CAPITAL FIJO A PARTIR DE SRAFFA: INTERPRETACIÓN Y DESARROLLO

Fixed capital from Sraffa: interpretation and development

Antonio Mora Plaza
antonioamora@hotmail.com

Abstract:

Piero Sraffa wrote about the fixed capital in his book *Production of commodities by mean of commodities*. “His point of view implies, at different ages, should be treated so many different products each its own prices” . The age of capital will permit homogenize and aggregate this factor of production in the Sraffa´s book, but not in terms of value. This article will try to interpret and develop this matter.

Resumen:

El punto de vista de Piero Sraffa sobre la problemática del capital fijo (bienes no consumidos en un período de tiempo convencional) lo expresó en su obra Producción de mercancías por medio de mercancías diciendo que los bienes con “diferentes edades deberían ser tratados cada uno con su propio precios, es decir, como si fueran mercancías diferentes. La homogeneización y agregación del capital se produciría, no en términos de valor, sino según la edad que tuvieran en el proceso de producción. Este artículo trata de interpretar y desarrollar esta idea.

JEL: B51

Sraffa trata este tema desde el criterio de la producción conjunta porque le pareció -y con razón- que no había manera de abordarlo desde la óptica de la producción simple, sino desde el esquema de análisis según el cual existen múltiples factores o medios para producir una mercancía -bien o servicio-, pero sola una en cada proceso[1]. Con su capítulo sobre *el capital fijo* aborda el economista italiano la problemática de los medios de producción de duración superior a un año, aunque el período a contar es siempre convencional. Así, una máquina, las materias auxiliares, instalaciones, edificios, etc., son comprados o instalados en un momento determinado, pero su duración es o puede ser mayor que el año natural, a diferencia de otras materias primas y medios que son comprados y utilizados y/o desgastados en su totalidad en ese año y que el propio Sraffa llama *capital circulante* (según la tradición clásica, incluido Marshall). Hay claramente, bajo este punto de vista, dos tipos de medios de producción según su duración en el proceso productivo. Según esto, ¿cuánto vale al final de un año una máquina que se ha comprado en ese año y que seguirá funcionando al año siguiente? El ejemplo sirve para cualquier medio de producción cuya vida se alarga más allá del período convencional de reproducción del sistema económico, entendido este como un proceso que trasciende la vida de las empresas y afecta al sistema en su conjunto. Oigamos a Sraffa cómo aborda el problema: "*Consideremos los instrumentos duraderos de producción como parte de la absorción anual de factores de producción de un proceso en pie de igualdad con los medios de producción (por ejemplo, materias primas) que son enteramente gastadas en el curso de un año; y lo que queda de ellas al final del año será tratado como una parte del producto anual conjunto de la industria cuya parte más importante consiste en la mercancía susceptible de venta, que es el objeto primordial del proceso*"[2]. Sraffa pone a continuación el ejemplo de una máquina de tejer que "*entra en los medios de producción al principio del año... y al final del año la máquina más vieja y parcialmente desgastada que emerge del proceso será considerada como un producto conjunto con el volumen de producción de calcetines del año*"[3]. Y resume el tratamiento de estos medios de duración plurianual: "*Este punto de vista implica que la misma máquina, a edades diferentes, debería ser tratada como otros tantos productos diferentes, cada uno con su precio*"[4]. Con esta capacidad de síntesis cualquier aclaración posterior sobra. Además, y afortunadamente en esta ocasión, hace explícito el sistema de

[1] Si se quiere, por empresa, aunque creo conveniente en la obra capital de Sraffa referirse a procesos más que a empresas, obligados por dos innovaciones como *la mercancía-patrón* y *la razón-patrón.*
[2] Pág. 94 del capítulo X de *PMPM.*
[3] Pág. 93 de *PMPM.*
[4] Pág. 94 de *PMPM*.

ecuaciones que van a justificar su tratamiento, aunque siempre con su especial nomenclatura que yo modernizaré a los usos actuales. Veamos una ecuación que resumiría lo que Sraffa[5] plantea:

$$(1)\quad p_{Mkj}M_{(k)j}+\sum_{i=1}^{n}P_iY_{ij}=(1+r)\left[p_{M\,(k-1)j}M_{(k-1)j}+\sum_{i=1}^{i=n}p_iX_{ij}\right]+wl_j \quad desde\ j=1\ a\ n$$

siendo $\boldsymbol{p}_{\mathrm{Mkj}}$ el precio del bien $\boldsymbol{M}_{(\mathrm{k})\mathrm{j}}$ del sector ***j*** de *duración mayor de un año* que se ha obtenido o valorado en el momento ***k*** desde que entró en el proceso productivo (en adelante, de edad ***k***). $\boldsymbol{M}_{(\mathrm{k-1})\mathrm{j}}$ sería el mismo bien que entró a principios de año ***k*-1** (por tanto, de edad ***k*-1**) como medio de producción y que se ha convertido $\boldsymbol{M}_{(\mathrm{k})\mathrm{j}}$ en el año con su nuevo precio de compra $\boldsymbol{p}_{\mathrm{Mkj}}$. Como siempre, ***r*** sería la tasa de ganancia, $\boldsymbol{p}_{\mathrm{j}}$ el precio de los bienes que son a la vez medios y bienes finales, $\boldsymbol{x}_{\mathrm{ij}}$ los medios de producción, $\boldsymbol{y}_{\mathrm{ij}}$ los productos finales donde $\boldsymbol{y}_{\mathrm{ij}}=\mathbf{0}$ si ***i<>j***, ***w*** la tasa de salario y $\boldsymbol{l}_{\mathrm{i}}$ el input de trabajo de la mercancía ***i***, que en este caso, es invariante a juicio de Sraffa, porque medimos el valor de unos medios dado "*el supuesto de eficiencia constante durante la vida de la máquina*"[6]. Aunque la ecuación (1) la plantea Sraffa para la vida de una máquina[7], sin embargo el planteo del italiano puede generalizarse[8]. Sraffa, tras una serie de operaciones de eliminación de los $\boldsymbol{p}_{\mathrm{Mkj}}$ comunes en los dos lados de la igualdad, llega a la ecuación que va a definir su sistema una vez introducido *el capital fijo*[9]:

$$(1)\qquad \underset{1xn}{P}\ \underset{nxn}{Y}=w\underset{1xn}{L}+(1+r)\underset{1xn}{P}\ \underset{nxn}{X}+\frac{r(1+r)^t}{(1+r)^t-1}\times\underset{1xs}{P_M}\ \underset{sxn}{M}$$

---

[5] Pág. 96 de *PMPM*. Kurz y Salvadori relatan las dificultades de Sraffa y la ayuda del matemático y amigo Besicovitch en el artículo *Removing an insuperable obstacle in the way o fan objetivista análisis : Sraffa attempts as fixed capital*, 2008.

[6] Pág. 96 de *PMPM.* Ha de suponerse coeficientes fijos trabajo/producto.

[7] Un planteamiento que sigue al pie de la letra el libro de Sraffa puede verse en Ahijado (*Distribución, precios de producción y crecimiento*, editorial Ceura, cap. III, 1982), que a su vez recoge los planteamientos de Roncaglia, 1978, y Schefold, 1971). Yo he seguido un camino propio porque este trabajo no pretende ser un resumen de otros.

[8] Ver anexo I.

[9] Aleccionador resulta comparar el planteamiento de Sraffa sobre el capital fijo y el que hace Garegnani sobre el mismo tema discutiendo la solución de Bortkiewicz (*El capital en la teoría de la producción*, cap. V, págs. 74-86, 1982 en Oikos-Tau).

Hemos expuesto la ecuación del texto principal de este epígrafe pero sin contar cómo llegó Sraffa a ella, aunque sí vimos la problemática general de los bienes de capital fijo como un conjunto de ecuaciones a lo largo del tiempo en el que un bien de capital fijo entraba como medio, pero no como productos final; al finalizar y desgastar (o vender como chatarra) ese mismo bien fijo aparecía como medio y no como producto final. Esto tendría el inconveniente de que al menos dos veces a lo largo de la vida útil del medio de capital fijo no puede ser considerado como bien básico, porque al menos por una vez el sistema de ecuaciones que definen la economía está falto de producto final y otra de medio de producción. Sraffa subsanó este defecto porque no quería que los medios de capital fijo pudieran equipararse a los bienes no-básicos, que salen como producto pero no intervienen como medios de producción. Sraffa fue variando de criterio hasta lograr en un principio que todos los bienes de capital fijo aparecieran en todas las ecuaciones tanto como medios que como productos. Además tuvo la ayuda inestimable del matemático y amigo *Besicovitch.* El caso es que entre ambos (o quizá sólo Sraffa en esta primera parte), se planteó un sistema de ecuaciones similar[10] al que sigue:

(2) $$1.... \rightarrow (1+r)\lfloor PX + P_{M(0)}M_{(0)}\rfloor + wL = PY + P_{M(1)}M_{(1)}$$

$$2.... \rightarrow (1+r)\lfloor PX + P_{M(1)}M_{(1)}\rfloor + wL = PY + P_{M(2)}M_{(2)}$$

....

$$k.... \rightarrow (1+r)\lfloor PX + P_{M(k-1)}M_{(k-1)}\rfloor + wL = PY + P_{M(k)}M_{(k)}$$

....

$$s.... \rightarrow (1+r)\lfloor PX + P_{M(s-1)}M_{(s-1)}\rfloor + wL = PY + P_{M(s)}M_{s}$$

---

[10] Ver pág. 96 de *PMPM.* Hay una diferencia aquí con lo que explicita Sraffa: que en la última ecuación, es decir, la ***s***, en Sraffa no figura en el lado derecho de la ecuación $\boldsymbol{P}_{M(s)}\boldsymbol{M}_{(s)}$. Pero hay que suponer que este término existe por dos motivos: 1) porque es el valor de la chatarra de la que habla el propio Sraffa; 2) porque al igualar este término con el que figura como medio en la primera ecuación, es decir, $\boldsymbol{P}_{M(0)}\boldsymbol{M}_{(0)}$, es decir, al hacer $(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})\ \boldsymbol{P}_{M(0)}\boldsymbol{M}_{(0)} = \boldsymbol{P}_{M(s)}\boldsymbol{M}_{(s)}$ es lo que permite la renovación del ciclo de producción del capital fijo y, simultáneamente, llegar a la simplificación del propio Sraffa de los términos comunes que expresan el capital fijo en ambos lados de la igualdad de las diferentes ecuaciones.

donde $\boldsymbol{M}_k$ es la máquina que se produce en el período $\boldsymbol{k}$ por medio –entre otros bienes circulantes- de la máquina $\boldsymbol{M}_{k-1}$, que es la misma que la anterior, solo que desgastada por un período (un año) de utilización y que se amortizan en $\boldsymbol{s}$ períodos (de $\boldsymbol{k}=\mathbf{1}$ a $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{s}$). Ahora procede Sraffa -por indicación de *Besicovitch*- a multiplicar las ecuaciones por $(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{-s}$ la pimera, por $(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{-(s-1)}$ la segunda, y así todas hasta la primera $(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{-1}$; luego suma todas las ecuaciones y se deshace los términos comunes, iguala el valor del primer bien de capital $(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})\boldsymbol{p}_{M0}\boldsymbol{M}_0$ con el último $\boldsymbol{P}_{Ms}\boldsymbol{M}_s$ (la chatarra) y le queda:

$$\boxed{\underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{Y} = wL + (1+r)\underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{X} + \frac{r(1+r)^s}{(1+r)^s - 1} \times \underset{1xs}{P_M}\,\underset{sxn}{M}} \qquad (3)$$

que ya hemos visto anteriormente. Aunque no lo explica con claridad, al obrar así Sraffa lleva a cabo una simplificación notable: hace coincidir el tiempo que expresa las diferentes edades de las máquinas $\boldsymbol{s}$ (agrupadas con este criterio y que son las columnas de $\boldsymbol{M}$) con el tiempo de los períodos de amortización, que es el exponente que figura en el factor $(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})$ en la fórmula de la anualización, lo cual no es aceptable aunque tiene fácil arreglo.

Otro método que parece más natural que el empleado por Sraffa sería el de sustituir el vector de valores de productos finales de capital fijo $\boldsymbol{P}_{M1}\boldsymbol{M}_1$ de la segunda ecuación en la primera (ese producto está dentro del paréntesis); a continuación hacer lo mismo con $\boldsymbol{P}_{M2}\boldsymbol{M}_2$ de la tercera la segunda, y así sucesivamente hasta el final. El tratamiento de los bienes de capital fijo en Sraffa merece algún comentario. En (3) hay cinco simplificaciones al menos: 1) la habitual de que el número de mercancías es igual al de procesos; 2) todas las máquinas que han entrado al mismo tiempo tienen una vida útil igual al número de períodos de su financiación; es decir, coincide su amortización técnica con su amortización financiera; 3) todos los bienes tienen el mismo sistema anterior de amortización, sea cual sea el grupo de edad a que han sido agrupados; 4) el precio de los bienes del mismo grupo de edad es el mismo o, lo que es lo mismo, a los efectos del precio, todos los bienes de la misma edad de entrada en el proceso es el mismo bien. Al final el fantasma de los bienes de capital del mismo *período de maduración* de la escuela austríaca asoma la patita en *el agrupamiento por edades* de Sraffa: ¡peligro!

Desarrollos

Todo lo referente a los capítulos de la producción conjunta nos dice Sraffa que son "*fundamentalmente una introducción a la discusión sobre el Capital Fijo y de la Tierra*"[11]. Creo que lo mejor es no hacer caso de ello porque el texto de Sraffa sobre la producción conjunta tiene en sí mismo enjundia suficiente más allá de los siguientes capítulos, incluso a pesar del erróneo gráfico de la pág. 90, que es el mismo que el de la pág. 63 ya mencionado. En la historia del Capital Fijo tuvo un papel fundamental el matemático amigo de Sraffa Besicovitch[12]. La historia de sus esfuerzos para resolver los problemas que le planteaba directamente el propio Sraffa es muy interesante, pero damos el resultado final con la siguiente ecuación:

$$(1)\quad \boxed{p_{Mkj}M_{(k)j}+\sum_{i=1}^{n}p_iY_{ij}=(1+r)\left[p_{M(k-1)j}M_{(k-1)j}+\sum_{i=1}^{i=n}p_iX_{ij}\right]+wl_j \quad desde\ j=1\ a\ n}$$

siendo $\boldsymbol{p}_{\mathrm{Mkj}}$ el precio del bien $\boldsymbol{M}_{(\mathrm{k})\mathrm{j}}$ de *duración mayor de un año* que se ha obtenido o valorado en el momento ***k*** desde que entró en el proceso productivo desde el sector[13] o proceso ***j***. $\boldsymbol{M}_{(\mathrm{k-1})\mathrm{j}}$ sería el mismo bien que entró a principios del año ***k*-1** como medio de producción y que se ha convertido $\boldsymbol{M}_{(\mathrm{k})\mathrm{j}}$ en el año con su nuevo precio de compra $\boldsymbol{p}_{\mathrm{Mkj}}$. Sraffa lo expresa con claridad: "*Este punto de vista implica que la misma máquina, a edades diferentes, debería ser tratada como otros tantos productos diferentes, cada uno con su precio*"[14]. Para el conjunto de los ***j*** procesos o sectores la ecuación resultante es:

$$(2)\qquad \underset{1xn}{P}\ \underset{nxn}{Y}=w\underset{1xn}{L}+(1+r)\underset{1xn}{P}\ \underset{nxn}{X}+\frac{r(1+r)^t}{(1+r)^t-1}\times\underset{1xs}{P_M}\ \underset{sxn}{M}$$

La existencia del capital fijo se deriva de que hay bienes que se utilizan a lo largo del período considerado de reproducción del sistema y que,

---

[11] Pág. 67 de *PMPM.*

12 A. Roncaglia: *Sraffa and the Theory of Prices*, 1978 [*Sraffa e la teoria dei prezzi*, 1975]

[13] "El método aquí propuesto se basa en las ecuaciones para los distintos procesos que corresponden a las sucesivas edades de las máquinas", pág. 95 *PMPM.*

[14] Pág. 94 de *PMPM*.

sin embargo, duran más de ese período. Aparecen pues estos medios tanto en el lado derecho de la ecuación (2) como en la izquierda, salvo con dos excepciones: al comienzo del período que entra como medio y no sale aún como producto final, y al final de su vida útil, que aparece como producto final, pero que ya no se empleará como medio (la chatarra). El modelo de Sraffa pretende –y lo consigue– que todos los bienes de capital ***M*** aparezcan en el lado derecho y no en el izquierdo (pero a distintos precios) merced a un proceso de eliminación de las cantidades que aparecen en los dos lados de la ecuación. En el modelo de Sraffa los productos finales de un bien de capital fijo son los mismos que los del comienzo del período siguiente, salvo que estos últimos aparecen actualizados al tipo de ganancia ***r***. Este es el primer reduccionismo: que Sraffa emplea el mismo tipo que utiliza para el reparto del excedente entre salarios y ganancias y el tipo que se utiliza en la teoría de la capitalización (o su inversa, la actualización). Es verdad que a Sraffa le sirve para proseguir su ataque a la teoría neoclásica del capital, pero el precio pagado por ello es su alejamiento de la realidad, porque no es aceptable que la misma tasa se emplee para cosas tan diferentes y para actores tan diferentes como son la lucha por el reparto del excedente y para el cálculo de las amortizaciones del capital fijo. Pero el trabajo de Sraffa es valiosísimo porque su esquema puede ser generalizado y resuelto sus deficiencias. Otro problema es que el tiempo empleado ***t*** en el cálculo de las depreciaciones es el mismo para todos los bienes de capital fijo, sea cual se el grupo de edad en que se hallen y sean cuales sean sus características. Tal es así que la fórmula conocida en el mundo financiero de cálculo de las anualizaciones es para Sraffa la misma, sean cuales sean los bienes y sus edades, es decir, es un escalar:

(3) $$Anualización \rightarrow \frac{r(1+r)^t}{(1+r)^t-1} \times \underset{1xs}{P_M} \underset{sxn}{M}$$

El problema de la presentación de Sraffa es que toda la complejidad del capital fijo lo recoge en un modelo de tal manera que: 1) en un sólo escalar (f3) del cálculo de las anualizaciones del capital (amortización) para todos los bienes de todas las edades; 2) en una matriz ***M*** sólo hay dos variables: el número de máquinas de que entraron al mismo tiempo en el proceso productivos (número de filas, es decir, ***s***) y el *número* de máquinas, es decir, ***n*** es el mismo que el de procesos, que corresponde al número de columnas $\boldsymbol{n}$, puesto que $\boldsymbol{M}$ es cuadrada; 4) el precio (o valor que llama Sraffa) de cada $\boldsymbol{m}_{ij}$ corresponde a todas las máquinas que tienen la misma edad ($\boldsymbol{i}$) en la empresa procedente de cada sector ($\boldsymbol{j}$); 5) Sraffa hace coincidir la amortización técnica con la financiera al no distinguir entre el tiempo de las edades de las diferentes máquinas agrupadas con el tiempo del período de amortización. Pero todo es subsanable si hacemos entrar en el escenario al menos 4 variables: las dos mencionadas más *el tiempo* correspondiente a las diferentes *amortizaciones* de las diferentes máquinas y *el número* de máquinas que entran en el proceso, que no tiene porqué coincidir con el número de procesos, empresas o sectores $\boldsymbol{n}$ (número de columnas de la matriz $\boldsymbol{M}$). De momento no distinguimos entre número de máquinas y procesos (como en la producción simple). De acuerdo con lo anterior, la fórmula del cálculo de los precios del modelo de Sraffa con bienes de capital fijo quedaría:

$$(4) \qquad \boxed{\underset{1xm}{P_y}\ \underset{mxn}{Y} = [\underset{1xn}{L}\ \underset{nxn}{W} + \underset{1xn}{P_x}\ \underset{nxn}{X}] \times (\underset{nxn}{I_d} + G) + \underset{1xs}{P_M}\ \underset{sx\tilde{n}}{\frac{r(1+r)^{\tilde{n}(s)}}{(1+r)^{\tilde{n}(s)}-1}} \times \underset{\tilde{n}xn}{M}}$$

En efecto, en (4) hay varias diferencias notables respecto a (f2), además de las que no afectan al tema del capital fijo, como es el de los salarios *pre-factum* y matrices $\boldsymbol{n}\text{x}\boldsymbol{n}$, tanto para salarios como para las ganancias. En primer lugar ahora ya no tenemos un escalar para el cálculo de las anualizaciones del desgaste del capital fijo, sino una matriz $\boldsymbol{s}\text{x}\boldsymbol{\tilde{n}}$ tal como $\boldsymbol{r}(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{\tilde{n}(s)}/((\mathbf{1}+\mathbf{r})^{\tilde{n}(s)}\mathbf{-1})$, donde $\boldsymbol{s}$ representaría *el número de máquinas de la misma edad de permanencia en la empresa* y $\boldsymbol{\tilde{n}}$ indicaría *el tiempo de vida útil* de estas máquinas. Además, al hacer $\boldsymbol{\tilde{n}}(\mathbf{s})$ queremos indicar que este tiempo $\boldsymbol{\tilde{n}}$ depende de las diferentes edades de las diferentes máquinas $\boldsymbol{s}$, aunque se deja libre la forma funcional concreta de esa dependencia. La segunda diferencia es que $\boldsymbol{M}$ ahora es una matriz $\boldsymbol{\tilde{n}}\text{x}\boldsymbol{n}$, donde cada elemento $\boldsymbol{m}$ de $\boldsymbol{M}$ representa a la vida útil de cada máquina según proceda de los diferentes sectores o procesos $\boldsymbol{n}$ de la economía (una máquina por sector).

Podemos aún mejorar el modelo y establecer la ecuación matricial:

$$(5) \qquad \underset{\tilde{n}xn}{M} = \underset{\tilde{n}xu}{U}\ \underset{uxn}{V}$$

donde la nueva variable ***u*** sería *el número de máquinas* que entran en el proceso, distinto del número de procesos ***n*****,** con ***U*** como la matriz donde cada elemento ***u*** de ***U*** sería el tiempo de vida útil ***ñ*** de cada maquina ***u***, y ***V*** representaría el número de máquinas ***u*** que entran en cada proceso ***n***, porque ahora se supone diferente el número de máquinas y de procesos. La fórmula completa quedaría:

$$(6) \qquad \underset{1xm}{P_y}\underset{mxn}{Y} = [\underset{1xn}{L}\underset{nxn}{W} + \underset{1xn}{P_x}\underset{nxn}{X}] \times (\underset{nxn}{I_d + G}) + \underset{1xs}{P_M} \times \underset{sx\tilde{n}}{\frac{r(1+r)^{\tilde{n}(s)}}{(1+r)^{\tilde{n}(s)}-1}} \times \underset{\tilde{n}xu}{U}\underset{uxn}{V}$$

En resumen, en (6), en lo que respecta al capita fijo, ahora trabajamos con cuatro variables: ***s*** como *el número* de máquinas agrupadas según sus distintas edades desde que entraron en la empresa, ***ñ*** como el *tiempo* de vida útil de cada máquina, ***u*** como el *número* de máquinas que entran en el proceso y ***n*** el *número* de procesos. Con ello hemos resuelto casi todos los problemas que dejó Sraffa sin solucionar o que simplificó en exceso. Sólo nos queda uno: la forma funcional que relaciona el tiempo ***ñ*** de vida útil de las máquinas con la edad de las mismas ***s***.

Si no nos sentimos satisfechos y aún sospechamos de reduccionismo el modelo podemos suponer que el tipo de interés –que ya hemos supuesto diferente de las distintas tasas de ganancia $\boldsymbol{g}_{\mathrm{ij}}$ que hay en ***G***– ***r*** dependa del tiempo de vida útil ***ñ*** de cada máquina porque fuera así cuando se negoció el tipo de interés financiero, y de tal forma que hubiera ***ñ*** tipos de interés diferentes. Es decir, ahora (3) quedaría:

$$(7) \qquad Anualizaci\acute{o}n \rightarrow \underset{1xs}{P_M} \times \underset{sx\tilde{n}}{\frac{r_{\tilde{n}}(1+r_{\tilde{n}})^{\tilde{n}(s)}}{(1+r_{\tilde{n}})^{\tilde{n}(s)}-1}} \times \underset{\tilde{n}xu}{U}\underset{uxn}{V}$$

Para acabar este epígrafe doy una ecuación aún más general que la (6) porque esta (8) están separados los bienes básicos de los no básicos:

$$\underset{1xm}{P_y}\underset{mxn}{Y_t} + \underset{1xn}{P_t}\underset{nxn}{X_t} = [\underset{1xn}{L}\underset{nxn}{W} + \underset{1xn}{P_{t-1}}\underset{nxn}{X_{t-1}}] \times (\underset{nxn}{I_d + G}) + \underset{1xs}{P_M} \times \underset{sx\tilde{n}}{\frac{r_{\tilde{n}}(1+r_{\tilde{n}})^{\tilde{n}(s)}}{(1+r_{\tilde{n}})^{\tilde{n}(s)}-1}} \times \underset{\tilde{n}xu}{U}\underset{uxn}{V}$$

que es una ecuación creo equilibrada entre lo que puede dar en el campo teorético, a la vez que se acerca valiente a la contrastación empírica.

Caso particular I

Visto lo anterior vamos a dar un ejemplo de cómo se puede llegar al resultado de Sraffa por otro procedimiento formal pero que, por serlo, no es tan diferente en cuanto a su contenido a lo dicho anteriormente. Ello nos podrá posibilitar las condiciones o restricciones con las que trabaja Sraffa. La primera ecuación que definiría el inicio del capital fijo sería (9):

$$1.... \rightarrow \sum_{i=1}^{m} p_i y_{ij} + \sum_{i=1}^{m} p_{(M)ij1} M_{ij1} = (1+g)\left[wl_j + \sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij} \right] + a_1 \sum_{i=1}^{m} p_{(M)ij0} M_{ij0}$$

donde $\boldsymbol{M}_{\text{ijk}}$ es la matriz de capital fijo que incorpora $\boldsymbol{m}$ mercancías (con $\boldsymbol{i}$=**1** a $\boldsymbol{m}$) en $\boldsymbol{n}$ procesos (con $\boldsymbol{j}$=**1** a $\boldsymbol{n}$) y con $\boldsymbol{s}$ períodos de renovación del circulante por período de renovación del fijo (con $\boldsymbol{k}$=**1** a $\boldsymbol{s}$) por cada mercancía. $\boldsymbol{M}_{\text{ij0}}$ sería la primera máquina del fijo correspondiente a la mercancía $\boldsymbol{i}$ del proceso *j*. De forma análoga son $\boldsymbol{X}_{\text{ijo}}$ e $\boldsymbol{Y}_{\text{ijo}}$ los productos finales y medios de producción correspondiente a la mercancía $\boldsymbol{i}$ del proceso $\boldsymbol{j}$ en el primer ciclo de renovación del circulante. El coeficiente $\boldsymbol{a}_1$ es la parte del valor de la máquina que se desgasta, es decir, que se incorpora como medio de producción. La segunda ecuación sería como sigue:

$$2.... \rightarrow \sum_{i=1}^{m} p_i y_{ij} + \sum_{i=1}^{m} p_{(M)ij2} M_{ij2} = (1+g)\left[wl_j + \sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij} \right] + a_2 \sum_{i=1}^{m} p_{(M)i1} M_{ij1}$$

donde $\boldsymbol{M}_{\text{ij1}}$ es la nueva matriz de capital fijo y $\boldsymbol{a}_0$ es *el coeficiente de depreciación* del capital fijo $\boldsymbol{M}_{\text{ij0}}$, que ahora entra como medio de producción en este segundo ciclo. La ecuación del período de amortización $\boldsymbol{k}$ sería:

$$k.... \rightarrow \sum_{i=1}^{m} p_i y_{ij} + \sum_{i=1}^{m} p_{(M)ijk} M_{ijk} = (1+g)\left[wl_j + \sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij} \right] + a_k \sum_{i=1}^{m} p_{(M)ik-1} M_{ijk-1}$$

La última ecuación que recorre el ciclo del circulante es:

$$s.... \rightarrow \sum_{i=1}^{m} p_i y_{ij} = (1+g)\left[wl_j + \sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij}\right] + a_s \sum_{i=1}^{m} p_{(M)ijs} M_{ijs}$$

donde ya no se produce ningún medio de capital fijo (de vida plurianual).

Ahora vamos a proceder a sumar todas las ecuaciones, sumando todos los valores de los ciclos y cancelando los capitales físicos del lado izquierdo con los del lado derecho. Para ello, los valores concretos de los coeficientes de *uso del capital fijo* $\boldsymbol{a}_k$ que llevan el siguiente ciclo son como sigue (10):

momento	medio (input)	capital utilizado	resto capital fijo
$0...... \rightarrow$	$X \rightarrow$	$\sum_{i=1}^{m} p_{(M)i} M_{ij0}$	
$1..... \rightarrow$	$a_0 \sum_{i=1}^{m} p_{(M)i} M_{ij0} \rightarrow$	$\sum_{i=1}^{m} p_{(M)i} M_{ij1} \rightarrow$	$(1-a_1)\sum_{i=1}^{m} p_{(M)i} M_{ij1}$
$2..... \rightarrow$	$a_1 \sum_{i=1}^{m} p_{(m)i} M_{ij1} \rightarrow$	$\sum_{i=1}^{m} p_{(m)i} M_{ij2} \rightarrow$	$(1-a_2)\sum_{i=1}^{m} p_{(M)i} M_{ij2}$
....			
$k..... \rightarrow$	$a_1 \sum_{i=1}^{m} p_{(m)i} M_{ijk} \rightarrow$	$\sum_{i=1}^{m} p_{(m)i} M_{ijk} \rightarrow$	$(1-a_k)\sum_{i=1}^{m} p_{(M)i} M_{ijk}$
....			
$s-1... \rightarrow$	$a_{s-1} \sum_{i=1}^{m} p_{(M)i} M_{ijs-1} \rightarrow$	$\sum_{i=1}^{m} p_{(M)s} M_{ijs} \rightarrow$	$(1-a_s)\sum_{i=1}^{m} p_{(M)i} M_{ijs}$
$s........ \rightarrow$	$a_s \sum_{i=1}^{m} p_{(M)i} M_{ijs} \rightarrow$	$cero\ (chatarra)$	

En el transcurso del ciclo productivo se supone que el capital utilizado es consumido y desaparece[15], por lo que queda en el sistema los restos del capital fijo. Con ello queda en el lado de los medios de producción

[15] Coincide esta idea con la ya tradicional "depreciación evaporación" en el uso del capital fijo, que recoge, por ejemplo, Kurz y Salvadori en *Theory of Production*, pág. 262, edit. Cambridge University Press, 1995. Cuando redacté por primera vez este epígrafe había pasado por alto la referencia de Kurz, por lo que me alegré de que ambos llegáramos a resultados análogos con desconocimiento previo por mi parte.

estos restos como capital fijo total por cada bien y/o servicio, cuya suma es:

(11) $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{s} p_i y_{ijk}(1-a_k)$$ para **j=1** a ***n***

Y para llegar al resultado de Sraffa, ahora ha de establecer la relación:

(12) $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{s} p_i M_{ijk}(1-a_k) = \frac{r(1+r)^t}{(1+r)^t - 1} \times \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} p_i M_{ijk}$$ para **j=1** a ***n***

Hasta ahora hemos estado hablando de *ciclo interno del proceso de incorporación del capital fijo* y hemos establecido el número de ciclos en ***s*** que en el modelo de Sraffa se corresponde con las máquinas de la misma edad (que se han incorporado al sistema al mismo tiempo). También podríamos hablar de número de máquinas que se incorporan en un ciclo (por ejemplo, un año) del proceso productivo, aunque en el caso del capital fijo que nos ocupa ha de suponerse que estos bienes son plurianuales, es decir, de vida superior a un año (o período convencional) porque de lo contrario serían tratados como circulante con el resto de los bienes y servicios que satisfacen necesidades directas y aunque aquellos lo hagan de forma indirecta. El tratamiento formal es el mismo.

Caso particular II

Un caso particular del anterior sería aquel que todas *las tasas de amortizaciones unitarias* $\boldsymbol{a}_{\mathrm{k}}$ fueran iguales a lo largo del ciclo de la maquinarias (que también hay que suponer que todas la maquinaria tiene el mismo ciclo de desgaste). Es decir, si hacemos:

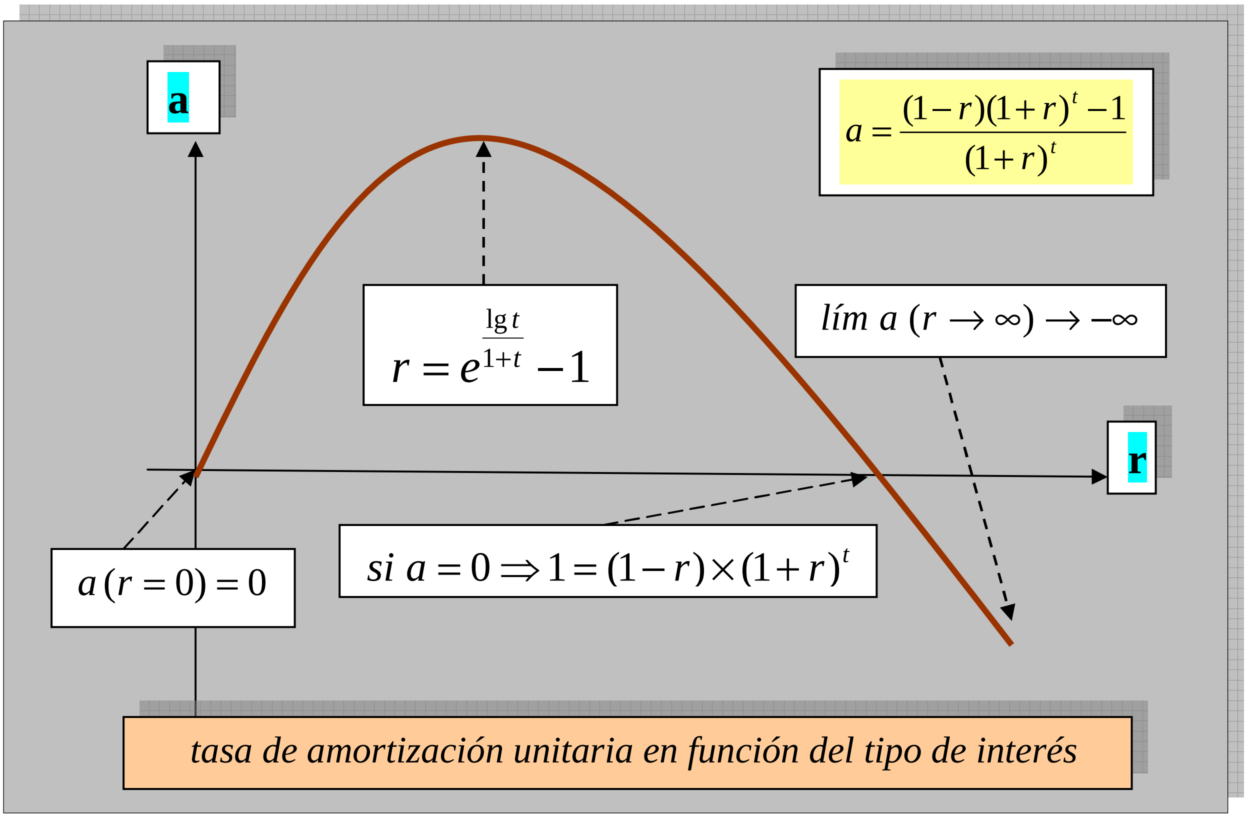
(13) $$a_1 = a_2 = \ldots.. = a_{\tilde{n}} = a$$

la expresión (12) quedaría:

(14) $$(1-a) = \frac{r(1+r)^s}{(1+r)^s - 1}$$

con lo que ***a***, que en este caso es ya *tasa de amortización constante*, quedaría:

(15) $$a = \frac{(1-r)(1+r)^s - 1}{(1+r)^s}$$



En la función (15), al hacer cero ***a*** se obtiene:

(16) $$1 = (1-r)\times(1+r)^t$$

que es un polinomio de grado ***t*+1**, aunque sólo con dos monomios. La función (15) tiene un máximo:

(16b) $$r = e^{\frac{\lg t}{1+t}} - 1$$

y es crecientemente decreciente para $\boldsymbol{r}<\boldsymbol{e}^{\lg \mathbf{t}/(\mathbf{1}+\mathbf{t})}\mathbf{-1}$ y crecientemente decreciente para $\boldsymbol{r}>\boldsymbol{e}^{\lg \mathbf{t}/(\mathbf{1}+\mathbf{t})}\mathbf{-1}$, dado que la primera derivada es positiva (si $\boldsymbol{t}>(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{\mathbf{1}+\mathbf{t}}$) y la segunda negativa siempre, por lo que la función es siempre cóncava.

Este epígrafe del capital fijo es uno más de la potencialidad del sistema de Sraffa que, a pesar de las condiciones restrictivas de su planteamiento, este es susceptible de generalización y de corrección de sus limitaciones sin gran dificultad. Incluso yendo más que este epígrafe, basta comparar la sencilla ecuación matricial $\boldsymbol{PY}\mathbf{I}=\boldsymbol{PX}\mathbf{I}$ del capítulo I sobre un sistema de subsistencia y puede considerarse la (8) como una generalización de pasos sucesivos, *elevándose* (a lo Hegel) de los general a los particular, de los abstracto a lo concreto a partir de ese primer capítulo.

<u>Caso general III</u>

Vamos a intentar en este epígrafe desvelar lo que hay detrás del modelo de Sraffa sobre el capital fijo partiendo del caso más general posible con un modelo que no traicione lo que él hizo con la ayuda de Besicovitch. Supongamos que partimos de un sistema de ecuaciones con salarios *pre-factum* siguiente (17):

$$
\begin{aligned}
&1....\rightarrow \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i y_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)ij1} M_{ij1} = (1+r)\left[w\sum_{j=1}^{n} l_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij} \right] + (1+r)\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)ij0} M_{ij0} \\
&2....\rightarrow \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i y_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)ij2} M_{ij2} = (1+r)\left[w\sum_{j=1}^{n} l_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij} \right] + (1+r)\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)i1} M_{ij1} \\
&k....\rightarrow \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i y_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)ijk} M_{ijk} = (1+r)\left[w\sum_{j=1}^{n} l_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij} \right] + (1+r)\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)ik-1} M_{ijk-1} \\
&s-1\rightarrow \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i y_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)ij(s-1)} M_{ij(s-1)} = (1+r)\left[w\sum_{j=1}^{n} l_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij} \right] + (1+r)\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)i(s-2)} M_{ij(s-2)} \\
&s\rightarrow \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i y_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)ijs} M_{ijs} = (1+r)\left[w\sum_{j=1}^{n} l_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij} \right] + (1+r)\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)ij(s-1)} M_{ij(s-1)}
\end{aligned}
$$

que es el sistema de ecuaciones que expone el italiano en su pág. 78, sólo que modernizada la nomenclatura. Hay que suponer ahora que el medio de producción $\boldsymbol{M}_{\mathrm{ijo}}$ de comienzo del comienzo de la utilización del capital fijo (en el segundo miembro de la primera ecuación) es igual en términos de valor al último capital fijo $\boldsymbol{M}_{\text{ijs}}$ (en el primer miembro de la última ecuación), que es la chatarra. Es decir, hacemos que:

(18)
$$\boxed{(1+r)\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)ij0}M_{ij0} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{ijs}M_{ijs}}$$

Si ahora sumamos todas las ecuaciones miembro a miembro desde **1** a ***s*** queda (19):

$$s\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i y_{ij} + \sum_{k=1}^{k=s}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)ijk}M_{ijk} = s(1+r)\left[w\sum_{j=1}^{n} l_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij}\right] + (1+r)\sum_{k=1}^{k=s}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)ik}M_{ijk}$$

De la ecuación anterior restamos del último sumando del segundo miembro de la igualdad el segundo de la primera y teniendo en cuenta el supuesto de la igualdad *esrafiana* (18) queda:

(20)
$$\boxed{s\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i y_{ij} = s(1+r)\left[w\sum_{j=1}^{n} l_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij}\right] + r\sum_{k=1}^{k=s}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)ik}M_{ijk}}$$

y dividiendo entre ***s*** toda la ecuación:

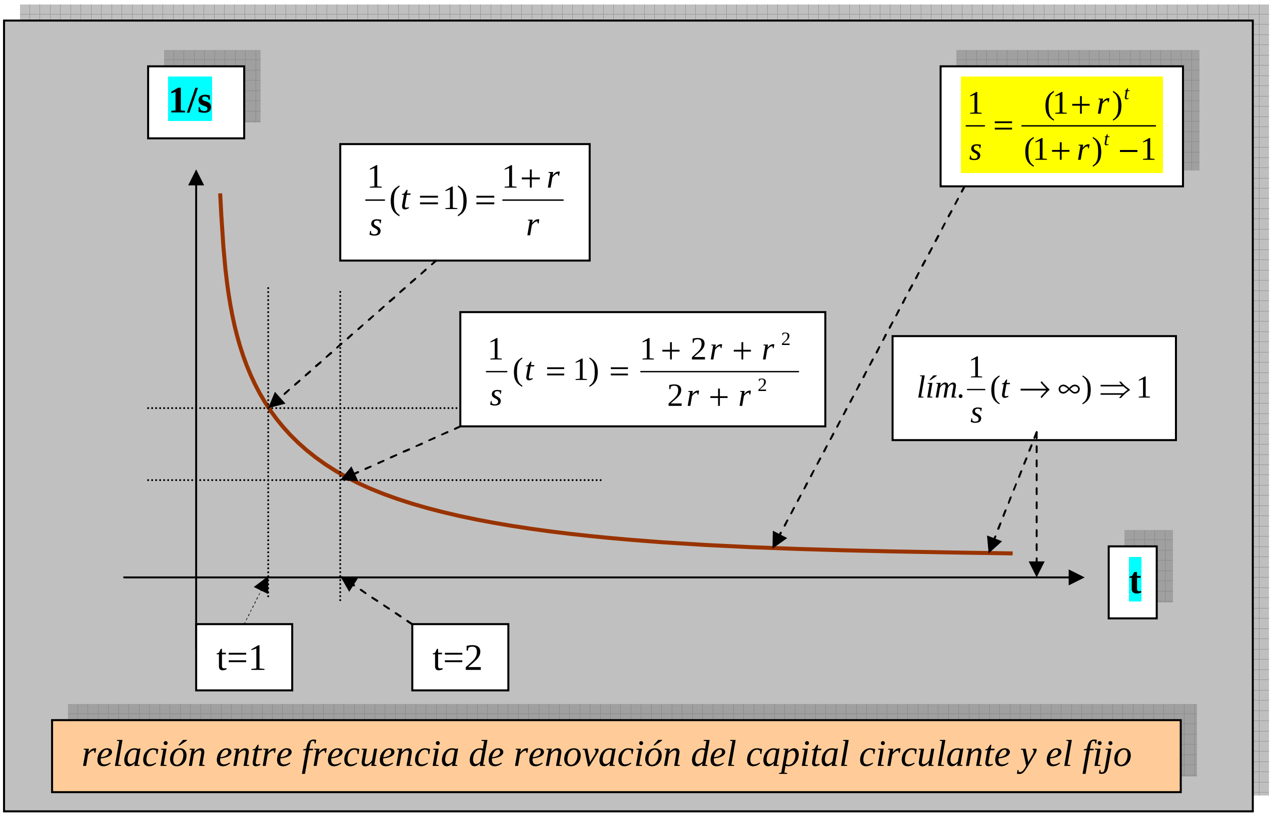
(21)
$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i y_{ij} = (1+r)\left[w\sum_{j=1}^{n} l_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij}\right] + \frac{r}{s}\times\sum_{k=1}^{k=s}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)ik}M_{ijk}$$

El último sumando de la ecuación es el mismo que el que utiliza Sraffa para el capital fijo aunque él llegara por otra vía diferente, por lo que podemos establecer la igualdad:

(22)
$$\boxed{\frac{r}{s}\times\sum_{k=1}^{k=s}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)ik}M_{ijk} = \frac{r(1+r)^t}{(1+r)^t-1}\times\sum_{k=1}^{k=s}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)ik}M_{ijk}}$$

Eliminamos ahora los términos comunes de los dos sumatorios a ambos lados de la igualdad queda:

(23) $$\boxed{\frac{1}{s} = \frac{(1+r)^t}{(1+r)^t - 1}}$$



relación entre frecuencia de renovación del capital circulante y el fijo

Pero **1**/***s*** es la inversa del número de veces que se renueva el circulante por cada vez que lo hace el capital fijo, por lo que **1**/***s*** *es la frecuencia de renovación del circulante por período completo de renovación del capital fijo*. Sraffa simplifica quizá en exceso y hace que ***t*** sea igual a **s**, lo cual no es aceptable porque nada tiene que ver esa renovación del circulante con los años de amortización del capital fijo. Aunque no encuentro un párrafo completo que exprese lo anterior con nitidez, creo que se desprende del conjunto del capítulo que Sraffa era consciente de ello. Y es que la cosa es intuitiva, porque si se quiere que el primer equipo de capital fijo $\boldsymbol{M}_1$ sea producido con el último capital fijo del anterior $\boldsymbol{M}_s$ forzosamente ha de llevar a lo dicho respecto a la relación entre la frecuencias de ambos, entre el capital fijo y el circulante. Sraffa siguió otro camino y lo que hace es igualar $\boldsymbol{M}_1$ con $\boldsymbol{M}_s$, considerando este último como la “chatarra”, lo cual lleva a la misma conclusión anterior.

El problema de establecer esta relación entre frecuencias de renovación es que ha de admitirse la igualdad entre la amortización técnica y la amortización financiera, lo cual es admisible; no lo es en cambio la igualdad de la variable temporal ***s*** de renovación del circulante con la igualdad de la variable temporal ***t*** de amortización. Aquí se considera que ambas variables son distintas y que una depende de la otra, con lo cual no se traiciona a Sraffa –eso pienso-, pero se subsana su modelo de alguna consideración restrictiva indeseable. Puede comprobarse que si hacemos ***t***=***s*** en (23) llegamos a la ecuación:

(24) $$1 = (1 - t) \times (1 + r)^t$$

que es una ecuación sin sentido económico. Ahora, si de la ecuación (23) despejamos el tiempo ***t*** que define los años de amortización del capital fija queda la notable ecuación:

(25) $$t = \frac{\log_e \frac{s}{s-1}}{\log_e (1+r)}$$

que nos da bajo el sistema de amortización (o renovación del capital fijo) de Sraffa el número de períodos ***t*** de esta en función del número de años de renovación del capital fijo (el ciclo del capital fijo) y del tipo de interés aplicado a la amortización (técnica=financiera). Sraffa simplifica la cuestión y hace que este tipo de interés sea el mismo que la tasa de ganancia, tasa que es la que disputa el excedente con el salario. La relación entre ***t*** y ***s*** va a depender de la tasa de interés para que ambas variables puedan expresarse para valores concretos en números enteros (período de un año o de 12 meses). En el caso particular de que el período de amortización del capital fijo ***t*** fuera **1** (un año), de (25) se desprende que:

(26) $$r(t=1) = \frac{1}{s}$$

es decir, en el caso de una sola amortización (suponemos en un año), para poder enlazar un ciclo del capital fijo con el siguiente es necesario que el tipo de interés de las amortizaciones ***r*** sea igual a la frecuencia de la renovación del circulante por cada vez que se renueva el fijo ***s***. De (23) también se obtiene el tipo de interés ***r*** de las amortizaciones en función del número de años de renovación del circulante por período del capital fijo y del tiempo de amortización aplicado al capital fijo ***t***:

$$r = \sqrt[t]{\frac{s}{s-1}} - 1 \qquad (27)$$

Podríamos decir que la brillante idea de Sraffa de situar la carga de amortización sólo en el lado derecho de las ecuaciones, es decir, de los costes, se ve mermada porque ha de suponer para ello que: 1) ha de haber una relación entre el capital fijo que se produce sin capital fijo en el primer período con el último capital fijo que entra como medio y que ya no produce ningún otro capital fijo (hablamos de una máquina en particular); 2) establece un único precio (valor contable) para todas las maquinarias de la misma edad; 3) iguala amortizaciones técnicas con financieras: 4) emplea la misma variable temporal para tres cosas: la que determina la frecuencia de la determinación del circulante, la que determina la amortización técnica del capital fijo y la que determina el período de amortización financiera. Sin embargo todas estas limitaciones o restricciones son fácilmente subsanables con tal de hacer variar sus supuestos por mor del realismo. Cosa distinta es la intención última de Sraffa cual es la crítica a la teoría del capital neoclásico, tanto austríaco como no austríaco. Entonces es preferible simplificar como lo hace Sraffa y siempre con la brillantez y profundidad de la lógica económica que le guía. Vemos una vez más la versatilidad de la economía de Sraffa, su capacidad para adaptarse a los problemas que estudia y la posibilidad de pasar de lo abstracto (teorético) a lo concreto (contrastable), sin renunciar a los supuestos de partida, sino adaptándolos, generalizándolos o eliminando restricciones. La economía de Sraffa es como revelar una fotografía tal como se hacía antaño, con líquidos reveladores y fijadores. Todo muy distinto a los modelos basados en el cálculo diferencial o el uso de las matemáticas para explicar a Ricardo o Marshall, sin que por ello suponga merma a las contribuciones de estos autores a la historia del análisis económico, especialmente del primero.

Capital Fijo y frontera salario-ganancia

Vamos a ver cómo queda esta “frontera” porque, no hay que olvidar, que el objeto de estudio de última instancia es el excedente –

como decían los clásicos- o, como se dice ahora, la distribución. Si hacemos -como es habitual en Sraffa- el salario ***w*** igual a cero en la ecuación:

(1) $$\underset{1xn}{P}\ \underset{nxn}{Y} = w\ \underset{1xn}{L} + (1+r)\ \underset{1xn}{P}\ \underset{nxn}{X} + \frac{r(1+r)^t}{(1+r)^t - 1} \times \underset{1xs}{P_m}\ \underset{sxn}{M}$$

nos queda la ecuación matricial:

(2) $$\underset{1xn}{P}\ \underset{nxn}{Y} = (1+g_m)\ \underset{1xn}{P}\ \underset{nxn}{X} + \frac{r(1+r)^t}{(1+r)^t - 1} \times \underset{1xs}{P_m}\ \underset{sxn}{M}$$

donde g_m sería la tasa máxima de ganancia. El quebrado que multiplica a precios y cantidades de los productos plurianuales es la fórmula de anualización de un capital que aparecen en los libros de matemáticas financieras o, como dice Sraffa, de comercio. De las ecuaciones (1) y (2) obtenemos los precios de las mercancías que *no* son plurianuales:

(3) $$P = \frac{w}{g_m - r} \times LX^{-1}$$

donde lo notable de (3) es que los precios de los bienes *no* plurianuales ***P*** no dependen de los plurianuales, es decir, de P_m. Si en (2) despejamos los precios P_m, queda la ecuación:

(4) $$P_m = \frac{(1+r)^t - 1}{r(1+r)^t} \times P\left[Y - (1+g_m)X\right] \times M^T \left[MM^T\right]^{-1}$$

En (4) se comprueba que los precios de los productos plurianuales, P_m, dependen de los precios de los no plurianuales, pero no al revés. En este sentido es por lo que se puede asimilar a los primeros como mercancías no básicas, aunque sí que entran como medio de producción y perduran más de un año. El tema tiene interés y se ve la primacía del concepto sobre su caracterización formal; formalmente (matemáticamente), la cancelación que lleva a cabo Sraffa en los dos lados de la ecuación de definición del sistema hace que los bienes plurianuales no cumplan lo característico de los bienes básicos, porque entran como medios pero no como productos finales. Sabemos las dificultades, ayudas y ensayos que culminaron en la redacción de este capítulo y su aspecto final. De ahí también -entre otras razones- el esfuerzo enorme que hace Sraffa en su libro por explicar los aspectos económicos de su modelo y lo renuente que se mostraba el italiano en hacer explícitos los aspectos formales. Un punto y aparte más adelante incidimos en el tema.

En (4) de nuevo vemos ahora porqué se hizo $\boldsymbol{s}<\boldsymbol{n}$, es decir, que los elementos plurianuales fueran menores que los anuales. El rango de la matriz $\boldsymbol{M}$ vale $\boldsymbol{s}$ y también el de $\boldsymbol{MM}^{\mathrm{T}}$, con lo cual es esta última invertible sin problemas, salvo los habituales de colinealidad de una fila o columna con otras filas o columnas, lo cual, en el mundo real, es un suceso imposible. Sraffa no impone esta condición ni la hace explícita, pero sí la hizo en el caso de la producción conjunta, con lo cual cabe suponer[16] que era consciente de todo ello.

De las ecuaciones (3) y (4) se obtiene:

(5) $$P_m = \frac{(1+r)^t - 1}{r(1+r)^t} \times \frac{w}{g_m - r} \times L\left[X^{-1}Y - (1+g_m)\right] M^T \left[MM^T\right]^{-1}$$

Ahora los precios de los productos plurianuales $\boldsymbol{P}_{\mathrm{m}}$ dependen de todas las variables: $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$, $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{M}_{\mathrm{j}}$. También se puede comprobar que, aunque el tipo de interés $\boldsymbol{r}$ permanezca por debajo de la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$, la existencia de las inversas en (5) posibilita que algunos de los precios de los productos plurianuales $\boldsymbol{P}_{\mathrm{m}}$ sean negativos, al igual que ocurría con la producción conjunta. ¿Cuál es la interpretación económica de todo esto? Oigamos a Sraffa: "*Los instrumentos duraderos* -los que hemos llamado plurianuales-, *si son básicos, habrán de estar representados en la mercancía-patrón por muestras de las diferentes edades en sus debidas proporcion*es"[17]. En efecto, si los bienes plurianuales son básicos, entrarán en pie de igualdad con el resto de los bienes básicos, y si cumple la condición de productividad, es decir, que el total de la producción de ese bien sea mayor que el total de los medios de ese mismo bien, entonces su precio

[16] Mi opinión es que era plenamente consciente porque en otro apartado habla de eliminar ecuaciones con el fin de eliminar los productos no básicos. Eso supone entender matemáticamente el concepto de rango de una matriz.
[17] Pág. 104 de *PMPM.*

cumplirá una de las condiciones necesarias para que sea positivo[18]. La otra dificultad para conseguir unos precios positivos se deriva de aplicar un mismo tipo de interés, tanto para el cálculo de la amortización -el primer término del lado derecho de la igualdad de (5)- como para la tasa de ganancia general. Ello obliga a amortizaciones aceleradas si la tasa de ganancia exigida es muy alta, lo cual provoca que los bienes de producción de un período que son medios en el siguiente -como es el caso de los bienes plurianuales, los ***M***- entren a un precio elevado en el resto de los sectores o en el de origen, y con ello a elevar los costes de otros sectores hasta, en algún caso, hacer mayores estos que los ingresos, con el resultado de precios negativos. Es una limitación del modelo que puede ser salvado con dos tipos de interés: uno para las amortizaciones de los bienes plurianuales y otro para la tasa de ganancia general exigida por el modelo. Sraffa no diferenció ambas tasas, pero era consciente del problema cuando, hablando del precio de la maquinaria que envejece, dice: "*El precio... no puede explicarse desde el lado del coste de la producción. Resulta exclusivamente de la necesidad de mantener, cuando el tipo de beneficio varía, la igualdad de precio de todas las unidades del producto, cualesquiera que sean las diferencias en edad de los instrumentos mediante los cuales son respectivamente producidos*"[19].

De la ecuación (5) a la frontera salario-ganancia no hay más que un paso. Hacemos ahora:

(6) $$LI = 1$$

(7) $$P_m MI = 1$$

es decir, tomamos como numerarios las expresiones (3) y (7)[20], siendo **I** el vector de unos de dimensión ***n***x**1**, puesto que tenemos muchas más

[18] Las otras condiciones son que la matriz de requerimientos $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^{-1}$ sea irreductible, no negativa. Fuera de la producción simple -es decir, sin Perron-Froebenius- nada garantiza a ningún bien que su precio sea positivo: sólo la sociología empresarial a la que recurre Sraffa.

[19] Pág. 104 de *PMPM.*

[20] Tomar como numerario estas dos expresiones supone tomar como numerario algún precio de los productos plurianuales $\boldsymbol{p}_m$. La razón es que estos productos **M** aparecen simultáneamente en (7) y en (8). Siempre es deseable que en los numerarios no aparezcan variables repetidas porque sólo así pueden tomar cualquier valor.

incógnitas que ecuaciones. De la (5) y despejando el tipo de salario, se obtiene la (8):

(8) $$w = \frac{r(1+r)^t \times (g_m - r)}{\left[(1+r)^t - 1\right] \times \left[LX^{-1}YI - (1+g_m)\right]}$$

donde el punto de corte para $\boldsymbol{w}=\mathbf{0}$ es $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{g}_m$, y con $\boldsymbol{w}$ indeterminado para $\boldsymbol{r}=\mathbf{0}$, siendo descendiente $\boldsymbol{w}$ desde $\boldsymbol{r}=\mathbf{0}$ hasta $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{g}_m$, pero con tantos puntos de corte posibles como el grado del numerador de (8), que es $\boldsymbol{n}$. Pueden darse, por tanto, $\boldsymbol{t}$ soluciones, aunque algunas puedan ser repetidas o imaginarias, contra lo esperado por la teoría neoclásica, en la que se afirma que la relación entre la tasa de salarios y la tasa de ganancia ha de ser inversa si se mantiene la misma técnica. Aquí, con este modelo *esrafiano* tan sencillo, pueden darse el retorno de un mismo tipo de salarios para diferentes tipos de interés: la teoría neoclásica -una vez más- por los suelos. Puede observarse en (X.9) que un aumento de la tasa de ganancia $\boldsymbol{r}$ que pueda llevar a un aumento del tipo de salario $\boldsymbol{w}$, puede ser a su vez contrarestado por el multiplicador $(\boldsymbol{g}_m-\boldsymbol{r})$ si $\boldsymbol{r}$ se acerca a $\boldsymbol{g}_m$, y eso puede ocurrir incluso $\boldsymbol{t}$-**1** veces, es decir, tantas -como máximo- como puntos de corte menos uno. Esta frontera, definida por (X.9) es continua y cambia de convexidad según los puntos de corte de $\boldsymbol{r}$ cuando la tasa de salario $\boldsymbol{w}$ vale cero. Sin embargo, también puede desplazarse a lo largo del primer cuadrante, que es el significativo. La razón es la de que, además de que la tasa de salario depende $\boldsymbol{w}$ de la tasa de ganancia $\boldsymbol{r}$ y del número de períodos $\boldsymbol{n}$ de anualizaciones de los bienes plurianuales $\boldsymbol{M}$, existe una variable que recoge los movimientos de los medios de producción anuales $\boldsymbol{X}$ y la de los productos finales $\boldsymbol{Y}$. Esta variable, aparentemente inocua, es $\boldsymbol{g}_m$, es decir, *la tasa máxima de ganancia*, porque a cada valor de $\boldsymbol{x}_{ij}$, $\boldsymbol{y}_{ij}$ y $\boldsymbol{M}_{ij}$, varía $\boldsymbol{g}_m$, y eso da lugar a *desplazamientos* de la frontera salario-ganancia definida en (8). Si Sraffa hubiera hecho explícitos sus ecuaciones y deducidas sus consecuencias, también formalmente, quizá los economistas hubieran podido ver plasmadas las conclusiones revolucionarias -en el campo del análisis económico, claro- de forma más evidente. O quizá lo contrario, y lo hubieran desechado bajo algún pretexto. Sraffa trabajó, salvo una excepción, con la ecuación (X.1) o la equivalente en las páginas referidas a la producción simple o conjunta, es decir, con la tasa de ganancia $\boldsymbol{r}$ fuera de los costes de trabajo $\boldsymbol{wL}$ guiado por la discusión sobre el fondo de salarios y sobre la cuestión de si estos eran *pos (post-factum)* o *pre* (*pagables*). En otro artículo homenaje a Sraffa ya publicado[21] ya he anotado que esa discusión no casa con la solución formal que da tanto Sraffa como Ricardo, porque que la tasa de ganancia incluya a los costes salariales afecta *a la cuantía* del cálculo de los precios y no depende, por tanto, *del momento* del pago de los salarios. Y, sin embargo, esa falsa discusión llega a nuestros días. Si la tasa de ganancia incluye a los costes salariales, la ecuación de definición del sistema de Sraffa con capital fijo se convierte en:

(9) $$\underset{1xn}{P}\underset{nxn}{Y} = (1+r)\times\left[wL + \underset{1xn}{P}\underset{nxn}{X}\right] + \frac{r(1+r)^t}{(1+r)^t - 1}\times \underset{1xs}{P_m}\underset{sxn}{M}$$

dejando fuera de la tasa de ganancia sólo a los bienes plurianuales ***M***, tal como hace Sraffa, a lo cual no veo inconveniente[22]. Si seguimos los pasos anteriores y hacemos la tasa de salario ***w*** igual a cero para obtener la tasa máxima de ganancia, nos da la ecuación:

(10) $$\underset{1xn}{P}\underset{nxn}{Y} = (1+b_m)\times(\underset{1xn}{P}\underset{nxn}{X}) + \frac{r(1+r)^t}{(1+r)^t - 1}\times \underset{1xs}{P_m}\underset{sxn}{M}$$

con $\boldsymbol{b}_m$ como máxima tasa de ganancia, distinta de la tasa máxima para el caso anterior, por lo que la hemos cambiado de letra: además tomamos como numerario a ***L*I=1** y a ***PM*I=1**. Sin cambios conceptuales, llegamos a la *frontera salario-ganancia*, que forzosamente es distinta de la del caso anterior porque es distinta la ecuación (1) que define el sistema. Esta frontera es:

(11) $$w = \frac{r(1+r)^t\times(b_m - r)}{(1+r)\times\left[(1+r)^t - 1\right]\times\left[LX^{-1}YI - (1+b_m)\right]}$$

con punto de corte en $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{b}_m$ cuando los salarios ***w*** son cero y con valor indeterminado para los salarios ***w*** con la tasa de ganancia ***r*** es cero. Al

[21] *A los cincuenta años de la publicación de la obra de Sraffa Producción de mercancías por medios de mercancías*: http://www.eumed.net/ce/2010b/amp.htm
[22] Lo cual es crucial, porque si el margen de ganancia también afectara a los bienes de capital fijo no se podría dar la gran cancelación de estos bienes según edades en el lado iquierdo de la ecuación y en el lado derecho, y con ello la ecuación de definición con estos bienes sería mucho más complicada.

igual que con la frontera salario-ganancia (X.11) del caso anterior, esta varía su forma en función de las anualidades ***t***.

Generalizaciones de la frontera salario-ganancia

Sigamos. Hasta ahora hemos trabajado con la producción conjunta al modo *esrafiano*, donde la matriz ***Y*** de productos finales es cuadrada, al igual que la ***X*** de medios de producción, lo cual obliga a una producción conjunta *sui generis*, porque el número de procesos y mercancías han de ser iguales, tanto en medios como en los productos finales. Sraffa no dio el paso de considerar más bienes finales que medios de producción, tanto si la producción era simple como conjunta, porque perdía - o creía perder- todas sus ventajas: perdía la mercancía-patrón, la razón-patrón, los multiplicadores positivos y los precios todos positivos. También se complicaba la frontera salario-ganancia. No es que un genio como el no hubiera podido hacerlo, pero entonces tendría que haber hecho explícitos sus hipótesis formales mediante un sistema de ecuaciones y temía -creo yo- que su obra se convirtiera en un mero juego matemático, tal y como pasó con Von Neumann[23], una de las personas con más alto coeficiente intelectual medido que se conocen. Sraffa escribía para el futuro y para economistas y no para lucirse. Una ecuación que definiera un sistema de producción conjunta, con tasa de ganancia que incluyan los costes salariales, con productos plurianuales con costes anualizados y -y esta es la novedad ahora- con productos finales mayores en su diversidad que medios empleados, vendría definido por la ecuación matricial:

$$\underset{1xm}{P_y}\underset{mxn}{Y} = (1+\underset{1x1}{r})\times\left[\underset{1x1}{w}\underset{1xn}{L}+\underset{1xn}{P_x}\underset{nxn}{X}\right]+\frac{r(1+r)^t}{(1+r)^t-1}\times\underset{1xs}{P_m}\underset{sxn}{M} \qquad (12)$$

donde los precios de los productos finales $\boldsymbol{P}_y$ van de **1** a ***m***, a diferencia de los medios, que van de **1** a ***n***, siendo mayor ***m*** que ***n***, como indica la lógica económica. Es el caso más general posible, salvo que diferenciáramos también entre bienes *básicos y no básicos*, o que trabajáramos con tasa de salarios y ganancias diferentes para cada sector, que también es posible. En el caso que nos ocupa es el más general posible porque ahora trabajamos con tres tipos de precios diferentes: uno para los productos finales $\boldsymbol{P}_y$, otro para los medios de

[23] *A model of Economic General Equilibrium,* 1935.

producción anuales $\boldsymbol{P}_{\mathrm{x}}$ y otro para los medios plurianuales $\boldsymbol{P}_{\mathrm{m}}$. La tasa máxima de ganancia vendrá dada, como siempre, haciendo cero la tasa de salario $\boldsymbol{w}$ y obtenemos una ecuación como la que sigue:

(13) $$\underset{1xm}{P_y}\underset{mxn}{Y} = (1+f_m)\underset{1xn}{P_x}\underset{nxn}{X} + \frac{r(1+r)^t}{(1+r)t-1} \times \underset{1xs}{P_m}\underset{sxn}{M}$$

donde hemos llamado $\boldsymbol{f}_{\mathrm{m}}$ a esta *tasa máxima* para distinguirla de los casos anteriores. De las ecuaciones (12) y (13) sale:

(4) $$P_x = \frac{w(1+r)}{f_m - r} \times LX^{-1}$$

donde los precios de los medios de producción $\boldsymbol{P}_{\mathrm{x}}$ dependen de $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{f}_{\mathrm{m}}$ y $\boldsymbol{X}$, pero no de $\boldsymbol{P}_{\mathrm{y}}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{M}$. Sustituyendo ahora (14) en (13) se obtiene:

(15) $$P_m = \frac{(1+r)^t - 1}{r(1+r)^t} \times \left[P_y Y - \frac{w(1+r)(1+f_m)}{(f_m - r)} \times L \right] \times M^T \left[MM^T \right]^{-1}$$

Aquí hemos soslayado que los precios de los productos plurianuales dependan $\boldsymbol{P}_{\mathrm{m}}$ de los precios de los medios $\boldsymbol{P}_{\mathrm{x}}$, pero no hay manera de hacer lo mismo con los precios de los productos finales $\boldsymbol{P}_{\mathrm{y}}$. Mirando esta ecuación se ve -creo yo, insisto- por qué Sraffa no quería trabajar en su obra con producción conjunta entendida de la manera más amplia posible. La mayor utilidad de (5) es que nos facilita la llegada a la frontera salario-ganancia bajo los supuestos definidos. Si tomamos como numerarios $\boldsymbol{P}_{\mathrm{m}}\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{P}_{\mathrm{y}}\boldsymbol{Y}$ y $\boldsymbol{L}\mathbf{I}$, es decir, si hacemos:

(16) $$P_m MI = 1$$

(17) $$P_y YI = 1$$

(18) $$LI = 1$$

donde se puede observar que ninguna de las variables se repiten en cada una de las ecuaciones del numerario. Tras manipulaciones elementales de álgebra, nos da *la frontera de salario-ganancia* para este caso de *producción conjunta ampliada*:

(19)
$$w=\frac{\left[(1+r)^{n}\times(1-r)-1\right]\times(f_m-r)}{(1+r)\times(1+f_m)\times\left[(1+r)^{n}-1\right]}$$

Ocurre que, al igual que los dos casos vistos anteriormente, para $\boldsymbol{w}=\mathbf{0}$ el punto de corte de la tasa de ganancia se da para $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}_{\mathrm{m}}$, aunque queda indeterminada la tasa de salarios $\boldsymbol{w}$ para $\boldsymbol{r}=\mathbf{0}$. Aunque formalmente es más complicada que las anteriores fronteras, se pueden hacer las mismas consideraciones que en las anteriores, por lo que no nos repetimos. Debe quedar claro que, en general, no coincidirán las diferentes tasas de ganancia, $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$, $\boldsymbol{b}_{\mathrm{m}}$ y $\boldsymbol{f}_{\mathrm{m}}$, y tampoco coincidirán con la razón-patrón $\boldsymbol{R}$ de la producción simple con medios gastados anualmente y con salarios pre-pagables, que es el caso más simple posible que estudia Sraffa a partir del capítulo II de su obra capital.

Todo este capítulo gira en torno a dos ideas -casi obsesiones- de Sraffa. Una tiene que ver con el uso del mismo tipo de ganancia $\boldsymbol{r}$ para el cálculo de las anualizaciones y para la parte del excedente correspondiente a la tasa de ganancia. Sraffa trabaja en un sistema de equilibrio que llega al extremo si admitimos -como Sraffa- el mismo tipo de interés para ambas cosas. No es necesario y creo un error, porque ambas -anualizaciones y tasa de ganancia- responden a problemas y motivaciones diferentes. No por hacerlas diferentes se rompe el esquema esrafiano. Hoy sería inadmisible un modelo que no distinguiera ambas tasas. La otra idea-fuerza es la habitual en Sraffa: la de hallar la razón-patrón y los multiplicadores no negativos que posibiliten la mercancía-patrón aunque, como es el caso, no se pueda aplicar Perron-Frobenius. Dice textualmente Sraffa que si "*los instrumentos duraderos* (los plurianuales), *si son básicos, habrán de estar representados en la mercancía-patrón por muestras de las diferentes edades en sus debidas proporciones*"[24]. Sraffa parte siempre del hecho de que siempre una mercancía aparecerá tanto como medio y como producto en una ecuación, es decir, que en la parte de la izquierda aparecerá el precio de la $\boldsymbol{k}$ mercancía ($\boldsymbol{p}_{\mathrm{k}}\boldsymbol{y}_{\mathrm{kj}}$) y en el lado derecho ($\boldsymbol{p}_{\mathrm{k}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{kj}}$), y que además lo hará -después del cálculo de los multiplicadores- en las mismas proporciones que el resto de las mercancías, de tal forma que se puede obtener la mercancía-patrón porque se obtendrían los multiplicadores positivos. Para que eso pueda ocurrir deben aparecer las mismas mercancías cualitativamente en el

[24] Pág. 104 de *PMPM.*

lado izquierdo (productos finales) que en el lado derecho (medios de producción). Y eso vale para *el capital fijo* del que se trata en este capítulo. El problema que se encontró Sraffa es que en el caso de los bienes de capital había dos excepciones a lo anterior: al principio en la compra del medio de producción fijo (que entra como medio pero no como producto final); y al final del período de amortización, es decir, del residuo de la máquina, porque aparecerá como producto final (chatarra), o simplemente no aparecerá (la última amortización fue del año anterior). La razón de esta cuasi-obsesión de Sraffa es que no podía admitir -y parece lógico que así fuera- que un medio de producción *fijo* fuera comparable a una mercancía no básica, que es lo que ocurre con las mercancías que entran como producto final pero no como medio. La solución a estos dos casos de la vida útil de un "capital fijo", es decir, a la compra y al último período de amortización, la salva Sraffa tras una larga colaboración en años con el matemático mencionado recurriendo al trabajo fechado de tal forma que estén representado en la mercancía-patrón "*por muestras de las diferentes edades en sus debidas proporciones*". Es una solución, pero implica una restricción al uso del capital fijo, porque cada elemento del capital debe tener su propio proceso de amortización y obliga a compensar unos con otros de tal forma que se cumpla lo subrayado por Sraffa, es decir, *que los bienes plurianuales entren como productos finales y como medios en la misma proporción que entra la mercancía-patrón, con el fin de* que todos los multiplicadores y precios sean positivos. A Sraffa le pareció al final aceptable la condición, pero a mí no me convence[25] o al menos me parece discutible. Quizá por eso *Schefold* haya sugerido abandonar la distinción *esrafiana* entre productos básicos y no básicos. Pero, en fin, seguir con este tema y la evolución de la solución exige un estudio aparte y este ya se ha hecho en el artículo de *Kurz* y *Salvadori* mencionado anteriormente.

Todo lo anterior no pretende suplantar la riqueza de las consideraciones de Sraffa con lo que el llama "el capital fijo"; todo lo contrario, sólo se trata de ayudar y estimular a su lectura y ver con rigor algunas -pocas de todas las maneras- de las afirmaciones de Sraffa sin negar, no obstante, que se trata de una interpretación más del

[25] Inserto el comentario de Kurz y Salvador en *Piero Sraffa: The Man and the Scholar*, pág. 135: "it was no possible in general to reduce all fiex capital to date quantities of labour because the reduction series exhibits alternanting positive and negative elements".

capítulo X del libro, que es, por cierto, uno de los mejores, aunque también de los más complicados.

Bibliografía

Afriat, S.: "Sraffa´s Prices", Universitá degli Studi di Siena, quaderni 474.
www.econ-pol.unisi.it/quaderni/474.pdf

Ahijado, M.: "Piero Sraffa: notas para una biografía intelectual", 1985, Centro de Estudios Universitarios Ramón Areces.

Dobb, M.: "The Sraffa system and the critique of neoclassical theory of distribution", 1970.

Fiorito, Alejandro: "La implosión de la economía neoclásica". Está en la red:
www.geocities.com/aportexxi/sraffa12.pdf

Garegnani, P.: "El capital en la teoría de la distribución", 1982, ed. Oikos-Tau ("Il capitale nelle teorie delladistribuzone", 1982)

Garegnani, P.:"Professor Samuelson on Sraffa and the Clasical Economists", The European Journal of the History of Economic Thought,   2007.

Harcourt, G.C.: "Teoría del Capital" (*Some Cambridge controversies in the theory of capital, 1975*), apéndice al cap. 4, 1975, edit. Oikos-tau.

Kurz, Pasinetti, Salvador y otros: "Piero Sraffa: The Man and the Scholar", Routledge, 2008.

Kurz y Salvadori: "Sraffa and the mathematicians: Frank Ramsey and Alister Watson", en "Piero Sraffa´s Political Economy, edit Routledge,

Kurz, D. Heinz: "Critical Essays on Piero Sraffa´s Legacy in Economics", 2000, Cambrigde University Press.

Kurz, D. Heinz; Salvadori, Neri: "Theory of Production", 1997.

Kurz, Schefold, Salvadori: "Sraffa or an alternative economics", 2008, edt. Palmagrave Macmillan.

Meek, R.: "Mr. Sraffa´s Rehabilitationof Classical Economics", 1961.

Murga, Gustavo: "Piero Sraffa".
http://marxismo.cl/portal/index.php?option=com_content&task=view&id=100&Itemid=1

Neri, Salvador: "Besicovitch, Sraffa and the existence of Standard Commodity", 2010:
http://host.uniroma3.it/eventi/sraffaconference2010/abstracts/pp_salvadori.pdf

Pasinetti. L.: "Critical of the neoclassical theory of growth and distribution". Está en la red:
http://www.unicatt.it/docenti/pasinetti/pdf_files/Treccani.pdf
Pasinetti, L.: "Structural Change and Economic Growth: a theoretical essay on the dynamics of Wealth of Nations", 1981, Cambridge University Press.

Pasinetti, L.: "Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic growth", 1961/2.

Pasinetti, L.: "Switches of technique and the rate of return in Capital Theory", 1969.

Pasinetti, L.: "Crecimiento económico y distribución de la renta" ("*Growth and Income Distribution*", 1974), 1978, Alianza Editorial.

Pasinetti, L.: "Lecciones de teoría de la producción" ("*Lezioni di teoria della produzioni*", 1975), 1983, FCE.

Pivetti, M.(coordinador): "Contribuciones para una biografía intelectual", 2008, edit. Universidad Nacional Autónoma de México.

Potier, J.P.: "Piero Sraffa", 1994, edicions Alfons Magnànim.

Roncaglia, Alessandro: "Piero Sraffa", Edit. Palgrave MacMillan, 2009.

Roncaglia, Alessandro: "La riqueza de las ideas", Prensas Universitarias de Zaragoza, 2009 ("*The Wealth of Ideas. A History of Economic Thought*", Cambridge University Press, 2005).

Roncaglia, Alessandro: "Sraffa and the Theory of Prices", 1978 [*Sraffa e la teoria dei prezzi*, 1975]

Spaventa, L.: "Apuntes de Economía Política", edit. Ariel, 1984-

Subiza Martínez, B.: "Juegos matriciales y su aplicación a la teoría Perron-Frobenius", U. de Alicante; http://www.ine.es/revistas/estaespa/112_3.pdf

Solow, R.: "The interest rate and transition between techniques", 1967.

Sraffa, Piero: "Produción de mercancías por medio de mercancías" (*Production of commodities by means commodities, 1960*), 1975, Oikos-Tau.

Vegara, J. M.: "Economía política y modelos multisectoriales",1979, edit. Tecnos.

Woods, J. E.: "The Production of Commodities. An Introduction to Sraffa", 1990, edit. MacMillan,.