Revista de Educación Matemática
Volumen 33, N° 3 (2018), páginas 51 – 67
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Artículo de Matemática

MATEMÁTICA EN AZAR Y JUEGOS

Roberto J. Miatello, Angel D. Villanueva

Resumen. El objetivo de esta nota es aplicar la teoría de probabilidades a diversas situaciones en azar y juegos. Haremos uso de las nociones básicas de la probabilidad discreta y de la combinatoria. Nos interesará especialmente el comportamiento de la probabilidad cuando algunos de los parámetros involucrados crece arbitrariamente.

§1. Introducción

El concepto de probabilidad surge en los siglos XVI y XVII, en parte ante la necesidad de resolver problemas que se plantean en los juegos de azar (L. Pacioli, Tartaglia, G. Cardano, B. Pascal). Se considera entre los iniciadores a P. Fermat y B. Pascal quienes, con motivo del problema de repartición del premio, alrededor de 1654 fijaron los primeros conceptos. El físico holandés C. Huygens fue uno de los pioneros en el estudio de la probabilidad, tema sobre el que publicó en 1656 el libro *De ratiociniis in ludo aleae* (Razonamientos sobre los juegos de azar). En él introdujo algunos conceptos importantes en este campo, como la esperanza matemática, y resolvió algunos de los problemas propuestos por Pascal, Fermat y De Méré. Esta obra de Huygens sería estudiada profundamente por Jakob Bernoulli en su *Ars conjectandi*.

Hoy en día la idea de probabilidad (y de su disciplina hermana, la estadística) aparece en muchos campos de la ciencia, en eventos deportivos, juegos de azar, en pronósticos económicos, pronósticos de tiempo, entre tantas otras disciplinas o actividades humanas. Se considera que la teoría 'moderna' de probabilidades fue iniciada por el matemático ruso A. Kolmogorov quien en 1933 publicó un libro fundamental sobre el tema.

Resumidamente, dado un experimento con una cantidad de resultados posibles se desea saber si un determinado evento puede ocurrir y con qué chances (en inglés 'what are the odds'?). Cuando hay un número finito de resultados posibles y todos ellos son equivalentes, la probabilidad de un evento se calcula dividiendo el número de resultados favorables (al evento) por el número total de casos posibles. Cuando hay una infinidad de casos, la situación es más compleja, es necesario dividir la 'medida' del conjunto de casos favorables por la 'medida' del conjunto de casos posibles. Obviamente, elegir la manera adecuada de medir depende del problema que se estudie y es un aspecto esencial de la dificultad.

De alguna manera, la teoría de probabilidades intenta explicar en conceptos matemáticos cual será el devenir de ciertos acontecimientos. Laplace (1749 – 1827) decía que *"la teoría de probabilidades no es más, en el fondo, que el buen sentido reducido al cálculo; ella hace apreciar con exactitud lo que los espíritus justos sienten por una especie de instinto, sin que puedan a menudo darse cuenta de ello"*.

En estas notas aplicamos conceptos básicos de la teoría de probabilidades a diversas situaciones de azar dentro del primer tipo, esto es, con un número finito de resultados posibles todos ellos equivalentes. En particular analizaremos el problema de repartición del premio, mostraremos que en un curso de 40 estudiantes es muy probable que haya al menos dos que cumplan años el mismo día y explicaremos por qué en un torneo a eliminación directa, aumentan las chances del equipo que es superior si la serie se define en un número creciente de partidos (3, 5 o más) en lugar de en un sólo encuentro.

§2. Cálculo de probabilidades

Dado un experimento con una cantidad finita de resultados posibles, todos ellos equivalentes, se define la probabilidad de un evento E como el cociente de los casos favorables sobre los casos totales

$$p(E) = \frac{\#\{\text{resultados favorables}\}}{\#\{\text{resultados posibles}\}},$$

donde el símbolo $\#$ denota el número de elementos de un conjunto.

Veamos algunos ejemplos para ilustrar esta definición.

Ejemplos

(1) Si se lanza un dado, la probabilidad de que salga el número 1 es de una (favorable) en 6 (posibles), es decir

$$p(\{1\}) = \tfrac{1}{6}.$$

(2) Ahora bien, si nuevamente se lanza un dado, la probabilidad de obtener un número par es

$$p(\text{par}) = \frac{\#\{2,4,6\}}{\#\{1,2,3,4,5,6\}} = \tfrac{1}{2}.$$

(3) Ahora bien, si se lanzan 2 dados, nos preguntamos cuál es la probabilidad de que salga al menos un 1.

El número de resultados posibles es $6 \cdot 6 = 36$, pues para cada uno de los dados hay 6 posibilidades. Los resultados favorables son los del tipo

$$\begin{cases} 1y & \text{(si sale 1 en el primer dado y cualquier número y en el segundo),} \\ x1 & \text{(si sale cualquier número x en el primer dado y 1 en el segundo).} \end{cases}$$

Notar que hay 6 posibilidades en cada caso y que al 11 lo hemos contado 2 veces, luego hay que restarlo. Luego, los casos favorables son $6 + 6 - 1 = 11$ y se tiene

$$p(\text{obtener al menos un } 1) = \tfrac{11}{36}.$$

(4) Si se lanzan 3 dados, queremos nuevamente saber la probabilidad de que salga al menos un 1.

Los casos posibles son $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. Enumeremos los casos favorables. Ellos son del tipo

$$\begin{cases} 1yz & \text{hay } 6.6 = 36 \text{ casos,} \\ x1z & \text{hay } 5.6 = 30 \text{ casos,} \\ xy1 & \text{hay } 5.5 = 25 \text{ casos.} \end{cases}$$

Observamos que en la opción $x1z$, x puede tomar 5 valores (2, 3, 4, 5, 6) pues el caso en que toma el valor 1 ya se contó en el primer combo $1yz$. Similar argumento es válido para el combo $xy1$. De acuerdo a este razonamiento, el conteo de casos favorables da $36 + 30 + 25 = 91$, luego

$$p(\text{salga al menos un } 1) = \tfrac{91}{216}.$$

Teniendo en mente estos ejemplos, veremos a continuación que hay un modo más simétrico de contar los casos favorables.

Teorema 2.1. *(Principio de inclusión-exclusión) Si $A_1, \ldots, A_n$ son conjuntos finitos entonces*

$$\begin{aligned} \#(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{1 \le i \le n} \#A_i - \sum_{1 \le i < j \le n} \#(A_i \cap A_j) \\ + \sum_{1 \le i < j < k \le n} \#(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} \#(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \end{aligned}$$

donde $\#A$ denota el cardinal, o sea la cantidad de elementos, de A.

Veamos de justificar esta fórmula en los casos $n = 2$ y $n = 3$.

Si $n = 2$ tenemos

$$\#(A_1 \cup A_2) = \#A_1 + \#A_2 - \#(A_1 \cap A_2),$$

ya que los elementos de $A_1 \cap A_2$ han sido contados dos veces.

Si $n = 3$ tenemos que

$$\begin{aligned}\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =& \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 \\ & - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_1 \cap A_3) - \#(A_2 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\end{aligned}$$

pues, en la primera suma, los elementos de los $A_i \cap A_j$ han sido contados dos veces y entonces hay que restarlos y, por otra parte, los de $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ fueron contados tres veces y luego restados tres veces, por lo tanto es necesario sumarlos una vez, como indica la fórmula.

Aplicaremos la fórmula del teorema en el caso del ejemplo (4), calculando los casos favorables por medio del principio de inclusión-exclusión. Es decir, contaremos las ternas con al menos un número 1, restaremos las ternas que tienen al menos dos números 1 y finalmente sumaremos las ternas que tienen tres números 1.

En la notación del teorema tenemos

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{\text{ternas con 1 en la primera posición}\}, \\ A_2 &:= \{\text{ternas con 1 en la segunda posición}\}, \\ A_3 &:= \{\text{ternas con 1 en la tercera posición}\}. \end{aligned}$$

Los casos en que hay al menos un número 1 son

$$\begin{cases} 1yz & (\text{esto es, } A_1), \\ x1z & (\text{esto es, } A_2), \\ xy1 & (\text{esto es, } A_3), \end{cases}$$

y en cada caso hay 36 posibilidades.

Los casos en que hay al menos dos números 1 son

$$\begin{cases} 11z & (\text{esto es, } A_1 \cap A_2), \\ 1y1 & (\text{esto es, } A_1 \cap A_3), \\ x11 & (\text{esto es, } A_2 \cap A_3), \end{cases}$$

en cada caso hay 6 posibilidades.

Finalmente, el caso en que hay tres números 1 es

$$111 \quad (\text{esto es, } A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Por lo tanto, el número de casos favorables es

$$36 + 36 + 36 - 6 - 6 - 6 + 1 = 91.$$

Antes de discutir algunas aplicaciones introducimos los siguientes conceptos que utilizaremos a lo largo del texto.

El *factorial* de un entero positivo n se define como el producto de todos los enteros positivos desde 1 hasta n y lo denotamos $n!$ Por ejemplo, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Por convención, se toma $0! = 1$.

Dados $n \geq m$ enteros positivos, el *número combinatorio* $\binom{n}{m}$ se define como

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

Este, representa el número total de subconjuntos de m elementos de un conjunto de n elementos.

A modo ilustrativo, si tenemos 4 jugadores de tenis A, B, C y D ¿Cuáles son todas las parejas de dobles que podemos armar? Tenemos

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6.$$

Estas son: AB, AC, AD, BC, BD y CD.

§3. Repartición del premio.

Un problema que algunos consideran que fue el origen del cálculo de probabilidades es el siguiente. *Dos jugadores, A y B, juegan un juego en que ambos tienen las mismas probabilidades de ganar, por ejemplo, tirar una moneda equilibrada: cuando sale cara (C) gana A y cuando sale escudo (E) gana B. El ganador será el primero en ganar (por ejemplo) 6 rondas. La pregunta es ¿Cómo se debería repartir el premio si el juego se interrumpe antes de finalizar cuando un jugador ya ha ganado (por ejemplo) 5 rondas y el otro 3?*

Este problema fue considerado por matemáticos importantes de la época y tuvo varias soluciones incorrectas. Esto dio origen a una correspondencia entre Pascal y Fermat (aproximadamente 1650) quienes finalmente dieron la solución acertada. Christian Huygens, que tuvo conocimiento de esta correspondencia en 1655 publicó en 1657 el tratado *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (Calculando en juegos de azar) en el que resolvía los problemas sobre probabilidades que circulaban en aquella época. Este tratado se convirtió en el primer tratado publicado sobre cálculo de probabilidades.

Según Pascal y Fermat, la repartición del premio debería tener en cuenta lo que puede suceder si el juego continúa.

En efecto, si el juego continuara, terminaría como máximo en 3 rondas, si ganara las tres el jugador B y en menos si A ganara alguna. Notar que para que B gane el premio, debería salir tres veces seguidas escudo (E). La probabilidad de que esto suceda es

$$p(\text{EEE}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Por lo tanto, de 8 casos posibles, hay 7 casos en los que gana el jugador A y un caso en que gana B

CCC	CCE	CEC	CEE
ECC	ECE	EEC	EEE

Notar que el único caso en que gana B es el último (EEE).

La conclusión es que corresponde recibir $\frac{7}{8}$ partes del premio al jugador A y $\frac{1}{8}$ parte al jugador B.

Más generalmente, consideremos el caso en que varía el número de rondas. Supongamos que B necesita n rondas para vencer y A m rondas, con $n > m$. En este caso, el juego termina en

$$(n-1)+(m-1)+1 = n+m-1$$

rondas y A, para vencer, precisa ganar un número $j \geq m$ de rondas. Luego

$$p_A = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+m-1} \sum_{j=m}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{j}.$$

Por ejemplo, si $m = 1$ y $n = 3$ queda

$$p_A = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^{3} \binom{3}{j} = \frac{1}{8}(3+3+1) = \frac{7}{8},$$

como hallamos anteriormente.

§4. Cumpleaños

En una reunión de 30 personas, *¿cuál es la probabilidad de que dos de ellas cumplan años el mismo día?*

Para determinarlo, es más conveniente calcular la probabilidad de que NO haya dos personas que cumplan años el mismo día.

Notar que la primer persona tiene los 365 días del año disponibles, pero la segunda persona sólo dispone de 364 días, y así hasta la persona número 30 que tiene disponibles 336 días.

Luego, en un grupo de 30 personas, la probabilidad de que todas ellas cumplan años en distintos días es

$$p(\text{cumplan días distintos}) = \frac{365 \cdot 364 \cdots 337 \cdot 336}{365^{30}} \sim 0,29.$$

Dejamos la verificación del cálculo al lector.

Por lo tanto, la probabilidad de que haya al menos 2 personas que cumplan el mismo día, es

$$\begin{aligned} p(\text{dos cumplen el mismo día}) &= 1 - p(\text{todos cumplen en días distintos}) \\ &= 1 - 0,29 = 0,71 \sim 71\,\%. \end{aligned}$$

Uno puede hacer otro cálculo y comprobar que en un grupo de 23 personas o más resulta más probable que haya al menos 2 que cumplan años el mismo día, a que no los haya. Asimismo, se puede ver que en un grupo de 60 personas, la probabilidad de que haya dos que cumplan años el mismo día es realmente muy grande, de aproximadamente $99\,\%$.

§5. Dígitos en un número natural

La pregunta es ahora estimar la probabilidad p_n de que un dígito fijo (digamos 7) aparezca en la expresión de un número natural y analizar el comportamiento de p_n cuando n tiende a infinito.

Supondremos que n tiene a lo sumo h cifras. Si $h = 1$, entonces n puede tomar todos los valores entre 0 y 9 salvo 0 y 7 (ya que 0 no es natural), es decir hay 8 posibilidades. Si h=2, la primera cifra tiene 8 valores posibles y la segunda 9 pues 0 ahora está permitido. Similarmente, si n posee h cifras, todas las cifras salvo la primera tienen 9 valores posibles.

Esto nos dice que entre 0 y $n = 10^h - 1$ el número de casos desfavorables es

$$8(1 + 9 + 9^2 + \cdots + 9^{h-1}) = 8\frac{9^h - 1}{9 - 1} = 9^h - 1.$$

Luego, la probabilidad de que no aparezca el dígito 7 es

$$p_n = \frac{9^h - 1}{10^h} = \left(\frac{9}{10}\right)^h - \left(\frac{1}{10}\right)^h,$$

cantidad que tiende a 0 si h (o n) tiende a infinito. Esto nos dice que la probabilidad de que el dígito 7 no aparezca en un número natural n cuando n es muy grande tiende a 0. Sin embargo, el comportamiento de esta sucesión de números es muy lento. En efecto, se puede calcular que

$$\begin{aligned} h &= 2, & p &= \frac{81 - 1}{100} = 0{,}8 \\ h &= 3, & p &= \frac{729 - 1}{1000} = 0{,}728 \\ h &= 4, & p &= \frac{6561 - 1}{10000} = 0{,}656 \\ h &= 6, & p &= \frac{53145 - 1}{100000} = 0{,}531 \\ h &= 9, & p &= \frac{38742705 - 1}{100000000} = 0{,}429\,. \end{aligned}$$

Esto dice en particular que aún para números n con un millón de cifras, la probabilidad de que no aparezca el dígito 7 es elevada y mayor que $\frac{1}{2}$. Sin embargo, cuando n tiende a infinito, la probabilidad de que aparezca el dígito 7 tiende a 1.

§6. Torneos y competencias

Consideremos ahora un torneo de eliminación simple, es decir, aquél en el cual se enfrentan dos rivales y el vencedor avanza de fase y el perdedor queda eliminado. Por ejemplo los torneos de tenis, el mundial de fútbol a partir de los octavos de final, los play-offs en la NBA, etc.

6.1. Eliminación simple. Supongamos que un jugador (o un equipo) A llega a los octavos de final y que la probabilidad de vencer a cualquier otro es de $\frac{2}{3}$. Surge la pregunta natural *¿Cuál es la probabilidad de que A sea campeón?*

La probabilidad de que A gane los octavos de final es de $\frac{2}{3}$.

Los octavos y los cuartos de final son eventos independientes entre sí, por lo tanto las probabilidades de vencer en cada uno se multiplican, luego la probabilidad de que A llegue a semifinales, es decir, de que gane octavos y cuartos de final es

$$p(\text{semi final}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} = 0,44\ldots \sim 44\,\%.$$

Observamos que aún siendo A superior a cualquiera de sus rivales la probabilidad de llegar a semifinales ya es menor al 50 %.

Finalmente, la probabilidad de que A salga campeón es

$$p_{2/3}(\text{A campeón}) = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} = 0,1975\ldots \sim 19,75\,\% < 20\,\%.$$

• Hagamos la misma pregunta suponiendo que A tiene una mayor superioridad sobre sus contrincantes. Por ejemplo, supongamos que la probabilidad de vencer a cualquier otro equipo sea de $\frac{3}{4}$. Entonces,

$$p_{3/4}(\text{A campeón}) = \left(\frac{3}{4}\right) . \left(\frac{3}{4}\right) . \left(\frac{3}{4}\right) . \left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256} = 0,316\ldots \sim 31,6\,\%.$$

Como vemos la chance de ser campeón es aún pequeña, pese a la superioridad sobre cada rival.

6.2. Definiciones al mejor de 3, 7 ó una cantidad arbitraria de partidos

Al mejor de 3. Ahora nos preguntamos qué sucede si la serie se juega al mejor de 3 partidos, es decir, se enfrentan 3 veces los mismos rivales y el que haya ganado más partidos avanza de fase.

Sea p la probabilidad que tiene A de vencer a sus rivales. Las formas que tiene A de pasar de fase son

(a) ganando los tres partidos,
(b) ganando dos partidos y perdiendo uno.

La probabilidad de que A gane los tres partidos es

$$p(\text{A gana tres}) = p \cdot p \cdot p = p^3.$$

El evento de que A gane dos partidos y pierda uno puede darse de tres maneras distintas:

- A gana los primeros dos partidos y pierde el último,
- A gana el primer y tercer partido y pierde el segundo,
- A pierde el primer partido y gana los últimos dos.

Cada una de estas situaciones tiene probabilidad $p^2(1-p)$. Entonces

$$p(\text{A gana dos}) = 3p^2(1-p).$$

Luego,

$$p(\text{A gana al mejor de tres}) = p^3 + 3p^2(1-p) = 3p^2 - 2p^3 = p^2(3-2p).$$

En consecuencia, si la probabilidad de que A venza a cualquier rival es de $\frac{2}{3}$, entonces la probabilidad de que A pase de fase al mejor de tres partidos es

$$p(\text{A gana al mejor de tres}) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(3 - 2 \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{20}{27} = 0,74\ldots \sim 74\,\%.$$

Luego, la probabilidad de que A salga campeón jugando cada fase al mejor de tres partidos es

$$p_{2/3}(\text{A campeón}) = \left(\frac{20}{27}\right) \cdot \left(\frac{20}{27}\right) \cdot \left(\frac{20}{27}\right) . \left(\frac{20}{27}\right) = \left(\frac{20}{27}\right)^4 = 0,30\ldots \sim 30\,\%.$$

Haciendo el mismo cálculo pero suponiendo que la probabilidad que tiene A de vencer a cualquier rival es de $\frac{3}{4}$, resulta que la probabilidad de que A pase de fase al mejor de tres partidos es

$$p_{3/4}(\text{gana A al mejor de tres}) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 . \left(3 - 2 \cdot \frac{3}{4}\right) = \frac{27}{32} \sim 84,4\,\%.$$

y de que A salga campeón con este sistema

$$p_{3/4}(\text{A campeón}) = \left(\frac{27}{32}\right) \cdot \left(\frac{27}{32}\right) \cdot \left(\frac{27}{32}\right) . \left(\frac{27}{32}\right) = \left(\frac{27}{32}\right)^4 \sim 50,7\,\%.$$

Al mejor de 7. Ahora nos preguntamos qué sucede si la serie se juega al mejor de 7 partidos.

Sea p la probabilidad que tiene A de vencer a cualquiera de sus rivales. Las formas que tiene A de pasar de fase son

(a) ganando los siete partidos,
(b) ganando seis partidos y perdiendo 1,
(c) ganando cinco partidos y perdiendo 2,
(d) ganando cuatro partidos y perdiendo 3.

Con el mismo razonamiento que en la subsección anterior, tenemos

$$\begin{aligned} p(\text{caso a}) &= p^7, \\ p(\text{caso b}) &= \binom{7}{6} p^6(1-p), \\ p(\text{caso c}) &= \binom{7}{5} p^5(1-p)^2, \\ p(\text{caso d}) &= \binom{7}{4} p^4(1-p)^3. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} p(\text{A pasa}) &= p^7 + \binom{7}{6} p^6(1-p) + \binom{7}{5} p^5(1-p)^2 + \binom{7}{4} p^4(1-p)^3 \\ &= p^7 + 7p^6(1-p) + 21p^5(1-p)^2 + 35p^4(1-p)^3. \end{aligned}$$

Si suponemos que la probabilidad que tiene A de vencer a cualquier rival es $p = \frac{2}{3}$ $(1 - p = \frac{1}{3})$ entonces la probabilidad de que A pase la serie al mejor de 7 es

$$p_{2/3}(\text{A pasa}) = \left(\frac{2}{3}\right)^7 + 7\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right) + 21\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 35\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1808}{2187} \sim 82,7\,\%.$$

Luego, la probabilidad de que A sea campeón con este sistema es

$$p_{2/3}(\text{A campeón}) = \left(\frac{1808}{2187}\right)^4 \sim 46,7\,\%.$$

Si suponemos que la probabilidad que tiene A de vencer a cualquier rival es $p = \frac{3}{4}$ $(1 - p = \frac{1}{4})$ entonces la probabilidad que tiene A de pasar la serie al mejor de 7 es

$$p_{3/4}(\text{A pasa}) = \left(\frac{3}{4}\right)^7 + 7\left(\frac{3}{4}\right)^6\left(\frac{1}{4}\right) + 21\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 35\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{15.228}{16.384} \sim 92,94\,\%.$$

Luego, la probabilidad de que A sea campeón con este sistema es

$$p_{3/4}(\text{A campeón}) = \left(\frac{15.228}{16.384}\right)^4 \sim 74,62\,\%.$$

Estos cálculos muestran, como era de esperar, que la probabilidad de A aumenta si el número de partidos disputados en la serie crece.

Al mejor de n. Ahora generalizaremos el problema anterior, cuando el enfrentamiento se decide con n partidos. Nos interesa especialmente ver lo que sucede cuando $n \to \infty$.

Haremos uso de las siguientes identidades entre números combinatorios válidas con las convenciones de que $\binom{n}{j} = 0$ si $j < 0$ y $\binom{n}{0} = 1$.

$$\begin{aligned}\binom{2n+3}{j} &= \binom{2n+2}{j} + \binom{2n+2}{j-1}\\ &= \binom{2n+1}{j} + \binom{2n+1}{j-1} + \binom{2n+1}{j-1} + \binom{2n+1}{j-2}\\ &= \binom{2n+1}{j} + 2\binom{2n+1}{j-1} + \binom{2n+1}{j-2}.\end{aligned} \tag{6.1}$$

Sea p_{2n+1} la probabilidad de A de vencer en $2n+1$ partidos. Usando (6.1) establecemos una relación entre p_{2n+3} y p_{2n+1}. Tenemos

$$p_{2n+3} = \sum_{j=n+2}^{2n+3} \binom{2n+3}{j} p^j (1-p)^{2n+3-j}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} p_{2n+3} &= \sum_{j=n+2}^{2n+3} \binom{2n+1}{j} p^j (1-p)^{2n+3-j} + 2 \sum_{j=n+2}^{2n+3} \binom{2n+1}{j-1} p^j (1-p)^{2n+3-j}\\ &\quad + \sum_{j=n+2}^{2n+3} \binom{2n+1}{j-2} p^j (1-p)^{2n+3-j}\\ &= \sum_{j=n+2}^{2n+1} \left(\binom{2n+1}{j} p^j (1-p)^{2n+1-j} \right) (1-p)^2\\ &\quad + 2p(1-p) \sum_{j=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} p^j (1-p)^{2n+1-j} + p^2 \sum_{j=n}^{2n+1} p^j (1-p)^{2n+1-j}\\ &= p_{2n+1}(1-p)^2 - \binom{2n+1}{n+1} p^{n+1} (1-p)^{n+2} + p_{2n+1}(2p(1-p)+p^2)\\ &\quad + \binom{2n+1}{n} p^{n+2} (1-p)^{n+1}, \end{aligned}$$

de donde

$$p_{2n+3} = p_{2n+1} + \binom{2n+1}{n} \big(p(1-p)\big)^{n+1} (2p-1).$$

Esto muestra que si $p > \frac{1}{2}$ el segundo sumando a la derecha es positivo, luego la probabilidad, de $2n+1$ juegos a $2n+3$ juegos, ha aumentado. Además se tiene

$$\begin{aligned} p_{2n+3} &= (p_{2n+3} - p_{2n+1}) + (p_{2n+1} - p_{2n-1}) + \cdots + (p_3 - p_1) \\ &= (2p-1) \sum_{j=0}^{2n+1} \binom{2j+1}{j} (p(1-p))^{j+1} + p. \end{aligned}$$

Se sabe que, para $n \in \mathbb{N}$, vale la identidad

$$2 \sum_{j=0}^{\infty} \binom{2j+n}{j} x^j = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \right)^n$$

(ver por ejemplo *Anexo: series matemáticas* en Wikipedia). Usando esto con $n = 1$ sale que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} p_{2n+1} &= p + (2p-1)p(1-p) \sum_{j=0}^{\infty} \binom{2j+1}{j} (p(1-p))^j \\ &= p + (2p-1) \frac{1-\sqrt{1-4p(1-p)}}{2\sqrt{1-4p(1-p)}}. \end{aligned}$$

El lector interesado puede encontrar el límite anterior en Wikipedia.

Ahora ponemos $p = \frac{1}{2} + t$. Luego, $4p(p-1) = 4t^2 - 1$ y obtenemos que el límite anterior es igual a

$$p + (2p-1) \frac{1-2t}{4t} = p + \tfrac{1}{2} - t = 1.$$

Este cálculo verifica que si $p > \frac{1}{2}$ la función p_{2n+1} tiende a 1 cuando n crece arbitrariamente, es decir que el jugador que tiene alguna superioridad, aunque sea pequeña, vence con probabilidad aproximada a 1 si se juega al mejor de un número suficientemente grande de partidos. Por otra parte el argumento también prueba que p_n nunca es igual a 1, salvo que se parta inicialmente de $p = 1$.

§7. Regalos

Ahora planteamos el siguiente problema. Supongamos que hay un grupo de n compañeros de trabajo y cada uno compra un regalo para repartirse entre ellos de manera aleatoria. *¿Cuál es la probabilidad de que a ninguno le toque el regalo que el mismo compró?*

Analicemos la situación. Supongamos que el grupo es de 2 personas: A_1 y A_2. Hay 2 situaciones posibles: que se intercambien los regalos o que a cada uno le toque el que compró:

$$p(\text{ninguno recibe su propio regalo}) = \frac{1}{2} = 50\,\%.$$

Supongamos ahora que el grupo es de 3 personas: A_1, A_2, A_3. Hay $3! = 6$ formas posibles de repartir los regalos:

$$\begin{array}{ccc} A_1\ A_2\ A_3, & A_1\ A_3\ A_2, & A_2\ A_1\ A_3, \\ A_2\ A_3\ A_1, & A_3\ A_2\ A_1, & A_3\ A_1\ A_2. \end{array}$$

En el primer caso a cada uno le toca su propio regalo; en el segundo caso a A_1 le tocó su propio regalo, a A_2 el regalo que compró A_3 y a A_3 el que compró A_2, etc. En el cuarto y en el sexto caso nadie recibe el regalo que compró. Luego,

$$p(\text{ninguno recibe su propio regalo}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \sim 33,3\,\%.$$

Nos gustaría poder deducir qué ocurre en un grupo con un número arbitrario n de personas.

Etiquetamos a las personas de a_1 a a_n. Utilizaremos el principio de inclusión-exclusión para contar los casos en que hay al menos una persona que recibe su propio regalo. Para eso, primero sumamos los casos en que a_1 recibe su propio regalo, mas los casos en que a_2 recibe su propio regalo, siguiendo así hasta sumar los casos en que a_n recibe su propio regalo

$$\sum_{i=1}^{n} \#\{\text{casos que } a_i \text{ recibe su propio regalo}\} = \binom{n}{1}(n-1)!$$

ya que hay $\binom{n}{1}$ formas de elegir a la persona que recibe su propio regalo y para cada una de esas elecciones hay $(n-1)!$ formas de repartir los regalos entre las $n-1$ personas restantes.

Notar que los casos en que hay dos personas que reciben su propio regalo los hemos contado en más de una oportunidad. Por lo tanto, debemos sustraer:

$$\begin{aligned} &\#\{\text{casos que } a_1 \text{ y } a_2 \text{ reciben su propio regalo}\} + \cdots \\ &+ \#\{\text{casos que } a_1 \text{ y } a_n \text{ reciben su propio regalo}\} + \cdots \\ &+ \#\{\text{casos que } a_2 \text{ y } a_3 \text{ reciben su propio regalo}\} + \cdots \\ &+ \#\{\text{casos que } a_2 \text{ y } a_n \text{ reciben su propio regalo}\} + \cdots \\ &+ \#\{\text{casos que } a_{n-1} \text{ y } a_n \text{ reciben su propio regalo}\} = \binom{n}{2}(n-2)! \end{aligned}$$

pues tenemos $\binom{n}{2}$ formas de elegir a las 2 personas que reciben su propio regalo y para cada una de esas elecciones hay $(n-2)!$ formas de repartir los regalos entre las $n-2$ personas restantes.

Notar que los casos en que exactamente un mismo grupo de 3 personas reciben su propio regalo ha sido sumado primero 3 veces y luego sustraido 3 veces.

Entonces tenemos que sumar:

$$\begin{aligned}
&\#\{\text{casos que } a_1,\, a_2 \text{ y } a_3 \text{ reciben su propio regalo}\}+\\
&\#\{\text{casos que } a_1,\, a_2 \text{ y } a_4 \text{ reciben su propio regalo}\} + \cdots +\\
&\#\{\text{casos que } a_{n-2},\, a_{n-1} \text{ y } a_n \text{ reciben su propio regalo}\} = \binom{n}{3}(n-3)!
\end{aligned}$$

Procedemos con el mismo razonamiento, sumando y restando los casos siguientes para concluir que la cantidad de casos desfavorables, es decir, aquellos en que al menos una persona recibe su propio regalo, es

$$\binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n-1}(n-(n-1))! + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}(n-n)!$$

Aplicamos esta fórmula cuando el grupo es de 3 personas:

$$\begin{aligned}
\#(\text{casos desfavorables}) &= \binom{3}{1}2! - \binom{3}{2}1! + \binom{3}{3}\\
&= \frac{3!}{1!2!}2! - \frac{3!}{2!1!}1! + \frac{3!}{3!} = 3!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right) = 4.
\end{aligned}$$

Es decir, los casos favorables son $6-4=2$ como habíamos verificado anteriormente.

Supongamos ahora que el grupo es de 4 personas, entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\#(\text{casos desfavorables}) &= \binom{4}{1}3! - \binom{4}{2}2! + \binom{4}{3}1! - \binom{4}{4}\\
&= \frac{4!}{1!3!}3! - \frac{4!}{2!2!}2! + \frac{4!}{3!1!}1! - \frac{4!}{4!} = 4!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) = 15.
\end{aligned}$$

Los casos totales son $4! = 24$, entonces los favorables son 9 y

$$p(\text{ninguno recibe su propio regalo}) = \frac{9}{24} = \frac{3}{8} = 0,375 \sim 37,5\,\%.$$

Finalmente, cuando el grupo es de n personas se tiene

$$\begin{aligned}
\#(\text{casos desfavorables}) &= \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \cdots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}\\
&= \frac{n!}{1!(n-1)!}(n-1)! - \frac{n!}{(n-2)!2!}(n-2)! + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{n!}{n!}\\
&= n!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\right).
\end{aligned}$$

Como

$$\#(\text{casos favorables}) = \#(\text{casos totales}) - \#(\text{casos desfavorables})$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\#(\text{casos favorables}) &= n! - n!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\right) \\
&= n!\left[1 - \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\right)\right] \\
&= n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^{n}\frac{1}{n!}\right].
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
p(\text{nadie recibe su propio regalo}) &= \frac{n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^{n}\frac{1}{n!}\right]}{n!} \\
&= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^{n}\frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

y esta suma es la expansión en serie del inverso de un número muy importante: $e \approx 2,718281828459\ldots$

Tenemos que

$$e^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} + \cdots$$

y se puede verificar usando el teorema de Taylor que a partir de $n = 5$ la diferencia entre e^{-1} y la suma $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}$ es menor que $0,01$.

Luego, obtenemos que la probabilidad de que en un grupo de n personas, con $n \geq 5$, a una persona le toque el regalo que compró es aproximadamente

$$\frac{1}{e} = 0,36787944117144\ldots \sim 36,78\,\%.$$

§7. El mono y la máquina de escribir

Este es un problema clásico que plantea *calcular la probabilidad de que un mono tipee al azar, idealmente, una obra de la literatura, por ejemplo 'El Quijote', si lo intenta un número suficiente de veces*.

El planteo es que el mono comienza a tipear, en una computadora con M teclas, los caracteres de la obra, digamos que sean T en total. Se supone que hace un intento y otro sucesivamente repitiéndolo una y otra vez indefinidamente. Cada T intentos el mono retoma la acción sin saber si ya cumplió su cometido. En el desarrollo no tenemos en cuenta el tiempo que le lleva hacer cada intento y se incluyen entre los caracteres, los espacios, acentos y otros símbolos necesarios en la obra.

Claramente, la probabilidad de acertar el primer carácter es $p_1 = 1/M$, la de acertar los dos primeros es $p_{1,2} = 1/M^2$ y así sucesivamente la probabilidad de acertar de entrada los T caracteres de la obra es $p_{1,2,\ldots T} = 1/M^T$.

Para cada número natural n, dividamos en segmentos de longitud T los intentos del mono, es decir, primero el segmento $1, 2, \ldots, T$, luego $T + 1, T + 2, \ldots, 2T$, y, en el paso n-ésimo, $(n - 1)T + 1, \ldots, nT$.

Supongamos hipotéticamente que el mono erra en alguno de sus primeros T intentos de reproducir la obra y también en alguno de sus segundos T y en alguno de los n-ésimos T y acierta en todo el siguiente, el $N + 1$-ésimo segmento. La probabilidad de que esto suceda es

$$p_N = \sum_{n=0}^{N} (1 - M^{-T})^n M^{-T} \tag{8.1}$$

ya que erra en los primeros N intentos (con probabilidad $(1 - M^{-T})$) y acierta en el intento $N + 1$. Denotaremos desde ahora $p = M^{-T}$, por simplicidad.

Entonces

$$p_N := \sum_{n=0}^{N} \left(1 - M^{-T}\right)^n M^{-T} = p \sum_{n=0}^{N} (1 - p)^n = \frac{p(1 - (1 - p)^{n+1})}{1 - (1 - p)} = 1 - (1 - p)^{N+1}.$$

Esta es una serie geométrica de razón $1 - p < 1$, luego su suma cuando $N \to \infty$ es

$$p \sum_{n=0}^{\infty} (1 - p)^n = p \frac{1}{1 - (1 - p)} = 1,$$

lo que nos dice que en tiempo indefinido, con probabilidad 1, el mono logrará reproducir toda la obra.

Este resultado si bien es teóricamente correcto, carece de valor práctico pues el tiempo necesario para lograr el objetivo puede ser muy grande, incluso comparable a la edad de la tierra (unos 4.500 millones de años) o de la del universo, estimada en 13.700 millones de años.

Como vemos, es imprescindible, en todo cálculo probabilístico con un número creciente indefinido de intentos, poder estimar cuan rápido el valor parcial se aproxima a su valor límite.

Comentarios

Cursillo dictado por los autores el 9/10/18 en el Instituto de Enseñanza Superior Simón Bolívar, Córdoba, destinado a estudiantes de Profesorado en Matemática.

Agradecimientos. Los autores desean agradecer a Juan Pablo Rossetti por la lectura completa del trabajo y por enviar algunas correcciones y varias sugerencias que ayudaron a mejorar la exposición del mismo.

Referencias

Kisbye, Patricia, y Miatello, Roberto. (2004). Álgebra I – Matemática Discreta I. *Trabajos de Matemática, Serie C, FaMAF*.

Santaló, Luis A. (1955). La probabilidad y sus aplicaciones. *Editorial Iberoamericana, Buenos Aires*.

Székely, Gábor J. (2001). Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics . *Mathematics and its Applications. Reidel 1986, Springer Verlag 2001*.

ROBERTO J. MIATELLO
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (FaMAF) – Universidad Nacional de Córdoba (UNC)
(✉) *miatello@famaf.unc.edu.ar*

ANGEL D. VILLANUEVA
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (FaMAF) – Universidad Nacional de Córdoba (UNC)
(✉) *villanueva@famaf.unc.edu.ar*

Recibido: *22 de mayo de 2018*.
Aceptado: *25 de julio de 2018*.
Publicado en línea: *21 de diciembre de 2018*.

¿Sabías que...

por Leandro Cagliero y Ricardo Podestá

el área de las cuatro lúnulas rosadas es igual al área del cuadrado celeste?

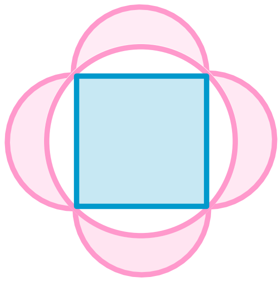


FIGURA 1

Este bonito y sorprendente resultado es conocido como la *cuadratura de las lúnulas de Hipócrates*. Contemos algo de su historia y veamos por qué es cierto.

Se conoce como *la cuadratura del círculo* al famoso problema que consiste en construir con regla y compás un cuadrado de la misma área que un círculo dado. Este problema tuvo ocupados a los matemáticos desde siempre, hasta que en el siglo XIX por fin se pudo demostrar que esto es imposible. Resulta que para lograr "cuadrar" el círculo de radio 1 es necesario construir con regla y compás el número $\sqrt{\pi}$, lo cual equivale a construir con regla y compás el número π, y esto es imposible. ¿Por qué?

En 1882 ya se sabía, desde hacía mucho tiempo, que si un número real α se puede construir con regla y compás, entonces hay un polinomio $p(x)$ **con coeficientes enteros** tal que α es raíz de $p(x)$, es decir que $p(\alpha) = 0$. En ese año, Lindemann y Weierstrass obtienen un resultado que implica que no existe ningún polinomio $p(x)$ con coeficientes enteros tal que $p(\pi) = 0$, con lo que queda probado que es imposible construir con regla y compás el número π, y por lo tanto es imposible cuadrar el círculo de radio 1. El Teorema de Lindemann y Weierstrass es profundo y un poco difícil. Aprovechamos para recordar que los números reales que son raíces de polinomios con coeficientes enteros se llaman **números algebraicos**, mientras que los que no lo son, se llaman **números trascendentes**.

El argumento anterior se resume en:

(1) Todo número construíble con regla y compás es algebraico.
(2) En 1982 Lindemann y Weierstrass demuestran que π es trascendente.
(3) Es imposible cuadrar el círculo de radio 1 pues si se pudiera π sería algebraico.

Por otro lado, Hipócrates de Quíos, intentando resolver la cuadratura del círculo, descubrió que las *lúnulas* se pueden "cuadrar". Éste, fue autor de un libro llamado *Elementos*, del cual no se conservan copias aunque otros documentos históricos (v. gr. Eudemo) dan cuenta de él. Se piensa que éste, y otros libros, han sido modelos de lo que luego fue el famoso 'Elementos' de Euclides. En dicho libro, Hipócrates demuestra un teorema que implica que la lúnula se puede cuadrar. Una versión muy elegante de éste es como sigue.

Teorema. ***En la Fig. 1, las cuatro lúnulas tienen la misma área que el cuadrado.***

La demostración es muy elegante y sólo utiliza el Teorema de Pitágoras que, en una de sus versiones, dice que dado un triángulo rectángulo, el área del semicírculo cuyo diámetro es la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los semicírculos cuyos diámetros son cada uno de los catetos.

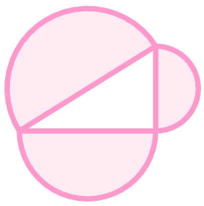
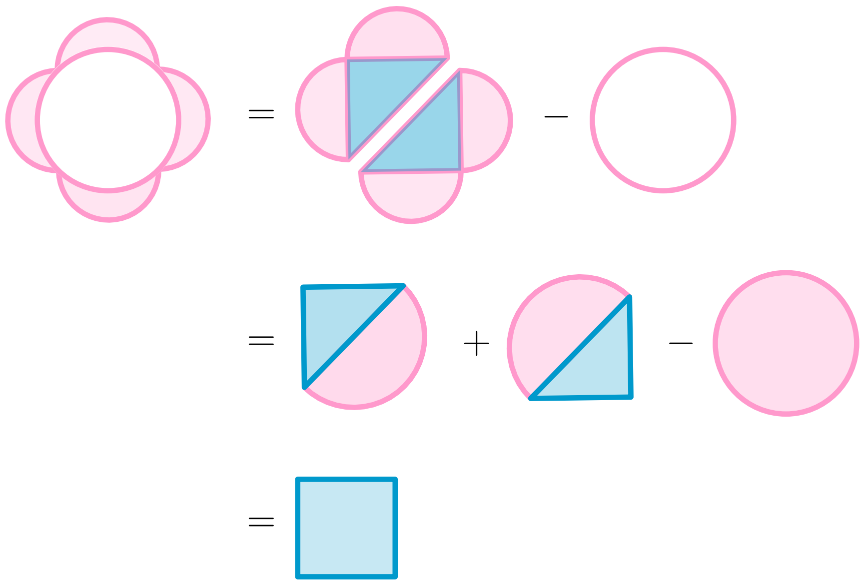


FIGURA 2. *Interpretación gráfica del Teorema de Pitágoras usando círculos.*

Utilizando esto, la prueba del teorema es inmediata.

Demostración.



□

¡¡Sin palabras!! Bellísima demostración que no utiliza palabras y nos deja sin ellas.

Hipócrates de Quíos fue un matemático, geómetra y astrónomo griego que vivió entre 470 – 410 a. C., aproximadamente 100 años antes de Euclides. De hecho, se lo considera el geómetra mas importante del siglo V a. C. Escribió una obra de carácter enciclopédico titulada *Elementos*, en el que expone teoremas a partir de unos axiomas y postulados (los cuales fueron incluidos por Euclides en su famosa obra del mismo nombre). Éste no debe ser confundido con su contemporáneo Hipócrates de Cos, el famoso médico de Antigua Grecia autor del Juramento Hipocrático.