Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA. **Rect@**
*Volumen 23(2022). Páginas 163 a 169.*
*DOI: 10.24309/recta.2022.23.2.05*

# ORDENACIONES DE CONJUNTOS DE ALTERNATIVAS CONSIDERANDO SIMILITUDES: UNA PANORÁMICA.

**CARMEN VÁZQUEZ**
*cvazquez@uvigo.es*
*Universidade de Vigo, Departamento de Matemáticas*
*Fac. de CCEE. Campus Lagoas-Marcosende. 36310 Vigo*

Recibido (01/06/2022)
Revisado (15/11/2022)
Aceptado (28/12/2022)

RESUMEN: Este artículo ofrece una perspectiva común para diferentes propuestas de ordenación de conjuntos de alternativas. Partiendo de un agente que tiene definidas una relación de preferencias y una relación de similitud entre las alternativas individuales, este debe establecer una ordenación entre conjuntos de alternativas que pueden resultar muy grandes. Pare ello se tendrán en cuenta las similitudes entre las alternativas que forman cada uno de estos conjuntos. Con esta premisa varias opciones de ordenación han sido propuestas en estudios independientes. Las presentamos aquí bajo un marco común.

*Palabras Clave*: Similitudes entre alternativas, diversidad de alternativas, utilidad cardinal, ordenación de conjuntos de oportunidades.

ABSTRACT: This article offers a common perspective for different alternative set ordering proposals. Starting from an agent that has defined a preference relation and a similarity relation over the individual alternatives, an ordering over sets of alternatives that can be very large must be established. For this, the similarities between the alternatives that belong to each of these sets will be taken into account, with this premise several management options have been proposed in independent studies. They are presented here under a common framework.

*Keywords*: Similarities between alternatives, diversity of alternatives, cardinal utility, ranking opportunity sets.

## 1. Introducción

Nos situamos en un contexto en el que un consumidor tiene definidas sus preferencias sobre alternativas individuales y debe ordenar con coherencia conjuntos de alternativas que le serán ofrecidos. El conocido método de la utilidad indirecta sería una opción, de modo que si $u$ es una función de utilidad que representa las preferencias del consumidor, un conjunto de alternativas $A$ será al menos tan preferido para el consumidor como otro conjunto de alternativas $B$ cuando $\max u(A) \geq \max u(B)$. Este es un sencillo método muy adecuado para situaciones en las que a posteriori el consumidor podrá disponer de la alternativa que desee dentro del conjunto elegido. Cuando la situación es otra y el consumidor no puede elegir libremente la alternativa que desee dentro del conjunto elegido o no puede hacerlo de manera inmediata sino en un futuro en que sus preferencias pudieran incluso ser otras, otros métodos pueden resultar más adecuados. Son múltiples los trabajos que proponen y caracterizan diferentes métodos adecuados a diferentes situaciones. En Arlegi et al. (2007) encontramos una exposición más detallada. Una buena selección de diferentes métodos puede encontrarse en Bossert et. al. (1994, 2000) y Pattanaik et. al. (1984).

Por otra parte, es posible que los conjuntos de alternativas que se ofertan puedan contener alternativas que resulten parecidas, que sean casi indiferentes para el consumidor. Este concepto de similitud de las alternativas ha sido tratado por diferentes autores. Rubinstein (1988) asume que las personas usan relaciones de similitud cuando evalúan loterías. Aizpura et al. (1990) interpretan estas relaciones como una forma de modelar los poderes imperfectos de discriminación de la mente humana y estudian la relación entre preferencias y similitudes. Binder (2014) proporciona caracterizaciones axiomáticas de dos clases de reglas de revelación de similitud. Otros autores abordan la noción de similitud de diferentes maneras. Por ejemplo, Mesiar (2007) introduce un enfoque general de las funciones de utilidad difusa basado en funciones de disimilitud o Nehring and Puppe (2002) exploran un enfoque de atributos múltiples para valorar la diversidad.

Recogemos aquí diferentes propuestas de órdenes entre conjuntos de alternativas que han sido construidos a partir de otras en las que no se contemplaba la relación de similitud entre alternativas. Básicamente, en todas ellas, se trata de“limpiar” los conjuntos iniciales de alternativas, que pueden resultar enormes, dejando sólo una representación de las alternativas más significativas, para luego aplicar la regla de ordenación que consideremos adecuada a la situación. La cuestión es saber qué propiedades debe tener la preferencia inicial sobre los conjuntos originales para caracterizar el orden resultante.

Este trabajo pretende dar una visión de conjunto para una serie de resultados que han sido obtenidos de modo independiente pero que pueden constituir un bloque temático, una única línea de investigación. Damos aquí una visión de conjunto de todos ellos, para lo cual debemos establecer un marco de desarrollo común, puesto que al tratarse de trabajos que se han desarrollado de modo individual presentan, a priori, diferencias estructurales. Aquí sólo se presentan los órdenes y se interpreta su significado, en los trabajos referidos estos órdenes son caracterizados axiomáticamente.

## 2. Notación y definiciones

Consideramos un único consumidor que tiene establecida su relación de preferencias $R$ sobre un conjunto de alternativas $X$ no necesariamente finito. Así $R$ será una relación binaria reflexiva, transitiva y completa, de modo que $xRy$ significa que el consumidor considera ‘$x$ al menos tan bueno como $y$’. La relación de indiferencia asociada a $R$ se denotará $I$, mientras la preferencia estricta se denotará $P$. Una función de utilidad asociada a $R$ es una función real $u\colon X \longrightarrow \mathcal{R}$ tal que $xRy$ sii $u(x) \geq u(y)$.

Consideremos $S$ una relación binaria reflexiva, simétrica pero no necesariamente transitiva definida en $X$. Para todo $x, y \in X$, $xSy$ se interpreta como que ‘$x$ es similar a $y$’ para el consumidor.

Como $S$ no es necesariamente transitiva, es posible que $y$ sea similar a $x$ y a $z$, pero $x$ no lo sea a $z$. Por lo tanto, 'ser similar a' no es necesariamente una relación de equivalencia. Para cada $A \subset X$ no vacío, $A$ se dice que es un conjunto homogéneo sii, para cada $a, a' \in A$, $aSa'$. Los conceptos de similitud y homogeneidad se deben originalmente a Pattanaik y Xu (2000).

La relación de similitud $S$ y la de preferencias $R$ son en principio conceptos independientes. La relación de similitud es un semiorden sobre $X$, que es diferente de la relación de preferencias. Esa noción nos resulta útil para clasificar grandes conjuntos de oportunidades: agrupar los elementos de los conjuntos de alternativas que se van a comparar teniendo en cuenta sus similitudes, y tal vez también sus preferencias, simplifica la tarea de ordenarlos. Nosotros usamos la noción de similitud considerada por Pattanaik y Xu (2000), aunque en nuestro caso también consideramos la existencia de una relación de preferencias. Diremos que una relación de similitud $S$ y una relación de preferencias $R$ son compatibles si para cada $x, y, z \in X$ tales que $xRyRz$, $xSz$ implica $xSy$ y $ySz$.

Nos desenvolvemos en contextos donde coexisten una relación de preferencias y una relación de similitud compatible con ella. Más concretamente, si $R$ puede ser representada por una función de utilidad cardinal, de modo que $u(x) < u(y)$ no sólo proporciona la información de que $y$ es preferido a $x$, sino que la diferencia $u(y) - u(x)$ refleja la intensidad de esa preferencia, podemos construir una relación de similitud compatible con $R$. Así, las alternativas que difieran en un cierto grado de utilidad se considerarán similares. Consideraremos un determinado valor $r > 0$, de modo que $x, y \in X$ se interpretarán como similares, $xSy$, cuando se verifique que $|u(x) - u(y)| \leq r$. Tal valor $r$ puede interpretarse, por ejemplo, como la incapacidad del consumidor para discernir entre alternativas muy parecidas o como la medida de la variación en la utilidad que al consumidor le resulta irrelevante teniendo en cuenta su contexto. Véase Vázquez (2014).

Los elementos de $\mathcal{P}(X)$ son los subconjuntos no vacíos de $X$, es decir, los conjuntos de alternativas disponibles para el agente. El propósito del agente es establecer un orden (una relación binaria reflexiva, transitiva y completa), $\succeq$, sobre $\mathcal{P}(X)$. Este orden se interpreta como la clasificación de preferencia del agente sobre los conjuntos de oportunidades.

## 3. Midiendo la diversidad de cada conjunto de alternativas

Pattanaik y Xu (2000) proponen ordenar los conjuntos de alternativas finitos según su grado de diversidad. Para ello consideran una relación de similitud entre alternativas y asocian a cada conjunto no vacío de alternativas, $A$, un valor numérico que es el menor cardinal posible de las particiones formadas por subconjuntos de $A$ homogéneos.

Por ejemplo, si $A = \{x, y, z\}$ de modo que $xPyPz$, $xSy$, $ySz$ y $\neg xSz$, entonces las posibles particiones de $A$ formadas por subconjuntos homogéneos son $\{\{x\}, \{y\}, \{z\}\}$, $\{\{x, y\}, \{z\}\}$ y $\{\{x\}, \{y, z\}\}$. Con lo que asociaríamos a $A$ el valor 2, que daría la medida de su diversidad, ya que aunque $A$ comprende tres alternativas, sólo ofrece dos tipos de opciones diferenciadas.

Vázquez (2020) generaliza este orden a conjuntos no necesariamente finitos con su ordenación por diversidad. Para ello necesita una función de utilidad cardinal y acotada inferiormente ya que, a diferencia de la propuesta de Pattanaik y Xu (2000), se considera la existencia de una relación de preferencias entre las alternativas compatible con la relación de similitud.

En lo sucesivo consideraremos definida una partición basada en la similitud, para cada $A \in \mathcal{P}(X)$. Consideremos $A_1 = A$ si $A$ fuese homogéneo, en caso contrario denotamos $a_1 = \inf u(A)$ y consideramos el conjunto homogéneo $A_1 = \{a \in A : |u(a) - a_1| \leq r\}$.

Sea $A_1^c = A \backslash A_1$. Como $u(A_1^c)$ es acotado inferiormente, se pueden considerar $a_2 = \inf u(A_1^c)$ y el conjunto homogéneo $A_2 = \{a \in A_1^c : |u(a) - a_2| \leq r\}$. A continuación definimos $A_2^c = A \setminus (A_1 \cup A_2)$ para obtener $a_3$ y $A_3$. Continuamos con el procedimiento mientras $A_i^c \neq \emptyset$. Así conseguimos un conjunto $M(A) = \{a_1, a_2, \dots\}$ y una partición de $A$, $\phi(A) = \{A_1, A_2, \dots\}$, ambos con el mismo cardinal. Así $D(A) = \#\phi(A) = \#M(A) \in N \cup \{\infty\}$ se define como la medida de la diversidad de las alternativas de $A$.

La ordenación por diversidad se define como:

Para cada $A, B \in \mathcal{P}(X)$, $A \succeq_D B$ sii $D(A) \geq D(B)$.

Se ordenan así conjuntos no necesariamente finitos según el número de alternativas sustancialmente diferentes que ofrecen de modo que $A$ es al menos tan preferido como $B$ si ofrece al menos tanta diversidad de alternativas como $B$, incluso aunque $B$ tenga realmente más alternativas que $A$.

## 4. Órdenes que combinan la diversidad y la calidad de las alternativas

Dos relaciones más, inspiradas por las definidas por Bossert et al. (1994) para conjuntos finitos, son definidas y caracterizadas en Vázquez (2020) para conjuntos no necesariamente finitos. En ellas se tienen en cuenta tanto la diversidad de las alternativas como su calidad. El orden que prima la diversidad se define como:

$A \succeq_C B$ sii $D(A) > D(B)$ or $D(A) = D(B)$ y $a_1 \geq b_1$,

y el orden que prima la calidad:

$A \succeq_P B$ iff $a_1 > b_1$ or $a_1 = b_1$ y $D(A) \geq D(B)$ .

En estos dos órdenes se considera la diversidad de las alternativas que contienen cada conjunto así como la utilidad del peor de sus elementos, primando una u otra obtenemos estas dos propuestas. Tanto estos dos órdenes como la ordenación por diversidad anteriormente presentada se podrían haber definido también de un modo análogo, partiendo de una utilidad acotada superiormente, considerando $a_1 = \sup u(A)$ y cada $a_i = \sup u(A_i^c)$ mientras $A_i^c \neq \emptyset$. Los órdenes resultantes no serían en general los mismos, aunque tendrían características similares. Obtendríamos así otras tres propuestas de órdenes, la idoneidad de optar por partir de las mejores o las peores alternativas dependerá del contexto de aplicación. Es el caso de los órdenes que presentamos a partir de aquí, en que se parte de las mejores alternativas pero podrían igualmente proponerse otros tantos usando las peores alternativas.

## 5. Un orden lexicográfico que tiene en cuenta las similitudes

Se presenta ahora una propuesta de orden lexicográfico, más concretamente, dados dos conjuntos de alternativas, se usa un tipo de regla lexicográfica similar a la propuesta por Pattanaik y Peleg (1984), sobre dos nuevos conjuntos de alternativas. Consideraremos aquí cada conjunto representado por agrupaciones de elementos similares, empezando siempre, en cada subconjunto por el mejor de ellos. Además se tiene en cuenta el cardinal del mejor subconjunto, dando un peso específico al número de alternativas similares a la mejor. De este modo, si $X$ es finito y $u\colon X \longrightarrow [0,1]$, se define para cada $A \in \mathcal{P}(X)$,

$$w * (A) = (\overbrace{a_1, \ldots a_1}^{k}, a_2, \ldots, a_{D(A)}, \overbrace{2, \ \ldots \ ,2}^{n-D(A)-k+1}) \in \mathcal{R}^n$$

siendo $a_i = \sup u(A_i)$, $k = \#A_1$ y $n = \#X$.

La principal característica de esta propuesta frente a las restantes es reflejar como característica importante de cada conjunto el número de alternativas similares a la mejor que contiene.

Clasificamos los conjuntos utilizando un orden lexicográfico sobre los valores que podríamos llamar significativos, dejando fuera todas las similitudes excepto las alternativas que son similares al mejor elemento de cada conjunto. A efectos prácticos, todas las alternativas con utilidades similares a los valores significativos son eliminadas, a excepción de las similares a la mejor de ellas. De esta forma, identificamos el conjunto $A$ con el vector de $\mathcal{R}^n$, $w^*(A)$, compuesto por los valores de utilidad de los elementos significativos de $A$. El valor de utilidad del mejor elemento de $A$ se repite tantas veces como el número de elementos que son similares a él. Completamos las últimas coordenadas con el número 2 para premiar de alguna manera los conjuntos más pequeños respecto a sus superconjuntos. De modo que si $A = \{a, b\}$ y $B = \{a\}$, siendo $aPb$, $\neg aSb$, entonces $w^*(A) = (u(a), u(b), 2, \ldots, 2)$ y $w^*(B) = (u(a), 2, \ldots, 2)$, por lo que $B \succ A$.

Así, Vázquez(2014) define la regla lexicográfica basada en la similitud: para cada $A, B \in \mathcal{P}(X)$, $A \succeq B$ iff $w^*(A) \geq_{LX} w^*(B)$, que significa que $w^*(A)$ es mayor o igual que $w^*(B)$, con el orden lexicográfico en $\mathcal{R}^n$.

En el mencionado trabajo se requiere que $X$ sea finito y $u \colon X \longrightarrow [0, 1]$, en el contexto global en el que queremos situarnos ahora, bastaría con que $u \colon X \longrightarrow \mathcal{R}$ fuese acotada, con $m = \inf u(X)$, $M = \sup u(X)$ y $X$ no necesariamente finito. Definiendo

$$w^*(A) = (\overbrace{a_1, \ldots a_1}^{k}, a_2, \ldots, a_{D(A)}, \overbrace{M+1, \ \ldots \ , M+1}^{n-D(A)-k+1}) \in \mathcal{R}^n$$

para $n = \min\{l \in \mathcal{N} : l > \frac{M-m}{r}\}$, por lo tanto $D(A) \leq n$, para todo $A \in \mathcal{P}(X)$.

Nótese que con este orden se refleja la preferencia sobre los conjuntos de oportunidades de un agente que junta las alternativas que siente similares y, posteriormente, utiliza el orden lexicográfico, prestando especial atención al número de elementos similares al mejor. Una característica peculiar de este orden es el rol altamente asimétrico jugado por la clase de similitud de la mejor alternativa global frente a las similitudes entre el resto de alternativas del conjunto.

## 6. Otros órdenes lexicográficos

En Vázquez (2022) se recogen otros dos órdenes de tipo lexicográfico bajo los mismos supuestos: $u$ acotada, $X$ no necesariamente finito y $m, M$ y $n$ definidos del mismo modo.

Tomando como referencia el orden leximax caracterizado por Bossert et al.(1994), se define el orden S-leximax, que permite ordenar conjuntos que pueden ser inmensos de un modo más práctico. Sea $A \in \mathcal{P}(X)$, denotamos $v(A) \in \mathcal{R}^n$, $v_i(A) = a_i = \sup u(A_i)$, para cada $i = 1, \ldots, D(A)$, y $v_i(A) = m - 1$, para $i > D(A)$, así

$$v(A) = (a_1, \ldots, a_{D(A)}, m-1, \ldots, m-1) \in \mathcal{R}^n$$

El orden S-leximax se define como:

$A \succeq_L B$ sii $v(A) \geq_{LX} v(B)$, siendo $A, B \in \mathcal{P}(X)$.

Se han considerado los vectores $v(A)$ para definir el orden S-leximax. Para tal fin se usa el número $m - 1$, menor que el ínfimo de la función $u$. Nótese que cualquier cota inferior de $u$ que no sea el mínimo podría emplearse para definir el orden S-leximax en lugar del número $m - 1$, obteniendo el mismo resultado, pero el orden definido es diferente cuando se usa una cota superior. Basta comparar los conjuntos $A = \{a, b\}$ y $B = \{a\}$, siendo $aPb$, $\neg aSb$, para ilustrar la diferencia. Una cota superior de $u$ nos permite adaptar el orden maximax caracterizado por Pattanaik y Peleg (1984) a nuestro contexto.

Sea $A \in \mathcal{P}(X)$, denotemos $w(A) \in \mathcal{R}^n$, $w_i(A) = a_i$, para cada $i = 1, \ldots, D(A)$, y $w_i(A) = M + 1$, para $i > D(A)$, es decir

$$w(A) = (a_1, \ldots, a_{D(A)}, M+1, \ldots, M+1) \in \mathcal{R}^n$$

El orden maximax S-lexicográfico caracterizado en Vázquez (2022) se define como:

$A \succeq_l B$ sii $w(A) \geq_{LX} w(B)$, siendo $A, B \in \mathcal{P}(X)$.

Obviamente cualquier cota superior de $u$ que no sea el máximo puede usarse en lugar de $M + 1$ para obtener el mismo resultado.

## 7. Conclusiones

Los órdenes descritos en este trabajo se sitúan en un contexto en el que un consumidor debe comparar conjuntos de alternativas que pueden ser enormes. Usando una relación de preferencias y una relación de similitud entre las alternativas, el consumidor primero limpia o reduce estos conjuntos considerables para obtener una representación simplificada que refleje la calidad y la variedad de las opciones contenidas en ellos. Estas son las simplificaciones que el consumidor realmente compara con un criterio adecuado a su situación. Esta reducción por similitud está relacionada con los modelos de medida de la diversidad. De hecho, el valor $D(A)$ proporciona una medida de la diversidad de alternativas en el conjunto $A$. Los conjuntos pueden ordenarse como hemos visto, teniendo en cuenta solo esta medida o combinándola con alguna otra característica.

Observando este enfoque desde una perspectiva más amplia, podemos ver que el proceso podría extenderse a otros campos de estudio. Restringimos el modelo a la teoría del consumidor porque es nuestro campo habitual de investigación. Sin embargo, son resultados que también podrían aplicarse a otro tipo de contextos socioeconómicos y una gama mucho más amplia de problemas de decisión. Un mundo en el que la recopilación y el procesamiento de grandes cantidades de datos es tan común requiere la gestión de grandes conjuntos de datos para simplificarlos con el fin de facilitar su comparación. Puede parecer contradictorio que los conjuntos se reduzcan para hacer que la información sea más manejable, porque el proceso mismo de reducción implica procesar toda la información. Hay que observar que, aunque se debe procesar toda la información para distinguir los datos importantes (valores $a_i$), este proceso es muy rápido y se puede estandarizar. Este es el punto de partida para el posterior manejo de los conjuntos reducidos de una forma u otra.

Finalmente, recalcar que aquí sólo hemos dado un marco común para diferentes planteamientos de criterios de ordenación de conjuntos de alternativas que, por su tamaño, pueden resultar poco manejables. En los trabajos originales que aquí se refieren pueden encontrarse las caracterizaciones axiomáticas de los mismos.

## Referencias Bibliográficas


Aizpurua, J.M., Nieto, J., Uriarte, J.R. (1990). Choice procedure consistent with similarity relations. *Theory and Decision*, 29(3): 235-253.

Arlegi, R., García-Lapresta, J.L., Meneses, L.C. (2007). Libertad de elección: algunos enfoques axiomáticos. *Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA Actas*, 15(1).

Binder,C.(2014). Preference and similarity between alternatives. *Rationality, Markets and Morals Journal*, 5: 120-132.

Bossert, W., Pattanaik, P.K., Xu, Y. (1994). Ranking opportunity sets: an axiomatic approach. *Journal of Economic Theory*, 63: 326-345.

Bossert, W., Pattanaik, P.K., Xu, Y. (2000). Choice under complete uncertainty: axiomatic characterization of some decision rules. *Economic Theory*, 16: 295-312.

Mesiar, R. (2007). Fuzzy set approach to the utility, preference relations, and aggregation operators. *European Journal of Operational Research*, 176: 414-422.

Nehring, K., Puppe, C. (2002). A theory od diversity *Econometrica*, 70(3): 1155-1198.

Pattanaik, P.K., Peleg, B. (1984). An axiomatic characterization of the lexicographic maximin extension of an ordering over a set to the power set. *Social Choice and Welfare*, 1: 113-122.

Pattanaik, P.K., Xu, Y. (2000). On diversity and freedom of choice. *Mathematical Social Sciences*, 40(2): 123-130.

Rubinstein, A.(1988). Similarity and decision-making under risk (Is there a utility theory resolution to the Allais paradox?). *Journal of Economic Theory*, 46: 145-153.

Vázquez, C. (2014). Ranking opportunity sets on the basis of similarities of preferences: a proposal. *Mathematical Social Sciences*, 67: 23-26.

Vázquez, C. (2020). Ranking opportunity sets taking into account similarity relations induced by money-metric utility functions, in *Mathematical Topics on Representations of ordered structures and utility theory.* (Springer ed. ) 313-324.

Vázquez, C. (2022). Lexicographic criteria for ranking opportunity sets with similarities. *Mathematical Social Sciences*, 117: 1-5.