Revista Académica:
CONTRIBUCIONES A LA ECONOMÍA
Grupo eumednet

Enero 2018 - ISSN: 1696-8360

TEOREMA DE IMPOSIBILIDAD DE SRAFFA

Antonio Mora Plaza[1]

Correo: antonioamora@hotmail.com

Para citar este artículo puede utilizar el siguiente formato:

Antonio Mora Plaza (2018): “Teorema de imposibilidad de Sraffa”, Revista Contribuciones a la Economía (octubre-diciembre 2018). En línea: http://eumed.net/ce/2018/1/teorema-imposibilidad-sraffa.html

<u>Abstract</u>:

In 1968 the italian economist Carlo Felice Manara attempted an algebraic procedure with which to create a triangular matrix of matriz requeriments such that the submatrices below the main diagonal were equal to zero. It was intention to advance both in the search for one irreducible matrix and to build create a system with the Sraffa conditions for to do separation between basic and no-basic commodities. In the Following it this article it will be demostrate that the mentioned procedure is an impossible logic. Only if the original matrix of requeriments is a triangular matrix is it posible to make the Sraffian separation.
.

Key words: Sraffa – Basic - no-basic – matriz - triangular

<u>Resumen</u>:

En 1968 el economista Carlo Felice Manara intentó un procedimiento algebraico mediante el cual crear una matriz triangular de la matriz de requerimientos tal que los elementos de las submatrices por debajo (o por encima) de la diagonal principal fueran iguales a cero. Con ello se pretendía avanzar tanto en la búsqueda de una matriz irreducible como el de construir un sistema que cumpliera los requisitos de Sraffa de diferenciación entre bienes básicos y no básicos. En lo que sigue se demostrará que el intento fallido del economista italiano no se debe sólo a un planteamiento erróneo sino a que no es posible encontrar un procedimiento algebraico que separe bienes básicos de los no básicos de acuerdo con los criterios de Sraffa si la matriz de requerimientos primitiva no es ya triangular. Porque, de serlo, ya no sería necesario ningún procedimiento de triangulización.

Palabras clave: Sraffa – básico -no básico – matriz - triangular

JEL: B51

[1] Licenciado en Ciencias Económicas por la U. Complutense de Madrid, actualmente jubilado. He trabajado en la Fundación Sindical de Estudios de CC.OO., en BNP-Paribas.

TEOREMA DE IMPOSIBILIDAD DE SRAFFA

1 – Introducción

Vamos a plantear directamente el problema sin más preámbulos[2]. Sraffa en su libro *Producción de mercancías por medio de mercancías*[3] definió los productos básicos[4] como aquellos que entraban directa o indirectamente en la producción de todas las mercancías[5]. Hoy diríamos bienes y servicios. Bienes no básicos serían aquellos que no entrarían en la producción de los básicos, aunque sí podrían entrar (o no) en la producción de ellos mismos. A su vez los bienes básicos podríamos dividirlos en dos: aquellos que sólo entran en la producción de los básicos y aquellos que entran en los de los no básicos. Estos últimos serían los bienes que Sraffa llama "interconectados". Si no hubieran bienes no básicos producidos con bienes básicos (lo cual supondrían que todos los no básicos emplean *sólo* como medios de producción a ellos mismos) nos encontraríamos con dos economías absolutamente independientes desde el punto de vista de la producción. Esto en cuanto al aspecto productivista, pero habría una condición más: que los bienes básicos deberían cumplir: que los precios así como las variables distributivas tasa de ganancia y tasa de salarios deberían determinarse autónomamente en el sector de los básicos. Con esta condición, para los bienes no básicos ambas tasas serían un dato así como el precio de los básicos (si es que los emplearan)[6]. Los bienes no básicos no influirían para nada ni en las tasas distributivas ni, tampoco, en los precios de los básicos.

Lo anterior, que son conceptos económicos, se ha mezclado o reducido simplemente a la consideración sobre las matrices irreducibles o, de no serlo de entrada, reducibles. Una matriz es irreducible si, mediante combinaciones lineales de filas y/o columnas no puede ser convertida en una matriz triangular, es decir, en una matriz cuyas submatrices por debajo (o por encima) de la diagonal principal puedan ser convertidas a cero. Una matriz reducible es aquella en la que se contempla tal posibilidad. Pasinetti, en su obra *Lecciones de Teoría de la Producción*, no aclara la diferenciación entre, llamemos, *basicidad* según Sraffa e *irreductibilidad*, pareciendo que ambas cosas sean la misma o equivalentes[7]. Sí lo hacen en el mejor libro sobre la obra capital del economista italiano Gilbert Abraham-Frois y Edmond Berrebi en *Theory of Value, Prices and Accumulation*[8]. En este libro los autores dan un ejemplo de cómo una matriz de requerimientos (una matriz $\boldsymbol{A}$ tal que $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AY}$, siendo $\boldsymbol{X}$ una matriz $\boldsymbol{n}\mathrm{x}\boldsymbol{n}$ de medios de producción e $\boldsymbol{Y}$ otra matriz $\boldsymbol{n}\mathrm{x}\boldsymbol{n}$ de productos finales) puede ser reducida a triangular y, sin embargo, no cumplir los requisitos de basicidad *esrafianos*. En España tenemos el libro de Manuel Ahijado *Distribución, Precios de Producción y Crecimiento* donde, precisamente, se asimilaba *reducibilidad* como sinónimo de basicidad[9]. Pero no trata este trabajo en especial sobre esta diferenciación aunque, si la traemos a colación, es porque ahí estriba la dificultad de diferenciar, dada una matriz de requerimientos $\boldsymbol{A}$ o de las matrices directamente de medios y productos, de encontrar un método matemático que permita diferenciar bienes básicos de los no básicos. El economista Manara intentó esta separación en el artículo ya mencionado y vamos a explicar la razón de su fracaso. Partimos de una ecuación de definición de un sistema de producción simple tal como:

---

[2] No es la intención del autor de este manual recopilar las aportaciones surgidas al hilo de la obra de Sraffa. Eso es una tarea que dejo a los historiadores del análisis económico, pero sí echar mano de lo avanzado por algunos autores si eso puede ayudar a la comprensión del libro del economista italiano y, sobre todo, a desarrollar su obra.

[3] En el epígrafe 8.

[4] *Il modello di Sraffa per la produzione congiunta di merci a mezzo di merci*, 1968.

[5] *Sraffa´s Model for the Joint Production of Commodities by means Commodities,* 1968 (en italiano para esta fecha), recogido en la obra de varios autores de L.L. Pasinetti *Essays on the Theory of Joint Production*, 1980, pero la versión italiana de la obra conjunta es de 1977. El artículo de Manara abarca más cuestiones a pesar de su brevedad (11 páginas) y sólo en el último epígrafe aborda el tema que el titula literalmente *The distintion between basic and non-basic commodities*. En el mismo libro se recogen algunas consideraciones en forma de artículo de I. Steedman y del propio Pasinetti.

[6] Dado que los precios de los bienes no básicos dependen, salvo la excepción comentada, de los bienes básicos así como las tasas de ganancia y de salarios son un dato para este sector, podría ocurrir que la tasa de ganancia interna del sector de los no básicos fuera superior a la del sector de los básicos. En ese caso, si se quiere mantener una tasa uniforme para toda la economía, los precios de los bienes no básicos tenderían al infinito si se ex expresan en términos de algún bien básico o en términos de la mercancía-patrón. Sraffa estudió este caso en el apéndice B de su libro titulado *Nota sobre productos no básicos que se auto-reproducen.*

[7] Pág. 134 y siguientes de la versión española de 1983 en el FCE.

[8] Cambridge U. P., 1979, con versión francesa en 1976.

[9] "*Si la matriz de coeficientes A es irreducible, indescomponible o conexa, todas las mercancías son básicas*", pág. 79 del libro mencionado, edit.Ceura.

(1) $$PY = (1+g_m)PX$$

También podemos emplear la más extensa de Sraffa *modificada*[10] como:

(2) $$PY = (1+g)\left[wL + PX\right]$$

Donde $\boldsymbol{g}_m$ es la tasa máxima de ganancia (que en la producción simple coincide numéricamente con la razón-patrón ***R***), ***g*** la tasa de ganancia, ***w*** la tasa de salarios y ***P*** el vector de precios **1**x***n***, siendo ***X*** e ***Y*** las matrices ya mencionadas de medios y productos finales respectivamente. De la ecuación (1), post-multiplicando por la inversa de la matriz de productos finales ***Y***, se obtiene:

(3) $$P = (1+g_m)PXY^{-1}$$

siendo $\boldsymbol{XY^{-1}}$ precisamente la matriz ***A*** que hemos llamado de *requerimientos*, siguiendo a Leontief. Con ello queda (3) como:

(4) $$P = (1+g_m)PA$$

El economista y matemático Felice Manara intentó la separación de bienes básicos de los no básicos en dos etapas. En la primera separa a mano (“reordering”)[11] los bienes básicos de los no básicos en ***A***. El procedimiento sería como sigue. Supongamos que partimos de la matriz de requerimientos que está dada por las matrices de medios X y de productos finales de acuerdo con que $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$, y la matriz la subdividimos en 4 submatrices tal como:

(5) $$A = \begin{bmatrix} \underset{kxk}{A_{11}} & \underset{kx(n-k)}{A_{12}} \\ \underset{(n-k)xk}{A_{21}} & \underset{(n-k)x(n-k)}{A_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

Y de (5) surge, tras la reordenación “a mano”, la matriz:

(6) $$B = \begin{bmatrix} \underset{kxk}{B_{11}} & \underset{kx(n-k)}{B_{12}} \\ \underset{(n-k)xk}{0} & \underset{(n-k)x(n-k)}{B_{22}} \end{bmatrix}$$

Lo cual suponía que la matriz ***A*** era reducible y la hemos convertido en una matriz irreducible por dos cosas: porque ya tenemos en (6) una matriz triangular y porque, suponemos, que las submatrices de la diagonal principal de la matriz ***B*** ya son irreducibles. De no serlo se seguiría con el proceso, ahora en cada submatriz de la diagonal pricipal, hasta construir una matriz triangular de nueva y totalmente irreducible.[12] Ahora la cuestión se plantea es cómo encontrar una matriz -llamemos ***M***- tal que, *post-multiplicada* ***A*** por

[10] Llamo modificada porque la tasa de ganancia abarca también a los costes salariales. No obstante, con esta tasa abarcando todos los costes o solo los de los medios de producción, las conclusiones no varían cualititativamente.
[11] Página 12 de su libro mencionado.
[12] Hemos dicho que una matriz es reducible si, mediante combinaciones lineales de filas y/o columnas, se puede triangulizar. Pero eso, estrictamente, no lo podemos hacer en Economía con la matriz **A** de requerimientos porque en cada fila está cada bien o servicio necesario para producir una unidad de otro bien o servicio, por lo que no podemos sumar filas con filas ni columnas con columnas (en este caso serían “procesos” con “procesos”) porque eso sería, como dice un refrán español, mezclar churras con merinas. Este hecho ha pasado desapercibido en autores que se han acercado a Sraffa desde la mera matemática. Lo más que podemos hacer es buscar una matriz auxiliar tal como **M** que, post-multiplicada por la matriz original **A**, nos recoloque filas enteras entre sí hasta poner en las últimas filas la la matriz aquellas que tienen ceros en sus columnas, para pasar luego a reordenar a su vez las columnas para colocar aquellas que tienen ceros en la izquierda de la matriz resultante. Es decir, ni siquiera la operación de triangulización matemática la podemos emplear a satisfacción sino sólo bajo la condición de no sumar o restar filas con filas ni columnas con columnas.

M, nos de ***B***. Al menos es lo que se planteó Felice Manara aunque, como veremos, eso no era ni acertado ni suficiente para llegar a la idea de basicidad de Sraffa. Planteamos la ecuación matricial de la siguiente manera:

(7) $$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} & 0 \\ -T_{21} & I_{22} \end{bmatrix}$$

… siendo $\mathbf{I}_{11}$ una matriz diagonal ***k***x***k*** de unos, $\mathbf{I}_{22}$ otra matriz diagonal (***n-k***)x(***n-k***) y $-\boldsymbol{T}_{21}$ una matriz a determinar (***n-k***)x***k***. Es decir, aun cuando la matriz ***B*** la hubiéramos construido “a mano” mediante combinaciones lineales de filas y columnas de tal manera que hayamos colocado un cero en el lugar de la supuesta submatriz $\boldsymbol{B}_{21}$, existe la necesidad de encontrar una matriz que hemos llamado ***M*** tal que, *post-multiplicada* por la matriz ***A*** original, nos dé la *ordenada* ***B***. Esa necesidad se deriva de que no basta con ordenar ***A*** para obtener ***B***, sino que tenemos que hacerlo contando con la ecuación matricial (1) o, en su caso, (2). Es decir, lo que procede es *post-multiplicar* una de las dos ecuaciones (o las dos) por una matriz ***M*** tal que no dé:

(8) $$PM = (1+g_m)PAM$$

Y como quiera que ***B*** es la matriz *reordenada* tal que ***M*** es ***B***=***AM***, podemos escribir también la ecuación (8) como:

(9) $$PM = (1+g_m)PB$$

Este es el aspecto que se le escapó a Felice Manara y que será decisivo por lo que ahora veremos. Pues bien, a partir de la ecuación matricial (7) podemos determinar lo que vale la matriz ***M*** dado que, tanto la matriz ***A*** original como la ***B*** “ordenada a mano”, son datos. Hacemos la multiplicación matricial (7) y queda:

(10) $$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}T & A_{12} \\ A_{21} - A_{22}T & A_{22} \end{bmatrix}$$

Con lo que queda el siguiente sistema de ecuaciones:

(11) $$B_{11} = A_{11} - A_{12}T$$

(12) $$0 = A_{21} - A_{22}T$$

(13) $$B_{12} = A_{12}$$

(14) $$B_{22} = A_{22}$$

Y con los sistemas de ecuaciones (11) y (12) obtenemos el valor de $\boldsymbol{B}_{11}$ y de la propia matriz “auxiliar” ***T***:

(15) $$B_{11} = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$$

(16) $$T_{21} = A_{22}^{-1}A_{21}$$

Pero la matriz (15) es matadora para el intento de Manara de separar la los bienes básicos de los no básicos, porque dicha ecuación nos dice que ¡los bienes básicos $\boldsymbol{B}_{11}$ dependen funcionalmente de los bienes no básicos de la matriz original A_{11}! Con esto se acabó el llamemos “procedimiento Manara” de separación de bienes básicos y no básicos a partir de la matriz original de requerimientos ***A***. Aunque con otras ecuaciones, esto ya lo vio el agudo y original economista Ian Steedman en su artículo *Basics, Non-*

Basics and Joint Production[13]. Pero el problema no para ahí, porque si ahora operamos con ***M*** y ***B*** en (9) -dado que ***B***=***AM***- queda que:

$$(P_1, P_2)\begin{bmatrix} I_{11} & 0 \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I_{22} \end{bmatrix} = (1+g_m)(P_1, P_2)\begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & A_{11} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Que efectuadas las multiplicaciones sale:

$$P_1 + P_2 A_{22}^{-1}A_{21} = (1+g_m)\left[P_1(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})\right] \tag{18}$$

$$P_2 = (1+g_m)\left[P_1 A_{11} + P_2 A_{22}\right] \tag{19}$$

Y en (18) resulta aparecen juntos en la ecuación ¡los precios de los bienes básicos con los no básicos! Y ni siquiera podemos despejar los precios de los no básicos $\boldsymbol{P}_2$ en (19) y sustituirlos en (18), porque en (19) está la matriz $\boldsymbol{A}_{22}$, es decir, la matriz de bienes no básicos, con lo que los precios de los productos de los bienes básicos dependerían doblemente de los bienes no básicos: primero a través de la relación funcional de la matriz $\boldsymbol{B}_{11}$ con $\boldsymbol{A}_{22}$ en (15) y con la relación de precios en (18).

2 – <u>El teorema propiamente</u>

Vamos a plantear el problema de la posibilidad o no de construir un sistema de ecuaciones a partir de la diferenciación de Sraffa entre bienes básicos y no básicos tal que cumpla los dos requisitos que hemos visto que no cumplía el procedimiento Manara. Si partimos de la ecuación (1) –o de la (2)- tal que $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{g}_m)\boldsymbol{PA}$, para derivar desde los valores originales de la matriz de requerimientos ***A***, a un sistema de ecuaciones donde estén separados bienes básicos de no básicos, deberemos obtener una ecuación auxiliar ***M*** tal que cumpliera con el siguiente requisito:

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} \tag{20}$$

La razón de ello es que ahora, si *post-multiplicamos* la ecuación (1) de Sraffa por la matriz auxiliar ***M***, queda:

$$(P_1, P_2)\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} = (1+g_m)(P_1, P_2)\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix} \tag{21}$$

Y desarrollando obtendríamos las ecuaciones de precios.

$$P_1 M_{11} = (1+g_m)P_1 B_{11} \tag{22}$$

$$P_1 M_{12} + P_2 M_{22} = (1+g_m)\left[P_1 B_{11} + P_2 B_{22}\right] \tag{23}$$

Es decir, sólo si se cumpliera (20) podríamos estar seguros de que hemos separado bienes básicos de los no-básicos tal como indica la ecuación (22). Aún quedaría una cuestión y es la de saber si las submatrices son irreducibles porque, de ser reducibles no se podrían garantizar precios estrictamente positivos[14]. En principio tenemos más incógnitas que ecuaciones en (20), por lo que podríamos trabajar con un sistema tal como:

---

[13] En *Essays on The Theory of Production*, pág. 44, Columbia U.P., 1977.

[14] Se corresponde con la versión débil del teorema de Perron-Frobenius.

(24) $$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} & M_{12} \\ 0 & I_{22} \end{bmatrix}$$

… donde sí coinciden el número de ecuaciones que es $\boldsymbol{n}^2$ con el número de incógnitas que son los elementos de las matrices $\boldsymbol{B}_{11}$, $\boldsymbol{B}_{12}$, $\boldsymbol{B}_{22}$ y $\boldsymbol{M}_{22}$, que si hace el recuento, da también $\boldsymbol{n}^2$ variables[15]. La cuestión es: ¿son posibles las ecuaciones (20) y (24)?. Vamos a efectuar el producto en (20) y obtenemos los dos primeros sistemas de ecuaciones tal como:

(25) $$B_{11} = A_{11}M_{11}$$

(26) $$0_{21} = A_{21}M_{11}$$

Y vemos en (26) que, para satisfacer la ecuación, o bien $\boldsymbol{A}_{21}=\mathbf{0}$ o lo es $\boldsymbol{M}_{11}$. Pero $\boldsymbol{A}_{21}$ son los datos de partida, por lo que debemos contar con que la separación entre bienes básicos y no básicos se ha hecho a mano en la matriz $\boldsymbol{B}$ y ahora, justamente, se pretende determinar la matriz –imprescindible para las ecuaciones monetarias (22) y (23)- auxiliar $\boldsymbol{M}$ para utilizar en (22). La conclusión es la de que $\boldsymbol{A}_{21}$ no valdrá cero salvo por una infinita casualidad. Pues si $\boldsymbol{A}_{21}$ no puede ser cero, para que se cumpla (26) ha de serlo $\boldsymbol{M}_{11}$, pero si lo es $\boldsymbol{M}_{11}$, en (25) desaparecen de los bienes básicos al tener forzosamente valor nulo la submatriz $\boldsymbol{B}_{11}$ en (25). La conclusión es que no es posible una ecuación como (24), y si ello no es posible, y si esa ecuación no es posible, no es posible separar los bienes básicos de los no básicos a partir de una matriz de requerimientos supuestamente reducible[16]. Vemos como irreducibilidad y basicidad no son lo mismo. En realidad el teorema queda demostrado por reducción al absurdo: se supone que cumplir los requisitos de basicidad de Sraffa sólo es posible si pudiera existir una matriz $\boldsymbol{M}$ tal como la que surge de (20) –o en su caso de (24)- pero esa ecuación no tiene solución para las variables implicadas ($\boldsymbol{M}_{11}$, $\boldsymbol{A}_{21}$, $\boldsymbol{B}_{11}$)[17], salvo la solución trivial de cero.

Podemos ver la cuestión anterior desde otra perspectiva. Siempre deberemos partir de una matriz no triangular $\boldsymbol{A}$ (sea reducible o no) porque esa matriz se corresponde con la ecuación de definición de Sraffa de la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{PY}=(\mathbf{1}+\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}})\boldsymbol{PX}$. Ahora, si queremos despejar los precios en el lado izquierdo de la ecuación, deberemos *post-multiplicar* por la inversa de los productos finales $\boldsymbol{Y}$ la ecuación anterior y derivar en la ecuación $\boldsymbol{PY}=(\mathbf{1}+\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}})\boldsymbol{PXY}^{-1}$. Y llamaremos $\boldsymbol{A}$ a la ecuación matricial resultante $\boldsymbol{XY}^{-1}$, que además se corresponde con la matriz de requerimientos de Leontief[18]. Pues bien, sea cual sea el método que empleemos para triangulizar la matriz $\boldsymbol{A}$ –si es que se deja triangulizar, es decir, si es que ya no es de entrada irreducible– siempre deberemos o podremos obtener una matriz –que hemos llamado $\boldsymbol{M}$– tal que podamos pasar de la matriz original a la matriz reordenada o triangulizada. Es decir, si partimos de $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$ y construimos a partir de $\boldsymbol{A}$ otra matriz $\boldsymbol{B}$ que cumpla el requisito de tener una ristra de ceros en parte de la última o últimas filas, siempre podremos y deberemos calcular una matriz $\boldsymbol{M}$ tal que $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. Y, claro está, sólo fruto de una casualidad cuya probabilidad es cero puede ocurrir que la matriz $\boldsymbol{M}$ sea triangular. Pero $\boldsymbol{M}$ ha de ser triangular para, como hemos visto, obtener una ecuación vectorial para los precios $\boldsymbol{P}_1$ de los bienes básicos tal que puedan calcularse autónomamente los precios desde la ecuación $\boldsymbol{PM}=(\mathbf{1}+\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}})\boldsymbol{PB}$, siendo $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AM}$. No hay escapatoria posible, por lo que, salvo que se dé la casualidad

[15] En este caso se considera incógnitas o variables los elementos de la matriz $\boldsymbol{B}$. En el caso de la reordenación previa a mano a partir de la $\boldsymbol{A}$, ambas, serían un dato.

[16] Si la matriz **A** de entrada no es triangular –y debe ser lo normal que no lo sea- puede ser irreducible o reducible. Si es irreducible y no es triangular nada podemos hacer y no se cumple la ecuación (24); si es reducible, podemos triangulizar **A** y pasarla a **B**, pero entonces es necesario que existe la matriz **M** en (24) para cumplir con la ecuación de precios (21), que ya hemos visto que no permite separar los valores monetarios de los bienes básicos de los no básicos. Luego en cualquier caso, salvo que un milagro de la naturaleza económica nos depare que la matriz original de requerimientos sea triangular, no existe procedimiento alguno que permita separar los bienes básicos de los no básicos, impedir la dependencia funcional de la submatriz de los básicos de la submatriz de los no básicos, así como la dependencia de los precios de los bienes básicos $\boldsymbol{P}_1$ de los no básicos $\boldsymbol{P}_2$. La clave de todo esto nos las da las ecuaciones (15), (20) y (21).

[17] Siendo más estrictos, si la ordenación ha sido previamente a mano, las variables contenidas en las submatrices $\mathbf{A}_{21}$ y $\mathbf{B}_{11}$ son datos, por lo que sólo quedaría como variable las que están en la submatriz $\mathbf{M}_{11}$. En el caso de que no hubiera reordenación previa, sólo serían datos los elementos de la submatriz $\boldsymbol{A}_{21}$.

[18] O al menos podemos asimilar ambos sistemas pergeñados por el economista italiano y el economista de origen ruso, aunque si nos atenemos a los deseos de Sraffa, a diferencia de las columnas de la matriz de Leontief que son sectores, las del economista turinés son *procesos*. Este distingo puede tener menos importancia en la producción simple, pero cuando pasamos a la producción conjunta la diferencia conceptual entre los dos sistemas de ambos economista se vuelve fundamental. Esta es sólo una advertencia pero aquí nos quedamos porque no es objeto específico de este corto trabajo entrar en el tema de la producción conjunta.

imposible de que al multiplicar la matriz de medios ***X*** por la inversa de los productos finales ***Y*** nos de una matriz triangular (aunque, en caso contrario, luego fuera triangulizable "a mano"[19]) ¡no es posible matemáticamente separar los bienes básicos de los no básicos de la matriz original ***A*** y respectar, simultáneamente, los criterios de basicidad de Sraffa! Ello no significa que estos bienes no existan, sino que no podemos manipular la matriz ***A*** de requerimientos de la economía real de tal forma que los podamos colocar todos juntos (o parte de ello) si queremos obtener como solución en el sistema de Sraffa $\boldsymbol{PY}=(\mathbf{1}+\boldsymbol{g}_m)\boldsymbol{PX}$ con precios estrictamente positivos y con una tasa máxima de ganancia también positiva[20]. Quizá consciente Felice Manara de que la ecuación (24) sólo es posible si la submatriz $\boldsymbol{A}_{21}$ de la matriz ***A*** de requerimientos es cero, intentó una solución colocando un cero en la submatriz opuesta de la matriz auxiliar **M**, es decir, intentó que la matriz auxiliar ***M*** tuviera un cero en la submatriz $\boldsymbol{M}_{12}$ y dejar como variable la submatriz $\boldsymbol{M}_{21}$ que él llamó $-\boldsymbol{T}$, con signo negativo. Pero hemos visto que este sistema que hemos llamado "Manara" resultó un fiasco por la doble dependencia que implicaba en términos físicos (la submatriz de bienes básicos $\boldsymbol{B}_{11}$ dependía de la de los no básicos originales $\boldsymbol{A}_{22}$) y por la dependencia de los precios de los bienes básicos respectos de los precios de los no básicos. Durante mucho tiempo el autor de este trabajó intentó una solución hasta que me di cuenta de que lo contrario, es decir, de que la imposibilidad de tal solución era lo correcto.

En cambio, si la matriz de requerimientos ***A*** es ya triangular y estamos en la producción simple sí podemos encontrar una matriz auxiliar ***M*** tal que se cumpla:

(27) $$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & X_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{11} & 0 \\ 0 & Y_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

En este caso la inversa de una matriz diagonal es también una matriz diagonal, con lo cual ya es fácil encontrar una matriz auxiliar ***M*** tal que se cumpla que $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AM}$ donde las submatrices $\boldsymbol{B}_{21}$ y $\boldsymbol{M}_{21}$ respectivamente son cero. Entonces sí se puede post-multiplicar por ***M*** en la ecuación original $\boldsymbol{P}=(\mathbf{1}+\boldsymbol{R})\boldsymbol{PA}$ y dejarlo en $\boldsymbol{PM}=(\mathbf{1}+\boldsymbol{R})\boldsymbol{PB}$. Pero en este caso no existe el problema de triangulización de la matriz de requerimientos puesto que ésta es ya triangular desde su origen por lo que es innecesario cualquier "procedimiento Manara". En el caso de la producción conjunta tendrán validez las consideraciones anteriores puesto que si hacemos:

(28) $$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & X_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ 0 & Y_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

ocurrirá que $\boldsymbol{A}_{21}$ valdrá cero. El problema en este caso de producción conjunta es que no está garantizado que los elementos de la matriz resultante ***A*** sea estrictamente positiva y, por lo tanto, que los precios lo sean.

Madrid, 7 de agosto de 2017.

---

[19] Cuando Manara, Steedman, Pasinetti, etc. escribieron estos artículos no existían las potentes hojas de cálculo actuales, por lo que ahora es concebible construir algoritmos que pueden implementarse en un ordenador que permita esta ordenación, es decir, que no tenga que ser "a mano". Pero este hecho facilita los cálculos y maniobras algebraicas, pero en nada cambia el fondo de la cuestión.

[20] Para ello deberemos poder aplicar el teorema de Perron-Frobenius a la ecuación mencionada, aunque con alguna manipulación algebraica elemental. En cuanto a que se dé una tasa máxima de ganancia positiva depende también de que el sistema obtenga un excedente en parte de sus productos. En la producción conjunta se pueden obtener también precios positivos, pero ahí ya no podremos estar seguros de que el vector de precios resultante sea mayor que cero en todos sus elementos. No obstante, cuanto mayores sean los excedentes de los bienes y servicios, es decir, cuanta mayor sea la diferencia de la matriz resultante de **Y**-**X** mayor será la probabilidad de obtener precios positivos. Pero esta posibilidad depende más de que no se produzca un estrangulamiento en la producción consistente en que, un medio básico que sea altamente utilizado por el conjunto de la economía, padezca de un excedente relativo no monetario muy pequeño y alejado de los excedentes relativos no monetarios de los sectores a los que vende o desde los que compra. También que dependa mucho como comprador de suministros encarecidos por circunstancias extrañas que le obliguen a destinar gran parte de sus ingresos a comprar estos medios y/o que, dada su tecnología o de su dependencia de mercados monopolísticos, no tenga alternativa en los mercados de medios de producción.

Bibliografía

Abraham-Frois, G y Berrebi, E. (1979): "Theory of Value, Prices and Accumulation, Cambridge U. Press (original en francés, 1976).

Bellafiore, R y Carter, S. (2014): "Towards a new understanding of Sraffa: insight from archival research", edit. Palgrave MacMillan.

Chodi, G. (2008): "Sraffa or an alternative economics", edit. Palgrave Macmillan

Gehrke, Ch., R. Ciccone y Mongiovi, G. (2013): "Sraffa and Modern Economics I", edit. Routledge,.

Hodson, G.M. (1991): "After Marx and Sraffa", edit. Palgrave.

Kurz y Salvadori (2001): "Sraffa and the mathematicians: Frank Ramsey and Alister Watson", en *Piero Sraffa´s Political Economy*, edit Routledge,.

Kurz, D. Heinz (2000): "Critical Essays on Piero Sraffa´s Legacy in Economics", Cambridge University Press.

Kurz, D. Heinz; Salvadori, Neri (1995): "Theory of Production", Cambridge University Press.

Kurz, Schefold, Salvadori (2008): "Sraffa or an alternative economics", edt. Palmagrave Macmillan.

Levrero, S., Palumbo, A. y Stirati, A. (2006): "Sraffa and the Reconstruction of Economic Theory", revista Circus.

Mainwaring, L. (1984): "Value and Distribution in capitalist economies", Cambridge University Press.

Marchionatti Pack, S.J. (1985): "Reconstructing marxian economics: Marx based upon Sraffian commodity theory of value", edit. Praeger Publisher inc.

Palumbo, A. y Stirati, A. (2013): "Sraffa and the reconstruction of economic theory", edit. Levrero.

Pasinetti, L. (1980): "Essays on the Theory of Joint Production", London, edit. Macmillan, (en italiano en 1977).

Pasinetti, L. (1983): "Lecciones de teoría de la producción" [*Lezioni di teoria della produzioni*, 1975], FCE.

Peris i Ferrando, J.E . (1987): "Análisis de la resolubilidad de modelos lineales de producción conjunta", en internet: http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/3829/1/Peris%20Ferrando,%20Josep.pdf

Potier, J.P. (1994): "Piero Sraffa", edicions Alfons Magnànim.

Roncaglia, Alessandro (2009): "La riqueza de las ideas", Prensas Universitarias de Zaragoza, (*The Wealth of Ideas. A History of Economic Thought*, Cambridge University Press, 2005).

Roncaglia, Alessandro (1978): "Sraffa and the Theory of Prices", New York: Wiley, [*Sraffa e la teoria dei prezzi*, 1975].

Schefold, Bertram (1989): "Mr. Sraffa on Joint Production and other essays", edit. Routlegde.

Sraffa, Piero (1966): "Produción de mercancías por medio de mercancías" (*Production of commodities by means of commodities, 1960*), Oikos-tau ediciones.