 https://doi.org/10.24844/EM3403.13

Enseñanza-aprendizaje de la raíz cuadrada con uso de geometría en el nivel bachillerato

Teaching-Learning of square root with use of geometry in the upper middle level

Sandra García Quezada,[1] Elvira Borjón Robles,[2]
Nancy Janeth Calvillo Guevara,[3] Mónica del Rocío Torres Ibarra[4]

Resumen: El presente trabajo reporta los resultados de la implementación de una situación didáctica que promueve la enseñanza-aprendizaje de la determinación de raíz cuadrada en el nivel medio superior a través de una aproximación geométrica, la cual está diseñada con los fundamentos de la Teoría de Situaciones Didácticas y la Ingeniería didáctica, esta última como metodología. Tiene la finalidad de promover la identificación de las notaciones $\sqrt{a}$ y a½ como equivalentes, centrando la atención en dificultades, obstáculos y errores que presentan los estudiantes al abordar este contenido relacionados con el concepto de exponente reportados en investigaciones previas. Partiendo de ello, se diseña el medio en el que los alumnos, mediante la utilización tanto de lápiz y papel como de una herramienta tecnológica desarrollada con el software Geogebra, transitan en la construcción de aproximaciones al cálculo de estas notaciones matemáticas y discuten su correspondiente equivalencia, permitiendo con ello que el maestro tome elementos que lo conduzcan a su

Fecha de recepción: 18 de agosto de 2021. **Fecha de aceptación**: 27 de agosto de 2022.
1 Universidad Autónoma de Zacatecas, sandragq_91@hotmail.com, orcid.org/0000-0001-9285-6831.
2 Universidad Autónoma de Zacatecas, borjonrojo@hotmail.com, orcid.org/0000-0003-2155-6342.
3 Universidad Autónoma de Zacatecas, ncalvillo@uaz.edu.mx, orcid.org/0000-0002-2956-3945.
4 Universidad Autónoma de Zacatecas, ncalvillo@uaz.edu.mx, orcid.org/ 0000-0003-4038-7038.
Fuentes de financiamiento: Beca Conacyt de Maestría en Matemática Educativa.

institucionalización, dando sentido a las propiedades del concepto que se abordan en este nivel.

Palabras clave: *Exponente ½, raíz cuadrada, aproximación, situación didáctica.*

Abstract: This work reports the results of the implementation of a didactic situation that promotes the teaching-learning of square root calculation at the high school through a geometric approach, which is designed with the foundations of the Didactic Situations Theory and Didactic Engineering, as a methodology. Concepts that are addressed at this level. Its purpose is to promote the identification of the notations $\sqrt{a}$ and $a½$ as equivalents, with attention on errors related to the concept of exponent reported in previous research. Based on this, the environment is designed in which the students, through the use of both pencil and paper and a technological tool developed with the Geogebra software, transit in the construction of approximations to the calculation of these mathematical notations and discuss their corresponding equivalence, thus allowing the teacher to take elements that lead him to its institutionalization, giving meaning to the properties of the concept that are addressed at this level.

Keywords: *Exponent ½, square root, approximation, didactic situation.*

INTRODUCCIÓN

Diversas investigaciones (figura 1) dan cuenta de la problemática relacionada con el aprendizaje de los exponentes (Lezama, 1999; Martínez, 2007; González, 2010; Barrios, 2015; Dennis y Confrey, 2000; Cantoral y Farfán, 1998; Boyer, 1968; Cajori, 1913; Socas, 1997; Abrate, *et al.*, 2006; Cadenas, 2007; Sosa, *et al.*, 2013; Rico, *et al.*, 2015). Es importante mencionar que la han vivido los docentes en el aula cuando abordan este contenido. En este trabajo se clasifican de acuerdo con su tipo:

- Las que muestran los errores cometidos por los estudiantes en el contenido de exponentes.
- Las que realizan un análisis histórico-epistemológico del contenido de exponentes.
- Las que realizan propuestas didácticas para atender la problemática.

Debido a que esta investigación se centra en los errores cometidos por los alumnos, profundizamos en las investigaciones que atienden esta problemática. Así, se entiende por error "intentos razonables, pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación" (Matz, 1980, citado en Ruano, *et al.*, 2008, p. 312).

En nuestra experiencia, hemos observado e identificado que los errores que cometen los estudiantes de nivel bachillerato respecto al contenido de exponentes es debido justamente a que, para ellos no tiene significado el nuevo conocimiento, esto es, no le encuentran el sentido a que primero se les muestre la propiedad $a^n = a \times a \times a \ldots \times a$ y posteriormente, el profesor les indique que $a^0 = 1$ o bien que $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, por mencionar algunas.

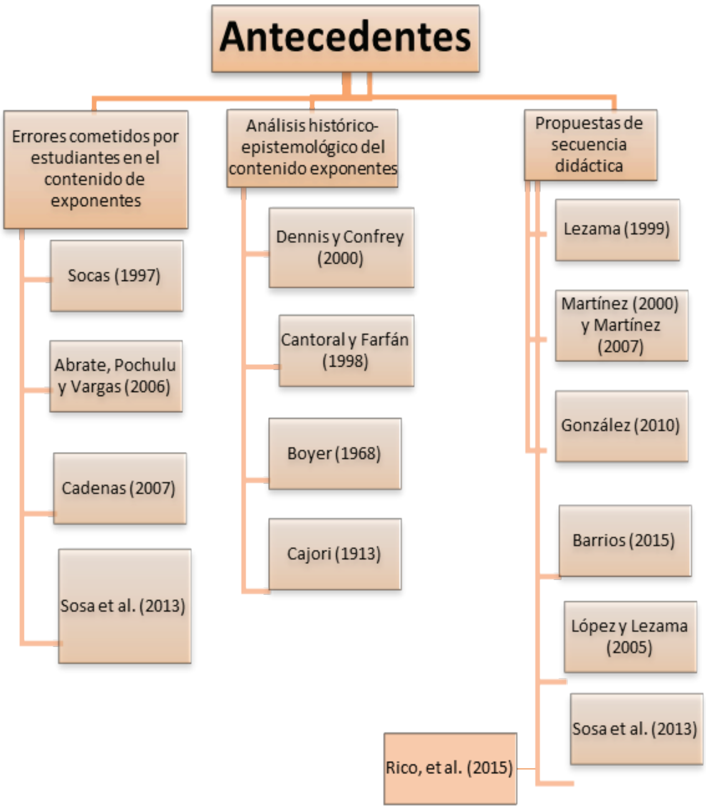


Figura 1. Organización de los antecedentes de acuerdo con el tipo.

Por ello, en el intento de querer entender las nuevas leyes de los exponentes, en ocasiones tienden a multiplicar la base por el exponente, ya que relacionan dicho contenido con el producto, asociándolo con la primera propiedad ($a^n = a \times a \times a \ldots \times a$) que se mostró en niveles educativos previos.

También se han encontrado algunos trabajos en los que se abordan aspectos relacionados con nuestro objeto matemático como son: dificultades, obstáculos y errores que presentan los estudiantes al abordar este contenido. Específicamente se identifica que el contenido de los exponentes, en particular el exponente ½ es complicado para los estudiantes, ya que los errores reportados muestran que no se ha comprendido en su totalidad.

De esta manera se identifica que los estudiantes de los niveles de secundaria, bachillerato y superior no manejan adecuadamente los exponentes racionales, en particular cometen los siguientes errores:

a) $2^{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{2}\right)$ (Martínez 2007).
b) Estiman que la raíz con radicando negativo e índice impar tiene un doble resultado $\left(\sqrt[3]{-27} = \pm 3\right)$, o que no posee solución en el campo de los reales (Abrate *et al.*, 2006).
c) Identifican la semántica de potencias con base entera y exponente fraccionario negativo, como tomar el inverso multiplicativo del exponente $9^{-\frac{1}{2}} = 9^2 = 81$. (Abrate *et al.*, 2006)

Así, nuestro objetivo es promover la enseñanza-aprendizaje del exponente racional ½ en alumnos de segundo semestre de bachillerato, a través del diseño y aplicación de una situación didáctica con uso del software Geogebra, con los objetivos específicos:

- Que los alumnos aprendan a obtener una aproximación de la raíz cuadrada utilizando la geometría.
- Que los alumnos identifiquen que $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ a través del uso de la calculadora.

Referente Teórico Metodológico

La definición de situación dada por Brousseau (1999, citado en Panizza, 2003) es la siguiente:

> La situación es un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina a un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas "situaciones" requieren de la adquisición "anterior" de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso "genético". (p. 3)

Por otra parte, dentro de la situación, se puede encontrar particularmente la situación didáctica que fue definida por Brousseau (1982, citado en Santaló *et al.*, 1994) de la siguiente manera:

> Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución. (p. 4)

La definición anterior puede ser mejor descrita mediante el conocido triángulo didáctico o sistema didáctico que se muestra en la figura 2.

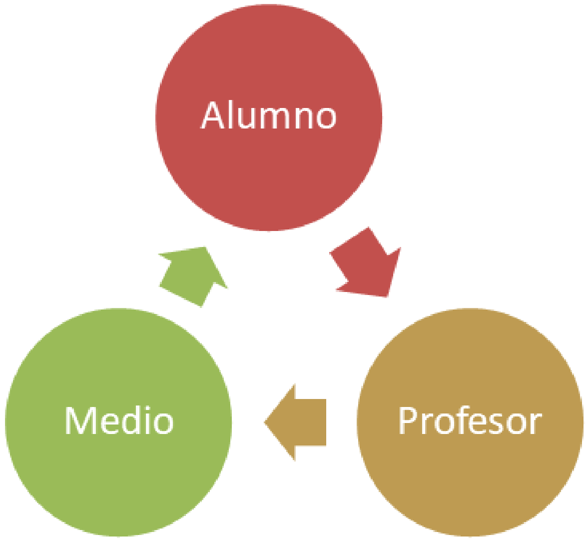


Figura 2. Triángulo didáctico de la teoría de situaciones didácticas.

En la figura 2 se muestra la relación que hay entre el profesor, el alumno y el medio, dichas componentes deben de aparecer en una situación didáctica y no debe faltar ninguna. En la situación didáctica, el medio puede ser varias cosas como, por ejemplo: material didáctico, recursos tecnológicos, juegos como el dominó, la lotería, entre otras. Es importante resaltar que la situación didáctica siempre debe de tener la intencionalidad de que el alumno aprenda algo.

Brousseau (s.f., citado en Santaló, *et al.*, 1994) hace una distinción de los tipos de situaciones que se pueden encontrar en una situación didáctica, dicha distinción puede verse como etapas:

1. **Situaciones de acción**, en las que se genera una interacción entre los alumnos y el medio físico. Los alumnos deben tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema planteado.
2. **Situaciones de formulación**, cuyo objetivo es la comunicación de informaciones, entre alumnos. Para esto deben modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar.
3. **Situaciones de validación**, en las que se trata de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. En este caso, los alumnos deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones. No basta la comprobación

> empírica de que lo que dicen es cierto; hay que explicar que, necesariamente, debe ser así.
> 4. **Situaciones de institucionalización**, destinadas a establecer convenciones sociales. En estas situaciones se intenta que el conjunto de alumnos de una clase asuma la significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones de acción, de formulación y de validación. (p. 5)

Por otro lado, la noción de ingeniería didáctica se originó en la didáctica de las matemáticas a comienzos de los años ochenta, surgió como una metodología para realizar Situaciones Didácticas y se define como:

> [...] una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo. (Artigue *et al.*, 1995, pp. 33-34)

Artigue *et al.* (1995) mencionan que las cuatro fases de la ingeniería didáctica como metodología son: análisis preliminar, concepción y análisis *a priori*, experimentación y análisis *a posteriori* y validación.

DESARROLLO

En este apartado se describe el desarrollo de las cuatro etapas de acuerdo con la metodología de la ingeniería didáctica para el caso específica de los exponentes fraccionarios.

Fase 1: Análisis preliminar

Se consideran al menos tres dimensiones, las cuales se podrían desarrollar para tener completa la primera fase:

1. La epistemológica asociada a las características del saber en juego.

2. La cognitiva asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza.
3. La didáctica asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza. (Artigue *et al.*, 1995, p. 40)

De la componenente epistemológica se tiene que, de acuerdo con lo reportado por Dennis y Confrey (2000), la aparición de los exponentes racionales se atribuye a John Wallis (1606-1703), pese a que no fue la primera persona que los sugirió. En el siglo XV ya habían sido propuestos por Oresme y en el siglo XVI por Girard y Tevin. Se atribuye a Wallis, debido al peso que tuvo su trabajo del *Arithmetica Infinitorum* (Wallis, 1972) pues a pesar de que en él no se exhiben demostraciones formales, las defínciones son duraderas dentro de las matemáticas, debido a que demuestra su viabilidad a través de múltiples representaciones (tabulares, geométricas y algebraicas).

Además, el *Arithmetica Infinitorum* sirvió de base para otros trabajos, por ejemplo, para que Isaac Newton (1642-1722), desarrollara su famoso binomio.

De igual forma Dennis y Confrey (2000), reportan en su investigación, que desean entender el desarrollo de exponentes racionales en un nivel más profundo y no verlos simplemente como una extensión de patrones numéricos y sus propiedades, ya que estos surgieron por la necesidad de calcular áreas, límite de razones, razones con números negativos y funciones continuas.

También, Dennis y Confrey (2000) mencionan que la historia permite ver diferencias entre índice, exponente y potencia, sin embargo, no comentan cuáles son dichas diferencias, pues, en ocasiones cuando escriben índice, entre paréntesis escriben exponente.

Respecto a los exponentes naturales, Dennis y Confrey (2000) identifican que la *Geometría* de René Descartes fue el primer tratado publicado en el que se escribe un exponente natural como un superíndice, es decir, se utiliza un índice para representar la multiplicación reiterada, escribió x^3 en lugar de xxx.

En la dimensión cognitiva, según Farfán (1997), se distinguen dos aspectos importantes que se deben de realizar:

- Poner en evidencia la diversidad de ideas que se tienen sobre un mismo objeto matemático, las diferentes representaciones que se le asocian al objeto y el tratamiento que se le da.
- Hacer una distinción entre los conocimientos que el profesor desearía que sus alumnos tengan y los que realmente han adquirido.

Esta dimensión se refiere principalmente a los estudiantes, es decir, se observa qué conocimientos tienen los alumnos respecto a un determinado contenido.

En esta dimensión se diseñó y aplicó un cuestionario con la finalidad de identificar los conocimientos previos relacionados con los exponentes fraccionarios, en específico el de ½, de los estudiantes de primer semestre de bachillerato. Este cuestionario se aplicó a 20 estudiantes del Colegio Santa Elena de la Universidad de la Veracruz y a 30 estudiantes de la Preparatoria plantel V de Universidad Autónoma de Zacatecas; aunque se esperaba que los estudiantes cometieran el error mencionado por Lezama (1999) y Martínez (2007), éste es multiplicar la base por el exponente, en la aplicación del instrumento se obtuvo que ningún estudiante logró contestar lo relacionado con el exponente fraccionario.

La dimensión didáctica, asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza hace referencia al papel del maestro, quien a través de los procesos de enseñanza, orienta, dirige, facilita y guía la interacción de los alumnos con el saber colectivo, para que construya su propio conocimiento.

Para desarrollar esta dimensión se diseñó y aplicó a profesores de secundaria y bachillerato un cuestionario y, posteriormente, un análisis de los programas de estudio del nivel bachillerato (contenido de exponentes).

El cuestionario se aplicó a nueve profesores, tres de secundaria y seis de bachillerato, con el objetivo de obtener información acerca de la forma en que los maestros abordan el contenido. Se aplicó a maestros de secundaria y bachillerato debido a que se considera que los alumnos empiezan a ver el contenido desde este nivel. Obteniéndose los siguientes resultados:

Los profesores de ambos niveles educativos hacen hincapié en que los estudiantes presentan mayores dificultades con respecto al contenido de exponentes, cuando estos son negativos y fraccionarios. Con relación a los exponentes ${}^{1}/_{n}$, ${}^{m}/_{n}$ y ${}^{-m}/_{n}$ se identifica que los profesores los enseñan mediante la propiedad $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, la digan o no explícitamente, de todos modos, la utilizan.

Algo relevante de todo esto, es que los docentes utilizan dicha propiedad sin justificación debido a que la demostración requiere de conocimientos avanzados del nivel. Es por lo que, en esta investigación se considera de suma importancia abordar este tipo de exponentes, para poder diseñar una situación didáctica que sirva como alternativa para la enseñanza de tales exponentes en el nivel bachillerato, para que los profesores cuenten con una propuesta alternativa de enseñarlos y para que los estudiantes comprendan por qué es verdad la propiedad, ya que, si no comprenden el porqué de las cosas, difícilmente podrán aprenderlo.

La información recopilada de las respuestas que proporcionaron los profesores en los cuestionarios es de suma importancia, pues puede corroborarse que tal y como lo indican los antecedentes, los alumnos tienen dificultades para entender los exponentes, lo cual da sustento a la presente investigación. Además, muestra el camino que hay que seguir para elaborar el diseño, pues este irá principalmente enfocado a los exponentes racionales, en particular ½.

De acuerdo con los análisis preliminares se retoma el hecho mencionado por Dennis y Confrey (2000), en el sentido de no ver a los exponentes racionales solamente como una extensión de patrones numéricos, sino introducirlos con un método alternativo que permita ampliar la visión de los estudiantes, para eso se incorporan elementos de la geometría euclideana utilizando únicamente regla y compás y el cálculo de la media geométrica.

JUSTIFICACIÓN MATEMÁTICA DEL DISEÑO

Antes de describir la concepción y análisis *a priori* explicaremos los argumentos matemáticos que se involucran en el diseño.

Debemos tener en cuenta que si se inscribe un triángulo en una semicircunferencia y uno de sus lados coincide con el diámetro, de acuerdo como se muestra en la figura 3, dicho triángulo es rectángulo. Ahora se traza la altura correspondiente a la hipotenusa del triángulo, esta divide a la hipotenusa en dos partes, si suponemos que una de ellas es la unidad y la otra cantidad a, se obtiene que la altura mide $\sqrt{a}$.

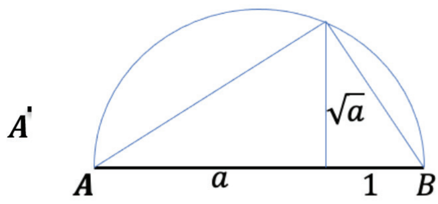
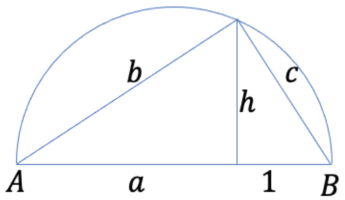


Figura 3. Altura del triángulo rectángulo inscrito en una semicircunferencia

Para demostrar esta última afirmación sean b y c los catetos del triángulo rectángulo (figura 4) y considerando dicho triángulo dividido en otros dos triángulos rectángulos de lados $ch1$ y ahb. Ahora, utilizando el teorema de Pitágoras en los tres triángulos se tienen las siguientes igualdades:



$$b^2 + c^2 = (a+1)^2$$
$$h^2 + 1^2 = c^2$$
$$a^2 + h^2 = b^2$$

Figura 4. Tres triángulos rectángulos para determinar la altura de un triángulo h.

sustituyendo los valores de c^2 y b^2 en la primera ecuación:

$$a^2 + h^2 + h^2 + 1^2 = (a+1)^2$$

de donde se obtiene que $2h^2 = 2a$ por lo que $h = \sqrt{a}$ tal como queríamos demostrar. En conclusión, teniendo en cuenta la propiedad que afirma que, si se inscribe un triángulo en una semicircunferencia y uno de sus lados coincide con el diámetro, dicho triángulo es rectángulo y, por el teorema de Pitágoras es posible determinar con regla y compás la raíz cuadrada de un número, a través de la determinación de la media proporcional.

Fase 2: Concepción y análisis *a priori*

Artigue *et al.* (1995) destacan que el análisis *a priori* comprende una parte descriptiva y otra predictiva en las cuales se debe realizar lo siguiente: Describir las selecciones del nivel local (relacionándolas con las selecciones globales) y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden.

El material que se facilitó (figura 5) a cada equipo fue:

- 1 juego de hojas de la actividad,
- 3 hojas de papel milimétrico,
- 3 plumas (1 negra, 1 roja y 1 azul)
- 1 compás, 1 regla graduada

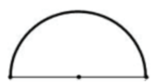
Figura 5. Materiales entregados a cada equipo

En el instrumento se describen las instrucciones respecto del uso del material, indica tres construcciones geométricas con las que se encuentra la raíz cuadrada de un número dado a través de la determinación de la media proporcional (ver ejemplo en figura 6), diez preguntas relacionadas con las construcciones geométricas y tres preguntas abiertas para que el alumno refleje el procedimiento para el cálculo de raíces cuadradas, usando la geometría. También incluye preguntas relacionadas con las dos notaciones equivalentes entre sí ($\sqrt{a}$ y $a^{1/2}$) permitiendo que usen la calculadora. Específicamente:

- En el punto I, se consideran tres construcciones geométricas guiadas, en las que el objetivo es que los alumnos determinen las raíces cuadradas $\sqrt{\mathbf{2}}$, $\sqrt{\mathbf{3}}$ y $\sqrt{\mathbf{4}}$ apoyados de la geometría.
- En el punto II, sin guía del docente se solicita a los alumnos que determinen las raíces cuadradas de $\sqrt{7}$, $\sqrt{13}$ y $\sqrt{17}$.
- En el punto III, se solicita a los alumnos que calculen valores, como por ejemplo $\sqrt{\mathbf{7}}$ y $\mathbf{7}^{\frac{1}{2}}$ utilizando la calculadora.

Construcción 2.

h) Traza un segmento en una hoja milimétrica que mida 4 cm. En el extremo izquierdo del segmento coloca la letra A y en el extremo derecho la letra B, éste segmento será llamado AB.
i) Coloca un punto a la mitad del segmento AB y nómbralo C.
j) Coloca un punto sobre el mismo segmento a 3 cm de distancia desde el punto A y llámalo D.
k) Abre el compás a la medida del segmento AC y traza una semicircunferencia.



l) Traza una recta perpendicular que pase por el punto D y prolóngala hasta que toque la semicircunferencia.
m) Coloca un punto en la semicircunferencia de tal manera que sea la intersección de la recta perpendicular y la semicircunferencia y a llama E a este punto.
n) Mide el segmento DE y escribe la medida en la construcción que acabas de realizar.

Construcción 3.

Figura 6. Ejemplo de construcción geométrica.

Fase 3: Experimentación

De acuerdo a De Faria (2006) es la fase de la realización de la ingeniería con una cierta población de estudiantes. Esa etapa se inicia en el momento en que se da el contacto investigador/profesor/observador con los estudiantes objeto de la investigación. Específicamente, la experimentación supone

- La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación;
- El establecimiento del contrato didáctico;
- La aplicación de los instrumentos de investigación;
- El registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

La situación didáctica se aplicó a 24 estudiantes (12 binas) de segundo semestre de la Preparatoria V de la UAZ, ubicada en Jerez de García Salinas, municipio del estado de Zacatecas.

Situación de acción, formulación y validación. Aproximación de $\sqrt{2}$, en este cálculo nos apoyamos del GeoGebra proyectado en el pizarrón para orientar al alumno y conforme se realizaban los trazos en el pizarrón, cada equipo lo realizaba en la hoja de papel milimétrico.

Fase 4: Análisis *a posteriori* y validación

Según De Faria (2006)

> Esta fase se basa en el conjunto de datos recolectados a lo largo de la experimentación, es decir, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en el aula o fuera de ella. Estos datos se completan con otros obtenidos mediante la utilización de metodologías externas: cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, realizadas durante cada sesión de la enseñanza, etc. La validación o refutación de las hipótesis formuladas en la investigación se fundamenta en la confrontación de los análisis, el *a priori* y *a posteriori.* (p. 5)

RESULTADOS

En general se tuvo buena respuesta de los alumnos ya que 9 de 12 equipos contestaron a la aproximación de $\sqrt{2}$, con resultados como 1.4 y 3 de 12 equipos contestaron con la aproximación de 1.5 lo que en general para nosotros fueron resultados adecuados ya que se trata de una aproximación de un número irracional, observe la figura 7.

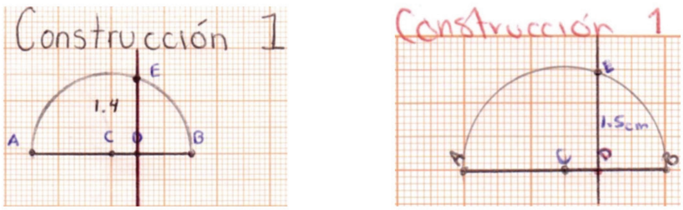


Figura 7. Situaciones de acción y formulación del cálculo de $\sqrt{2}$.

Análogamente los alumnos reaccionaron de manera parecida cuando se solicitó que calcularan $\sqrt{3}$, en este caso 7 de 12 equipos encontraron que era igual a 1.7 y 2 de 12 equipos obtuvieron como respuesta 1.8, el resto de los equipos proporcionaron las respuestas de 1.65, 1.57 y 1.6.

Derivado de las construcciones que los alumnos realizaron para encontrar el valor de $\sqrt{4}$ se identifican las situaciones de acción y formulación cuando 5 de 12 equipos encontratron que era el valor de 2, 4 de 12 equipos encontaron el valor de 1.9 y el resto de los equipos proporcionaron los valores de 2.2 y 2.5.

Para que los alumnos relacionaran la raíz cuadrada de un número con su cuadrado se plantearon varias preguntas a las que respondieron positivamente como se puede ver en la figura 8.

Preguntas:

1. ¿Cuánto mide el segmento AD en la construcción 1? 2cm
2. ¿Cuánto mide el segmento DE en la construcción 1? 1.4cm
3. Eleva al cuadrado la longitud del segmento DE, realiza la operación en el espacio que se encuentra a continuación:

   1.4 x 1.4 = 1.96

   a) ¿A qué valor se aproxima? 2

   b) ¿Ese valor tiene alguna relación con la longitud del segmento AD?
   Si

   c) ¿Cuál? ~~AE~~ ~~AE~~ AD Que casi mide lo mismo

Figura 8. Identificación de los alumnos de la raíz cuadrada con el cuadrado de un número.

En la parte II del instrumento se solicitó a los alumnos que determinaran los valores de $\sqrt{7}$, $\sqrt{13}$ y $\sqrt{17}$ (figura 9), utilizando el material que se proporcionó y teniendo en cuenta la identificación de la media proporcional. En general, respondieron adecuadamente excepto por variaciones de milímetros obtenidas de la abertura del compás y el grosor de la punta.

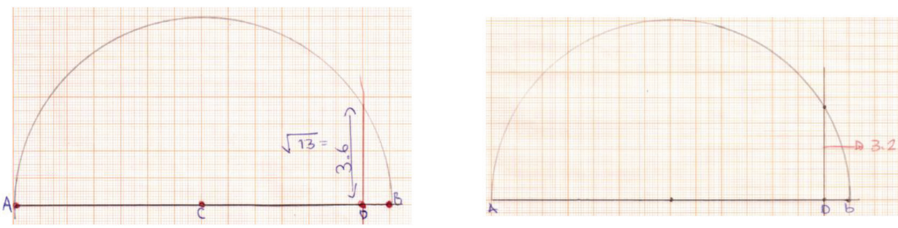


Figura 9. Representación del cálculo de $\sqrt{13}$.

Situación de validación. A la pregunta ¿qué relación tiene la longitud del segmento DE respecto al segmento AB? la respuesta de los equipos para validar los resultados fue positiva aunque algunos escribieron que DE era la mitad del segmento AB, otros describieron que DE era la raíz cuadrada de AB (figura 10), concluyendo que esta última era la respuesta correcta, lográndose de esta manera la validación.

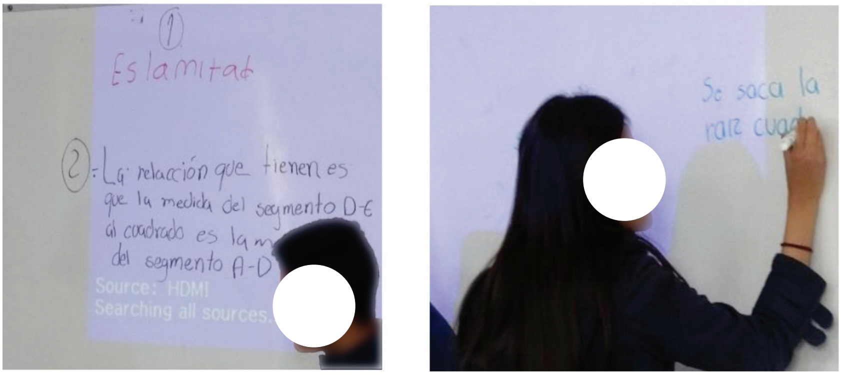


Figura 10. Situación de validación ¿qué relación tiene la longitud del segmento DE respecto al segmento AB?

Para que los alumnos identificaran que las notaciones son equivalentes, en el instrumento se incluyeron actividades de la raíz cuadrada como radical ($\sqrt{a}$) y como exponente fraccionario ($a^{½}$), con la indicación de que con el uso de la calculadora realizaran operaciones tales como $\sqrt{5}$ y $5^{½}$ así como varios otros casos particulares, posteriormente que describieran lo que observaban. La mayoría de los equipos respondió adecuadamente (figura 11).

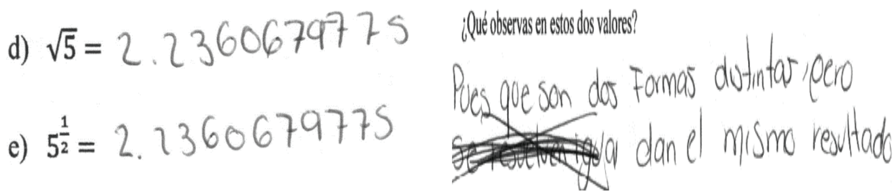


Figura 11. Identificación de las notaciones $\sqrt{a}$ y $a½$ como equivalentes por parte de los alumnos

La situación de institucionalización (figura 12) se realizó de acuerdo con lo planeado la profesora investigadora preguntó a los alumnos qué resultados obtuvieron para $\sqrt{5}$, $5^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{7}$ y $7^{\frac{1}{2}}$ los alumnos dedujeron que daba el mismo resultado, debido a que es lo mismo solo que se representa de diferente manera, esto dio pie a que la profesora investigadora enunciará la propiedad $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ y finalmente apoyándose del GeoGebra, mostró la construcción para $\sqrt{5}$ con el procedimiento previamente preparado con los deslisadores correspondientes para el segmento, el semícirculo y la recta perpendicular.

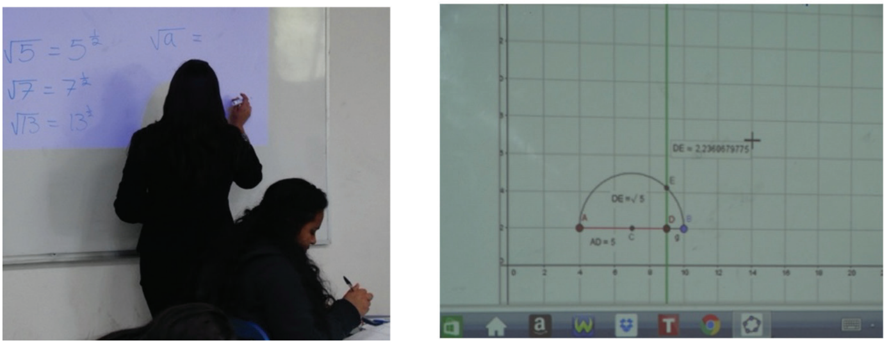


Figura 12. Institucionalización: Propiedad $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ y construcción en Geogebra.

CONCLUSIONES

En la dimensión didáctica del instrumento que se diseñó y aplicó a los docentes de secundaria y bachillerato, resultó que generalmente lo que hacen al abordar el contenido de exponentes es presentar las propiedades y enseguida, un ejemplo numérico de cada una de estas.

De igual forma en la dimensión cognitiva, se diseñó y aplicó un cuestionario con la finalidad de identificar los conocimientos previos de los alumnos respecto del contenido de exponentes, en el que se identificó que cometieron los errores reportados por Abrate, *et al.* (2006) y Martínez (2007), y en algunas ocasiones se identificaron otros errores, por ejemplo: $2^{1/2} = \frac{5}{2}$ donde suman la base y el exponente como si se tratara de una fracción mixta.

Al realizar la fase de experimentación y realizar el análisis *a posteriori* y la validación, se identificaron diferentes problemáticas que permitieron el diseño de la secuencia didáctica sobre el contenido del exponente racional $\frac{1}{2}$ que se desarrolló en la fase de concepción y análisis *a priori*.

Refiriéndonos a nuestra actividad, consideramos que se obtuvieron los resultados esperados, ya que se pretendía que los alumnos aprendieran a calcular la raíz cuadrada de un número utilizando la geometría y la tecnología y, además que lograran identificar que $\sqrt{5} = 5^{1/2}$, $\sqrt{7} = 7^{1/2}$ y en general que el resultado de calcular la raíz cuadrada de un número positivo cualquiera es lo mismo que elevar el número al exponente un medio. Lo anterior en general lo lograron la mayoría de los equipos ya que pudieron obtener la raíz cuadrada aproximada de los números: 7, 13 y 17 utilizando la geometría de un semicírculo. Cabe mencionar que, durante la situación de institucionalización, una alumna comentó espontáneamente que "$\sqrt{5}$ era lo mismo que $5^{1/2}$ solo que se escriben de manera diferente".

En general, se concluye que los alumnos pasaron por todas las etapas o situaciones que según Brousseau (1986) son necesarias para adquirir un conocimiento, estas son: acción, formulación, validación e institucionalización donde es importante señalar, que no necesariamente fue en ese orden.

Es posible afirmar que los equipos pasaron por tales situaciones, pues con la videograbación, se puede identificar que aparte de la situación de acción, en la formulación se logró que la mayoría de los alumnos transitaran del lenguage coloquial al matemático, también se presentó la validación al interior del equipo, cuando, por ejemplo, los alumnos discutían entre ellos las diferentes soluciones que tenían para un determinado problema y terminaban eligiendo únicamente una.

Se dio la validación de manera grupal, ya que algunos equipos de los que pasaron al pizarrón lograron convencer a sus compañeros para que cambiaran su respuesta, se hicieron preguntas para que los alumnos reflexionaran sobre la respuesta correcta. La institucionalización se realizó en tiempo y forma, de acuerdo con lo planeado.

Queda abierta la posibilidad de trabajar alguna propuesta de diseño que involucre los exponentes fraccionarios como un tercio, dos tercios, tres cuartos, menos un medio, etc. donde se pueden utilizar las propiedades de los exponentes.

REFERENCIAS

Abrate, R. S., Pochulu, M. D. y Vargas, J. M. (2006). *Errores y dificultades en matemática, análisis de causas y sugerencias de trabajo.* Universidad Nacional de Villa María.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Ed.). (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Barrios, L. (2015). Los números impares y las potencias de los números naturales. *Números, 88*(1). 55-74.

Boyer, C. B. (1968). *A History of Mathematics*. Wiley International Edition.

Brousseau, G. (1986). Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-115.

Cadenas, R. (2007). Carencias, dificultades y errores en los conocimientos matemáticos en alumnos del primer semestre de la escuela de educación de la Universidad de los Andes. *ORBIS*, (6). 68-84.

Cajori, F. (1913). History of exponential and logarithmic concepts. *The American Mathematical Monthly, 20*(3), 75-84. https://doi.org/10.2307/2973441

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon, Revista de la S.A.E.M. "Thales", 42*(1), 1-22.

De Faria, E. (2006). Ingeniería Didáctica. *Cuadernos de Investigación y formación en educación matemática, 1*(2), 1-9.

Dennis, D. y Confrey, J. (2000). La creación de exponentes continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3*(1), 5-31.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: un estudio de la variación y el cambio.* Grupo Editorial Iberoamérica.

González, R. D. (2010). *Análisis de una situación didáctica de la función exponencial* $f(x) = 2^x$ *en alumnos de Bachillerato*. (Tesis de Licenciatura no publicada). Universidad Autónoma de Zacatecas.

Lezama, J. (1999). Un estudio de reproduciblidad: El caso de la función exponencial. (Tesis de Maestría no publicada). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Martínez, G. (2007). Sobre la naturaleza y significados de los exponentes. Un caso de los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. En C. Dolores, G. Martínez, R. M. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (Eds.). *Matemática Educativa, algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula* (pp. 123-167). Ediciones Díaz de Santos.

Panizza, M. (2003). Conceptos básicos de la Teoría de Situaciones Didácticas. En M. Panizza (comp.), *Enseñar matemáticas en el nivel inicial y el primer ciclo de la E. G. B.; análisis y propuestas* (pp. 59-71). Paidós.

Rico, L., Ruíz, J. F., Fernández, J. A., Castro, E., Martín, E. y Vílchez, M. (2015). Concepciones y significados en una tarea matemática escolar. *Suma.* 67-76.

Rico, L., Ruíz, J. F., Fernández, J. A., Castro, E., Martín, E. y Vílchez, M. (2015). Concepciones y significados en una tarea matemática escolar. *Suma.* 67-76.

Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra, *PNA*, *2*(2),311-322.

Santaló, L., Gálvez, G., Chrismay, R., Brousseau, G. y Sadovsky, P. (1994). *Didáctica de las matemáticas.* Paidós Educador.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, 125-154.

Sosa, L., Huitrado, J. L., Hernández, J. A., Borjón, E. y Ribeiro, C. M. (2013). Uma oportunidade para o profesor aprender analizando os erros dos alunos - um exemplo de álgebra. *Atas XIX Encontro Nacional de Professores de Matemática (ProfMat 2013).*

Autor de correspondencia

ELVIRA BORJÓN ROBLES

Dirección: Dirección: Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas, Campus II de la UAZ, C.P. 98060, Zacatecas, Zac., México.
borjonrojo@hotmail.com

Teléfono: 492 922 99 75