se admira la belleza--: trátase, pues, del operador de voz media o automediador; Λ será la relación que se da entre un ente y otro cualquiera en la medida en que existe el primero de ellos --una relación tal que el que se dé entre Ceilán y Singapur es, ni más ni menos, el propio Ceilán; con otras palabras Λ será la determinación de ser un ente, x, tal que existe la determinación de ser un ente, z, tal que existe x.

Con ayuda de esos dos combinadores defínense otros. Uno, Δ, es así: defínese como Σ(ΛΣ)Λ; y es tal que para todos (o muchos) argumentos p,q,r: Δpqr=p(qr); es un asociador (es, p.ej., la relación que hay entre la fama, la crueldad y Alejandro en la medida en que sea famosa la crueldad de Alejandro). Otro combinador, Γ, viene definido como Σ(ΔΔΣ)(ΛΛ) y es tal que para todos o muchos p,q,r: Γpqr=prq; es, pues, un operador de conversión: la relación que, p.ej., se da entre el conquistar, la Galia y César, en ese orden. (Si p=amar, Γp=ser amado.) Luego tenemos 1, definido como ΣΛΛ, que es la existencia (o verdad): una determinación tal que, para cualquier p, 1p=p (ya que, en efecto, cada ente es lo mismo que su existencia, según he tratado de probarlo en diversos trabajos). Otro combinador es Ω, definido como ΓΣ1, que es tal que, para todos o muchos p,q: Ωpq=pqq: trátase del reflexivizador (una relación que guarda el coronamiento con Napoleón cuando Napoleón se corona a sí mismo).

Supongamos que tales ecuaciones valen sin restricción alguna y que el sistema contiene un operador de negación N. Entonces pruébase lo siguiente. Sea R definido como Ω(ΔN); demuéstrase fácilmente esto: RR=N(RR). Ahora, si el sistema contiene también reglas que de /p=q/ y /+rp/ (donde '+' es la disyunción 'o': nótese que esta última fórmula sería usualmente escrita así: "p+r") permitan deducir /+rq/, entonces, si el sistema contiene el principio de tercio excluso /+(Np)p/, de RR=N(RR) cabrá deducir /+(N(RR))(N(RR))/, lo cual es obviamente equivalente a N(RR) (pues /+pp/=p). De manera similar se demostrará RR. Y así tendremos la contradicción: RR.N(RR) (donde '.' es la conyunción 'y'), si es que el sistema es copulativo (e. d. tal que contenga la regla p , q / p.q: lo que es verdadero por separado es también verdadero junto, conyuntado lo uno con lo otro).

Una solución es, precisamente, la que consiste en abandonar el principio de tercio excluso. Tal es el enfoque de Fitch, en su sistema Q (n.32). Nótese que R es el c. de Russell (también podemos denotarlo con la expresión

'$\Sigma(\Lambda N)(\Sigma 11)$'). En el sistema Q de Fitch demuéstrase, pues, que el autoabarque de R por sí mismo es idéntico al no autoabarque de R por sí mismo; con otras palabras, que tal autoabarque es lo mismo que la inexistencia del mismo. Pero no se deduce ninguna contradicción o antinomia de la forma "p.Np".

Que una lógica combinatoria como la de Fitch constituye una poderosa tcc muéstralo el hecho de que en la misma valen sin reservas los principios de comprensión (PC) --o sea la existencia en general del c. de entes que p-- y de abstracción (PA), o sea que el que ese c. abarque a algo, x, es idéntico a que ese x sea tal que p. En efecto, definimos así las expresiones abstractivas. (Por razones que pueden omitirse aquí, usamos, en este contexto, el operador lambda minúscula, en vez del circunflejo sobre una letra.) Para una fórmula cualquiera r, dada otra fórmula p, defínese λrp así: si r=p, $\lambda rp=1$; si r no figura en p, $\lambda rp=\Lambda p$; cuando no se da ninguna de esas dos circunstancias y p=sq, entonces $\lambda rp=\Sigma\lambda rs\lambda rq$. Con esas definiciones pruébanse PC y PA. (Nótese que en un sistema combinatorio no hacen falta variables, aunque pueden introducirse como símbolos definidos; el cuantificador --sea el universal, U, sea el existencial, E-- viene postulado como un primitivo --si U es primitivo, defínese E así: $\Sigma(\Lambda(\Sigma(\Lambda N)U))(\Sigma(\Lambda N))$; y viceversa; la universalidad, lo denotado por 'U' es aquella determinación que abarca a una determinación o clase, sea la que fuere, sólo en la medida en que ésta, a su vez, abarque a cualquier ente; es, pues, la determinación de abarcarlo todo.)

Pero el precio a pagar es demasiado alto. El principio de tercio excluso es el más útil y evidentemente verdadero de todos los principios lógicos. Ninguno tanto como él anda en la boca de cualquiera, del hombre de la calle, a cualquier hora; ninguno como él es fértil para demostraciones científicas; decimos: o bien p, o bien no-p; si p, tal cosa; si no-p, tal otra; luego o tal cosa o tal otra. Despojarnos de la legitimidad de tales modos de razonar parece un costo excesivo para, a cambio, lograr tener un PC y un PA irrestrictos; la plausibilidad de estos dos principios es menor que la del tercio excluso.

Mas, ¿no hay contraejemplos aparentemente persuasivos contra el tercio excluso? Aparte de que se ha alegado que falla en oraciones cuyos sujetos sean inexistentes --lo cual es muy discutible y, a mi juicio, equivocado--, y aparte también de los presuntos fallos de ese principio proclamados por los adeptos de la matemática intuicionista, aquello que más a menudo se ha aducido contra la corrección general del tercio excluso es la existencia de propiedades difusas. No podría --alégase-- decirse 'Es guapo o no lo es', porque hay grados de guapura y puede que tenga tal propiedad sólo hasta cierto punto. Bien, efectivamente, pero eso no entraña que no pueda decirse esa disyunción: si tiene guapura hasta cierto punto, tiene guapura. (Tal es la regla de apencamiento, basada en este principio: es verdadero cuanto no sea totalmente falso.) Para que sea (en algún grado, mayor o menor) correcto, fiel a la realidad --verdadero, en suma-- decir algo no es menster que lo así dicho sea plenamente verdadero, sino que basta con que tenga (en ese grado) verdad, a secas. Una prolación es totalmente falsa si no mienta o denota hecho alguno real; pero si denota algo, un hecho que posea algún grado de existencia, alto o bajo, entonces la prolación será --en ese mismo grado-- verdadera. Y, por eso mismo, cuando nos topamos con hechos difusos o graduales --como los que consisten en el abarque de un individuo por una determinación o clase en un grado no pleno--, no es que nos abstengamos tanto de decir "sí" cuanto de decir "no" y asimismo de decir "sí o no"; antes bien decimos: 'Ni es calvo ni deja de serlo' (o 'ni es calvo ni no es calvo'), 'ni me gusta ni deja de gustarme', 'ni fue divertido ni dejó de serlo', 'ni llueve ni no llueve', 'ni es árido ni deja de serlo' etc. etc. Ahora bien, tanto LC cuanto en el sistema Q de Fitch y, en verdad, en la mayor parte de los cálculos lógicos, "ni p ni no q" equivale a "q y no-p" (tal equivalencia se deduce de una de las leyes de De Morgan más el principio de involutividad); por consiguiente, "ni p ni no p" equivaldrá a "p y no p". 'Ni llueve ni no llueve' equivale a 'Llueve y no llueve'; que es lo que efectivamente suele decirse en casos de garúa u orballo. Lo propio sucede con cada uno de los demás ejemplos.

Resulta entonces que lo entrañado por la existencia de determinaciones difusas, y de abarques difusos o graduales por tales determinaciones de unos u otros entes, es, no una quiebra del tercio excluso, sino, antes bien, la existencia de verdades mutuamente contradictorias. Lo cual no constituye tampoco una quiebra del principio de no contradicción, una ausencia de verdad de este principio, sino una presencia, junto a él, de verdades que son negaciones de instancias particulares de dicho principio. Nos hace falta, pues, no una lógica sin tercio excluso, sino una lógica que, con él, así como también con el principio de no-contradicción, autorice a la vez la existencia de verdades mutuamente contradictorias, e.d. de contradicciones verdaderas (verdaderas y simultáneamente --en virtud del principio de no contradicción-- falsas). Una lógica así será una lógica paraconsistente. ¿Qué requisitos ha de cumplir una lógica para ser paraconsistente? No entronizar la regla de Escoto (aquella que de un par de premisas mutuamente contradictorias, sean las que fueren, permite concluir cualquier cosa). Para evitar esa regla de Escoto hay que abandonar también el silogismo disyuntivo: p+q , Np / q.

El cálculo de determinaciones, CD, es una lógica combinatoria construida por el autor de estas páginas y expuesta en otros trabajos (n.33). Concluiré este artículo enumerando algunos rasgos de ese sistema.

-- Al igual que en cualquier otro sistema combinatorio, cada ente es una relación. El que p esté guardando una cierta relación r con un ente que viene expresado así: rpq; o sea, consiste en que el venir abarcado p por r abarque a su vez a q (p,q serán entes cualesquiera). El amor de Buda es, pues, la determinación de ser amado por Buda.

-- Hay en CD dos negaciones, una débil, 'N', y otra fuerte, o supernegación, 'F'; la última se define así: F=Σ(ΛH)N y se lee 'no... en absoluto'. ('H' es un operador de superafirmación, o afirmación fuerte, que cabe leer: 'Es totalmente verdad que' o 'Es del todo (100% etc.) verdad que'. Para la negación débil valen las leyes de De Morgan, involutividad (N(Np)=p), no-contradicción, tercio excluso, y otras; para la negación fuerte valen DeMorgan, no contradicción, tercio excluso, y una versión atenuada de la involutividad, así como el silogismo disyuntivo y, por lo tanto, Escoto.

-- En CD hay un functor 'I' de equivalencia tal que para que sea verdad "pIq" es menester que p sea igual de verdadero (o falso) que q, ni más ni menos.

-- En CD hay un functor 'B' que es bastante similar a un operador modal de necesidad y podemos leerlo 'Es afirmable con verdad que' o 'Es verdad en todos los aspectos que'. La principal diferencia entre 'B' y el operador de necesidad de una lógica modal clásica estriba en que en CD vale la regla p / Bp sin restricciones (pues, en efecto, de la premisa de que es verdad que p vale concluir que es afirmable con verdad que p).

-- En CD no se acepta el principio clásico de extensionalidad (Ux,yEz(xz≡yzC.x=y)), pero sí este otro (siendo '0' una constante definida que se lee '(Existe) lo absolutamente falso' y que no significa o denota nada): Ux,yEz(B(x0I y0..xzIyz)C.x=y): son idénticas dos determinaciones si es afirmable con verdad que la una abarca a cualquier ente en la misma medida en que lo haga la otra y si, además, es también afirmable con verdad que la una abarca a lo absolutamente inexistente en la misma medida en que lo haga la otra. Vale también en CD esta regla de extensionalidad, x0Iy0..xzIyz / x=y --aunque no la regla clásica de extensionalidad, a saber: xz≡yz / x=y. (Nótese que es teoremático en CD el esquema: pIqC.p≡q; mas no el recíproco p≡qC. pIq; porque pIq significa que p y q son igual de verdaderos (o falsos), al paso que p≡q (p ssi q) únicamente excluye que uno de los dos sea verdadero y el otro enteramente falso.) (n.34)

-- En CD hay una implicación 'D' (que se lee así: 'implica' o 'a lo sumo en la medida en que' o 'sólo en tanto en cuanto'), definido así: "pDq" abrevia a "p.qIp". Es más fuerte que el mero condicional: "pDqC.pCq" es teoremático; pero no lo es el esquema recíproco.

-- En CD vale la mitad del PA: λrprDp.

-- En CD vale para una amplia gama de casos el esquema recíproco del anterior, o sea la otra mitad de PA. En particular valen las ecuaciones siguientes (la identidad = en CD se define así: "p=q" abrevia "B(pIq)"): λxxp=p; λxqp=p (si "p" no figura en "q"); λxpr=p' (si p' es el resultado de reemplazar uniformemente en p las ocurrencias libres de x por sendas ocurrencias libres de r, y si r es una expresión que no contenga ni 'H' ni 'I', ni tampoco 'U'); además de esas ecuaciones, muchas otras instancias de PA son demostrables en CD, pero su formulación es algo más larga.

-- En CD vale también este otro PA restringido: cada fórmula <u>estratificada</u> de la forma "p=λrpr" es un teorema; pero la estratificación no se formula como en los sistemas de Q --siguiendo la pauta de la teoría simple de tipos--, sino de un modo que se inspira más en la teoría ramificada de tipos, en el principio de predicatividad. Por ello, el teorema de Cantor no es en general teoremático --aunque sí son teoremáticos muchos casos particulares del mismo.

-- CD es un sistema contradictorio (n.35). Contiene, en particular, contradicciones como ésta (definiendo R como más arriba): RR.N(RR). En cambio, cuando se defina 'R' como 'Ω(ΔF)' o su equivalente "λxF(xx)", entonces pruébase F(RR), pero no RR. Por ello pruébase para algunas fórmulas "p" y "r": F(λrpr=p). λxF(xx) es un corrillo y, a la vez, un ente zafadizo, segregable o marginable --en particular se segrega o margina a sí mismo.

-- En CD, al igual que en cualquier otro sistema combinatorio, no hay diferencia entre fórmulas y otras expresiones. Cada expresión es una fórmula, pues cada ente es lo mismo que el hecho de su existencia (o "verdad" en el sentido ontológico). En CD no hay barreras categoriales (ni siquiera las pocas que, implícitamente, quedaban todavía en los sistemas de Q, como aquella que se daba en ellos entre los "entoides" --o lo que sean-- denotados por functores del cálculo sentencial y los entes propiamente dichos).

-- Pero hay en CD una diferencia entre entes realmente reales, o existentes en todos los aspectos, y entoides que existan sólo en algunos aspectos. Para realzar esa discrepancia, explotamos la dualidad de vocablos 'determinación' vs 'conjunto', reservando este último (o el de 'propiedad'), en un sentido más estricto, para denotar con él a un ente realmente real. (Las determinaciones en general pueden también llamarse '<u>cúmulos</u>'.)

-- En CD vale el PC con una sola excepción, a saber λxp existe salvo si λxp=Λ0 (donde 0 es según se dijo más arrirriba; 0 puede definirse como N1, pues en CD es un teorema esto: H1: la Realidad es totalmente real --o verdadera).

ANEJO: El sistema CD

El sistema CD, en la presentación que aquí brindo de él, se ha originado por un proceso de rectificaciones a partir de su ancestro, el sistema *Am* , que vino expuesto por primera vez en mi tesis doctoral (Contradiction et vérité, Universidad de Lieja, 1979). Hasta qué punto pueda decirse que el mismo sistema persiste a través de alteraciones es asunto que, como cuantos atañen a la identidad diacrónica, resulta dificilísimo de zanjar. Si prefiere sostener uno que cualquier alteración en los axiomas, postulados o reglas de inferencia de un sistema entraña el reemplazo del mismo por otro, entonces considérese que este CD es un sistema nuevo aquí presentado por vez primera. Pero el autor no ve en él un producto final, sino un resultado provisional, una conjetura (como todas nuestras elaboraciones teoréticas en cualquier campo, sin excepción) avalado por evidencia abundante y estimable, mas merecedor sin duda de ulteriores mejoras.

§1.- La base del sistema CD

Vayan por delante ciertas convenciones. La concatenación o yuxtaposición de dos signos es un signo. Tal concatenación se entenderá siempre asociativa hacia la izquierda ("pqr" equivale a "(pq)r"), viniendo interrumpida tal asociación por el espaciamiento: "p qr" equivale a p(qr); un espaciamiento mayor separa más que otro menor: "p qr st" equivale a "p(qr)(st)". Sin embargo, para evitar confusiones acudiremos (informalmente, eso sí) a paréntesis desambiguantes --y nunca en la práctica haremos separaciones de diversa longitud--, que son más comúnmente comprendidos, según los acabamos de introducir (parentéticamente) como procedimiento de explicación; pero los paréntesis no forman parte de nuestra notación oficial.

REGLAS DE FORMACION:

(1) /^/, /↓/, /H/, /U/, /I/, /B/, /Σ/, /Λ/, /a/ son signos

(2) Si /p/, /q/, /r/ son signos, también lo son /pq/ y /p qr/. (En casos de signos incompuestos suprimiremos las barras que los rodean cuando están solos).

ABREVIACIONES

'Δ' abr. '/Σ ΛΣ Λ/'; 'Γ' abr. '/Σ ΔΔΣ ΛΛ/'; 'Ω' abr. '/ΓΣ ΣΛΛ/';
'N' abr. '/Ω↓/'; '+' abr. '/Δ ΔN ↓/; '.' abr. '/Δ ΓΔN Γ↓N/';
'F' abr. '/ΔHN/'; 'L' abr. '/ΔN ΔHN/'; 'D' abr. '/Δ ΣI ./';
'C' abr. '/Γ Δ+F/'; '$\frac{1}{2}$' abr. '/Iaa/'; 'X' abr. '/Ω^/';
'O' abr. '+(N(Σ(ΛN)N))(+(I$\frac{1}{2}$a) F(I$\frac{1}{2}$ N$\frac{1}{2}$))'; 'l' abr. '/NO/';
'S' abr. '/Ω Δ.N/'; 'n' abr. '/Δ^Na/'; 'm' abr. '/Δ(ΔNn)N/';
'Ξ' abr. '/Σ(Δ(ΔΣ(ΔC)).)+/'; 'Y' abr. '/Ω(Δ. Ia)/';
'f' abr. '/Ω(Δ. ΔFY/'; '&' abr. '/Γ(ΔΔ.)L/';

'E' abr. 'Σ(Λ(Σ(ΛN)U))(Σ(ΛN))'; '%' abr. '/Σ(ΔΣ(Δ(Δ.)D))(Γ(Δ(ΔF)D))/';
'¥' abr. '/Σ(Σ(Δ(Δ&)%)n) ΔfS/'; 'K' abr. '/Δ ΔNX N/';
'J' abr. '/Δ ΔFB F/'; '=' abr. 'Δ(ΔB)I'; 'F' abr. 'ΔBF'

Procederemos además con arreglo a las siguientes convenciones. Llamaremos: functores monádicos a los signos H,B,N,F,L,X,n,m,Y,f,¥,K,J; functores diádicos a los signos ^,↓,I,+,.,D,C,≡,&,%. Un signo total (solo), /p/, aparecerá con supresión de las barras inclinadas que lo rodean como indicación de lo siguiente: (1) cuando en p figure un functor diádico $ en el signo /$rr'/, reemplazamos éste por (lo "abreviamos" como) /r'/$/r/; en cambio (2) introducimos dentro de p barras para delimitar los signos a los cuales (e.d. a cuya estructura interna) no se aplica la convención (1) ni la (3) a continuación; llamamos fórmula (no total) a un signo entre barras y, si r',r son fórmulas y $ un functor diádico, fórmula es también r$r; (3) Si $ es un functor monádico y r una fórmula, figurando en p $(r), reemplazamos esto por $r que es también una fórmula, estipulando que $ rige a la fórmula más corta que lo siga (con una salvedad estipulada en el punto (5) más abajo); (4) cuando no haya confusión las barras internas se reemplazan por paréntesis o se suprimen; (5) dos fórmulas yuxtapuestas están más unidas, formando una fórmula, que cualquiera de ellas por separado con un functor monádico o diádico: si r,r',r" son fórmulas, r+r'r" se entiende como r+(r'r"), y Nrr' se entiende como N(rr'). En especial, llamaremos fórmulas (no requiriéndose encerrarlas en barras ni paréntesis) a estos signos: a,$\frac{1}{2}$,0,1. Así pues, dentro de una fórmula total, una ocurrencia de 'Σ' no es una fórmula, mas sí lo es una de '/Σ/'; igualmente un functor, 'N' p.ej., no es fórmula, pero sí lo es /N/: si p es fórmula, entonces --cuando y donde se apliquen estas estipulaciones, o sea dentro de una fórmula total-- "NNp" abrevia a "N(Np)" mientras que "N/N/p" equivale a "(NN)p"). En lo sucesivo, las letras esquemáticas p,q,r, etc. son usadas sólo para hacer las veces de fórmulas (lo cual de hecho no restringe su generalidad, como es obvio).

Con arreglo a tales convenciones, procedemos a ulteriores esquemas abreviativos (donde p,q son fórmulas): "pDDq" abr. "B(pDq)"; "pIIq" abr. "B(pIq)"; "pƗq" abr. "F(pIIq)".

Otras convenciones abreviativas a tener en cuenta son éstas: Si r es un signo que no figura en p, λr/p/ abrevia a Λ/p/; si r=p, λr/p/ = (ΣΛΛ); si r≠pq figura en pq, λr/pq/ abrevia a ΣλrpλRq, λxyp abrevia a λxλyp etc.

Introducimos variables como letras esquemáticas pero con una restricción: en un esquema de fórmula, p, una ocurrencia de una variable x no puede reemplazarse por una fórmula q más que cuando se haya demostrado el teorema "Jq". Como letras esquemáticas que son, las variables pueden ser afectadas por igual que las letras esquemáticas p,q,r, etc., en lo que precede. Así λx/p/ es un esquema claramente explicado ya. Las estipulaciones sobre variables libres y ligadas son las usuales. "Uxp" abreviará a "Uλxp"

Si p es una fórmula, "Uxp" será una fórmula; cada prefijo cuantificacional ('Ux','Uy', etc.) rige a la fórmula más corta que lo siga inmediatamente mas con una salvedad idéntica a la de los functores monádicos, a saber un prefijo cuantificacional liga menos estrechamente que la yuxtaposición entre fórmulas, de suerte que "Uxpq", si p,q son fórmulas, equivale a "Ux(pq)". "UBxp" abrevia a "Ux(BxCp)"; "Exp" abrevia a "Eλxp"; "EBxp" abrevia a "Ex(Bx&p)".

En lo que precede inmediatamente, al igual que en lo que sigue, usamos las variables como metavariables; lo cual significa que en tales esquemas 'x' p.ej. (o cualquier variable) puede reemplazarse, con tal de que sea uniformemente, por cualquier otra variable --obedeciéndose, donde proceda, las estipulaciones sobre las restricciones que sean del caso acerca de las ocurrencias de tales variables en el contexto.

ESQUEMAS AXIOMATICOS

A01 p.qCp A02 r.sIpC(p↓qI.q↓s+.q↓r)
A03 pIqC(rIqI.pIr)..KXpIp..Yp+Yq+FY(p^q)..fSp.fSqC(p^q%p)..p.qC.p^q
A04 q.p+pIp..Hp.HqILH(p.q)..pIqC(Hp+HrIH(q+r))..p^qDp..p^1Ip
A05 pINqI(NpIq)..pIpI½..p'.pIqC(q^r^sI.s^r^p..s^p'^r)..¥p.fNqCF¥N(p^mq)
A06 pIqC(qCp)..mpDmnp+Hp..mpDnp≡(Yp+YNp)..qDnp+(pImq).Lp+.pDq
A07 Bp+BFBLp..BpIp+FBp..pDDq&BpDBq
A08 Uxp^UxqIUx(p^q)..Uxs%rCEx(s%r)..Uxp.ExqDEx(p.q)..UxFpDFExp..
nr%rCEx(rDExpD.rDp)
A09 pIIqC.prIqr..rpIrq
A10 UxB(pOIqO..pxIqx)C.pIq
A11 pDExp..Jq.UpDpq.F(ΛO)..BpCF(pO)
A12 /Λpq/Ip.Ez(yzDp&yxDλzpx)..λxprs^1...s^{n}C.λxprs^1...s^{n}Ip's^1...s^n

En A08 r no debe tener ninguna ocurrencia libre de la variable 'x'. En A12 pueden faltar varios o todos los signos s^1, s^2, ..., s^n, al paso que p' debe ser el resultado de sustituir en p cada ocurrencia libre de x por una, también libre, de r.

Antes de presentar los siguientes esquemas axiomáticos hemos menester de unas aclaraciones terminológicas.

Una fórmula es blanda sólo si en ella no figura ninguno de los tres signos: I,H,U.

Una fórmula "p" es estratificada si cumple estas condiciones: 1ª) en "p" cualquier ocurrencia de uno de los combinadores 'Σ', 'Λ' está dentro de un functor o del cuantificador 'E' o de una fórmula abstractiva del tipo "λrq", de suerte que no hay en "p" combinadores aparentes (aunque sí puede haber fórmulas como "λxyz(xz yz)" y "λxy(x)", respectivamente equivalentes --por lo que se postulará en seguida-- a 'Σ' y a 'Λ'); 2ª) en "p" no hay ninguna variable libre (e.d. ninguna ocurrencia del prefijo "λx"); 3ª) hay cómo asignar uniformemente órdenes --o mejor, números de orden-- a todas las fórmulas en "p" del siguiente modo: (i) cuando figura "q^{1}q^2...q^n", Nº(q^1)>Nº(q^{1}q^2),Nº(q^2),...,Nº(q^n) (ii) Nº(λrq)>Nº(r); (iii) si en q figura "λsr", entonces Nº(λrq)>Nº(λsr) (iv) si figura en "p" "qIr", entonces Nº(q)=Nº(r); (v) Si Nº(rq)=Nº(sq), entonces Nº(r)=Nº(s); (vi) cuando "p" contenga una expresión "q" tal que sea demostrable "qIr", siendo "r" más corta que "q", entonces reemplazar, en "p", "q" por "r" no ha de alterar los números de orden asignados; (vii) cuando Nº(pq)=Nº(pr), entonces Nº(q)=Nº(r); (viii) cuando en "p" figure una expresión abstractiva "λr^1...r^{n}q" (e.d. "λr^{1}λr^2... λr^{n}q") seguida de un número m de signos s^1,...,s^m(n≧m), entonces los mismos números de orden vienen asignados a r^1 y a s^1,..., a r^m y a s^m.

Si "p", "q" son fórmulas y si "$" es un functor (monádico), entonces "p$q" ("$p") es una <u>verifunción</u> de "p" y de "q" (de "p" sólo); una verifunción de una verifunción de "p" (y de "q") es también una verifunción de "p" (y de "q").

Para cualquier signo p definimos $(p)^2$ como Σ(Λp)p. Y para cualquier signo $(p)^j$ donde j≧2, definimos $(p)^{j+1}$ como Σ(Λp)$(p)^j$.

Ulteriores esquemas axiomáticos:

A13 Bp'C./Σqrp/I.qp(rp)

Donde se cumple uno de estos dos requisitos: (1) p'=p; (2) p' es cualquier instancia sustitutiva de A01 y entonces: o bien (i) p es una fórmula blanda; o bien (ii) tanto q como r son fórmulas blandas; o bien (iii) uno u otro (o ambos) de los combinadores Σ, Λ no figura en "qr" más que, si acaso, dentro de functores o del cuantificador 'E'; o bien (iv): esa última condición se aplica a "p" (no hay en "p" ocurrencias tanto de Σ cuanto de Λ fuera (unas y otras) de functores y del cuantificador 'E'); o bien (v) r=0; o bien (vi) q=1 mientras que r=Λs (para algún s); o bien (vii) hay algún s tal que Σqr=$(s)^j$ donde j≧2.

A14 pDλrpr

A14 viene restringido así: cada instancia de A14 debe ser una fórnula estratificada (se excluyen reemplazos en "p" o en "r" que hagan no estratificada la fórmula total resultante de los mismos); y, si se aduce (una instancia de) A14 en una deducción a partir de premisas (que no sean teoremas), ha de ser estratificada la conyunción de esas premisas con esa instancia de A14.

A15 qIq'

Donde q es una verifunción y q' se obtiene de q sin más que una serie de reemplazos de concatenaciones de la forma "$\Sigma r^1 r^2 r^3$" por respectivas concatenaciones "$(r^1 r^3\ r^2 r^3)$", o viceversa, y de "Λs's" por s', o viceversa.

(Observación: decir que una fórmula es una <u>verifunción</u> --a secas-- es decir que se construye a partir de fórmulas cualesquiera, tomadas como átomos, mediante functores monádicos o diádicos; en A15 se entiende que los átomos en q permanecen inalterables en q'.)

NUEVAS ABREVIACIONES

'G' abr. 'Δ(ΔB)C'; 'i' abr. 'λxy(y=x)'

'*const*' abr. 'λuxEz,y(iy(Σxz)+iy(Σzx)+iy(Σx0)+iy(Σ0x)&uy)'

'∅' abr. 'Σ(Λ1)(Λ1)'; 'σ' abr. 'ΣΔ'; 'ω' abr 'λxEy(x=∅+.y=yσ∅..σy=x)'

'*' abr. 'λzxyEu(ωu&uzxy)';

'*norm*' abr. 'λxyUu,v(Σuv=xG(xy=uy(vy))..Σu0=xG.xy=uy0)'

'*agr*' abr. 'λxyUz(**const*(ix)zG*norm*zy)'

'Ψ' abr. 'ΔU(Γ*agr*)'; 'Φ' abr. 'ΔU*agr*'

A16 (abreviando como "*U*xp" la expresión "Ux(ΨxCp)" --para cualquier variable en lugar de 'x'--):

$\mathcal{U}x^1,\ldots,x^n(px^1x^2\ldots x^n IIqx^1x^2\ldots x^n)CUx^1,\ldots,x^n(px^1\ldots x^n IIqx^1\ldots x^n)..$

ΦpCΦ(Γp)

REGLAS DE INFERENCIA

<u>rinf01</u> (modus ponens): pCq , p ⊢ q   <u>rinf02</u> p ⊢ Bp

<u>rinf03</u> p ⊢ q (donde q es el resultado de prefijar a "p" uno o más de entre los cuantificadores universales "Ux", "Uy", ...)

(Nótese que, según los casos, llamamos _cuantificador universal_ (_existencial_) o al solo 'U' ('E') o al resultado de concatenarlo con una variable, lo cual abrevia al resultado de concatenarlo con un prefijo abstractivo 'λx'; lo último es un símbolo incompleto, un pseudosigno, por supuesto; de modo que, en rigor, sólo 'E' y 'U' son _signos_ cuantificacionales; pero, no habiendo lugar a confusión, podemos hablar como lo hacemos para abreviar.)

POSTULADOS ADICIONALES

(P1) O bien "J(p0) es un teorema, o, si no, s $\vdash$ F(p0).s

(P2) O bien "FB(λrpr) es un teorema, o si no, "λrprIp" es un teorema. (De donde se sigue que, a menos que "FB(λrpr)" sea un teorema, "λrprIp" es, o bien demostrable a partir de los (otros) axiomas y reglas de inferencia, o, si no, un axioma más.)

(P3) A lo sumo una de las dos fórmulas "p", "Fp" es un teorema.

(P4) O bien p es un combinador, o bien esto es un teorema: ΨpCΦp

(Aclaración respecto al postulado (P4). Un signo p que no sea la concatenación de dos signos es el único constituyente de sí mismo. Una concatenación qr tiene como únicos constituyentes últimos suyos a los que sean únicos constituyentes últimos de q o de r (o de ambos). Así Σ es el único constituyente último de Σ; al paso que si p=$\Sigma\Lambda$(H^), al ser p una concatenación de $\Sigma\Lambda$ con H^ tiene como únicos constituyentes últimos los que lo sean de uno u otro de esos dos signos; siendo, como son, cada uno de ellos una concatenación, les sucede lo propio; conque los únicos constituyentes últimos de p serán estos cuatro: Σ,Λ,H,^. Un combinador es un signo \$ tal que es demostrable: $\$=\lambda x^1 \ldots x^n p$, donde p tiene como únicos constituyentes últimos a algunos (o todos) de entre $x^1, \ldots, x^n$.)

LECTURAS

^: No sólo... sino también; H: Es totalmente verdad que; B: Es afirmable con verdad que; ↓: Ni... ni; I: En la (misma) medida en que; U: Es universal(mente) poseída); a: lo infinitesimalmente verdadero (es verdadero); pq: el hecho de que (exista) p es una determinación del hecho de que (exista) q; λrp: la determinación de ser un ent(oid)e, r, tal que p; (Σ: la determinación relacional que guarda algo, p, con otros algos, q,r, en la medida en que el que p sea una determinación de r es, a su vez, una determinación del que q sea una determinación de r); J: en algunos aspectos, de un modo u otro, relativamente por lo menos; X: muy; K: al menos un poco; f: un tanto; Y: infinitesimalmente, un sí es no; C: sólo si; D: implica, sólo en la medida en que; .: y; +: o; F: no es verdad en absoluto que; N: no; n: Es superverdad que; m: Viene a ser verdad que; S: Es y no es verdad que; L: más o menos, hasta cierto punto por lo menos; %: Es menos verdad que... que no que---; $\equiv$: ssi; &: siendo verdad que...,---; 1: lo totalmente verdadero; 0: lo totalmente falso; $\frac{1}{2}$: lo igualmente verdadero que falso; Exp: Hay algo, x, tal que p; UBxp: Todo (verdadero) ente es tal que p; EBxp: Algún (verdadero) ente es tal que p.

§2 Algunos resultados teórico-conjuntuales conseguibles con el sistema CD

En CD demuéstranse, entre otros, estos resultados:

(1) ExUyBH(xy): existe un cúmulo que abarca absolutamente (totalmente en todos los aspectos) a cada uno de los entes.

(2) Ux(1x=x): la Existencia (o Verdad) es tal que el que la misma abarque a un ente es, ni más ni menos, ese mismo ente.

(3) $\lambda x0=0$: la determinación de ser tal que sea verdadero lo absolutamente falso es lo absolutamente falso.

(4) Ex(x=p)CJEz(pz+p0): Si p es un ente (si es algo existente), entonces, al menos en algunos aspectos, hay algo abarcado por p o bien p abarca a lo absolutamente falso.

(El que p --o lo que sea-- abarque a lo absolutamente falso consiste en que, cuando va a tomar un argumento, e.d. a aplicarse a algo, y no encuentra argumento --e.d. no le viene facilitado ningún "algo"--, entonces, motu proprio, produce de suyo un valor.)

(5) $\mathrm{Ux}\underline{F}(\lambda xpx)\hat{}\,\underline{F}(\lambda xp0)+\mathrm{Ez}(z=\lambda xp)$: el cúmulo de entes que p es algo (existente) a menos que no sólo no haya absolutamente nada abarcado por él sino que, además, ni siquiera venga abarcado por él lo absolutamente falso.

(6) $\mathrm{J}\lambda xp=\mathrm{JEx}(\lambda xpx+\lambda xp0)$: el que sea al menos relativamente existente el cúmulo de entes que p es lo mismo que el que, siquiera en algunos aspectos, exista un ente abarcado por ese cúmulo a no ser que éste último abarque a lo absolutamente falso.

(7) $\mathrm{FEx}\underline{F}\mathrm{Ez}(xz).\mathrm{NJ}(x0)$: No hay en absoluto una determinación tal que ni haya absolutamente nada abarcado por ella ni tampoco venga, ni siquiera relativamente, abarcado por ella lo absolutamente irreal.

(8) $\lambda x(zx)=z$: cada ente es idéntico al cúmulo de cosas abarcadas por él. (Cada ente es, pues, su propio abarque --su propio abarcar--, al igual que es su propio existir.)

(9) $\lambda xy(zxy)=z$: cada determinación es idéntica a la relación que guarda un ente con otro en la medida en que éste último viene abarcado por el abarque del primero por dicha determinación.

(10) $1=\lambda xy(xy)$: la existencia es la relación de abarque. (Existir es abarcar.)

(Como inciso filosófico cabe apuntar, o sugerir, que lo abarcado por un hecho "intranseúnte", como el denotado por una oración formada con un sujeto y un verbo intransitivo, p.ej. 'dormir', puede ser ese mismo hecho; lo cual explica las construcciones de "acusativo interno": caminar su camino, vivir su vida, dormir su sueño, morir su muerte; por otro lado los individuos o cuerpos son cúmulos de sus respectivas partes --una de ellas es el propio cuerpo, parte total: si hay átomos, entes corpóreos indescomponibles o incompuestos, cosa dudosísima, entonces ellos son "individuos" en la acepción quineana considerada más arriba (vide supra (n.8); aunque también los hechos intranseúntes serán --a tenor de la conjetura recién propuesta-- "individuos" en esa acepción.)

§3 Introducción de la aritmética y otros campos matemáticos

El procedimiento que voy aquí a seguir debe en parte su inspiración al de Fitch (op. cit. en (n.32)), pero ha sido menester una complicadísima adaptación del mismo al presente sistema, toda vez que el de Fitch posee un PA irrestricto, lo cual desde luego dista de ser verdad de CD. (Y, además, muchísimas otras discrepancias hondas se dan entre ambos enfoques, pese a lo mucho también que los acerca uno al otro.)

NUEVAS DEFINICIONES

'⊕' abr. 'ΔΣ(ΔΔ)'; '∩' abr. 'ΔΣ(Δ.)'; 'π' abr. 'λxzUy(zyDDxy)';
'2' abr. 'σ1'; '3' abr. 'σ2'; '4' abr. 'σ3';
'x|y' abr. 'λuvEz(xuz.yzv)'; 'x"' abr. 'ΔL|x'; 'x:' abr. '2ΔLx|1'

LECTURAS

i es la identidad. La identidad de x es el síngulo de x, e.d. la determinación de ser, ni más ni menos, (el propio) x. (ixz es lo mismo que x=z). ⊕ es la adición. ∩ es la intersección (entre dos cúmulos)
Ø es el cero: la determinación de ser un ente, x, tal que existe la determinación de ser un ente, z, tal que z.Ø=λxz(z). Para cualesquiera entes x,z, Øxz=z. 1 es, a la vez, la Existencia (=Verdad) y el número uno. Para cualquier ente x 1x=x. 2 es el número dos: para cualesquiera entes x,z, 2xz=x(xz). Similarmente 3 es tal que, para cualesquiera entes x,z, 3xz=x(x(xz)). Así, p.ej., si x es la belleza y z Venus, Øxz es Venus; 1xz es la belleza de Venus; 2xz es la belleza de la belleza de Venus; 3xz es la belleza de esa belleza; y así sucesivamente. Similarmente, si tomamos π (la relación de inclusión): Øπx=x es x; 1πx=πx es la inclusión de x, e.d. el cúmulo de determinaciones incluidas en (o por) x; 2πx es π(πx): el cúmulo de determinaciones incluidas en πx; y así sucesivamente.

Otro caso interesante: como N es la determinación de no ser verdadero (existente), o sea la inexistencia o falsedad --el cúmulo de cosas que no existen, e.d.: una determinación poseída por algo en aquellos aspectos (momentos, lugares, lo que sea) en que no exista y precisamente <u>en la medida en que</u> no exista--, tendremos que ØN=1; 1N=N=3N=5N,...; 2N=1=4N=6N,... Y así para cualesquiera números, respectivamente nones y pares. En cambio, la negación fuerte, F, que es la determinación de no existir en absoluto, tendrá, no dos, sino tres resultados al respecto: una cosa es ØF=1 (pues, para cualquier p, Øp=1); 2F=4F=6F=..., donde 2F=L (la determinación de ser, poco o mucho, real o verdadero); mientras que F=1F=3F=5F etc. En cambio, p.ej., siendo X la determinación de ser muy existente, tenemos X≠2X≠3X≠4X... etc. (pese a que abarcan, todos ellos, los mismos miembros).
x|z es el producto relativo de x con z: si x es calumniar y z es liberar entonces un calumniador de Garibaldi guarda la relación x|z con Italia, siendo calumniador de un liberador de Italia. Similarmente 1|x es la relación de <u>abarcar algo que guarde la relación x con</u>; así que 2(1|x)z será el cúmulo de entes con los que guarde la relación x algo con lo cual guarde, a su vez, la relación x uno u otro miembro de z.
x"z es la imagen de z por la relación x (nótese que x"=λyzEu(yu&xuz));
x: es lo mismo que λy(1"(xy)) o sea el cúmulo de entes tales que existe la imagen por el abarque (i.e. por la existencia) de la pertenencia del ente en cuestión a x.
Notemos ahora estas ecuaciones: 1:(xy) = x:y = 1"(xy) = λuEv(xyv&vu).
x:y es, no (como suele leerse) el valor de la función x para el argumento y, sino: el único ente perteneciente al valor de x para el argumento y. En efecto: en cierto sentido cada determinación es una fun-

ción, pues es algo, x, que, dándosele un argumento z --dándosele a su acción de abarque-- produce un (solo) resultado, o ninguno, según que de hecho abarque --al menos relativamente-- o absolutamente deje de abarcar a z. xz está, pues, unívocamente determinado si es que existe. En otro sentido, sin embargo, llamamos función, o, mejor dicho, relación funcional, a un cúmulo x tal que: Uy,u,v(xyu.xyvG.u=v), o sea tal que nada guarda x con dos entes diferentes. Si x es una función en este sentido, entonces x:z es aquel ente, si es que existe, con el cual guarda z la relación x; y, si no lo hay, ni siquiera relativamente, x:z no existe tampoco en absoluto pues es =λx0=Λ0=0. Pero, cuando x es una relación no funcional, entonces x:z es la unión o suma de la imagen por x del cúmulo iz, o sea es el cúmulo de cuantas cosas abarca, por separado, uno u otro de los entes con los cuales guarda z la relación x. (Así, engendrar: Jacob es la suma mereológica de Rubén, Simeón, Leví, Judá etc., e.d. un cúmulo que abarca a cada parte de uno u otro de esos entes.) Nótese que 1:x es la suma o unión de x, e.d. el cúmulo de cosas abarcadas por uno u otro miembro de x.
* es el ancestral. Sin embargo, la noción de ancestral aquí articulada no coincide con la usual (con la que viene empleada en teoríasde conjuntos no combinatorias). Usualmente, en efecto, si x es la relación de engendrar, *x es la relación de engendrar a o engendrar a un engendrador de o...; al paso que con nuestro ancestral **eng* sería otra cosa. En efecto, si x es Jacob, entonces (*eng*x) = el cúmulo de Rubén, Simeón, Leví, Judá, Benjamín, José, etc.; (2*eng*x) será el cúmulo de entes engendrados por *eng*x, no distributiva sino colectivamente. Ahora bien, no hay nada engendrado por *eng*x, e.d. por el cúmulo de entes engendrados por Jacob. Por ello **eng*x sería igual al cúmulo de miembros (partes) e hijos de x, nada más. Es fácil, no obstante, definir el ancestral usual en nuestro sistema. He aquí la definición:
'*anc*' abr. 'λuv(*(u")(iv))'. Con arreglo a esta definición, *anc*(*eng*) es una relación que guardará x con aquellos entes que o bien son idénticos a x, o bien son engendrados por x, o bien lo son por alguno de éstos últimos, o por alguno de éstos últimos, etc. etc. Similarmente, si x es la relación que guarda un número natural con los resultados de multiplicarlo por algún número natural ≤3, *anc*(x) será una relación que guarde, p.ej., el número 5 con los números 0,5,10,15,20,30,40,45, 60 etc. Nótese, eso sí, que *anc* es no el ancestral (usual) propio, que es el de Russell y Whitehead, sino el impropio (el de Frege y de Quine), que es la unión del ancestral de una relación cualquiera con la identidad. Pero ambas nociones son interdefinibles (vide (Q2), p. 221); y, según lo muestra Quine (loc. cit.) el impropio es mucho más útil. (Para evitar confusiones terminológicas, dígase que *anc* es el ancestral en la acepción usual, y * es el ancestral en la acepción combinatoria.)

La relación σ es = λzxu(x zxu); es la "sucesión". Si x es la determinación de ser algo de lo cual se ocupan los matemáticos, u es la determinación de ser un triángulo, entonces es verdad que σπxu, puesto que es algo de lo cual se ocupan los matemáticos el hecho de que los triángulos sean cosas de las cuales se ocupan los matemáticos. (π es, recuérdese, la relación de inclusión.)

Definimos la relación '*sq*' como 'λxy(y=σx)'; ahora bien, *anc*(*sq*)= λx(*(*sq*")(ix)). Conque *anc*(*sq*) es la relación de predecesión: aquella que guarde un número natural con cuantos sean iguales o mayores que él (ordinalmente). De hecho *anc* (*sq*) es demostrablemente idéntico a: λxyEu(ωu..uσx=y), que es otra manera, más conveniente quizá (más simple, en todo caso) de definir la relación ≤ entre los números naturales. Esta definición va a jugar un importante papel en lo que sigue.

NUEVAS DEFINICIONES

"x≠y" abr. "F(x=y)"; 'ε' abr. 'Γ1' (=Σ(Λ(Σ1))(Σ(ΛΛ)1));

'χ' abr. 'λxy(πxy+xy)'; 'β' abr. '*(ε*)*'; '*B*' abr. 'βχω';

'*bnord*' abr. 'λy(Ux(π(yx)(2(y")(ix)).F(yxx)).Uz,uEv(zvGEu(zu..yvu+yuv) .πzuGExUv(v≠x.uvGyxv.ux)))'

'*ser*' abr. 'λyEu(*bnord*u.Uz,x(yz.yxG.uzx+uxz..ωx.ωzG.uxz=.*anc*(*sq*)xz..x≠z)'

'*reg*' abr. 'λx(Φx.Ψx)'; '£' abr. '∩(Ωχ)λxUy(χxyG*reg*y..πxyG*ser*y)';

'α' abr. 'λxUz(Uu(zuGxu)G.Ez=λuEg(zyu))'

Axioma A17: αω.£*B*

En virtud del conyunto izquierdo de A17 pruébanse estos teoremas y esquemas teoremáticos: Uy(xyGωy)C.Ex=λzEy(xyz);
Ey(ωy&p)=λzEy(ωy&pz); Uy(xyGωy)C.Ex=λzuEy(xyzu);
Ey(ωy&λzp)=λzEy(ωy&p)

Este último es el más importante y cabe leerlo así: el que haya algún número natural con relación al cual exista el cúmulo de entes que p es lo mismo que el que exista el cúmulo de entes que con relación a algún número natural sean tales que p. En otros términos: la existencia del cúmulo de entes que se relacionan así o asá con algún número natural es lo mismo que el que exista algún número natural tal que exista el cúmulo de entes relacionados con él así o asá.

Parece seguro que tales esquemas no son demostrables en CD, salvo al adoptarse dentro del sistema el axioma A17. En verdad son bastante evidentes muchas instancias de tal axioma --e.d. muchas consecuencias que se deducen inmediatamente del mismo sin más que aplicar la regla de instanciación universal: Uxp ⊢ p', donde p' difiere de p sólo por reemplazo de las ocurrencias libres de 'x' por sendas ocurrencias libres de otra variable; además --según se va a ver tres párrafos más abajo-- es un camino seguro para probar resultados interesantes sobre el ancestral (combinatorio), *, y sobre *B*. Por otro lado, sin embargo, hay también dos motivos para abstenerse de aseverar tal axioma; el principal de ellos --en seguida mencionaré otro-- es que puede que ese axioma entre en conflicto con el principio de gradualidad, que es la tesis de que cualesquiera dos entes propiamente dichos (entes realmente reales, existentes en todos los aspectos) se poseen uno a otro en alguna medida, siquiera infinitesimal; en otros términos, que, si un cúmulo es un ente realmente real, entonces abarca en una u otra medida a cualquier ente realmente real. Hay muchos motivos filosóficos para adherirse a ese principio de gradualidad; los he explorado en diversas publicaciones previas (particularmente en El ente y su ser y en Fundamentos de ontología dialéctica, Madrid, Siglo XXI, 1987). Pero tampoco esos motivos son absolutamente decisivos (no los hay tales ni en filosofía ni en ninguna otra actividad humana). Así pues, hoy por hoy, parece sensato oscilar entre una firme adhesión a tal principio y la postulación --a título, siquiera, de hipótesis verosímil-- de A17; máxime cuando tampoco se ha demostrado que sean incompatibles.

Fuera de esa motivación --que más de uno reputará excesivamente metafísica-- para poner en duda la verdad del conyunto izquierdo de A17, otro motivo emanaría de un escrúpulo extensionalista, o, mejor, extensivista (superextensionalista). Si son extensionales los conjuntos (suponiendo ahora que sea lo mismo cúmulo que conjunto), meros conjuntamientos de sus respectivos miembros, entonces no será verdad que exista el mismo conjunto de estrellas hace un millón de años que ahora (a no ser que se diga que, si bien son dos conjuntos diversos, existen ambos o siempre o atemporalmente); pues bien, para que sea afirmable con verdad algo, ese algo tiene que existir o ser-verdadero siempre; supongamos que siempre (en cada momento) hay un número natural, j, tal que existe el cúmulo de las j estrellas existentes, no habiendo (en absoluto) ninguna no abarcada (en absoluto) por ese cúmulo; ¿dedúcese de ahí que siempre existe el cúmulo de entes tales que hay un número natural, j, tal que dichos entes son exactamente j (e.d. tantos cuantos números naturales hay menores que j) y son todas las estrellas existentes? Alguien diría: no: siempre hay un número natural así, j, pero, como varía, según los períodos, cuál sea ese número, no siempre existe el cúmulo o conjunto de las j estrellas existentes, para uno u otro j; que, si sí existen --siempre o atemporalmente-- esos diversos conjuntos (el de las j estrellas existentes en tal fecha, el de las j' estrellas existentes en tal otra fecha, etc.), entonces cada uno de ellos ha de especificarse como el cúmulo de estrellas existentes en tal momento determinado --y no como el cúmulo de las j estrellas existentes para algún número natural j. Sin embargo, esa dificultad emana de un extensivismo extremo que he criticado en "¿Lógica combinatoria o teoría estándar de conjuntos?" (Arbor, 1989). No hay motivo suficientemente razonable para rechazar que un cúmulo cambie de miembros de un lapso temporal a otro sin dejar de ser el mismo cúmulo. Si lo básico en la noción de cúmulo (o en la de conjunto) es la especificación "en comprensión" como la totalidad o multitud (o congregación, o agrupación) que une o abarca ("abraza", amplectitur) sólo a todos los entes con tal o cual característica en común (en lugar de ser la especificación meramente extensiva de: esos diversos entes "en cuanto" conjuntados, o sea puestos juntos), entonces pierde su atractivo el extensivismo o superextensionalismo.

Al margen de ese género de consideraciones, es muy plausible el conyunto izquierdo de A17. Veámoslo con una serie de instancias y de corolarios del mismo. El que exista el cúmulo de cúmulos con j miembros, siendo j algún número non, es lo mismo que el que haya algún número non, j, tal que existe el cúmulo de cúmulos con tantos miembros como (números naturales hay menores que) j. El que exista el cúmulo de personas que han pensado alguna vez en la naturaleza de algún número natural es lo mismo que el que exista algún número natural tal que existe el cúmulo de personas que han pensado alguna vez en la naturaleza del mismo. El que exista el cúmulo de los entes idénticos a algún número natural es lo mismo que el que haya algún número natural tal que existe el cúmulo de entes idénticos a él. Hay algún número primo gemelo (de otro menor que él) mayor que cualquier otro número primo que tenga un gemelo si es que existe el cúmulo que abarca tan sólo a todos los números primos gemelos, habiendo uno de ellos mayor que todos los demás (seguramente no existe). El que haya algún número i>2 tal que exista el cúmulo de soluciones a la ecuación diofantina $x^i \oplus y^i = z^i$ es lo mismo que el que exista el cúmulo de soluciones a tal ecuación para algún número natural i (no existirá según la conjetura de Fermat). Hay algún número natural que no sea la suma de dos primos si existe el cúmulo que abarca sólo a algún número natural así (tampoco existirá según la hipótesis de Goldbach). El que exista el cúmulo de factores de algún número perfecto non es lo mismo que el que haya algún número perfecto non tal que exista el cúmulo de sus factores.

Aparte de cuán plausible sea o deje de ser todo eso, el conyunto izquierdo de A17 permite probar, con respecto al ancestral (combinatorio), que éste es una función de cualquier adicidad (finita). Con lo cual resulta esto: el hecho de que el ancestral (combinatorio) una a tres entes, x,z,u, en ese orden, es lo mismo que el cúmulo de entes, v, tales que el ancestral une a x,z,u,v, en ese orden. Más en general --gracias al conyunto izquierdo de A17--: para cualesquiera entes x^1, ..., x^n, $*x^1x^2...x^n$ es la unión (conjuntística) de $x^2...x^n$, $x^1...x^n$, $x^1(x^1x^2)...x^n$, $3x^1x^2...x^n$, $4x^1x^2...x^n$, etc. Por consiguiente, el hecho de que tal ancestral, *, se una a sí mismo consigo mismo es, todavía, una función, un cúmulo, a saber: el cúmulo de entes para con los cuales hace eso. Así pues, como, para cualesquiera x,z, *xz es la unión de los cúmulos z, xz, 2zx, 3zx, etc., e.d. es el cúmulo de entes, u, que, o son abarcados por z, o lo son por xz (e.d. z guarda con ellos la relación x) o lo son por x(xz), etc. resulta que, cuando tomamos al propio * en lugar de x, **z deberá ser igualmente una unión así. O sea, dado un argumento más, a la derecha, u, **zu deberá ser la unión de zu, *zu, 2*zu etc. Y similarmente para **zuv, **zyuv, etc. etc. Tales resultados, sin embargo, únicamente se demuestran con ayuda de A17 (aunque, desde luego, podrían postularse otros axiomas alternativos que permitieran probarlo). Porque, sin A17, **zu sería "sólo" el (mero) hecho de que hay algún número natural, v, tal que z guarda con u la relación v*; de que para cada número natural v exista el cúmulo de entes con los cuales u guarde la relación v*z no se seguiría la existencia del cúmulo de entes, x, tales que, para algún número natural, v, u guarda con x la relación v*z; menos aún se seguiría que ese cúmulo (esa unión) sea, precisamente, **zu.

Vamos a considerar ahora qué cúmulo de entes (determinaciones) es $\mathcal{B}$. Empezamos por ω, que es el cúmulo de los números naturales, ∅,1,2, ... Luego tenemos χω que es el cúmulo de los miembros y subcúmulos de ω. 2χω es el cúmulo de miembros y subcúmulos de χω (incluyendo entre los últimos a cúmulos que abarquen indistintamente a miembros y a subcúmulos de ω). Vienen luego, en sucesivos estadios, 3χω, 4χω, etc. ¿Cómo sabemos que todo lo hasta ahora aludido pertenece a $\mathcal{B}$? Por lo siguiente. ∅ pertenece a ω; luego, si algo pertenece a ∅(ε*)*χω, pertenece a $\mathcal{B}$; mas ∅(ε*)*χω = *χω; pues bien todo lo anteriormente aludido es demostrablemente abarcado por *χω. ¿Qué pasa con el propio cúmulo-límite *χω? Que también pertenece a $\mathcal{B}$. En efecto: 1εω; luego 1(ε*)*χω está incluido en $\mathcal{B}$; lo cual significa que **χω es un subcúmulo de $\mathcal{B}$; ahora bien: **χω es la unión de χω; *χω; *(*χ)ω; 3*χω; 4*χω; etc.; tomemos *(*χ)ω, e.d. 2*χω: es la unión de: ω; *χω; *χ(*χω); 3(*χ)ω; etc.; tomemos a *χ(*χω), e.d. 2(*χ)ω: es la unión de: *χω; χ(*χω); 2χ(*χω);

3χ(*χω); etc.; de los elementos de esta última lista, el segundo --y, por ende, cada uno de los que siguen-- abarca a *χω, pues éste es, evidentemente, un subcúmulo del cúmulo de miembros y subcúmulos de él mismo (cualquier ente xεχx, salvo que x sea un ente marginable, segregable). Reanudemos ahora nuestra enumeración: íbamos por 3*χω, 4*χω etc., la unión de todos los cuales es **χω. Similarmente a como se acaba de hacer con relación a *χω, pruébase luego que **χω, lo mismo que cada uno de sus miembros y subcúmulos, pertenece a $\mathcal{B}$. E igualmente se demuestra que pertenecen a $\mathcal{B}$ no sólo todos los miembros y subcúmulos propios de ***χω, de ****χω, etc., sino también cada una de estas grandes uniones de cúmulos (x es un subcúmulo propio de z si es un subcúmulo de z pero x≠z). $\mathcal{B}$ es la unión de todas esas grandes uniones. Cada peldaño o estadio incluye a los anteriores y también los abarca.

Acerca de la cardinalidad de esos cúmulos, he aquí mis conjeturas. ω tiene, claro está, cardinalidad ω, e.d. aleph-sub-cero; card(χω) =aleph-sub-1; card(*χω) = aleph-sub-ω; card(2*χω) = aleph-sub-ω^2;
card(**χω) = aleph-sub-(aleph-sub-1); card(*(**χ(ω) =
= aleph-sub(aleph-sub-1×aleph-sub-0);
card(2**χω) = aleph-sub((aleph-sub-1)$^{\omega}$);
card(***χω) = aleph-sub-(aleph-sub-ω);
card(****χω) ≧ el primer punto fijo de la función aleph; o sea:
aleph-sub-(aleph-sub-(...aleph-sub-ω))...) (infinitas veces). Seguramente $\mathcal{B}$ es otro punto fijo de esa función. Y cabe conjeturar que $\mathcal{B}$ incluye a un cúmulo, cuya cardinalidad sea un punto fijo de la función aleph, de cúmulos cada uno de los cuales sea tal que su cardinalidad es un punto fijo de la misma.

Sea de ello lo que fuere, síguese de lo precedente que $\mathcal{B}$ incluye a todos sus miembros salvo a aquellos que son miembros de ω (los números naturales). Lo recíproco no es verdad: no todo subcúmulo de $\mathcal{B}$ es un miembro de $\mathcal{B}$. Porque para que algo sea un miembro de $\mathcal{B}$ ha de pertenecer a uno de esos grandes estadios (*χω, **χω, etc.) así como a los que anteceden, mas no a los que siguen; en tanto que un subcúmulo de $\mathcal{B}$ puede tener miembros en todos esos estadios. Sin embargo, obviamente los subcúmulos de $\mathcal{B}$ son miembros de χ$\mathcal{B}$. Y, por el axioma A17, todos ellos (incluyendo, por ende, el propio cúmulo gigantesco $\mathcal{B}$) son entes insegregables --y, a fuer de tales, puesto que no son combinadores--, también universalmente agregativos, e.d. <u>agregados</u>-- y, por añadidura, pertenecientes al ámbito de aplicabilidad del axioma de elección. En efecto: lo postulado por A17 al respecto es la buena ordenabilidad de $\mathcal{B}$, e.d. que existe una relación < entre miembros de $\mathcal{B}$, la cual es una buena ordenación, e.d. una relación que satisface las condiciones de conexidad (x<y o y<x o x=y para cualesquiera x,y ε$\mathcal{B}$), transitividad(x<y, y<z ⊢ x<z), irreflexividad (x≮x) y existencia de un primer elemento en cada subcúmulo no vacío de $\mathcal{B}$ (e.d. cada subcúmulo no vacío C es tal que hay un miembro x de C tal que cada u miembro de C pero ≠x es tal que x<u); con la puntualización adicional de que esa relación, al restringirse a los números naturales, es la intersección de la diversidad con el ancestral de la predecesión. Esa postulación es más fuerte incluso que otras versiones del axioma de elección, p.ej. la de seleccionabilidad de cualquier subcúmulo no vacío del cúmulo seleccionable en cuestión. (Un cúmulo es seleccionable ssi, siendo un cúmulo de

cúmulos no vacíos, pero disjuntos entre sí, existe una función ϕ tal que para cada uno de esos cúmulos, x, ϕxεx.) Precisemos, sin embargo, que, postulados en su plena generalidad o sin restricciones, son equivalentes el principio de buena ordenabilidad --cualquier cúmulo está bien ordenado por alguna relación de orden--, el de seleccionabilidad, y cientos de otras versiones que han sido ampliamente estudiadas --algunas de ellas curiosas y hasta divertidas. Pero, según lo ha mostrado Rosser, cuando se postulan tales principios con restricciones --o sea tan sólo para cierto ámbito de cúmulos--, no son equivalentes. El de buena ordenabilidad es el más fuerte: para que sea bien-ordenable un cúmulo de determinada cardinalidad ha de ser seleccionable un cúmulo que lo incluya de cardinalidad mucho mayor. Aun así, nuestra postulación de A17 nos exime de aseverar el <u>irrestricto</u> axioma de elección --en cualquiera de sus versiones (una de ellas sería que Λ1 está bien ordenado)--, ya que éste es difícilmente admisible por su incompatibilidad con otros principios plausibles en teoría superior de conjuntos.

Otras consecuencias de A17 son éstas. Ante todo, *B* es un ámbito de aplicación del teorema de Cantor, o sea: cada cúmulo de miembros de *B* es menor que su respectivo potencial --y de ahí que, por lo tanto, cada uno de ellos, x, sea menor que su siguiente en la serie, χx, pues éste incluye al potencial de x, πx. Aplícase eso incluso a *B*, que es menor (más pequeño) que χ*B*. ¿Qué pasa con χ*B*? Quizá sea un ente marginable y, por ello, caiga fuera del ámbito de aplicación del teorema de Cantor. Quizá no.

La postulación, en nuestro sistema CD, de A17 constituye una concesión a los adalides de la corriente actual entre quienes profesan la teoría de conjuntos desde una vocación más matemática que filosófica (n.36). Para los efectos de una matemática menos bombástica bastara con postular, en lugar de £*B*, algo infinitamente más modesto, p.ej. £(*χω), lo cual todavía permitiría aplicar tanto el teorema de Cantor cuanto el axioma de elección a un enorme cúmulo, a saber: la unión de ω, con χω, con χ(χω) etc., o sea de cúmulos que son --en virtud del teorema de Cantor que les seguiría siendo aplicable-- respectivamente de cardinalidades aleph-0, aleph-1, aleph-2, etc., hasta aleph-ω. Además, al hacerlo así hubiéramos podido --a estos efectos-- ahorrarnos el conyunto izquierdo de A17. Lo cual, por otra parte, a lo mejor, sería preferible dado que ese conyunto izquierdo de A17 no es tan seguro como otros postulados del sistema; y, sin él, no se ha encontrado todavía la manera de introducir en CD un cúmulo como *B*. Claro que no faltan motivos de otro género para postular la verdad del conyunto izquierdo de A17, según se dijo más arriba.

Concluyendo ya, vamos a exponer algunas otras definiciones:
"x<y" abr. "x≠y..ωx.ωy.*anc*(*sq*)xy+.F(ωy)..(∩ωy)x+.(Σ∩πyx).F(ωx)"

En la definición de número va a jugar un importante papel la unión de un cúmulo dado con su respectivo potencial (e.d. el χ de tal cúmulo), ya que por un lado, tal unión viene garantizada como (ordinalmente) <u>mayor</u> que el cúmulo dado, según la precedente definición, al paso que, por otro lado, permite alcanzar la doble meta de ordenar a los números tanto por pertenencia cuanto por inclusión --obteniendo con ello un orden con las ventajas de la ordenación de los ordinales en la teoría de conjuntos de von Neumann-- así como, además, asegurar

que el siguiente de un número sea mayor que él no sólo ordinal sino también cardinalmente (e.d. no sólo en el sentido de posterior según el orden <, sino también en el sentido de más grande que, de más tamaño que). Por ello voy a introducir estas definiciones más:
'δ' abr. 'λuv(iv χu)'; '*num*' abr. 'λx(ωx+β(Δδ(1:))(δω)x)' *num* es un subcúmulo de *B* que sólo abarca a: los miembros de ω; el propio ω; χω, 2χω, ..., *χω, χ(*χω), 2χ(*χω), ..., 2(*χ)ω, 3(*χ)ω, ..., **χω, ***χω, etc. (O sea, a los "estadios" o pisos del edificio.)

Está claro que *num* es un subcúmulo de *B* y que cada miembro de *num* que no sea un número natural (ε ω) será un cúmulo que abarque e incluya a los números que lo preceden. No obstante, un número abarca también a muchas otras cosas que no son números χω, el menor de los números mayores que ω, abarca, p.ej., a todos los subcúmulos de ω --así como a los miembros de ω; mas, de esos subcúmulos, sólo uno (el propio ω) es un número.

¿Cuántos números hay iguales o menores que un número cualquiera dado? En particular, ¿cuál es la cardinalidad de *num*? (¿Cuántos miembros tiene *num*?) Podemos conjeturar que *num* es un cúmulo enumerable, e.d. que su cardinalidad es ω; y eso se probaría fácilmente una vez demostrado el siguiente lema: no hay miembro alguno de *num* que no sea denotable por algún signo de CD. Si ese lema es --según parece verosímil-- demostrable es un tema del cual me ocuparé en otro momento.

He aquí ahora otras definiciones:

'{,,,x}' abr. 'λz(z<x)'; '*func*' abr. 'λxUy,u,v(xyv.xyuGiuv)'
'x≾y' abr. 'Eu(*func*u.π(u"y)x)'; '*cor*' abr. 'λx(*func*x.*func*(Γx))'
'x≃y' abr. 'Eu(*cor*u..π(u"y)x..π((Γu)"x)y)'
'*card*' = 'λzx(*num*x..{,,,x}≃z)'; *card*:z será el cardinal de z.

Mostrar en detalle cómo, dado el axioma A17, bastan esas definiciones para desarrollar una teoría general de cardinales, e igualmente cómo es posible gracias a A17 desarrollar la aritmética y el análisis o teoría de los números reales son tareas que dejo para otro lugar. El lector puede entretenerse de momento con esas demostraciones. En particular he aquí una lista interesante de problemas propuestos:

- Encontrar versiones demostrables en CD (con A17) del teorema de Schröder-Benstein (a saber: Ux,z(x≾z.(z≾x)C.z≃x)) restringidas a *B*. (n.37).
- Encontrar diversas variantes de los teoremas usualmente considerados como equivalentes al axioma de elección (lema de Zorn, postulado de la buena ordenación, etc.) que sean demostrables en CD restringidos a *B* y con ulteriores restricciones de algunos cuantificadores a entes insegregables.
- Averiguar si puede probarse que en CD es indemostrable la existencia de cardinales inaccesibles (n.38).

§4 Unas pocas puntualizaciones adicionales

(1) Siguiendo a Fitch (op. cit. en (n.32), pp.61ss) cabe definir la multiplicación entre números naturales así: 'u×v' abrevia a 'Δru'. Demuéstranse para la multiplicación leyes como las de asociatividad (para cualesquiera miembros de *B*, x,u,v: Δ(Δxu)v = Δx(Δuv)) así como existencia de elemento neutro (1 lo es: Δ1x=Δx1=x); con aplicación restringida al dominio ω de los números naturales, esa multiplicación es

también conmutativa. Fith, loc. cit., justifica el denominar multiplicación al combinador en cuestión (escrito en su notación de otro modo) con estas palabras: ese combinador 'is a kind of multiplication. In fact, in the theory of groups, if the elements of a group are regarded as being transformations, then the fundamental group operation of multiplication is exactly this kind of multiplication'. Así, el producto de dos rotaciones ϕ,γ, será $\Delta\phi\gamma$, o sea una rotación doble tal que, para un argumento normal (insegregable) x, $\Delta\phi\gamma x=\phi(\gamma x)$: el resultado de efectuar primero la rotación y luego la ϕ. Por eso Δ es lo que también suele denominarse composición de operaciones y escribirse '$\circ$'. Definiéndose, luego, la exponenciación x^z como zx, obteniéndose asimismo para los miembros de ω todas las leyes de la exponenciación aritmética. (Para más detalles vide cap. 4 del libro de Fitch, pp. 78ss. Nótese, empero, que su sistema tiene muchos rasgos diversos de CD y que sus demostraciones no pueden de ningún modo "calcarse", ni siquiera recomponerse o arreglarse fácilmente, para aplicarlas a CD.)

(2) Una característica que poseen tanto CD como varios de los sistemas de Fitch es que no son sistemas recursivamente axiomatizables. Un sistema es recursivamente axiomatizable si hay un procedimiento de decisión mecánico para saber, dada una fórmula, si es o no un axioma del sistema. Los sistemas recursivamente axiomatizables tienen sendos conjuntos de teoremas recursivamente enumerables. Un conjunto es recursivamente enumerable si hay un procedimiento de decisión mecánico para, dado un miembro del conjunto, determinar, en un número finito de pasos, que efectivamente pertenece al conjunto; si un conjunto x es recursivamente enumerable y si también lo es su complemento relativo (en este caso, el conjunto de las fórmulas no pertenecientes a x), entonces x es recursivo. Hay una importante demostración debida a Craig a cuyo tenor, si un sistema es axiomatizable con un conjunto de axiomas que sea recursivamente enumerable, entonces es recursivamente axiomatizable (e.d. es axiomatizable con un conjunto de axiomas no sólo recursivamente enumerable sino incluso recursivo). Como CD y los sistemas de Fitch no son recursivamente axiomatizables, ni por ende --a tenor del teorema de Craig-- axiomatizables de manera recursivamente enumerable, sus respectivos conjuntos de axiomas no son ni siquiera como los conjuntos de teoremas de las teorías estándar. (Con otras palabras, ninguna teoría estándar puede probar como teoremas sólo todos los axiomas de CD.) La relación de demostrabilidad en CD es mucho más amplia y laxa, menos rígida, que en los sistemas estándar. En éstos una prueba o demostración es una secuencia de enunciados decidible, o sea tal que hay cómo programar (en principio) una computadora para que reconozca y acredite fehacientemente, tras un número finito de pasos, que efectivamente se trata de una prueba. Que eso no es una exigencia arbitraria muéstralo cuán hondas raíces tiene ne nuestra concepción de la razón: no aceptamos cualquier secuencia de prolaciones como un argumento, sino que debe tratarse de una secuencia "imparcialmente" reconocible como eso, como un argumento o razonamiento. Pero la recursividad es una exigencia excesiva; a lo sumo un desideratum que sólo vale como ideal para casos límite, pero del cual es lícito despegarse o alejarse si es para granjearse ventajas mayores. Y las ventajas no son pequeñas, en este caso: evitar la incompletabilidad que --según

demostró Gödel-- afecta a todo sistema recursivamente axiomatizable que contenga la aritmética --bajo una u otra versión--; alcanzar la mayor aproximación posible a un irrestricto PA sin renunciar ni al tercio excluso ni a la existencia de negación fuerte (aproximación que en CD se consigue gracias, además de los otros axiomas, al postulado disyuntivo (P2) a cuyo tenor sólo deja de ser un teorema λrpr=p cuando es un teorema λrpr≠p, e.d. cuando existen motivos específicos demostrablemente lo bastante fuertes como para excluir una de esas ecuaciones. Ahondar más en este y otros puntos es tarea que abordaré en otro trabajo.

Instituto de Filosofía del CSIC

N O T A S

* Publicamos aquí la Segunda Parte del presente artículo. La Primera Parte del mismo salió publicada en Contextos Nº 11. Reproducimos aquí, de todos modos, la bibliografía del artículo. Cabe recordar las siguientes abreviaciones empleadas a lo largo de este artículo: 'R' por 'Russell'; 'F' por 'Frege'; 'Q' por 'Quine'; 'c.' por 'conjunto' ('cc' por 'conjuntos'); 'PA' por 'principio de abstracción'; 'tcc' por 'teoría(s) de conjuntos'; 'PE' por 'principio de extensionalidad'; 'PC' por principio de comprensión'. Las referencias bibliográficas tienen la forma '(Q1)' etc.

(n.23) Una demostración más simple bríndala P. Geach, en un trabajo contenido en la misma antología en que figura (Q4), a continuación de éste (pp. 502ss). Geach exagera, no obstante, el resultado --en su presentación informal del mismo. Lo que prueba no es una contradicción; no es que sea inconsistente el sistema de F remendado; sino sólo que en ese sistema se demuestra que sólo existe un objeto. Es curioso que en algunas tcc con PA irrestricto basadas en ciertas lógicas paraconsistentes demuéstrase exactamente eso mismo, que con razón viene tachado de un grave inconveniente de tales tcc.

(n.24) Suplico indulgencia para con las (fácilmente explicables o hasta excusables) fluctuaciones terminológicas en este asunto. En otros muchos lugares he llamado 'principio de separación' a lo que llamo aquí 'principio de abstracción'. La primera de esas denominaciones procede de Zermelo, cuyo Absonderungsaxiom, sin embargo, era una versión restringidísima de lo que aquí llamo 'P.Ag'('principio de segregación') En Zermelo esa denominación de principio de desgajamiento o separación viene de que el esquema que él propone es éste: UuEyUx(yx≡.ux.p): dado un c. u existe otro c. que abarca sólo a todos los miembros de u tales que p.

(n.25) En mi libro Fundamentos de ontología dialéctica (cit. supra (n. 18)) discutí la articulabilidad de una teoría así tildándola de 'teoría libre de descripciones', si bien no es lo que más comúnmente recibe esa denominación, pues esto último se parece antes bien a una de las teorías que yo mismo he propuesto tanto en el lugar citado como en El ente y su ser (también citado en la (n.18)).

(n.26) Aunque el debate terminológico no es tan baladí como pudiera pensarse. En efecto: puede que haya buenas razones para abogar por una teoría de descripciones flexible, como la aquí aludida. Sólo que habrá que trabajar duramente antes de haber resuelto las pavorosas dificultades que acarrea; sin embargo es dudoso que, sin resolverlas, lleguemos a tener una teoría de descripciones parecida a la del lenguaje natural, pues en el habla corriente menciónase "al ente que p" cuando hay analogía suficiente (variando según los contextos cuánta suficiencia sea menester) entre cómo sea el ente así llamado y cómo sería un ente, si lo hubiera, que plenamente mereciera esa denominación.

(n.27) Con la excepción, no obstante, de algunas "teorías de propiedades" neomeinongianas diseñadas para un tratamiento de los entes literarios. Otra excepción parcial son mis propias tcc donde los entes transcendentes o _perantiomáticos_ (la Existencia misma y sus Atributos, los entes que en todos los aspectos tengan un grado de realidad infinito) vienen abarcados por muchos cc sin cumplir, o sin cumplir en ninguna medida aproximadamente igual, la condición de pertenencia correspondiente. Además en mis tcc precedentemente elaboradas cada ente realmente real (existente en todos los aspectos, pues sólo ellos entraban en tales teorías en el campo de variación de las variables) pertenece a todo c., aunque sea sólo infinitesimalmente. Pero con convenientes ajustes, como los que de hecho se dan en esas teorías, ese desbordamiento de los cc no acarrea inconvenientes, al paso que filosóficamente ofrece la ventaja de venir motivado por el principio de gradualidad --la tesis de que todas las diferencias son de grado--, que muchas consideraciones contribuyen a hacer plausible. No discutiré aquí todo eso, que vendrá aclarado en (el cap. 1º de) mi próximo libro: _Ontofántica: hallazgos filosóficos_.

(n.28) Von Neumann las llamó 'clases propias' y, en escritos posteriores, Q las ha denominado 'clases últimas'. La idea, al parecer, se remonta a König (1905) y Cantor (1899) (vide (Q3), p.302). Los dos sistemas en los que más fecunda se ha revelado esa idea de admitir no elementos, entes inclasificables son el propio sistema ML de Q y el de NBG (von Neumann-Bernays-Gödel). Simplificando bastante, cabe decir que éste último es al de ZF como ML es al sistema precedente de Q --del cual se hablará más abajo--, NF. Sólo que NBG es muchísimo más apocado y parco en su agrandamiento del universo de ZF. NBG sólo acepta el PC, la existencia de $\hat{x}p$, cuando los cuantificadores en "p" vengan restringidos a elementos. (Vide (Q3), pp. 310ss.)

(n.29) La condición (2) fue añadida por Hao Wang, pues faltaba en la primera edición de (Q2), razón por la cual el sistema de esa primera edición era inconsistente (y, en lógica clásica, inconsistente significa también delicuescente). Otros problemas sobre las tcc de Q ML y NF vendrán abordados en otro artículo, en preparación ya.

(n.30) Sobre ese tratamiento de las relaciones vide _Fundamentos de ontología dialéctica_ (op. cit. en la (n.18) supra), cap. II.10, pp.72ss. Vide también mi artículo "Notes on Bergmann's New Ontology and Account of Relations", _Philosophy Research Archives_ 12 (1986), pp. 221-49.

(n.31) Desde la perspectiva de ML cabe reconocer que la base "intuitiva" de la teoría de tipos es, precisamente, que sólo hay garantía de que un ente, en general, sea clasificable cuando pueda venir especificado sin infringir la estratificación; no porque carezca de sentido toda infracción de la estratificación; ni siquiera porque toda infracción haya forzosamente de ser falsa; sino por esto solo, a saber: que un c. especificable de manera estratificada es un ente la pertenencia al cual no conlleva anomalías susceptibles de enredarlo en líos o dificultades si él mismo viniera luego a pertenecer a otros cc. (o a sí mismo, que suele ser lo más escabroso). Reconócese que lo "normal" es un escalonamiento de abarques: el abarque por un c. de cc. de "nivel" inmediatamente inferior y así sucesivamente. (Aunque luego, indirectamente, pruébase que esa normalidad no se da de manera general.) Además, los niveles no son rasgos consustanciales e inamovibles, sino papeles que se desempeñan.

(n.32) Vide Frederic B. Fitch, Elements of Combinatory Logic, New Haven: Yale U.P., 1974.

(n.33) El sistema aquí propuesto, CD, es el resultado de reforzar (en algunos puntos considerablemente) el sistema Ac, que he presentado en el trabajo "Algunos resultados recientes en la articulación de lógicas temporales", por publicarse en las Actas del IV Congreso de Lenguajes Naturales y Lenguajes Formales (celebrado en Lérida, sept. de 1988), ed. por C. Martín Vide, Universidad de Barcelona, 1989. Entre otras cosas, el presente sistema asegura (cosa que resulta dudoso que hiciera Ac) que λxp sea el mayor de los cúmulos de entes que p, e.d. una una determinación que abarca a cuanto venga abarcado por otra, z, tal que todo miembro de z sea tal que p.

(n.34) En la práctica, vale para casi todos los casos una regla de extensionalidad más fuerte, a saber xzIyz $\vdash$ x=y. (Para probar esa regla úsase la regla, derivada en CD, de universalización existencial: p $\vdash$ Uzp.) Porque en casi todos los casos se prueba fácilmente o bien xOIyO o bien F(xOIyO). Y sólo en algún caso muy excepcional es verdad UzB(xzIyz) y, sin embargo, x$\neq$y --por la interferencia de O, que en esos casos es tal que F(xOIyO). ¿Cómo cabe eso sí 'O' no denota nada? ¿Cómo puede esa "nada" venir abarcada por un cúmulo, por una determinación? Porque una determinación es algo que, dándosele un argumento, haga (o no) corresponderle un valor, pero también algo que, yendo a tomar argumento y no recibiéndolo (en absoluto), puede así y todo dar --espontáneamente-- un valor. Tal es el caso, p.ej., de F (e.d. ΔBF), la determinación de ser absolutamente falso o inexistente (totalmente falso en todos los aspectos), la cual es tal que para ningún ente x existe Fx, pero en cambio sí existe FO, que es lo absolutamente real, e.d. la Realidad (=Verdad, la Existencia), lo denotado por '1'. Alternativamente, podría reforzarse el sistema con un PE más fuerte (Ux,yEz(xz=yzD.x=y)), pagando el precio de introducir una serie de medidas compensatorias, entre ellas que se restrinjan ulteriormente los PP.A (en CD hay, no un único esquema generalmente válido que sea "el" PA, sino una serie de esquemas así con unas u otras restricciones) con esta prótasis: O$\neq$qC.λqpq=p (cuando la apódosis esté ahora siendo un PA dentro de la presente versión de CD). Paréceme, de momento, ventajoso atenerme a la actual versión del sistema. (Y el que sea ventajoso es un indicio que nos permite conjeturar que la realidad es así.)

(35) Ni CD ni sus inmediatos antepasados --los sistemas de la familia *A*, que he venido construyendo desde la segunda mitad de la década de los 70-- son los únicos sistemas de tcc contradictorial. Otros así son: (1) los sistemas de tcc construidos con lógicas relevantes como la de Routley (Sylvan, que ofrece características muy interesantes, pues careciendo de la ley de contracción (p→(p→q)→.p→q) parece escapar incluso a la paradoja de Curry-Moh Shaw-Kwei aun con un PA irrestricto (aunque eso no es seguro); (2) los sistemas de tcc construidos sobre la base de los cálculos sentenciales C de da Costa, sistemas ampliamente investigados por A.I. Arruda, hasta su muerte, y que desgraciadamente suelen saldarse con resultados indeseables, pues incluso con el más débil de tales cálculos, C_ω, asoman consecuencias sumamente indeseables (con un PA irrestricto, como la existencia de un único c. (Vide supra, Ap. 1 de la Secc. II de este artículo); (3) un esbozo de sistema elaborado por N. Rescher y R. Brandom (en The Logic of Inconsistency, Oxford: Blackwell, 1980, pp.36ss., cuya idea central estriba en partir el PA en dos mitades: una que estipula la condición suficiente de pertenencia a un c.; la otra que enuncia la condición necesaria; ese sistema no es copulativo, así que del par de premisas p,q no se desprende la conclusión p-y-q. Conque de que el c. R sea tal que, para todo x, N(xx)CRx y también tal que RxCN(xx) no se sigue Ux(Rx≡N(xx)). Incluso si se demuestra (lo cual no está claro) que, por un lado, RR, por otro lado N(RR), no se sigue (RR.N(RR) ('.' es la conyunción). Algunos críticos atribuyen a Rescher una división del cúmulo de entes que p en dos: uno el de todo lo que p; y el otro, el de sólo lo que p. Esa no parece ser la idea de Rescher, pero sí se entroncaría con nuestra precedente discusión, más arriba, sobre las condiciones necesarias y suficientes de abarque de una cosa por el c. o cúmulo de entes que p, con las cuatro opciones de aceptar catervas o aceptar corrillos, o ambas cosas, o ninguna. De ser fundada esa aludida lectura, la propuesta de Rescher y Brandom estribaría en reemplazar el c. único R por una caterva y un corrillo, cada uno de ellos provisto de medio PA. En su libro Many-Valued Logic (vide (R1) en la bibliografía), pp.208-9, ya exponía Rescher interesantísimas consideraciones sobre el tratamiento de la paradoja de R en lógicas multivalentes.

(n.36) Al decir que mi postulación de A17 es una concesión a los seguidores de la corriente que hoy prevalece no deseo insinuar que esa postulación sea un simulacro o una finta. No, no: hay un grado indesdeñable de sinceridad en la misma. Sólo que, precisamente, la convicción se da por grados. Y mi convencimiento de que es verdadero el axioma A17 es muchísimo menor que el que tengo acerca de la verdad de los otros axiomas y postulados. Lo que digo sobre cuán difícil resulta nadar contra la corriente ha de entenderse, no como que, meramente, cueste trabajo promover puntos de vista que no gocen del favor de los círculos que marcan la pauta en el momento en que se esté, sino algo más hondo: sólo haciéndose uno "violencia" logra no dejarse influir por esa corriente. Y allende cierto punto, acaso no valga la pena hacerse tal violencia. Aunque (¡no lo olvidemos!) hay grados, en eso como en casi todo.

(n.37) Vide supra (n.20). Otra versión interesante del teorema de Schröder-Bernstein es el que --dentro del sistema NF de Q-- prueba J. B. Rosser en Logic for Mathematicians (New York: Chelsea, 2ª ed., 1978), p. 353, a saber (más o menos): $x \simeq z.(\pi uz).(u \simeq y).(\pi xy)C.x \simeq u$. Lo cual significa que, si un cúmulo es del mismo tamaño que un subcúmulo de otro que es, a su vez, del mismo tamaño que un subcúmulo del primero, ambos cúmulos son de igual tamaño. En CD no parece poder probarse ese teorema más que en versiones restringidas, p.ej. en versiones que se ciñan a subcúmulos o miembros de $\mathcal{B}$. Lo cual es suficiente, desde luego, permitiendo probar aquel corolario de dicho teorema que se refiere a los números cardinales en general (vide Rosser, op. cit. p. 376): $Ux,y(\mathit{num}x.\mathit{num}yC.x \neq yC.x<y+.y<x)$. Lo cual es un principio de conexidad u orden total entre los números. (Sobre el teorema de Schröder-Bernstein, cf. de F.R. Drake, Set Theory: An Introduction to Large Cardinals, North-Holland, 1974, pp. 46ss. Otros resultados interesantes que pueden obtenerse con respecto a nuestro cúmulo o colección *num* (incluso sin tener en cuenta la aplicabilidad del axioma de elección a todos los miembros y subcúmulos de $\mathcal{B}$ y, por lo tanto, a los de *num*) es que para cualesquiera números transfinitos ($\geqq \omega$), x,z, $x>z$ ssi $x \not\leq z$. En ese sentido, todos nuestros números son ordinales iniciales en la acepción de von Neumann (vide Drake op. cit., p.47), de suerte que cada número es igual al cúmulo de los que son de tamaño menor que él. Sin embargo, una cosa es el tamaño o cardinalidad de un número, otra el tamaño del cúmulo de números pertenecientes a ese número. $\chi\omega$ es un cúmulo de cardinalidad inenumerable (pues es $\simeq \pi\omega$), al menos según el teorema de Cantor (aplicable a *num* en virtud del axioma A17); mas el cúmulo de números pertenecientes a $\chi\omega$ (o sea la intersección $\bigcap \mathit{num}(\chi\omega)$) es un cúmulo que abarca sólo a $\omega \oplus 1$ números, e.d. a ω números. ¿Cuál es el menor número que abarque a 2^{ω} números?

(n.38) Defínese un cardinal x como inaccesible si cumple estas tres condiciones: (1) $\omega<x$; (2) para cualquier cardinal $z<x$, $\chi z<x$; (3) para cualquier cúmulo z de cardinales menores todos que x tal que el cardinal de z sea menor que x (o sea z abarca a menos de x cardinales) $1:z \neq x$ y $F(x<1:z)$. (Vide p.ej. J.R. Schoenfield, Mathematical Logic, Reading (Mass.): Addison-Wesley, 1967, p.304; F.R. Drake, op. cit. supra (n.37, sub fine), p.67. Una útil definición hállase en el trabajo de Kurt Gödel "¿Qué es el problema del continuo de Cantor?", (G2), p. 354.) Resulta prácticamente seguro que $\chi\mathit{num}$ no abarca a ningún cardinal inaccesible (aunque también es probabilísimo que el universo de CD, o sea A1, sí sea, él mismo, un cúmulo "inaccesible" en una acepción que consiste en una fácil y sencilla generalización de la noción de inaccesibilidad de cardinales recién introducida). Cuán interesante sea toda la teoría de los grandes cardinales (habría que añadir los hiperinaccesibles, hiperhiperinaccesibles etc.: vide Kenneth Kunen, "Combinatories", ap. Handbook of Mathematical Logic, ed. por J. Barwise, North-Holland, 1977, pp.396ss) es, desde luego, un tanto dudoso. Todo eso tiene aire de cuento de hadas, o, acaso más bien, de algo como la jerarquía de las escalas angélicas de Dionisio Areopagita --aunque no sé si las haya inaccesibles--, con una diferencia, sin embargo: la coherencia de los cuentos de hadas parece más asegurada y, hasta donde lo coherente sea metafísicamente posible --que no siempre lo es desde luego-- podemos conjeturar que esos cuentos, siendo relatos de hechos posibles, describen lo que efectivamente sucede en algunos aspectos de lo real o "mundos-posibles", aunque sean aspectos recónditos y menos reales que los del mundo de la experiencia cotidiana. Mas hay tres razones para guardar un marcado escepticismo hacia la teoría de los cardinales transfinitos, especialmente de los llamados large y los huge o enormes, a saber: (1) resulta dificilísimo probar la coherencia de los postulados que permiten demostrar la existencia de cardinales transfinitos como los aludidos; (2) es muy oscura la relación entre "estudio" y otros dominios de la matemática un poco más sobrios; (3) por añadidura, efectúase ese "estudio" en tcc que entronizan irrestrictamente el teorema de Cantor y el axioma de elección, ambos dudosísimos en cualquier versión de los mismos que sea irrestrictamente universal. Mas, como le es a uno tan costoso ir totalmente contra la corriente, he postulado el axioma A17 para dar en mi sistema cabida a una parte nada menospreciable de esas lucubraciones sobre los transfinitos. Sin embargo, mi convicción de la verdad de A17 es muchísimo menor que la que tengo en la verdad de los otros axiomas del sistema. (Cf. supra, (n.21).) (Nótese, por último, que en las definiciones de esta nota 'mayor' ('menor') se toma indistintamente, y a la vez, en el sentido ordinal de posterior (anterior) y en el cardinal de más grande (más pequeño), ya que varias teorías de cardinales --no todas, sin embargo: no lo hacen las de F, R y la de Rosser construida sobre la base de NF de Q-- consiguen, mediante definiciones, que ambas relaciones coincidan en el campo de los cardinales. La teoría aquí propuesta hace lo propio para cardinales transfinitos.)

BIBLIOGRAFIA

(C1) James van Cleve, "Why a Set Contains its Members Essentially", Noûs 19/4 (dic. 1985), pp. 585-602.

(C2) Charles S. Chihara, Ontology and the Vicious Circle Principle. Ithaca: Cornell U.P., 1973.

(G1) P.T. Geach, Logic Matters. Oxford: Blackwell, 1972.

(G2) Kurt Gödel, "La lógica matemática de Russell" ap. Obras Completas Trad. J. Mosterín et al. Madrid: Alianza, 1981.

(K1) William Kneale & Martha Kneale, The Development of Logic. Oxford: Clarendon, 1962. (Hay traducción castellana).

(P1) Charles Parsons, "Some Remarks on Frege's Conception of Extension" ap. Studien zu Frege I: Logik und Philosophie der Mathematik, ed. por M. Schirn. Stuttgart: Fromman V., 1976, pp. 265-78.

(Q1) W.v. Quine, "New Foundations for Mathematical Logic", ap. From a Logical Point of View. Harvard U.P., 1961 (2ª ed.).

(Q2) W.v. Quine, Mathematical Logic. Harvard U.P., 1951 (2ª ed.).

(Q3) W.v. Quine, Set Theory and Its Logic. Harvard U.P., 1969 (2ª ed.)

(Q4) W.v. Quine, "Frege's Way Out", ap. Essays on Frege, ed. por E.D. Klemke. Urbana: University of Illinois P., 1968, pp. 485-501.

(R1) Nicholas Rescher, Many-Valued Logic. New York: McGraw Hill, 1969.

(R2) J. Barkley Rosser, Logic for Mathematicians (2ª ed.). New York: Chelsea, 1978.

(T1) Christian Thiel, "Gottlob Frege: Die Abstracktion", ap. Schirn (vide (P1)), pp. 243-64.

(T2) Christian Thiel, "Wahrheitswert und Wertverlauf". Ibid., pp. 287-300.

(W1) Hao Wang, From Mathematics to Philosophy. Londres: Routledge & K.P., 1974.

(W2) Hao Wang, Beyond Analytic Philosophy. Cambridge (Mass.): M.I.T. P., 1986.

(W3) A.N. Whitehead & Bertrand Russell, Principia Mathematica. Cambridge U.P., 1962. (Ed. abreviada según la 2ª ed. de 1927).