Revista de Educación Matemática
Volumen 33, N° 3 (2018), páginas 27 – 45
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Artículo de Matemática

SERIES DE LEIBNIZ: UN RELATO DE NOCHE DE BRUJAS

Roberto Ben, Antonio Cafure

Resumen. Presentamos aquí un relato con el que hemos trabajado parcialmente en algunos cursos de cálculo en una variable y al que le hemos ido dando forma intentando hacer confluir las siguientes cuestiones: que despierte interés en docentes y estudiantes de nivel universitario; que sea abordable (parcial o totalmente) en un curso elemental de análisis matemático; que nos permita trabajar temas de la currícula en el aula al tiempo que nos impulse a aprender cosas nuevas junto a los y las estudiantes y que desde la simplicidad de un problema elemental, atraviese la amplitud y profundidad de la matemática contemporánea abordándola desde su formalismo algebraico, su rigurosidad analítica y su potencia computacional.

§1. La inspiración: Halloween y el Día de los Muertos

Advertencia: el presente relato contiene lenguaje adulto, escenas de violencia y terror, fórmulas matemáticas y apela a conocimientos elementales de cálculo diferencial e integral!!!

El 2 de noviembre, en México, se celebra el *Día de Muertos*. En las tumbas se hacen ofrendas a los fallecidos: comidas, flores, bebidas espirituosas y tantas otras cosas que disfrutaban en vida y que terminarán consumiendo sus deudos en una gran fiesta.

Esta festividad mexicana comenzó a mezclarse con otra de origen celta y cercana en el tiempo, 31 de octubre, que se celebra en otros países del hemisferio norte (Canadá, Estados Unidos, Irlanda, Reino Unido) y que es conocida como *Halloween* o *Noche de brujas*. Ya sea por motivos comerciales, por motivos de penetración cultural, etc., la festividad de *Halloween* se está extendiendo cada vez a más países, con mayor o menor alcance, con mayor o menor resistencia.

En Argentina existe una tensión en este intento de instalación/desinstalación de esta celebración. Encontramos en las redes sociales algunos chistes críticos al respecto, como el de la Figura 1:

FIGURA 1. Es interesante además observar la cuestión lógica que se plantea: cómo negar una disyuntiva. Agradecemos a Matías de Brasi por permitirnos exponer su ilustración, ver http://debrasi.blogspot.com.ar

Y también encontramos imágenes aterradoras, sobre todo para los estudiantes de los cursos iniciales de cálculo. Como, por ejemplo, la imagen de la Figura 2:

FIGURA 2. Fuente: https://collegemathteaching.wordpress.com

La sola contemplación de símbolos matemáticos en objetos asociados con las brujas no hace más que incrementar el pavor en algunos estudiantes. Seguramente estamos exagerando, aunque es posible que el terror real sea generado más por el conglomerado de símbolos matemáticos que por lo tétrico de la imagen. De todos modos, cabe preguntarse: ¿qué es lo que nos quiere decir esa imagen? ¿Qué secreto se esconde detrás de esos signos?

No sabemos si será porque nos gusta la matemática o porque nos gustan el mate amargo y el truco (de a seis, mejor), pero lo cierto es que esta calabaza y los símbolos matemáticos estampados en ella están muy lejos de asustarnos. Por el contrario, son la excusa ideal en pos de la unión latinoamericana y la elección del festejo mexicano, mucho más alegre y dionisíaco. No obstante, como ningún pueblo del resto del mundo es excluido, aquí dejamos una ofrenda a los pies de las tumbas de Madhava de Sangamagrama, de James Gregory y de Gottfried Leibniz (a su debido tiempo serán presentados), para que festejemos junto con ellos y ustedes el placer de develar lo que hemos dado en llamar **El misterio de la calabaza**.

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$$

estampada en la calabaza es conocida como la serie de Gregory–Leibniz o de Madhava–Leibniz. Con los conocimientos necesarios de Cálculo I no es difícil verificar que es una serie convergente, es decir, que la sucesión de sumas parciales de la serie converge.

Y así la calabaza ya no nos asusta más. Ese conglomerado de símbolos matemáticos no es más que una simple serie alternada convergente. Es decir, lo que tenemos es una calabaza con un número estampado, expresado en una forma quizás un poco rebuscada; pero esa serie es, en definitiva, un número. Ese es el misterio que trataremos de resolver a lo largo de este texto: ¿cuál es ese número? La posibilidad de develarlo es la gran ofrenda que nos legaron Gregory, Leibniz y Madhava y nosotros generosamente la retribuiremos poniendo en sus tumbas apetitosos manjares de Escocia, de Alemania y de India junto con unas cuantas botellas de whisky, cerveza y fenny de Goa, que comeremos y beberemos cuando empiece a sonar la música. (El fenny es un licor preparado a base de coco, originario de Goa, un pequeño estado en la costa oeste de la India. Y aunque Madhava era de Sangamagrama, una antigua ciudad en el actual estado de Kerala, en la costa suroeste de la India, imaginamos que para llegar a tan elevados conocimientos matemáticos debe haber consumido, cuanto menos, algunas copas de fenny de Goa.)

Seguramente haya lectores que ya sepan a qué valor converge la serie; quizás haya otros para los cuales no haya misterio en la calabaza. De todos modos, están invitados a acompañarnos en esta travesía: encontrarán algunas novedades a lo largo de esta historia. Hay suspenso para todos.

§2. El criterio de Leibniz para series alternadas

Para comenzar, recordemos la definición de serie de números. Si $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales podemos considerar las sumas parciales de los términos de esta sucesión. Es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos una nueva sucesión S_n definida como

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Esta sucesión S_n es la *sucesión de sumas parciales de término general* a_k. Si la sucesión S_n converge, es decir si existe

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

decimos que la *serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge. Una condición necesaria para la convergencia de una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es que la sucesión a_k tienda a 0.

En particular, una *serie alternada* (la elección del adjetivo no es azarosa) es una serie en la que se alternan los términos positivos y negativos. Si $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales no negativos, una de las formas usuales de representar series alternadas es la siguiente:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

Las series alternadas hacen su aparición bien en los inicios del análisis y si el nombre de Leibniz aparece ligado a ellas es por un motivo concreto. En 1714, Leibniz le envía una carta a Johann Bernoulli contándole acerca de su criterio para la convergencia de series alternadas de números reales. En términos actuales, lo que Leibniz le informa a Bernoulli es el siguiente resultado que establece tanto la convergencia de algunas series alternadas como una estimación sobre el error que se comete al aproximarlas por una determinada suma parcial.

Teorema 2.1. *Sea $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales no-negativos, decreciente y convergente a 0. Entonces:*

(a) La serie alternada $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ converge.

(b) Sea $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$, la sucesión de sumas parciales y sea S el límite de S_n. Si consideramos el error $R_n = S - S_n$ que se comete al aproximar S por la suma S_n, entonces

$$a_{n+1} - a_{n+2} \leq |R_n| \leq a_{n+1}, \tag{2.1}$$

y R_n tiene el signo $(-1)^n$.

Observación 2.2. Introducimos una terminología que facilitará la lectura. Decimos que una serie alternada $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ es una *serie de Leibniz* si verifica las hipótesis del Teorema 2.1. En consecuencia, toda serie de Leibniz es convergente. En particular, la serie de la calabaza es una serie de Leibniz cuyo término general es $a_k = \frac{1}{2k-1}$.

Podríamos decir que este resultado de Leibniz establece el inicio formal de la teoría de series alternadas. En cualquier curso elemental de cálculo se destina un tiempo a presentarlo y a trabajar con él. Debemos señalar que no es usual encontrar la cota inferior para $|R_n|$ en los textos más conocidos de cálculo y de análisis matemático. Por ejemplo, no se presenta en textos modernos como el libro *Cálculo de una variable* de James Stewart, ni en clásicos como los libros de Rey Pastor, Spivak, Apostol, por nombrar sólo algunos de los que hemos revisado (el estatus de clásico de estos textos se desprende del hecho de que solo mencionando el apellido del autor, sabemos de qué estamos hablando). Elaboramos una explicación al respecto de esta ausencia que compartiremos en breve con los lectores.

Queremos develar el misterio de la calabaza, es decir, necesitamos saber cuál es el número estampado. Para eso necesitamos aproximarlo mediante las sumas parciales. Por ejemplo, si quisiéramos hacerlo con un error $|R_n|$ menor que 10^{-5}, de acuerdo a la cota superior provista por (2.1), es suficiente considerar, por ejemplo, una suma parcial S_n tal que

$$|R_n| = |S - S_n| \leq a_{n+1} = \frac{1}{2n+1} < 10^{-5}.$$

Encontramos que si $n \geq 50000$, cualquier suma parcial S_n aproxima S con el error propuesto. Claramente, esto es impracticable con lápiz y papel. La pregunta que debemos hacer, que se impone naturalmente, siempre hay estudiantes que la formulan: ¿es realmente necesario sumar *esa* cantidad de términos para obtener tal error? Aquí entra en juego la cota inferior para el error. Tratemos de encontrar cuáles son las sumas parciales S_n para las cuales $|R_n|$ es mayor o igual que 10^{-5}:

$$|R_n| = |S - S_n| \geq a_{n+1} - a_{n+2} = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} \geq 10^{-5}.$$

Encontramos que esto sucede para $n \leq 222$. Este número está bastante lejos del 50000 proporcionado por la cota superior. En resumen tenemos la siguiente situación:

- Si consideramos una suma parcial S_n con $n \geq 50000$, entonces $|R_n|$ es menor que 10^{-5}.
- Si consideramos una suma parcial S_n con $n \leq 222$, entonces $|R_n|$ es mayor que 10^{-5}.

Sin embargo, no sabemos qué es lo que sucede con las sumas parciales S_n correspondientes a valores de n entre 222 y 50000. Es una cantidad significativa de sumas parciales que no estamos considerando. Esta amplitud es consecuencia de que la cota inferior para $|R_n|$ es una sucesión que converge a 0 más rápido que la propia sucesión a_k. En consecuencia, imaginamos que la cota inferior ha sido dejada de lado porque el error que aporta es, en general, demasiado grosero con respecto al que proporciona la cota superior. Con todo, desde un punto de vista didáctico, consideramos que bien podría formar parte de nuestras clases sobre este tópico.

Para terminar esta sección, aun cuando estamos lejos de resolver el misterio de la calabaza, damos una demostración bastante diferente y por cierto elegante (los matemáticos somos muy afectos a utilizar ese calificativo) del Teorema 2.1. La proporcionó Robert Young (Young, 1985) y lo interesante es que utilizando el teorema de encaje de intervalos torna evidente la cota superior para $|R_n|$. Young tampoco presenta la cota inferior que nosotros presentamos. Por este motivo, completamos su demostración con la prueba de la validez de la cota inferior.

Demostración. En primer lugar, observemos que $S_{n+1} - S_n = (-1)^n a_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. De aquí deducimos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es válida la acotación $S_{2n} \leq S_{2n-1}$.

Tiene sentido entonces considerar la sucesión $I_n = [S_{2n}, S_{2n-1}]$ de intervalos cerrados. Como a_n converge a 0, la longitud de I_n, que es igual a a_{2n}, tiende a 0. Además, como a_n es decreciente, tenemos que $S_{2n} \leq S_{2(n+1)}$ y $S_{2n-1} \geq S_{2(n+1)-1}$, de donde se deduce que $I_n \supset I_{n+1}$. Esto muestra que la sucesión es encajada. Por lo tanto, por el Teorema de Encaje de Intervalos, existe un único número S en la intersección de estos intervalos; en símbolos, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{S\}$. En consecuencia, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$|S - S_n| \leq |S_{n+1} - S_n| = a_{n+1}.$$

De aquí son inmediatas la convergencia de S_n a S y la cota superior para $|R_n|$.

Demostramos a continuación la validez de la cota inferior para el error. Si n es par tenemos que

$$S - S_n = S - S_{n+2} + S_{n+2} - S_n \geq S_{n+2} - S_n = a_{n+1} - a_{n+2},$$

mientras que si n es impar tenemos que

$$S_n - S = S_n - S_{n+2} + S_{n+2} - S \geq S_n - S_{n+2} = a_{n+1} - a_{n+2}.$$

De aquí deducimos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $|R_n| \geq a_{n+1} - a_{n+2}$. □

Observación 2.3. Las diferentes demostraciones del Teorema 2.1 se desarrollan en torno a un argumento decisivo: que la sucesión a_k sea decreciente implica que la sucesión de sumas parciales S_{2n} es creciente, que la sucesión de sumas parciales S_{2n+1} es decreciente y que cualquier suma parcial S_{2n} es menor o igual que cualquier suma parcial S_{2m+1}.

§3. Se puede hacer un poco mejor

La principal objeción hacia la cota superior para $|R_n|$ que provee el Teorema 2.1 es que es necesario sumar una cantidad elevada de términos para obtener una aproximación más o menos razonable. Esto que nos acontece había sido obviamente percibido por el propio Leibniz y por varios de los matemáticos que lo siguieron, quienes se plantearon el interrogante sobre lo genuino de esta necesidad. Podríamos pensar que la búsqueda se orientó entonces a encontrar una cota superior mejor para el error. Es de imaginar que ese interrogante debió haberse respondido por esos tiempos. Lo llamativo del asunto es que pasaron unos cuantos años, más de los imaginados, antes de que se presentara una mejor estimación para el error. En 1962, Philip Calabrese, un estudiante de segundo año de la Universidad de Illinois, publicó una nota en la sección *Classroom Notes* de *The American Mathematical Monthly* (Calabrese, 1962) en la cual, con una hipótesis adicional sobre la sucesión $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, presentó un refinamiento sobre el error que se comete al aproximar las series de Leibniz. A continuación el resultado de Calabrese.

Teorema 3.1. *Consideremos una serie de Leibniz $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$. Si la sucesión de diferencias $\Delta a_k = a_k - a_{k+1}$ es decreciente entonces*

$$|R_n| < \frac{a_n}{2}. \tag{3.1}$$

En el caso de nuestra serie de Leibniz, la sucesión $a_k = \frac{1}{2k-1}$ verifica la hipótesis adicional que requiere el Teorema 3.1 pues la sucesión de diferencias

$$\Delta a_k = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} = \frac{2}{(2k-1)(2k+1)}$$

es decreciente. Observando que

$$\frac{a_k}{2} = \frac{1}{2(2k-1)} < \frac{1}{2k+1} = a_{k+1},$$

concluimos que la cota superior para $|R_n|$ de Calabrese constituye una aproximación más precisa que la clásica de Leibniz. Es suficiente entonces considerar una suma parcial S_n tal que

$$|R_n| = |S - S_n| \leq \frac{1}{2(2n-1)} < 10^{-5}.$$

Encontramos que si $n > 25000$, la suma parcial S_n aproxima S con error menor que 10^{-5}.

Cabe otra vez la misma pregunta: ¿se puede hacer con menos términos? Para estimar la mínima cantidad de términos necesarios deberíamos contar con *una* cota inferior para $|R_n|$ mejor que la que proporciona (2.1) ya que, como observamos, no es relevante. Es asombroso saber que *esa* cota inferior existe desde hace muchos años, que existe aún antes de la cota superior de Calabrese. Es sorprendente pensar que haya pasado completamente desapercibida. Ni los libros de textos que hemos leído a lo largo de estos años, ni las clases a las que hemos asistido o que hemos impartido, han tomado en cuenta su existencia. Hay diversas referencias; por ejemplo, Young (Young, 1985) menciona un texto sobre series de principios del siglo XX. Reformulamos entonces el Teorema 3.1 incluyendo esta cota inferior largamente ignorada.

Teorema 3.2. *Consideremos una serie de Leibniz* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$*. Si la sucesión de diferencias* $\Delta a_k = a_k - a_{k+1}$ *es decreciente entonces*

$$\frac{a_{n+1}}{2} < |R_n| < \frac{a_n}{2}.$$

Con este resultado a nuestra disposición, podemos determinar las sumas parciales que no aproximan S con error menor que 10^{-5} pidiendo que

$$10^{-5} < \frac{1}{2(2n+1)} < |R_n|.$$

Resulta entonces que si $n < 25000$, el error que se comete al estimar S por S_n es mayor que 10^{-5}.

En resumen, tenemos la siguiente situación:

- Si consideramos cualquier suma parcial S_n con $n > 25000$, entonces $|R_n| < 10^{-5}$.

- Si consideramos cualquier suma parcial S_n con $n < 25000$, entonces $|R_n| > 10^{-5}$.

Hemos mejorado ostensiblemente la situación de la sección anterior. Estamos muy cerca de probar cuál es la **primera** suma parcial S_n que aproxima S con un error menor que 10^{-5}: o bien es S_{25000} o bien es S_{25001}. De acuerdo al Teorema 3.2 tenemos que

$$\frac{a_{25001}}{2} < |R_{25000}| < \frac{a_{25000}}{2},$$

lo que es lo mismo que

$$\frac{1}{100002} < |R_{25000}| < \frac{1}{99998};$$

es decir, nada podemos concluir acerca de qué ocurre con la suma S_{25000}. Y aunque sigue siendo impracticable con lápiz y papel, y estamos lejos de aproximar el número de la calabaza, no es poco lo que aprendimos con respecto a las sumas parciales. En particular, la argumentación de Calabrese para obtener la estimación (3.1) le permitió demostrar que la **primera** suma parcial de la serie armónica alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

que aproxima el límite de la serie con 4 decimales exactos es S_{10000}.

Antes de proporcionar la demostración del Teorema 3.2, discutamos la necesidad de la hipótesis sobre la sucesión de diferencias, ¿cuál es el rol decisivo en la mejora de la estimación del error? La sucesión de diferencias aparece al reescribir una serie de Leibniz arbitraria. En efecto, se verifica fácilmente que

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k = \left(\frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\Delta a_k\right) + (-1)^{n+1}\frac{a_n}{2}. \tag{3.2}$$

Haciendo tender n a infinito resulta entonces que la sucesión de sumas parciales entre paréntesis también converge a S. En consecuencia, restando S y multiplicando por $(-1)^{n+1}$ podemos expresar $|R_n|$ en la forma

$$\begin{aligned} |R_n| &= (-1)^{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k - S\right) \\ &= \left((-1)^{n+1}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\Delta a_k - S\right)\right) + \frac{a_n}{2}. \end{aligned}$$

Si Δa_k es decrececiente entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\Delta a_k$ es una serie de Leibniz. Recordando la Observación 2.3 sabemos que las sumas parciales correspondientes a subíndices pares son menores que S y las correspondientes a impares son mayores que S. En estas condiciones, el término entre paréntesis es negativo y, por lo tanto, resulta que $|R_n| < a_n/2$. Esto ya constituye una demostración del resultado de Calabrese dado en el Teorema 3.1.

Una identidad similar a (3.2) es la siguiente

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k = \left(\frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\Delta a_k\right) + (-1)^{n+1}\frac{a_{n+1}}{2}. \tag{3.3}$$

Nuevamente, haciendo tender n a infinito resulta que la sucesión de sumas parciales entre paréntesis converge a S. En consecuencia, restando S y multiplicando por $(-1)^{n+1}$ reescribimos $|R_n|$ en la forma

$$\begin{aligned} |R_n| &= (-1)^{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k - S\right) \\ &= \left((-1)^{n+1}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\Delta a_k - S\right)\right) + \frac{a_{n+1}}{2}. \end{aligned}$$

Si Δa_k es decrececiente entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\Delta a_k$ es de Leibniz y recordando la Observación 2.3 sabemos que el término entre paréntesis es positivo y, por lo tanto, que $|R_n| > a_{n+1}/2$.

En resumen, hemos demostrado el Teorema 3.2. Sin embargo, vamos a proporcionar otra demostración: la que fuera propuesta por Young en su trabajo (Young, 1985) y que generaliza lo hecho para demostrar el Teorema 2.1, reformulando el problema en términos de encajes de intervalos, haciendo evidente la cota inferior y superior para $|R_n|$.

Demostración. A partir de S_n se define la siguiente sucesión

$$T_n = S_n + (-1)^n\frac{a_{n+1}}{2}.$$

En particular, la sucesión T_n converge a S, el límite de la sucesión S_n. De la definición de T_n deducimos que $T_{n+1} - T_n = (-1)^n\Delta a_{n+1}/2$. Una argumentación similar a la utilizada en la demostración del Teorema 2.1 muestra que la sucesión de intervalos $J_n = [T_{2n}, T_{2n-1}]$ es encajada pues Δa_n es decreciente y converge a 0. Por lo tanto, existe un único número T en la intersección de estos intervalos. Dado que T que es el límite de T_n, concluimos que $S = T$.

Si I_n es la sucesión de intervalos de la demostración del Teorema 2.1, entonces $I_n \supset J_n$ para $n \in \mathbb{N}$. Además, tenemos que

$$T_{n-1} - S_n = S_{n-1} + (-1)^{n-1}\frac{a_n}{2} - S_n = (-1)^n \frac{a_n}{2}.$$

Para concluir, distinguimos los casos n par e impar. Si n es par

$$T - S_n \geq T_n - S_n = \frac{a_{n+1}}{2} \quad \text{y} \quad T - S_n \leq T_{n-1} - S_n = \frac{a_n}{2}.$$

Un argumento similar se utiliza si n es impar. De esta manera demostramos las cotas para $|R_n|$. □

Las demostraciones de los Teoremas 2.1 y 3.2 bien pueden contarse en un curso básico de cálculo, asumiendo que ya se conoce el teorema de encaje de intervalos, situación que, de hecho, se da en diversos cursos.

Si bien avanzamos, continuamos sin tener una idea de cuál es el límite de esta serie y, por ende, no hemos develado aún el misterio que esconde la calabaza.

§4. ¿Qué ocurre con la suma S_{25000}?

Ya probamos que la suma parcial S_{25001} aproxima a S con un error menor que 10^{-5}, pero aún no respondimos qué pasa con la suma S_{25000}. A esta altura, podríamos no preocuparnos por buscar esa respuesta ya que son demasiados los términos a sumar para obtener un error menor que 10^{-5}: sumar un término más o un término menos es irrelevante. De todos modos, podemos alegar que continúa siendo una inquietud válida y, de hecho, veremos que hay más por aprender en el intento de responder este interrogante. Recordemos que Calabrese pudo demostrar algo similar en el caso de la serie armónica alternada. Existe un resultado que brinda más información sobre el error que se comete al estimar las series de Leibniz. Fue probado en 1979 por Richard Johnsonbaugh (Johnsonbaugh, 1979) y constituye una generalización del Teorema 3.2 incluyendo sucesiones de diferencias de orden mayor a 1.

Definición 4.1. Dada una sucesión a_k, la *primera diferencia de* a_k es la sucesión $\Delta a_k = a_k - a_{k+1}$. En forma inductiva se define la i-ésima diferencia como $\Delta^i a_k = \Delta(\Delta^{i-1} a_k)$. Definimos $\Delta^0 a_k = a_k$.

Enunciamos a continuación el resultado de Johnsonbaugh. No daremos una demostración aunque sí mencionamos que el resultado se deduce de la reescritura sucesiva de las series de Leibniz como en la sección previa.

Teorema 4.2. *Consideremos una serie de Leibniz* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$*. Si las sucesiones de diferencias* $(\Delta^i a_k)$ *son decrecientes para* $i = 0, \dots, m$ *entonces*

$$\frac{a_{n+1}}{2} + \frac{\Delta a_{n+1}}{2^2} + \cdots + \frac{\Delta^{m-1} a_{n+1}}{2^m} < |R_n| < \frac{a_n}{2} - \left(\frac{\Delta a_n}{2^2} + \cdots + \frac{\Delta^{m-1} a_n}{2^m}\right) \tag{4.1}$$

En la sección anterior ya consideramos la primera diferencia en ocasión de los Teoremas 3.1 y 3.2. Calculemos ahora la sucesión de las segundas diferencias $\Delta^2 a_k$. Como un resultado de validez general encontramos que

$$\Delta^2 a_k = \Delta a_k - \Delta a_{k+1} = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2}.$$

En nuestro caso particular resulta que

$$\Delta^2 a_k = \frac{1}{2k-1} - \frac{2}{2k+1} + \frac{1}{2k+3} = \frac{10}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)},$$

es decreciente. De acuerdo a (4.1) tenemos que

$$\frac{a_{n+1}}{2} + \frac{\Delta a_{n+1}}{4} < |R_n| < \frac{a_n}{2} - \frac{\Delta a_n}{4},$$

lo cual implica que

$$\frac{a_{25001}}{2} + \frac{\Delta a_{25001}}{4} < |R_{25000}| < \frac{a_{25000}}{2} - \frac{\Delta a_{25000}}{4}.$$

Haciendo las cuentas correspondientes encontramos que

$$\begin{aligned} 0,999 \cdot 10^{-5} \approx \frac{50004}{100002 \cdot 50003} &< |R_{25000}| \\ &< \frac{50000}{99998 \cdot 50001} \approx 1,0000000004 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Es decir, aún no podemos determinar si $|R_{25000}|$ es menor que 10^{-5}. Pasemos entonces a considerar la sucesión de diferencias Δ^3:

$$\begin{aligned} \Delta^3 a_k &= \Delta(\Delta^2 a_k) = a_k - 3a_{k+1} + 3a_{k+2} - a_{k+3}. \\ &= \frac{1}{2k-1} - \frac{3}{2k+1} + \frac{3}{2k+3} - \frac{1}{2k+5} = \frac{48}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)(2k+5)} \end{aligned}$$

Como es decreciente, recurriendo nuevamente al Teorema de Johnsonbaugh sabemos que

$$\frac{a_{n+1}}{2} + \frac{\Delta a_{n+1}}{4} + \frac{\Delta^2 a_{n+1}}{8} < |R_n| < \frac{a_n}{2} - \frac{\Delta a_n}{4} - \frac{\Delta^2 a_n}{8}.$$

Haciendo los cálculos correspondientes, la cota superior para $|R_n|$ es igual a

$$\begin{aligned} \frac{a_{25000}}{2} - \frac{\Delta(a_{25000})}{4} - \frac{\Delta^2(a_{25000})}{8} &= \frac{50000}{99998 \cdot 50001} - \frac{5}{2 \cdot 99998 \cdot 50001 \cdot 50003} \\ &= \frac{100006 \cdot 50000 - 5}{2 \cdot 99998 \cdot 50001 \cdot 50003} = \frac{5000299995}{500029999799988}. \end{aligned}$$

Llegamos a la siguiente situación:

$$|R_{25000}| < \frac{5000299995}{500029999799988} \approx 0{,}9999999994 \cdot 10^{-5} < 10^{-5}.$$

Es decir, la suma parcial S_{25000} es la **primera** suma parcial que aproxima a S con un error menor que 10^{-5}. En otras palabras y parafraseando al gran René Lavand: bajo estas condiciones, no se puede hacer más rápido.

Aquí comienza una segunda historia interesante. Buscando información sobre las series de Leibniz, otro tipo de abordaje para su enseñanza, dimos con un artículo, recientemente publicado, escrito por Mark Villarino (Villarino, 2018). Encontrarlo fue una grata sorpresa por la cantidad de cosas que aprendimos al leerlo. El objetivo del artículo de Villarino es proporcionar una demostración del Teorema de Johnsonbaugh (Teorema 4.2) utilizando las mismas ideas que Young utilizara para demostrar el Teorema 3.2: la formulación del problema en términos de una sucesión de intervalos encajados.

Con su lectura también aprendimos que, como era de esperar, los seguidores de Leibniz habían logrado acelerar el proceso de convergencia de las series de Leibniz aun cuando no habían obtenido mejores cotas para el error. Sin embargo, seguimos sin saber cuál es el mensaje escondido en la calabaza.

§5. La transformada de Euler

Como dijimos, los matemáticos que siguieron a Leibniz estaban bien alertados acerca de la lentitud de la convergencia de las series de Leibniz. Por ese motivo, no se preocuparon por buscar mejores cotas para el error. Más bien encararon la búsqueda de maneras de acelerar la convergencia. El gran Leonhard Euler encontró una forma de hacerlo.

Dada una serie de Leibniz $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$, definimos su *transformada de Euler* como la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta^{k-1}a_1}{2^k} = \frac{a_1}{2} + \frac{\Delta a_1}{2^2} + \frac{\Delta^2 a_1}{2^3} + \frac{\Delta^3 a_1}{2^4} + \cdots$$

El logro de Euler fue demostrar que esta serie converge al mismo límite que la serie de Leibniz y que la convergencia es muy *rápida*.

Teorema 5.1. *Sea $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ una serie de Leibniz cuyo límite es S. Supongamos que para $i = 1, 2, 3, \ldots$, las sucesiones $(\Delta^i a_k)$ son decrecientes. Entonces:*

(a) La trasformada de Euler $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta^{k-1}a_1}{2^k}$ converge a S.

(b) Sea $E_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta^{k-1}a_1}{2^k}$ la sucesión de sumas parciales. Si $R_n^{(E)} = S - E_n$ representa el error que se comete al aproximar S por E_n, entonces

$$0 < R_n^{(E)} \leq \frac{\Delta^n a_1}{2^n}. \tag{5.1}$$

Observación 5.2. Es interesante observar que la transformada de Euler de una serie convergente arbitraria siempre converge al mismo límite que la serie. Sin embargo, se necesitan las hipótesis del Teorema 5.1 para asegurar que la convergencia de la transformada es más rápida que la de la serie. El texto de Konrad Knopp (Knopp, 1954) es una posible referencia para consultar los detalles.

Hasta ahora, mostramos que para aproximar S con un error menor que 10^{-5} es necesario considerar sumas parciales S_n con $n \geq 25000$ y que S_{25000} es la primera suma parcial que permite aproximar con tal error. Esto nos priva de obtener información sobre el número impreso en la calabaza. Necesitamos realmente acelerar el proceso de convergencia si es nuestra esperanza develar el misterio.

Según (Knopp, 1954, pág. 244), el caso particular de la transformada aplicada a la serie de Gregory-Leibniz como método de aceleración de la convergencia fue notificado a Leibniz por Bernoulli, en una carta que le envió en 1704. Allí, atribuía el descubrimiento a N. Fatzius. Tratemos entonces de estimar el límite S de la serie apelando a (5.1). Para eso necesitaríamos calcular $\Delta^n a_1$. Por inducción se puede probar que

$$\Delta^n a_1 = 2^n \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}.$$

Por lo tanto, el error dado por (5.1) debe verificar que

$$R_n^{(E)} \leq \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} \leq 10^{-5}.$$

Fácilmente encontramos que el primer valor de n para el cual esto se verifica es $n = 15$. En consecuencia, gracias al Teorema 5.1 sabemos que la suma parcial E_{15} aproxima S con un error menor que 10^{-5}. ¡Y esto es maravilloso! La transformada de Euler realmente nos permite acelerar la convergencia de nuestra serie de Leibniz. Ahora sí tendremos una idea mucho más acabada de cuál es el límite que estamos buscando. Quizás podremos develar el misterio de la calabaza. Haciendo unas pocas cuentas encontramos que

$$E_{15} = \frac{114.327.952.384}{145.568.097.675} = 0{,}78539153\ldots$$

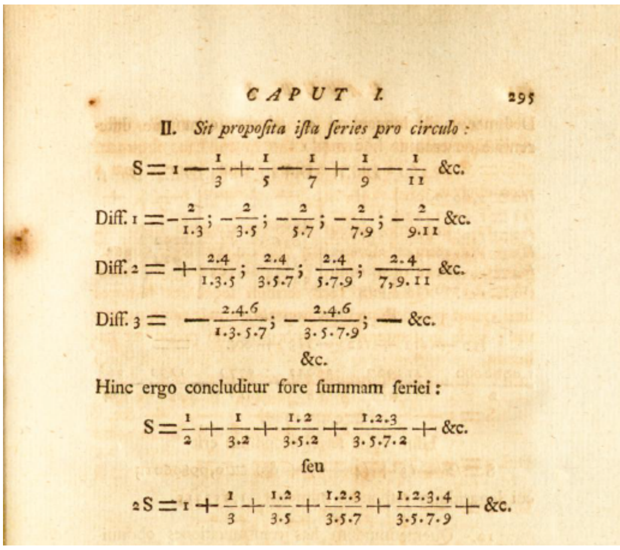
El Teorema 5.1 establece que la serie de Leibniz $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ converge a un número aproximado a $0{,}78539153\ldots$ Sin embargo, para obtener el número estampado en la calabaza, debemos recordar que aún nos falta multiplicar esta cantidad por 4. Si calculamos este producto obtenemos

$$4 \cdot 0{,}78539153\ldots = 3{,}14156612\ldots$$

Y esto parece bastante familiar, ¿o no? ¿Acaso el número que está en la calabaza no es otra cosa que π?

§6. Aparece el número π

6.1. Un poco de cálculo numérico. Los cálculos “a mano” realizados en el parágrafo anterior nos hacen sospechar que la serie converge a π (o a $\frac{\pi}{4}$ antes de multiplicar por el 4). Hasta aquí nos hemos centrado en hacer las cuentas “a mano” ya que esa era la manera en que procedían Leibniz, Bernoulli, Euler. De hecho, Euler publicó “sus cuentas” en su *Institutiones Calculi Differentialis Cum Eius Vsu In Analysi Finitorum Ac Doctrina Serierum* de 1755. En la Figura 3 apreciamos una bella imagen de ese libro en la que se calculan los primeros términos de la transformada de Euler de la serie de Leibniz.


CAPUT I. 295

II. *Sit propoſita iſta ſeries pro circulo:*

$$S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \ \&c.$$

$$\text{Diff. } 1 = -\frac{2}{1.3};\ -\frac{2}{3.5};\ -\frac{2}{5.7};\ -\frac{2}{7.9};\ -\frac{2}{9.11} \ \&c.$$

$$\text{Diff. } 2 = +\frac{2.4}{1.3.5};\ \frac{2.4}{3.5.7};\ \frac{2.4}{5.7.9};\ \frac{2.4}{7.9.11} \ \&c.$$

$$\text{Diff. } 3 = -\frac{2.4.6}{1.3.5.7};\ -\frac{2.4.6}{3.5.7.9};\ - \ \&c.$$

&c.

Hinc ergo concluditur fore ſummam ſeriei:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3.2} + \frac{1.2}{3.5.2} + \frac{1.2.3}{3.5.7.2} + \&c.$$

ſeu

$$2S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1.2}{3.5} + \frac{1.2.3}{3.5.7} + \frac{1.2.3.4}{3.5.7.9} + \&c.$$

Figura 3. Leonhard Euler. *Institutiones Calculi Differentialis Cum Eius Vsu In Analysi Finitorum Ac Doctrina Serierum.*, pág. 295, 1755. (ETH-Bibliothek Zürich)

Hoy disponemos de programas de cálculo numérico, como Octave y otros, que con unas pocas líneas de código nos permiten hacer cuentas rápidamente. El estudio sistemático de estos procedimientos ha dado origen a lo que se denomina *Análisis Numérico*. Como disciplina se ha desarrollado profundamente en el último siglo buscando formas más eficientes, precisas y estables de hacer las cuentas. Sin embargo, muchos de los métodos numéricos que hoy se utilizan han sido desarrollados junto con el surgimiento del análisis matemático. En este sentido, la transformada de Euler es un ejemplo de un método numérico significativamente más preciso y eficiente.

Volvamos a considerar entonces S_n y E_n, la sucesión de sumas parciales de la serie de la calabaza $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ y la de su transformada de Euler, respectivamente.

La siguiente tabla presenta una comparación entre la convergencia de $4S_n$ y $4E_n$. Podemos apreciar que en tan sólo 16 pasos, la suma $4E_n$ aproxima de forma exacta los primeros 5 dígitos de $\pi \approx 3{,}14159$, mientras que $4S_n$ solo aproxima de forma exacta el primer dígito.

n	$4S_n$	$4E_n$	n	$4S_n$	$4E_n$
1	4.00000	2.00000	9	3.25237	3.13947
2	2.66667	2.66667	10	3.04184	3.14058
3	3.46667	2.93333	11	3.23232	3.14111
4	2.89524	3.04762	12	3.05840	3.14136
5	3.33968	3.09841	13	3.21840	3.14148
6	2.97605	3.12150	14	3.07026	3.14154
7	3.28374	3.13216	15	3.20819	3.14157
8	3.01707	3.13713	16	3.07915	3.14158

Al mismo tiempo, la Figura 4 permite apreciar las diferencias entre S_n y $\frac{\pi}{4}$ (trazo de triángulos rojos) y entre E_n y $\frac{\pi}{4}$ (trazo de círculos azules).

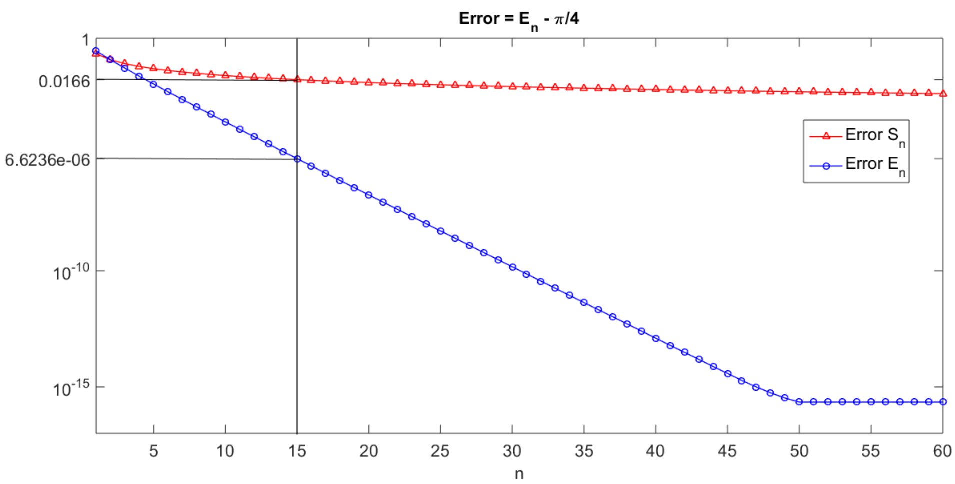


FIGURA 4. Comparación entre los errores R_n y $R_n^{(E)}$

En 15 pasos, el error $R_n^{(E)}$ ya alcanza el orden de 10^{-6}, mientras que R_n es del orden de $0{,}0166$. Además, con tan sólo 50 pasos la transformada de Euler alcanza un error del orden de la unidad de redondeo de máquina (observar que en la figura el error se estanca en el orden de 10^{-16} dado que esa es la unidad de redondeo de la máquina utilizada). En cambio, la serie original requiere más que cientos de miles de millones de pasos para alcanzar un error del mismo orden (puede calcularse la cantidad exacta de pasos necesarios realizando las mismas cuentas que hicimos en la Sección 4 aplicando el Teorema 3.2).

De este modo notamos que la transformada de Euler no sólo es una herramienta que permite hacer las cuentas a mano, sino que es un potente método de cálculo numérico. Por caso, si utilizando la serie de Gregory-Leibniz quisiéramos aproximar $\frac{\pi}{4}$ con un error del orden de la unidad de redondeo de máquina, 10^{-16}, conservando en un vector todas las sumas parciales de esta serie, necesitaríamos una memoria de cientos de gigabytes para guardar toda esa información y, en una PC de escritorio convencional, probablemente no podríamos terminar la cuenta porque dejaría de responder. Mientras que aplicando la transformada de Euler, calculando apenas 50 pasos, hemos obtenido en una milésima de segundo un error del orden 10^{-16} en un simple ordenador de 4Gb de memoria RAM utilizando el software Octave.

6.2. Una justificación formal. Sí, la serie en cuestión converge a π. ¡Y hemos podido observarlo numéricamente! Sin embargo, usualmente los matemáticos no nos conformamos con las observaciones numéricas, dado que no constituyen una demostración rigurosa del hecho observado. Así que ahora intentaremos ir un poco más allá y proporcionaremos una demostración.

Muchas demostraciones han sido elaboradas. Una que se suele dar en los cursos básicos de cálculo es la que se basa en la fórmula

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} 1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

y que a continuación recordamos. Observemos primeramente que a partir de la expresión para la suma de una serie geométrica podemos deducir que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{2n-2} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1+x^2} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1+x^2}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Integrando la identidad (6.1) entre 0 y 1 tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1+x^2} \right) dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 x^{2k}\, dx + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\, dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left. \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right|_0^1 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\, dx \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\, dx \\ &= S_n + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\, dx. \end{aligned}$$

Cuando $n \to \infty$ tenemos que

$$0 \le \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\, dx \le \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

y, por lo tanto,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}.$$

De esta manera, llegamos a la identidad buscada, la que nos permite develar el misterio de la calabaza:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}.$$

En su más que recomendable texto *Excursions in Calculus* (Young, 1992, pág. 314), Young (el mismo de las demostraciones presentadas en este artículo), escribe unas palabras muy interesantes, que traducimos a continuación:

> *. . . la fórmula más sorprendente –y uno de los más hermosos descubrimientos matemáticos del siglo* xvii*– es la famosa serie de Leibniz para el número π:*
>
> $$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$
>
> *Esta admirable serie alternada, con una ley de formación tan simple, permite apreciar la relación entre π y los enteros en una forma mucho más profunda que a través de su desarrollo decimal, el cual no proporciona ningún orden aparente de regularidad en la sucesión de sus dígitos. Sin embargo, su belleza no va de la mano de su practicidad: se requerirían* $100{,}000$ *términos para calcular π con una precisión similar a la que consiguió de Arquímedes.*
>
> *[. . .]*
>
> *Esta fórmula reduce el misterioso número π a los enteros con una simpleza y una elegancia -y sorpresa- característica del arte más elevado. Y con todo, el resultado aún es misterioso ya que su deducción por medio de integrales y series geométricas no revela la relación que existe entre π y los números impares. ¿Por qué un círculo tiene algo que ver con los números impares?*

Ahora que sabemos que la cantidad estampada en la calabaza no es otra cosa que el número π, ¿cuál es el sentido de esa inscripción? ¿cuál es el mensaje oculto, la información implícita? En suma, ¿cuál es el misterio de la calabaza? Es un juego de palabras en inglés cuya gracia se pierde al traducirlo al español. En inglés, π y la palabra *pie*, que significa pastel, se pronuncian de igual modo: paɪ. Y es una tradición de Halloween comer pastel de calabaza, es decir, *pumpkin pie*. Este es el juego que sugiere la imagen. Es claro que el chiste no es gracioso en español pues además no solemos comer pastel de calabaza; más bien comemos tarta de calabaza. Es cierto, el chiste carece de gracia. De todos modos, era el disparador para construir un relato en torno a la satisfacción y las sorpresas que hemos experimentado a medida que lo fuimos construyendo.

§7. Conclusiones

Llegamos al final del relato. Intentamos compartir con los lectores algunas experiencias propias. Cuando comenzamos la escritura aún no conocíamos el paper de Villarino. Su artículo nos permitió encontrar la idea para darle cierre a nuestra historia. Por supuesto, como en todo relato, hay una elección del énfasis, una elección del modo de relatar.

Hemos aprendido bastante sobre las series alternadas, un aprendizaje que además tiene un impacto inmediato en nuestras clases. Ese es el trabajo del investigador docente, buscar, estudiar, aprender. Y lo que más nos interesa resaltar es que hay mucho por hacer, aun en lo más básico de la matemática.

Y ahora que empiece la música, mientras vamos presentando a los homenajeados:

Madhava de Sangamagrama (1340-1425) fue un matemático y astrónomo indio, fundador de la escuela de Kerala. Para algunos historiadores (Rajagopal y Rangachari, 1978) los matemáticos keraleses se cuentan entre los creadores del análisis matemático, con importantes desarrollos en el campo de las series y las series de potencias. Madhava estudió -entre otras cuestiones- la serie del arcotangente que para $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}(1)$ da lugar a la serie de la calabaza.

James Gregory (1638-1675) fue un matemático y astrónomo escocés, profesor de las universidades de St. Andrews y Edinburgh. Aunque en su época pasó desapercibido, demostró que los problemas de la tangente y del área son problemas inversos (una especie de "teorema fundamental del cálculo integral") y también, en su *Vera Circuli et Hiperbolae Quadratura*, utilizó series convergentes y procesos de paso al límite (algo que recién comenzaban a hacer Newton y Leibniz, los fundadores del análisis matemático) para obtener áreas, volúmenes de sólidos de revolución y longitudes de curvas. En 1671 Gregory redescubrió (Kline, 1992) el teorema de la serie del arcotangente formulado originalmente por Madhava.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) probablemente no necesita presentación. Fue uno de los más grandes pensadores de los siglos XVII y XVIII en los más diversos campos del pensamiento: metafísica, epistemología, lógica, física, y un largo etcétera que, por supuesto, incluye a la matemática. Sin dudas su mayor aporte en este campo fue la creación del cálculo diferencial e integral (título compartido o disputado con otro genio de la época: Isaac Newton).

Referencias

Calabrese, P. (1962). Classroom Notes: A Note on Alternating Series. *Amer. Math. Monthly*, *69*(3), 215–217.

Johnsonbaugh, R. (1979). Summing an alternating series. *Amer. Math. Monthly*, *86*(8), 637–648.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Alianza Editorial.

Knopp, K. (1954). *Theory and application of infinite series*. Blackie & Son Limited, London and Glasgow. (Second english edition)

Rajagopal, C., y Rangachari, M. (1978). On an untapped source of medieval Keralese mathematics. *Arch. History Exact Sci.*, *18*(2), 89–102.

Villarino, M. (2018). The error in an alternating series. *Amer. Math. Monthly*, *125*(4), 360–364.

Young, R. (1985). The error in alternating series. *Math. Gaz.*, *69*, 120–121.

Young, R. (1992). *Excursions in calculus – an interplay of the continuous and the discrete*. Mathematical Association of America, Washington, DC. (volume 13 of The Dolciani Mathematical Expositions)

Roberto Ben
Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento
Ciclo Básico Común, Universidad de Buenos Aires
(🖂) *rben@ungs.edu.ar*

Antonio Cafure
Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento
Ciclo Básico Común, Universidad de Buenos Aires
(🖂) *acafure@ungs.edu.ar*

Recibido: *21 de septiembre de 2018*.
Aceptado: *25 de noviembre de 2018*.
Publicado en línea: *21 de diciembre de 2018*.

¿Por qué las sucesiones?

Nota editorial por Juan Carlos Pedraza

Las sucesiones son objetos matemáticos muy sencillos que se apoyan en la ordenación de un conjunto (finito o infinito) de números. En la literatura matemática, la idea de sucesión se suele formular en términos del concepto de función, este último mucho más moderno y general que el primero, ver (Courant y John, 1994) y (Hardy, 1962). Sin embargo esta correcta visión de las sucesiones puede ocultar a veces su sencillez y su potencialidad como disparador de ideas, métodos y modelos. Daremos en esta nota editorial, algunas pinceladas históricas (desprovistas de rigor) que nos acercarán un poco a las razones de por qué estudiar sucesiones y que servirán a la vez como motivación e introducción a la lectura de las bellas técnicas y resultados presentados en el artículo *Series de Leibniz: un relato de Noche de Brujas* que forma parte de este número.

Podemos decir que la idea de sucesión ha estado presente desde siempre en la historia de la matemática. Galileo observó y anotó cuidadosamente el espacio que en cada segundo, recorría una bolita al caer por un plano inclinado. Estudiando la sucesión finita de números obtenidos, concluyó que el espacio recorrido en t segundos era proporcional al cuadrado del tiempo y que la constante de proporcionalidad dependía de la inclinación del plano.

Dos mil años antes, Arquímedes dejó preparadas las ideas del cálculo infinitesimal a la espera de que la ciencia le perdiera el miedo al infinito usando la idea de sucesión. Para calcular el área de un "triángulo parabólico" (Figura 1), dividió la figura en bandas rectangulares y calculó, tanto por defecto como por exceso, aproximaciones del área buscada (Figura 1a y Figura 1b).

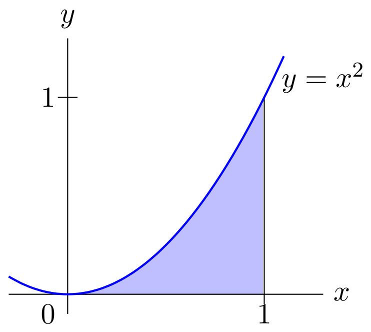


Figura 1

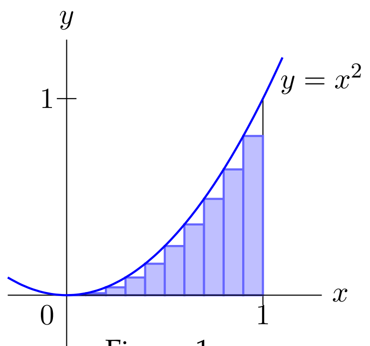


Figura 1a

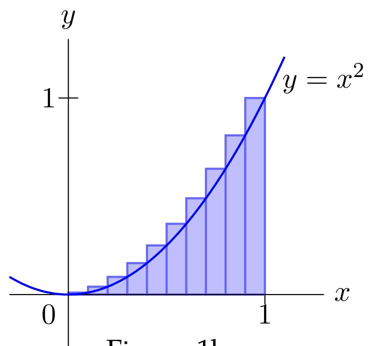


Figura 1b

A medida que agregaba rectángulos, crecían los términos a sumar y mejoraban las aproximaciones. Más precisamente, si llamamos A al área del triángulo parabólico y k a la cantidad de divisiones, resulta

$$\frac{1}{k^2}\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+(k-1)^2\right) < A < \frac{1}{k^2}\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+(k-1)^2+k^2\right).$$

Arquímedes calculó estas sumas de cuadrados, ver (Bunge, 2011) y obtuvo

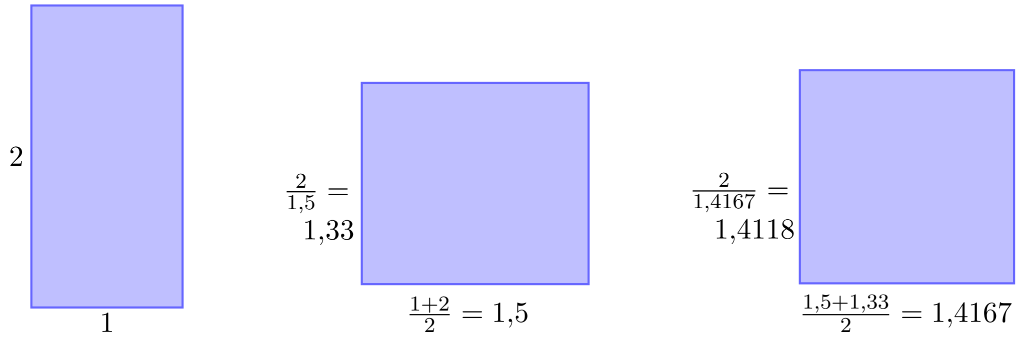
$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{6k^2} < A < \frac{1}{3}+\frac{1}{2k}+\frac{1}{6k^2}.$$

El único número comprendido entre estas dos expresiones, que hacen cierta la desigualdad para todo valor de k, es $\frac{1}{3}$. Esta idea, tendría que esperar la llegada de Newton y Leibniz para cristalizarse en el cálculo integral.

Dos siglos antes de Arquímedes, Zenón de Elea desafiaba a los pitagóricos planteando algunas paradojas del infinito. Los eleáticos, corriente filosófica a la que pertenecía Zenón, planteaban que fenómenos como el movimiento eran producto de nuestros sentidos. Para "demostrar" la imposibilidad del movimiento decía que si para ir de A a B nos demoramos 2 minutos, primero debemos hacer la primera mitad del recorrido en 1 minuto, luego la mitad de la mitad restante en $\frac{1}{2}$ minuto, luego la mitad de lo que resta en $\frac{1}{4}$ de minuto y así "hasta la eternidad". Zenón pensaba que la suma infinita de tiempos positivos que genera este razonamiento $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots$ es infinito. De allí concluía que ir de A a B era imposible. Ergo, el movimiento no existe, ver (Boyer, 1986). Si bien Zenón estaba equivocado, planteaba un problema que solo una buena definición de "suma infinita" iba a poder resolver muchos siglos después. Además se recurría, tal vez por primera vez, al método por el absurdo, herramienta imprescindible en el quehacer matemático.

Como vemos, las "sumas infinitas" o series estuvieron siempre presentes en el desarrollo de nuestra ciencia. Las series son un caso particular de sucesiones y surgen, como en el caso de Arquímedes o de Zenón, cuando se pretende sumar todos los términos de una sucesión infinita. Sorprende (o tal vez no debiera) que tanto Newton como Leibniz, dieran sus primeros pasos en la matemática, estudiando algunas de ellas. Newton, cuando tenía entre 22 y 23 años, descubrió el teorema binomial, que no es el que conocemos como Binomio de Newton y muestra la manera de calcular la potencia de una suma cuando el exponente es un entero positivo ($(a+b)^n$ con $n=1,2,3,\ldots$). Este resultado era conocido mucho tiempo antes que Newton naciera. A Newton le interesaba este binomio cuando el exponente era una fracción. Más concretamente, logró escribir la expresión $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ como una suma infinita de potencias de x. Este estudio, lo llevó a convencerse de que el análisis mediante series infinitas tenía la misma consistencia interna que el álgebra de cantidades finitas. Escribió en 1669: *"Todo lo que el Álgebra lleva a cabo por medio de ecuaciones con un número finito de términos (siempre que ello pueda hacerse), este nuevo método puede siempre conseguir lo mismo por medio de ecuaciones infinitas" (Boyer, 1986).* Newton con esto daba el salto que ni Zenón ni Arquímedes ni los que lo sucedieron por dos mil años, se habían atrevido.

Las sucesiones han cobrado una gran importancia en la generación de algoritmos para el cálculo y la programación. La creación del cálculo infinitesimal le permitió a Newton formular un algoritmo muy efectivo para calcular los ceros de una función dada. Usamos sus ideas para mostrar uno que calcula la raíz cuadrada de un número positivo, pero apelando a un argumento geométrico, ver (Pedraza, 2000) y (Hardy, 1962). El problema consiste en encontrar un algoritmo que calcule la raíz cuadrada de un número dado (por ejemplo $\sqrt{2}$), utilizando sólo las cuatro operaciones básicas. Se construyen sucesivos rectángulos **todos de área 2**. La base de cada uno de ellos es el promedio de la base y la altura del anterior.



Así resulta que la base de los sucesivos rectángulos son

$$b_1 = 1, \qquad b_2 = \frac{1+2}{2} = \frac{b_1 + \frac{2}{b_1}}{2}, \qquad b_3 = \frac{b_2 + \frac{2}{b_2}}{2}$$

y así sucesivamente

$$b_{n+1} = \frac{b_n + \frac{2}{b_n}}{2}$$

Geométricamente se observa que los rectángulos se van aproximando a un cuadrado de área 2, por lo cual las bases se van aproximando al lado del cuadrado de área 2, es decir $\sqrt{2}$. Si suponemos que L es el límite de la sucesión b_n, resulta que L debe cumplir

$$L = \frac{L + \frac{2}{L}}{2}$$

y despejando llegamos a que efectivamente $L = \sqrt{2}$. Todo se reduce a probar que L efectivamente existe, para lo cual necesitamos tener bien claro el concepto de límite de una sucesión.

También en la obra temprana de Leibniz aparecen las sumas infinitas. Nos cuenta Boyer en (Boyer, 1986) que el físico y matemático holandés, C. Huygens, le planteó el problema de calcular la suma de los inversos de los números triangulares. Los números triangulares son los de la forma $\frac{n(n+1)}{2}$ (suma de los primeros n números naturales). El desafío que el holandés le propuso era calcular la serie numérica

$$S = \frac{2}{1\times 2} + \frac{2}{2\times 3} + \frac{2}{3\times 4} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)} + \ldots$$

La habilidad de Leibniz lo llevó a descomponer cada término de la suma como
$$\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$$
generando así una "suma telescópica", donde cada término se cancela con el siguiente, y "hace fácil" la suma de la serie:
$$S = \frac{2}{1} - \frac{2}{2} + \frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \cdots + \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \ldots$$
y como todos los términos, salvo el primero, se cancelaban, obtuvo
$$S = 2.$$

Si bien el método usado por Leibniz no fue muy ortodoxo por falta de una buena definición de serie en términos del concepto de sucesión y de límite, la idea, además de hermosa, es en la actualidad una herramienta de uso frecuente en el cálculo. El cálculo infinitesimal tuvo que lidiar durante casi dos siglos con las críticas bien fundadas de varios matemáticos y filósofos. Las cantidades "infinitamente pequeñas" que no llegaban a ser cero, permitían que aparecieran como denominadores en cocientes, al mismo tiempo que se podían tomar como cero cuando esto simplificaba los cálculos. Uno de los críticos más relevantes fue el matemático francés Jean Le Ronde D'Alembert (1717 – 1783). Él decía de estas cantidades infinitesimales:

> *... una cantidad es algo o nada; si es algo, aún no se ha desvanecido,*
> *si es nada ya se ha desvanecido. La suposición de que hay un estado intermedio*
> *entre estos dos es una quimera ...*

Esta suerte de inconsistencia lógica en los razonamientos hacía pensar a muchos que las nuevas teorías tenían pies de barro… Pero las objeciones de D'Alembert eran constructivas. Fue uno de los redactores principales de la Encyclopédie, que precedió y de alguna manera preparó el terreno intelectual para la Revolución Francesa. En ella muestra la necesidad de introducir una nueva noción: llama a una cantidad el *límite* de una segunda cantidad variable si la segunda puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que cualquier cantidad dada (sin llegar nunca a coincidir con ella), ver (Robinson, 1966). Hubo que esperar al siguiente siglo para dar mayor precisión y sobre todo hacer operativo a este concepto fundamental de la matemática. A comienzos del siglo XIX, la cantidad y calidad de los resultados obtenidos con las ideas introducidas por Newton y Leibniz, volvió imperioso dotar al análisis del mismo nivel de rigor que se había utilizado en geometría desde los tiempos de Euclides. Con este espíritu, en 1821, Augustine Cauchy (1789 – 1857) publicó su *Course d'analyse* destinado a los estudiantes de la Escuela Politécnica de París. Introduce una noción de variable que permite darle al concepto de límite un carácter operativo y práctico. Con esta noción los molestos infinitésimos pasan a ser variables que tienen límite cero. Esta tarea de fundamentación del cálculo es terminada por Karl Weiestrass (1815 – 1897).

Referencias

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Alianza Editorial.

Bunge, M. (2011). La suma de cuadrados. *Qed*, *5*, 18–22.

Courant, R., y John, F. (1994). *Introducción al cálculo y al análisis matemático*. Limusa.

Hardy, G. H. (1962). *Curso de análisis matemático*. Ed. Nigar. (Traducción de la 10ª Edición inglesa)

Pedraza, J. C. (2000). Las raíces de newton. *Boletín Federación Iberoamericana de Competencias Matemáticas*, *7*, 3–4.

Robinson, A. (1966). *Non-standard analysis*. North Holland, Amsterdam.