QUÉ PIENSAN LOS ESTUDIANTES DE PROFESORADO DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

Virginia Montoro

Centro Regional Bariloche - Universidad Nacional del Comahue – Rep. Argentina

vmontoro@crub.uncoma.edu.ar / vmontoro@gmail.com.ar

Pensamiento Matemático Avanzado / Educación Superior / Investigación Cualitativa

INTRODUCCIÓN

El término *demostración* posee en la cultura muchos significados y se lo utiliza en los ámbitos sociales y profesionales más diversos. Uno de estos significados puede ser "realizar la acción efectiva que evidencia aquello que se pretende ver"; por ejemplo: *el movimiento se demuestra andando.* También se asimila la demostración al hecho de que se "enseñe cómo hacer algo"; ej: *demostrar como funciona determinado programa de computadora*; también, aplicando una falsa inducción completa se dice "esto demuestra que..." y de un sólo ejemplo se saca una conclusión universal, ej: *en una publicidad, un par de medias blancas demuestra la superioridad de un jabón en polvo*. En el mundo castrense son frecuentes las *demostraciones de fuerza* y en el ámbito jurídico, es común apelar a la necesidad de *demostrar la veracidad del modelo propuesto para explicar la sucesión de los hechos.* (Alsina, 2003).

En la disciplina matemática actual la idea de demostración y el verbo demostrar tienen una dimensión precisa y notable. Se diferencia claramente de procedimientos de verificación que se utilizan en otras áreas del saber como las ciencias experimentales, en donde las demostraciones se basan en la evidencia empírica de los hechos; o la economía, que se sustenta en la evidencia estadística de los resultados, o la historia, "demostrada" a través de evidencia de los datos y de los documentos. Al decir de Arsac (1988) *la demostración es el procedimiento de validación que caracteriza la matemática respecto de las ciencias experimentales y así ocupa un lugar central desde el punto de vista epistemológico en esta disciplina.* En la literatura especializada -por ejemplo, Bourbaki (1970) - aparecen definiciones *esenciales* de lo que se entiende por demostración de un teorema matemático: una sucesión de deducciones lógicas rigurosas desde alguna proposición ya aceptada hasta la que se pretende probar.

Es claro que demostrar en matemática es una tarea cognitivamente compleja, no siempre tan diáfana como la redacción final de una demostración final parece indicar. La denominada "demostración final" de un teorema es la culminación de un proceso, la presentación limpia y ordenada de una larga investigación nunca exenta de intuición, pruebas, errores, refinamientos, etc. (Polya,1954, Lakatos, 1976, Schoendfeld,1992).

Como se ha dicho, la demostración es parte esencial de la Matemática, y por lo tanto, un componente ineludible en la Educación Matemática y fundamentalmente en la Formación de Profesores; Acordamos con Herbst, (2002) cuando asegura que: …*como las pruebas están íntimamente conectadas con la construcción de las ideas matemáticas, demostrar debería ser una actividad tan natural como definir, modelar, representar o resolver problemas.* Ahora bien, en el proceso de aprendizaje de la matemática la argumentación utilizada para *demostrar* una proposición matemática, puede aparecer bajo distintos aspectos, con mayor o menor grado de explicitación y con distintos niveles de rigor; como un medio de autovalidar los conocimientos o como un contenido a aprender.

Respecto al proceso de enseñanza-aprendizaje de la demostración, encontramos los trabajos precursores de Polya (1954), Fischbein (1982), Balacheff (1987), Arsac (1992) y Duval (1991) que estudian situaciones de validación y prácticas argumentativas de los alumnos, las concepciones de verdad y falsedad y la tipología de pruebas que ellos producen. No podemos dejar de considerar los aportes (entre otros) de Dreyfus (1999), Godino y Martínez Recio (1997 – 2001), Martínez Recio (2002), Ibáñez Jalón, (2002) Sáenz Castro(2002) que analizan los rasgos característicos del significado de la demostración en distintos contextos institucionales y las distintas dimensiones para este concepto como así también las dificultades con que se encuentran los estudiantes universitarios para producir demostraciones formales.

El presente trabajo está enmarcado en el proyecto de investigación: *La demostración en geometría en la formación de profesores*[1], que con el objetivo general de estudiar el proceso de aprendizaje de la demostración por parte de estudiantes de Profesorado de Matemática en el contexto de problemas de Geometría Euclídea, se propone, como objetivo particular, indagar acerca de las concepciones de estos estudiantes sobre la demostración matemática.

En el proyecto trabajamos bajo la hipótesis del papel fundamental que juega en la formación de los futuros docentes el aprendizaje de procedimientos del método matemático por lo que hemos considerado investigar el proceso de aprendizaje de los estudiantes de profesorado enfocando especialmente en la demostración.

En el marco del citado proyecto de Investigación, se les propuso a l3 estudiantes (E1, E2,…E13) del Profesorado de Matemática del Centro Regional Universitario Bariloche de la Universidad Nacional del Comahue; al comienzo de la asignatura Geometría Euclidea del Plano que resolvieran dos problemas de demostrar, luego se los entrevistó individualmente mediante preguntas abiertas a fin de profundizar la indagación sobre sus concepciones.

En un trabajo anterior (Montoro. 2005) reportamos la categorización de las pruebas producidas por los estudiantes en estos dos problemas de demostrar, para luego, a través de la aplicación de métodos multivariados buscar asociaciones entre los tipos de pruebas producidos por los estudiantes y delinear una caracterización de grupos de estudiantes según sus producciones. Según estos resultados podemos decir que, en el momento de comenzar el estudio de la Geometría; los estudiantes E2, E6 y E10 producen *pruebas intelectuales formales.* E1; E4 y E7 proponen pruebas intelectuales del tipo coloquial (*Experiencia Mental*); E3 y E5 producen pruebas *empíricas genéricas y cruciales;* E11 en un campo intermedio entre *ingenuas y cruciales* y E9; E8; E12 y E13 producen *pruebas ingenuas.*

Sintéticamente se denomina como *pruebas empíricas* aquellas que se sustentan en conocimientos prácticos que se captan a través de los sentidos y/o la acción; procedimientos de validación en los cuales se utilizan los ejemplos como elementos para convencer. Diferenciando según sea el papel del ejemplo en: *prueba ingenua* que consiste en extraer de la observación de un pequeño número de casos (en ocasiones sólo un caso) la certeza de verdad de una aserción; *prueba crucial* es aquella en la cual se usa un ejemplo cuidadosamente seleccionado por quien argumenta, tomado como representante de clase y finalmente *prueba genérica* es un procedimiento de validación realizado mediante operaciones o transformaciones sobre un ejemplo. Las *pruebas intelectuales* son aquellas que se componen de argumentaciones que implican propiedades y relaciones entre propiedades y su comunicación está

[1] Proyecto de Investigación 04B105, aprobado y subsidiado por la secretaría de Investigación de la Universidad Nacional del Comahue: Dirigido por C. Ferraris y Co-dirigido por V. Montoro; otros integrantes del mismo son: R. Santinelli, L. Siñeriz , M. Ferrero y M. Juan.

caracterizada por el lenguaje matemático. Distinguiremos la experiencia mental y la deducción formal. En la *experiencia mental* se consideran ejemplos que no son tomados como elementos de convicción sino para ayudar a organizar la justificación o como soporte de la argumentación. Si bien los argumentos pueden ser informales, se sabe que con verificar en uno o varios casos no alcanza; hay conciencia de lo que falta, lo que lleva a producir otra clase de argumentos para convencer y por último en la *deducción formal* la justificación se basa en operaciones mentales sin recurrir necesariamente a la ayuda de ejemplos específicos. Se hacen inferencias en base al conocimiento de propiedades y definiciones, se realizan operaciones sintácticas con los enunciados que permiten trascender al ejemplo. La esencia de la justificación es la transformación de las expresiones simbólicas que se conectan en la argumentación. (Siñeriz y Ferraris. 2005)

Anteriormente (Montoro. 2007) hemos analizado otras preguntas realizadas en la citada entrevista fundamentalmente las que indagaban sobre el propio aprendizaje de la demostración. Encontramos presentes en las respuestas de estos estudiantes principalmente las siguientes tres ideas: se aprende una *teoría* de demostrar; a *demostrar se aprende demostrando* y se aprende de *entender demostraciones bien presentadas;* relacionadas con estudiantes que producen pruebas *ingenu*as; de *ejemplo genérico-crucial* y *formales* respectivamente.

Destacamos que en general los estudiantes que brindan pruebas ingenuas consideran que se aprende a demostrar estudiando una teoría de la demostración y que estas serán correctas cuando se llega a *lo que hay que llegar* sin saber muy bien cómo fue este proceso. Se podría pensar en esto como una suerte de *idealización* que realizan en cuanto a las demostraciones; ya que estos mismos estudiantes cuando se enfrentan a la tarea de demostrar, se limitan a "mostrar" un caso donde "evidentemente" es cierta la proposición, sin sentir la necesidad de deducir; de producir un argumento lógico que valide la veracidad de la implicación. (Montoro. 2007)

Reportamos en la presente comunicación el análisis del 2 preguntas abiertas realizadas durante la citada entrevista con el fin de delinear aspectos de las concepciones de los estudiantes sobre la demostración en matemática y en otras disciplinas; como así también obtener información sobre posibles relaciones de estas concepciones con el tipo de pruebas que producen cada uno de ellos al comienzo del estudio de la Geometría. Con este análisis pretendemos aportar a la descripción de este complejo fenómeno que es el aprendizaje de la Demostración por parte de los estudiantes de profesorado.

METODOLOGÍA

Participantes

Participaron 13 estudiantes cursantes de la asignatura Geometría Euclídea del Plano del Profesorado de Matemática del Centro Regional Universitario Bariloche. La asignatura citada corresponde al segundo año de estudios. Las edades de estos estudiantes oscilan entre 19 y 33 años, y en su totalidad han cursado previamente las asignaturas Álgebra I y Geometría Analítica; en ambas asignaturas han tenido contacto con numerosas demostraciones y en la primera estudian elementos de lógica proposicional y métodos de demostración

La tabla que presentamos a continuación muestra para cada estudiante el tipo de pruebas que produjeron, en general, en los problemas de demostrar que se les propuso previamente a la entrevista aquí reportada (Montoro. 2005)

0rden	TIPO de PRUEBA
E1	Experiencia Mental
E2	Formales
E3	Empíricas Genérica-Crucial
E4	Experiencia Mental
E5	Empíricas Genérica-Crucial
E6	Formales
E7	Experiencia Mental
E8	Ingenuas
E9	Ingenuas
E10	Formales
E11	Ingenuas- Crucial
E12	Ingenuas
E13	Ingenuas

Instrumento de indagación

Se realizó una entrevista individual a cada uno de los participantes, con la presencia de una investigadora a cargo de la entrevista y otra observadora.

Las preguntas aquí analizadas fueron las siguientes

1) *¿Consideras que demostrar es lo mismo en cualquier rama de la matemática?*
2) *¿Consideras que es lo mismo demostrar en matemática que en otras disciplinas?*

Las respuestas fueron orales y en forma de dialogo con la entrevistadora, que solo intervenía si era necesario aclarar algún aspecto; las respuestas fueron grabadas y luego trascriptas en su totalidad

Metodología de análisis

El análisis de las producciones de los participantes se realizó según la siguiente secuencia; en una primera etapa y con el fin de sistematizar los datos primarios, se categorizaron las respuestas según los argumentos esgrimidos por los estudiantes para justificar su respuesta afirmativa o negativa a las preguntas

Luego con el propósito de evidenciar cuan similares o diferentes pueden ser las respuestas de los distintos estudiantes, como así también asociaciones entre las respuestas dadas a estas preguntas y posibles relaciones de estas con las pruebas que estos estudiantes producen aplicamos un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (AFCM)[2] (Benzécri, 1973), método de análisis multivariado de datos diseñado para identificar asociaciones entre modos de respuestas de los participantes y agrupar a éstos según sus modos de respuesta. Si bien el AFCM es un método especialmente útil para grandes matrices de datos; nada hay en su fundamentación que impida aplicarlo para pocos individuos; es utilizado aquí para evidenciar relaciones entre los modos de respuestas de los estudiantes, que de

[2] (2) El detalle de la aplicación de este método, o una mayor profundización de la técnica del mismo se puede encontrar en: Lebart, Morineau y Fénelon, (1979) o en Crivisqui, (1993).

otra manera hubiesen sido muy difíciles de sacar a la luz y que pueden ser constatadas fácilmente en los datos.

RESULTADOS Y DISCUSION

Categorización de los argumentos esgrimidos por los estudiantes para justificar su respuesta afirmativa o negativa a las preguntas

A continuación presentamos una descripción de las categorías resultantes:

En el anexo se puede leer las respuestas textuales de los estudiantes con su correspondiente categorización.

1.1 Los argumentos para justificar que ***SI significa lo mismo demostrar en cualquier rama de la matemática*** son de cuatro tipo

> **1.1.1: Secuencia: (**partís- desarrollas**-** llegas). Se considera que al demostrar en matemática siempre se parte de algo, se sigue una secuencia lógica y se llega a algo. Corresponde a 5 estudiantes
> Ejemplo: *En todas las ramas de la matemática, siempre tenés que ir justificando en una secuencia lógica, llevar los pasos usando las cosas que vos tenés para usar, axiomas, todo lo que tengas, y llevás la secuencia hasta que llegás a demostrar el teorema (PABLO)*
>
> **1.1.2. Decir porqué:** Se considera que demostrar en matemática es decir porqué, justificar, fundamentar. Corresponde a 2 estudiantes
> Ejemplo: *La demostración en sí es fundamentar algo, decir el por qué, eso es siempre igual pero la forma puede variar (AILIN)*
>
> **1.1.3. Centrado en los axiomas**: Se considera que lo central en una demostración matemática, es la existencia de axiomas. Corresponde a 2 estudiantes
> Ejemplo: *....en matemática es con axiomas (ALERO)*
>
> **1.1.4. Generalidad:** Se considera que lo central en una demostración matemática es que se demuestra para todos. Corresponde a 1 estudiante
> Ejemplo: . *…en cualquier rama es lo mismo.….en matemática te piden que generalices para todo.(ALERI).*
>
> **1.1.5. No contesta.** No expresan que sea lo mismo demostrar en cualquier rama de la matemática**.** Corresponde a 3 estudiantes

1. 2. Los argumentos para justificar que ***NO significa lo mismo demostrar en cualquier rama de la matemática*** son**,** en forma sintética, de tres tipo

> **1.2.1: Simbolismo, formalidad, estricto vs aproximado, con números, con dibujo**: Se considera que en algunas ramas de la matemática (principalmente en Álgebra) las demostraciones son formales, en otras (Cálculo) son aproximaciones, con números. Corresponde a 6 estudiantes
> Ejemplo: *No es lo mismo; lo algebraico se demuestra formalmente y lo analítico se demuestra fácilmente, aproximadamente. (JUAN PABLO)*
>
> **1.2.2. Generalidad vs ejemplos**. Se considera que la diferencia viene dada por si la demostración es general o para un ejemplo. Corresponde a 1 estudiante.

Ejemplo: ..... *en análisis con dar un ejemplo basta pero en álgebra es como que exige más si es en un caso particular o si es en todos. (WALTER)*

1.2.3. Por el contenido. Corresponde a 1 estudiante.
Ejemplo: *Son distintos los axiomas, o las partes de donde va saliendo, las leyes. ..partís de distintas cosas, el contenido es distinto. (SANDRA)*

1.2.4. No contesta. No expresan que no es lo mismo demostrar en cualquier rama de la matemática**.** Corresponde a 5 estudiantes

2. Los argumentos para justificar ***si es que significa lo mismo demostrar en otras disciplinas que en matemática*** son de cuatro tipo.

2.1: SI es lo mismo. Secuencia: partir – desarrollar- llegar. En otras disciplinas demostrar, al igual que en matemática es partir de algo, justificar y llegar a algo. Corresponde a 4 estudiantes.
Ejemplo: *En otras actividades, es lo mismo, todos parten de una hipótesis y después mediante toda una información que tienen la van desarrollando y se dan cuenta que llegan o no llegan a veces, llegan a un absurdo, entonces contradicen lo que supusieron o que lo aceptan.(ANALIA)*

2.2. SI es lo mismo. Decir porqué. En otras disciplinas demostrar es también mostrar, justificar, dar un porque. Corresponde a 1 estudiante.
Ejemplo: *En otras actividades, uno siempre demuestra cosas. Si le cuento algo a alguien, no me va a creer el 100% siempre, siempre tiene que haber un por qué. (AILIN)*

2.3: NO es lo mismo. Empírico; evidencial: En otras disciplinas demostrar es algo empírico, puede ser un experimento, se basa en datos. Corresponde a 4 estudiantes.
Ejemplo: .....*en biología, para demostrar algo lo demuestran con la naturaleza (ALERO)*

2.4. NO es lo mismo. Aproximado, para algunos; no formal. En otras disciplinas demostrar es algo aproximado, se muestra para algunos ejemplos. Corresponde a 4 estudiantes.
Ejemplo: *En matemáticas uno dice demostrar y es un procedimiento largo y por ahí en otras cosas dicen demostrar pero no te piden que generalices para todo (ALERI)*

En respuesta a la pregunta si es lo mismo demostrar en cualquier rama de la matemática; varios estudiantes dan argumentos tanto para decir SI como para decir No, por lo que hemos separado en dos grupos estos argumentos. Esta aparente contradicción no es tal si se piensa en que expresan que en algunos aspecto la respuesta es si y en otros es no. Hay tres estudiantes que sólo argumentan para la respuesta negativa; que podríamos considerar que piensan que en todo aspecto NO es lo mismo demostrar en cualquier rama de la matemática; mientras que 5 estudiantes sólo argumentan para la respuesta afirmativa, por lo que parecería que genuinamente piensa que Si es lo mismo demostrar en cualquier rama de la matemática.

Para la respuesta a la pregunta de *si es lo mismo demostrar en otras disciplinas* algunos responden si y argumentan y otros no y argumentan, pero no hay respuestas por ambas opciones.

Es notable que las ramas de las matemáticas que nombran los estudiantes son: Álgebra, Análisis (o Cálculo) y Geometría, que coinciden con las asignaturas que ellos han cursado. Por lo que sus respuestas estarán muy ligadas a su experiencia en esas asignaturas.

La mayoría de los estudiantes piensa que demostrar es una secuencia lógica: partir; justificar; llegar y esto es así en todas las ramas de la matemática; de los que piensan que hay diferencia entre las distintas ramas de la matemática, la mayoría considera que la diferencia viene dada, porque en algunas (Álgebra) es estricto, formal; en cambio en otras (Cálculo) puede ser con números, aproximado y en Geometría con dibujos.

Asociaciones entre los tipos de respuestas dadas por los estudiantes y entre éstos según sus modos de respuesta (AFCM).

Con el propósito de evidenciar asociaciones entre los tipos de argumentaciones dadas por los estudiantes, como así también entre los estudiantes descriptos por sus respuestas y además qué estudiantes responden qué, aplicamos un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (AFCM).

Para ello, se definieron 3 variables categóricas sobre el conjunto de estudiantes denominadas P1S; P1N y P2. Las modalidades de cada una de ellas se corresponden con los item de la categorización de los argumentos explicitada más arriba.

Tabla II: Variables definidas para el AFCM - Modalidades de las variables del AFCM

VAR.	Corresponde al:	MODALIDADES
P1S	Tipo de argumentos para justificar la respuesta ***SI significa lo mismo demostrar en cualquier rama de la matemática***	1.1.1. Secuencia 1.1.2. Decir porqué 1.1.3. Axiomas 1.1.4. Generalidad 1.1.5. No contesta
P1N	Tipo de argumentos para justificar la respuesta ***NO significa lo mismo demostrar en cualquier rama de la matemática***	1.2.1. Formalidad 1.2.2. Ejemplo 1.2.3. Contenido 1.2.4. NC
P2	Tipo de argumentos para justificar ***si es que significa lo mismo demostrar en otras disciplinas que en matemática***	2.1. Si - Secuencia 2.2. Si - Decir porqué 2.3. No - Empírico 2.5. No - Aproximado

Se realizó, un AFCM de la tabla de los 13 estudiantes descriptos por las 5 variables, proyectándose como ilustrativa la variable tipo de pruebas, que se corresponde con el tipo de pruebas que producen cada estudiante en las tareas de demostrar propuestas previamente a la entrevista.

Se presentan en la página siguiente el grafico del primer planos factorial considerado en el AFCM; en él figuran sólo las modalidades que están bien representadas y asociadas a las diferentes clases de individuos corroboradas por la clasificación[3]. En ellos pueden observarse agrupaciones de modalidades de respuesta y los estudiantes asociados a estas agrupaciones.

[3] Se realizó una clasificación *jerárquica ascendente* (Ward, 1963) previo análisis factorial de correspondencias; que agrupó a los individuos según sean similares sus respuestas.

Es preciso tener en cuenta para la interpretación de los planos factoriales, que dos modalidades de respuesta estén cercanas significa que son casi los mismos alumnos que tienen ese tipo de respuesta; que dos estudiantes se encuentren cercanos significa que sus modos de respuesta son muy similares y un estudiante será el baricentro de las modalidades que posee.

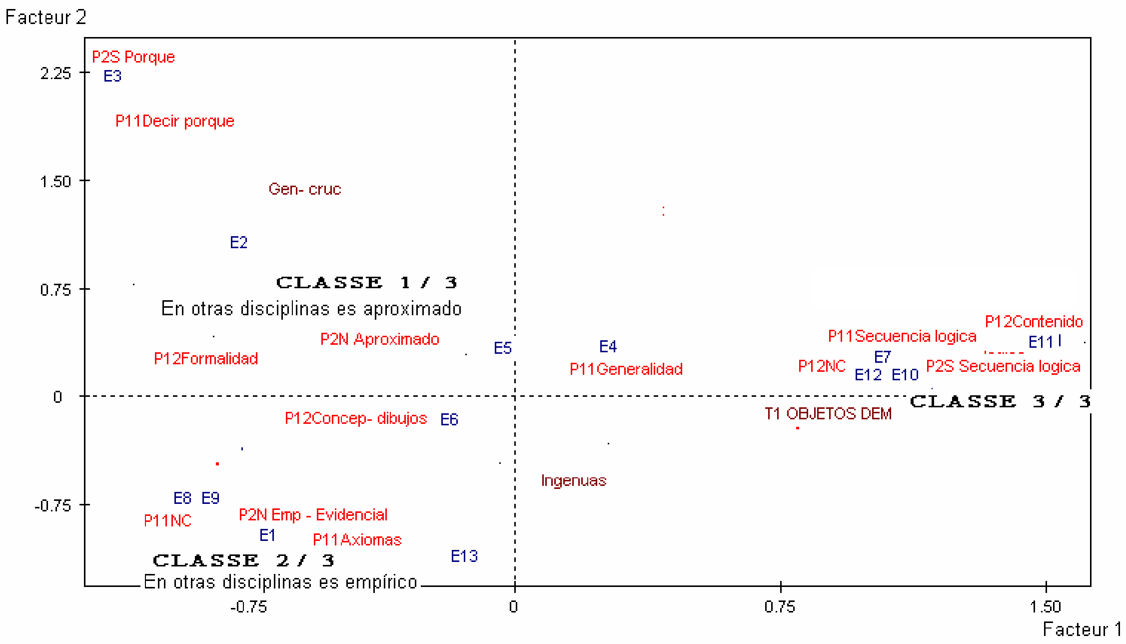

Grafico I: Primer Plano Factorial del AFCM. Grupos de asociaciones de respuesta.

El primer eje factorial discrimina entre las respuestas negativas y afirmativas a la primera pregunta, separando a los estudiantes que consideran que NO es lo mismo demostrar en todas las ramas de la matemática; principalmente porque consideran que es distinto el grado de formalidad en cada una de ellas (especialmente entre Algebra y Cálculo) de los estudiantes que consideran genuinamente (P12NC) que demostrar SI es lo mismo en cualquier rama de la matemática; principalmente asociado a que demostrar es un secuencia partir – desarrollar – llegar.

El segundo eje discrimina al interior de las respuestas que consideran que demostrar NO es lo mismo en todas las ramas de la matemática, separándolos en dos grupos uno de los que genuinamente consideran esto así (P11NC) de los que consideran que es así sólo en algunos aspectos, ya que en otros consideran que SI es lo mismo en todas las ramas de la matemática, principalmente en cuanto a que en todas ellas es *decir porqué.*

En el Primer Plano factorial encontramos principalmente los siguientes tres grupos de asociaciones de modalidades de respuesta, según los estudiantes que las proponen; corroborados por la clasificación.

- GRUPO 1: Compuesto por E2 ; E3; E4; E5 y E6. **En otras disciplinas es aproximado.** Salvo E3, los demás tienen en común la respuesta *en otras disciplinas demostrar no es lo mismo que en matemática, es aproximado, con ejemplos*. E3 se asocia principalmente a E2 en cuanto consideran que *demostrar en todas las ramas de la matemática es decir porqué;* sin embargo en *algunas ramas es más formal (álgebra) que en otras (cálculo- geometría).*

Podríamos caracterizarlo por la respuesta *En otras disciplinas demostrar es aproximado, no formal y En matemática demostrar es decir porqué y la diferencia entre las ramas de la matemática esta dada por el grado de formalidad*

- GRUPO 2 : Compuesto por E1; E8; E9 y E13. **En otras disciplinas es empírico**

Estos estudiantes tienen en común la respuesta *en otras disciplinas demostrar no es lo mismo que en matemática, es empírico, experimental; evidencial.*
E8; E9 tienen exactamente el mismo tipo de respuestas; genuinamente contestan que NO es lo mismo en las distintas ramas de la matemática (es decir no argumentan a favor de que si sea lo mismo (P11NC); en algunas ramas es más formal y estricto (álgebra) que en otras que suele demostrarse con "números" o dibujos (Cálculo- Geometría). También argumentan que en otras disciplinas s*e prueba mostrando algo; evidenciando con datos reales.* E1 y E13 coinciden en que *en matemática es con axiomas*
Podríamos caracterizarlo por la respuesta *En otras disciplinas demostrar es evidenciar expirementalmente y en las distintas ramas de la matemática, demostrar es distinto en cuanto a la formalidad*

- GRUPO 3: Compuesto por E7, E10, E11 y E12. **En otras disciplinas es aproximado**

E7, E10y E12 tienen respuestas del mismo tipo en las tres categorías. En Matemática la demostración es una secuencia y en todas las ramas es lo mismo (una secuencia) y en cualquier disciplina es lo mismo, es una secuencia. Podríamos caracterizarlo por considerar a la demostración como una secuencia

No hay una asociación clara entre los grupos de estudiantes según sus tipos de respuestas y los tipos de pruebas que producen. Salvo para el caso del grupo 1 en el cual no hay ningún estudiante de los que producen pruebas ingenuas. Estos están repartidos entre los grupos 2 y 3 .

<u>CONCLUSIONES</u>

En cuanto a lo que consideran estos estudiantes respecto a si es lo mismo demostrar en cualquier rama de la matemática la mayoría de los estudiantes que responden que SI es lo mismo, describen a la demostración matemática como partir de algo (hipótesis; axiomas, o "lo que te dán") y luego mediante algún proceso (secuencia lógica, hacer algo, desarrollando) llegas a algo (concluir a algo, llegar).

En cambio de los que opinan que demostrar es distinto en las distintas ramas de la matemática centran esta diferencia en el grado de simbolismo, formalidad, estrictez del álgebra versus lo aproximado, con números y no formalidad del cálculo. Hay un grupo de estudiantes que consideran que demostrar en todas las ramas de la matemática es decir porqué; sin embargo en algunas ramas es más formal (álgebra) que en otras (cálculo- geometría).

Es notable que muchos estudiantes hagan una diferenciación respecto a qué significa demostrar en distintas ramas de la matemática; estos hechos nos plantean la necesidad de indagar sobre qué características tiene, para los estudiantes, la demostración en álgebra, en geometría o en cálculo.

Sin duda estas diferencias tienen que ver con su experiencia en las distintas asignaturas cursadas, lo que nos lleva a reflexionar sobre la coherencia en la formación de los futuros profesores, en cuanto a su formación específica en los procedimientos propios de la matemática. En cuanto a esta desconexión entre las asignaturas que cursan nuestro alumnos, nos lleva a plantearnos la necesidad de evidenciar la postura epistemológica de los distintos formadores de formadores.

En cuanto a lo que consideran estos estudiantes respecto a *si demostrar significa lo mismo en otras disciplinas que en matemática* podemos describir tres grupos de estudiantes bien diferenciados

Los que piensan que al igual que en matemática demostrar en cualquier disciplina es una secuencia partir- desarrollar – llegar; otro grupo que piensa que no es lo mismo dado que en otras disciplinas se "demuestra" experimentalmente, con datos y el tercer grupo que considera que en otras disciplinas se muestra de manera no formal, aproximada.

El grupo de estudiantes que opina que tanto en matemática como en otras disciplinas demostrar es una secuencia lógica; equipara esta secuencia al método de otras disciplinas, esto junto con el dato de que la que la mayoría de ellos producen pruebas ingenuas enfrentados a la tarea de demostrar; nos hace preguntarnos sobre qué características tendrá para estos estudiantes esa secuencia en matemática.

Este hecho nos remite al resultado anterior (Montoro. 2007) de que en general los estudiantes que brindan pruebas ingenuas consideran que se aprende a demostrar estudiando una teoría de la demostración y que éstas serán correctas cuando se llega a *lo que hay que llegar* sin saber muy bien cómo fue este proceso; se podría pensar en esto como una suerte de *idealización* que realizan en cuanto a las demostraciones; ya que estos mismos estudiantes cuando se enfrentan a la tarea de demostrar, se limitan a "mostrar" un caso donde "evidentemente" es cierta la proposición, sin sentir la necesidad de deducir; de producir un argumento lógico que valide la veracidad de la implicación. Lo que nos lleva a la reflexión de que desarrollar una "teoría" de la demostración no garantiza un aprendizaje de la demostración.

Nos parece interesante destacar el aspecto de ver a la demostración como un secuencia de lo que partís-desarrollas- llegas tanto en matemática como en otras disciplinas; es decir como un procedimiento escolarizado; institucionalizado "algo para hacer". Las repuestas de este grupo de estudiantes parecieran estar centradas más en la "tarea" que implica demostrar en general, que con validar conocimientos en relación a contenidos matemáticos específicos (conceptos – propiedades) implicados en las demostraciones. Queda planteada esta posibilidad para seguir investigando porque de tratarse ésta de una concepción arraigada, se convertiría en un obstáculo, muy importante para el aprendizaje de este procedimiento propio del método matemático.

Consideramos que los resultados de este análisis no son contundentes a la hora de concluir en profundidad sobre las concepciones que poseen estos estudiantes sobre la demostración ya que somos concientes que las preguntas directas no siempre reflejan la complejidad del pensamiento de una persona, sin embargo el análisis de estas dos preguntas enriquecen el analisis de este proceso que es nuestro objeto de estudio, aportando a la caracterización de este complejo proceso de aprendizaje de la demostración en el Profesorado.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C., (2003) C. D. Q. *Como quisiéramos demostrar*. Epsilon 57. España. 345-356

Arsac, G. (1988). Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomenes de validation en France *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 9, Nº3, pp. 247-280

Arsac, G. Et al (1992) *Initiation au raissonnement au colllege*. Presses Universitaires de Lyon. IREM.

Balacheff, N. (1987). *Processus de pruebe et situations de validation*. Educational Studies in Mathematics, vol 18 : 147-176

Benzécri, J. (1973). L' Analyse des Données. Paris: Dunod.

Carretero, M., (1997). *Introducción a la Psicología cognitiva*. Colección: Psicología Cognitiva y Educación. AIQUE Grupo Editor. Buenos Aires.

Crivisqui, E. (1993). Análisis Factorial de Correspondencias. Un instrumento de investigación en ciencias sociales. Asunción: Laboratorio de Informática Social de la Universidad Católica de Asunción.

Dreyfus, T. (1999). *Johnny can't prove*. Educational Studies in Mathematics, 38, 85-109

Duval, R. (1991). *Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la demostration.* Educational Studies in Mathematics,22,233-261

Fischbein, E (1982). *Intuition an Proof.* For the learning of Mathematics. 3,2,9-24

Freudenthal (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* (D. Reidel: Dordrecht).

Godino, J. D. y Martínez Recio A., (1997). *Significado de la demostración en educación matemática.* Original Title: Approaching rational geometry: from physical relationships to conditional statements. PME XXI (Vol.2 pp. 313-320). Lahti, Finland. [Trad. castellana: www.lettredelapreuve,it/Resumes/Godino/Godino97ES.html].

Godino, J. D. y Martínez Recio A., (2001). *Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la Educación Matemática.* Enseñanza de las Ciencias 19(3) 405 - 414 España

Herbst, P. (2004) Interactions with Diagrams and the Making of Reasoned Conjectures in Geometry. *ZDM*, vol. 36

Lakatos, I. (1976): *Proofs and Refutations*. Oxford University Press: London. [Trad. castellana: *Pruebas y refutaciones*. Alianza Ed.: Madrid, 1978].

Lebart, L., Morineau, A. y Fénelon, J. (1979). Traitement de Donnés Statistiques. París: Dunod.

Martínez Recio, A. (2002) *La demostración en matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica*. Investigación en Educación Matemática. Quinto Simposio de la sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Almería. España. (Septiembre de 2001) , Eds: M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y j. D. Godino. Servicio de Publicaciones. Universidad de Almería. 29-43

Montoro, V. (2005). *Explorando la producción de los estudiantes de profesorado en cuanto a la demostración en geometría euclídea.* Ponencia en XXVIII Reunión de Educación Matemática. Organizada por la Unión Matemática Argentina. Salta. Septiembre. *Resumen en Actas* XXVIII REM - UMA. 2005.

Montoro, V. (2007). *Concepciones de estudiantes de profesorado acerca del aprendizaje de la demostración.* Trabajo Completo en Actas del 1 Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática. CD – ROM. . pp: 329-340. Publicación con referato. ISBN 978–950–658–183 – 1

Polya, G. (1954): *Mathematics and Plausible Reasoning*. Vol II. Princeton University Press: Princeton, NJ. [Trad. castellana: *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos: Madrid (1966)].

Sáenz Castro, C., (2002). *Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas*. Investigación en Educación Matemática. Quinto Simposio de la sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Almería. España. (Septiembre de 2001) , Eds: M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y j. D. Godino. Servicio de Publicaciones. Universidad de Almería. 47-62.

Schoenfeld, A. H. (1992) . *Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics*, en Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, NTCS, Macmillan Publishing Company, N.Y., 1992, págs.334-370. (The University of California - Berkeley).

Ward, J. (1963). Hierarchical grouping to optimize an objective function. *Journal American Statistic Association 58*. pp 236-244

ANEXO: Respuestas textuales de los estudiantes y su categorización

Consideras que demostrar significa lo mismo en cualquier rama de la matemática?. Y en otras actividades?		
Categ. de los argumen.	**Estad**	**Respuestas textuales**
1.1. 3 1.2.1 2.3	E1	En realidad para demostrar siempre se usa lo mismo en cualquier área, usas los axiomas que ya están, si te basas en eso sí es lo mismo. Distinto en Geometría que en álgebra: por el tipo de pensamiento En otras actividades **no** es los mismo, por el pensamiento experimental; (ves algo raro en la naturaleza y decís eso se repite, eso es un patrón y a partir de él hacés deducciones y a esas deducciones las demostrás a partir de los experimentos)
1.1.2 1.2. 1 2.4	E2	**No** es lo mismo; lo algebraico se demuestra formalmente y lo analítico se demuestra fácilmente, aproximadamente. - lo que pasa que la matemática se basa en la lógica, esa es la matemática algebraica, la matemática analítica se basa en los diferenciales, entonces demostrar es poder llegar a.... que es casi lo mismo. En otras actividades **no** se demuestra, son aproximaciones.
1.1.2 1.2.1 2.2	E3	Distinto en Geometría (geométricamente en un dibujo), por ahí es más fácil, más visual que una demostración que requiera más conceptos para ir fundamentando una demostración más larga. La demostración en sí es fundamentar algo, decir el por qué, eso es siempre igual pero la forma pede variar En otras actividades, uno siempre demuestra cosas. Si le cuento algo a alguien, no me va a creer el 100% siempre, siempre tiene que haber un por qué.
1.1.4 1.2.4 2.4	E4	Si, en cualquier rama demostrar es lo mismo. En matemáticas uno dice demostrar y es un procedimiento largo y por ahí en otras cosas de dicen demostrar pero no te piden que generalices para todo.
1.1.1 1.2.1 2.4	E5	Sí, salvo que hay distintas formas de demostrar, en análisis no son las mismas que vamos a usar en geometría del plano. En álgebra todo era simbólico. Yo podía ir escribiendo cada paso en forma muy estructurada. En Geometría es otra técnica, no es tan estricta. En todas las ramas de la matemática, siempre tenés que ir justificando en una secuencia lógica, llevar los pasos usando las cosas que vos tenés para usar, axiomas, todo lo que tengas, y llevás la secuencia hasta que llegás a demostrar el teorema. En Análisis Matemático era muy estructurado, así como el Álgebra, y además estricto, en cómo vos hacías una demostración. lo estricto tiene que ver en que cada paso se puede ir escribiendo en forma simbólica, más detallada, más específico. En otras actividades distintas a la matemática, no, ahí podés demostrar pero no es formal. Es más informal.
1.1.5 1.2.2 2.4	E6	Cuando digo álgebra estoy pensando en la materia álgebra en lo que me enseñaron. NO significa lo mismo en álgebra, en análisis o en geometría, en análisis con dar un ejemplo basta pero en álgebra es como que exige más si es en un caso particular o si es en todos. En geometría, también hay que saber bien, qué es lo que quiero demostrar, tener una buena base, no llegar y demostrar. En otras actividades, no matemáticas lo que pasa es que son distintas formas de demostrar, es distinto a qué se llama verdadero y a qué se llama falso.
1.1.1 1.2.4 2.1	E7	Si, es lo mismo, en todos se parte de la información que tiene después usan la hipótesis y después llegan a una conclusión En otras actividades, es lo mismo, todos parten de una hipótesis y después mediante toda una información que tienen la van desarrollando y se dan cuenta que llegan o no llegan a veces, llegan a un absurdo , entonces contradicen lo que supusieron o que lo aceptan.

1.1.5 1.2.1 2.3	E8	Si, pero de distintas maneras, pareciera que en Álgebra cuesta más, más perfecto que por ejemplo en análisis, en álgebra se completa bien la demostración, en análisis quedan baches. En geometría se parece bastante al álgebra, en G. A, también usamos cosas del análisis pero el tipo de demostración era geométrica. En Abogacía demostrar es mas bien probar, presento una prueba de que eso es así, Probar es mostrar algo. Tengo evidencia de algo. En álgebra, en álgebra mostrar es dar un contraejemplo yo muestro que no es verdad.
1.1.5 1.2.1 2.3	E9	sí, que haya distintas formas de demostrar o sea que sea distinto en distintas disciplinas: La diferencia son los números, que se pueda demostrar con un número, o que no. En análisis se puede demostrar con números y en álgebra no. En geometría también sería medio parecido a álgebra por lo poco que tengo de geometría. En otras actividades por ejemplo, No es lo mismos, ahí trabajarían con más datos, por ejemplo, con cosas más generales o con definiciones, tienen como pruebas digamos reales, yo creo que ahí sí, entran los números, las cantidades.
1.1.1 1.2.4 2.1	E10	- Demostrar significa lo mismo en todas las ramas de la matemática. Demostrar sería a partir de manejarte con las definiciones, con los axiomas que puedas llegar a estar manejando, y a partir de teoremas ya demostrados, ir justificando cada uno de los pasos que vas haciendo. - La demostración en matemática y lo que se considera como demostración en otras ramas es lo mismo.
1.1.1 1.2.3 2.1	E11	Cuando te dicen demostrar en álgebra o en análisis o en geometría, en todas te están pidiendo que vos llegues a algo, como es, que se pueda justificar que es verdadero, pero no es de la misma **forma** que se demuestra. Son distintos los axiomas, o las partes donde va saliendo, las leyes. partís de distintas cosas...**El contenido es distinto**. o sea, vas viendo distintas formas de demostrarlo, pero en sí, la demostración siempre es tratar de llegar a algo válido a poder probar eso, que te están pidiendo. En otras actividades que no sean matemática, es lo mismo, se tienen que estar basando en algún tipo de regla, o algo así, para llegar a la conclusión.
1.1.1 1.2.4 2.1	E12	Sí, demostrar significa lo mismo en álgebra que en geometría que en análisis, porque te piden partir de algo y concluir en algo, y con varios métodos o distintas formas lo conseguís, tratas de llegar a eso. es lo mismo en otras actividades no matemáticas, porque se basan en distintas propiedades para demostrar como hacemos nosotros, en cosas que ya están demostradas, como para llegar a lo que ellos quieren comprobar
1.1.3 1.2.4 2.3	E13	Se demuestra de otra manera en otras materias. Bueno, en la física por ahí es más parecido, igual que en matemática, pero en biología, para demostrar algo lo demuestran con la naturaleza, hay otra forma de demostrar algo, en matemática es con axiomas.