Sección de Problemas

☞ *por Juan Pablo Rossetti*

Los siguientes problemas están pensados para un público amplio. Las soluciones se encuentran en la página siguiente.

Problema 1. ADIVINAR UN NÚMERO. Un problema clásico consiste en adivinar un número entero x entre 1 y n con preguntas donde la respuesta es *sí* o *no*. Cada pregunta podría ser si x es mayor que $\frac{n}{2}$ (o $\frac{n+1}{2}$ si n impar), de modo de reducir el conjunto de valores posibles para x a la mitad y así en k pasos se puede saber el valor de x, donde k es el único número entero tal que $2^{k-1} < n \leq 2^k$, es decir, k es el menor entero mayor o igual que $\log_2(n)$.

Proponemos una modificación de este problema, donde también hay que adivinar un número entero x entre 1 y n con preguntas *¿es x mayor que?* un cierto número entero, pero con la condición que no se podrá seguir preguntando cuando se obtiene una segunda respuestas *no*. Es decir, si hay dos respuestas *no* (no necesariamente consecutivas), entonces hay que ser capaces de adivinar el número sin realizar más preguntas.

¿Se puede adivinar el número x? ¿Cuántas preguntas se necesitan? ¿Cómo es la estrategia para llegar al mínimo de preguntas necesarias? Un caso concreto es cuando $n = 100$. *¿Cuántas preguntas se necesitan en este caso?*

Problema 2. VOLUMEN DE UNA CAJA. Hallar el máximo volumen de una caja hecha a partir de un cartón cuadrado de 60 cm por 60 cm al recortarle cuatro cuadrados iguales, uno en cada esquina, y doblar los lados del cartón hacia arriba de modo de formar una caja sin tapa.

Problema 3. PROGRESIÓN ARITMÉTICA DE PRIMOS. Hallar un progresión aritmética de siete números naturales que sean primos. Es decir, hallar a y b naturales de modo que a, $a + b$, $a + 2b, \ldots, a + 6b$ sean todos números primos. *Hallar la progresión de modo que $a + 6b$ sea lo menor posible.*

Problema 4. REPARTO DE PREMIOS. En un juego, dos personas tiran la moneda al azar, y el primero que llega a 6 aciertos, gana x pesos. Cuando van 5 a 3, se interrumpe el juego, y no se va a poder continuar, de modo que un jurado deberá decidir cómo dar el premio, de la manera más justa. Quien iba ganando, quiere que le den todo el premio a él. El otro, quiere que repartan mitad y mitad. Alguien propone dar cinco octavas partes del premio a quien llevaba 5 aciertos y tres octavas partas e quien llevaba 3 aciertos. Por suerte en el jurado hay una profesora de matemática y se da cuenta que lo más justo, sería repartir el premio, de acuerdo a las probabilidades de triunfar de cada uno. *¿Cómo se debería repartir entonces el premio?* [Ayuda: leer el artículo sobre Probabilidades en este mismo número!]

SOLUCIONES

Solución 1. Sí, claramente se puede llegar al valor de x. Una estrategia, lenta pero válida, sería preguntar si x es mayor que uno. Si la respuesta es no, entonces $x = 1$; si la respuesta es sí, entonces preguntamos ¿es x mayor que 2?, y así, seguimos, hasta que nos digan que no. Esta estrategia es muy ineficiente y podríamos necesitar hasta $n-1$ preguntas. Mejor es elegir un número k que sea aproximadamente la raíz cuadrada de $2n$ y preguntar ¿es $x > k$? Si la respuesta es no, entonces tendremos que empezar a subir desde el 1 hasta el $k-1$, uno por uno, hasta obtener el segundo no. Si la respuesta a ¿$x > k$? es sí, entonces pasamos a preguntar ¿es $x > 2k-1$? Ahora procedemos de manera análoga: si la respuesta es *no*, comenzamos a subir desde $k+1$, de a uno, en caso contrario, preguntamos ¿es $x > 3k-3$?, y así continuamos, con preguntas ¿es $x > tk - \frac{t(t-1)}{2}$? Esto da una solución utilizando k preguntas, cuando $n \leq k(k+1)2+1$.

Para ser más precisos, con k preguntas podemos adivinar un número que está entre 1 y n donde $n \leq \frac{k(k+1)}{2}$+1. El caso en que $n = 100$, se ve que k debe ser 14.

Solución 2. Los cuadrados que se recortan en las esquinas son de 10 cm x 10 cm, la caja que se arma es de base cuadrada de 40 cm de lado y de alto 10 cm, por lo tanto, su volumen es 16 mil cm^2.

Para justificarlo, se pueden usar la desigualdad entre las medias geométrica y aritmética; o hallar el máximo con derivadas (sería de la función cúbica $f(x) = x^2(60-x)$ para x que satisface $0 \leq x \leq 60$).

Solución 3. La respuesta es $a = 7$, $b = 60$, por lo que $a + 6b = 367$.

Notemos que b tiene que tener en su descomposicion en primos al 2, al 3, al 5, de lo contrario, entre los primeros 2 términos de la progresión habrá uno que es múltiplo de 2 (y si a =2, entonces el 3er término de la progresión será un número par compuesto). Un análisis similar se puede hacer con el 3 y con el 5. De modo que b debe ser múltiplo de 2, 3 y 5. Con el 7, sucedería algo similar: si b no es múltiplo de 7, cada siete elementos de la progresión, habrá un múltiplo de 7. Pero justo podemos tomar $a = 7$. El intento con $a = 7$ y $b = 30$ falla pues $187 = 11 \cdot 17$. Por lo que hay que aumentar b al doble.

Solución 4. Le tocará $7/8$ del premio al que marcha primero y solo $1/8$ al otro. Esto surge de analizar las probabilidades de ganar que tendrían ambos en caso de que el juego continuare.

¡Sucesiones al toque!

¿Cuál creés que es el próximo número en las siguientes sucesiones y por qué? ¿Te animás a encontrar más términos de estas sucesiones?

$$\{a_n\}: \quad 1, 5, 7, 17, 31, 65, 127, 257, \ldots$$

$$\{b_n\}: \quad 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 4, 4, 3, 5, 5, 3, 6, 6, 4, 7, 7, 4, 8, 8, 5, \ldots$$

$$\{c_n\}: \quad 10, 5, 13, 10, 16, 15, 19, 20, 22, 25, \ldots$$

$$\{d_n\}: \quad 4, 6, 12, 18, 30, 42, 60, 72, 108, \ldots$$

No se sabe si la última sucesión es infinita o no, se espera que sí. Ayuda: tiene que ver con los números primos.

Podés encontrar las soluciones en la página 75.