LA FUNCION GENERATRIZ DE LOS NUMEROS DE FIBONACI

Prof. GABRIEL POVEDA RAMOS,
de la Universidad del Valle.

Como bien se sabe, se llaman números de Fibonaci al conjunto de naturales

1 2 3 5 8 13 21 34 55 89, ...,

tales que, a partir del 1 y 2, todos los demás se obtienen como la suma de sus dos antecesores.

Llamaremos función de Fibonaci a la correspondencia

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	....
F (n)	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	154	243	....

o aplicación de los números naturales sobre los de Fibonaci. Es evidente que ésta es una correspondencia biunívoca.

Nuestro problema es el de establecer una ecuación $y = F(n)$ que nos de el valor de cada número de Fibonaci explícitamente en términos del natural n a que corresponda, y que es, precisamente, el natural correspondiente al ordinal que ocupe el n. de F. considerado, en la secuencia dada.

La solución es sencilla, pues, si llamamos y_n al n. de F. indicado por la aplicación $n \twoheadrightarrow F(n) = y_n$, sabemos que es:

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2} \tag{1}$$

o sea

$$y_n - y_{n-1} - y_{n-2} = 0 \tag{1'}$$

ecuación esta que es una ecuación en diferencias finitas, lineal, de 2º orden, con coeficientes constantes, homogénea.

Es bien sabido que tales ecuaciones (en diferencias finitas) tienen soluciones que son funciones potenciales de la forma

$$f(n) = C\beta^n \tag{2}$$

en donde C es una constante arbitraria y β es un número que ha de determinarse de modo que (1) se satisfaga idénticamente.

Substituyendo la expresión (2) en (1) se halla inmediatamente

$$C\beta^n (1 - \beta^{-1} - \beta^{-2}) = 0 \tag{3}$$

y para que esta expresión sea idénticamente nula, es necesario y suficiente que el paréntesis sea cero. Puesto que, de antemano prescindimos de considerar soluciones triviales, es $\beta \neq 0$ y la anulación del polinomio lleva a la ecuación (algebraica)

$$\beta^2 - \beta - 1 = 0 \tag{4}$$

llamada ecuación auxiliar de (1), y cuyas raíces son

$$\beta_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = 1.618034 \qquad \beta_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) = -0.881966$$

de modo que la ecuación (1) tiene las dos soluciones

$$C_1 \times 1.618034^n \qquad C_2 (-0.881966)^n$$

de tal manera que, utilizando el teorema de superposición, la solución general de (1) es

$$y_n = 1.618034^n C_1 + (-0.881966)^n C_2$$

Para calcular las constantes arbitrarias aplicaremos el resultado a los términos iniciales $1 = y_0$ y $2 = y_1$:

$$\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2 \\ 2 &= 1.618034 C_1 - 0.881966 C_2 \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.618034 & -0.881966 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

de donde se deduce que

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2.5} \begin{bmatrix} 0.881966 + 1 \\ 1.618034 - 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0.4 \begin{bmatrix} 0.881966 + 2 \\ 1.618034 - 2 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = 1.1527864 \qquad C_2 = 0.1527864$$

Para comprobar la corrección de la solución hallada

$$y_n = 1.1527864 \times (1.618)^n - 0.1527864 \times (-0.882)^n$$

tratemos de calcular y_2 utilizando esta expresión

$$y_2 = 1.1527864 \times (1.618034)^2 - 0.1527864 \times (0.881966)^2 = 3.00$$

La exactitud de los resultados mejora a medida que n es mayor, y aún, para valores de n que sobrepasen a números del orden de 10, puede escribirse, con error despreciable

$$y_n = 1.1527864 \times (1618034)^n$$