Revista de Educación Matemática
Volumen 33, N° 3 (2018), páginas 5 – 26
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

*Artículo Científico*

# ESTUDIANTES DE ESCUELA SECUNDARIA PENSANDO LOS NÚMEROS RACIONALES

Maximiliano Palacios Amaya, Verónica Bianchi y Virginia Montoro

Resumen. En el marco de un estudio sobre las concepciones de estudiantes de secundaria acerca de los números racionales, se diseñó un cuestionario con cuatro actividades orientadas a indagar dicha comprensión. Se aplicó este cuestionario a 132 estudiantes de distintos años de escolaridad, de una escuela secundaria pública de Bariloche (Argentina).

Se categorizaron las respuestas a cada una de las actividades con controles inter-juez. Posteriormente se realizó un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiple y Clasificación Jerárquica de las respuestas de los estudiantes y se buscaron asociaciones de las clases resultantes con el nivel de estudio de los mismos.

En cuanto a las concepciones de los estudiantes, encontramos un gradiente que se expresa desde una ajenidad respecto al tema, le sigue una fase intermedia asociada principalmente con relacionar los números racionales con objetos previamente vistos como son los números enteros o números decimales y finalmente encontramos una comprensión de los racionales mas cercana al respectivo concepto matemático y un buen manejo general de las propiedades de orden y densidad, presente en los estudiantes más avanzados.

Abstract. In the framework of a study on the conceptions of secondary students about rational numbers, a questionnaire was designed with four activities oriented to investigate this understanding. This questionnaire was applied to 132 students of different school stages of a public secondary school in Bariloche (Argentina).

The responses to each of the activities were categorized with inter-judge controls. Subsequently a Factorial Analysis of Multiple Correspondences and a Hierarchical Classification of the answers of the students were carried out, and associations with the students study-level of the resulting classes were sought.

As for the students conceptions, we found a gradient that is expressed by strangeness, followed by an intermediate phase mainly associated with some link of the rational numbers to objects already known (as the integers or the decimal numbers), and finally, we found an understanding of the rationals that is closest to its respective mathematical concept together with a good general management of the properties of order and density, present in the most advanced students.

*Palabras clave*: Concepciones, número racional, análisis multivariado, notación, estudiante de secundaria.
*Keywords*: Conceptions, rational number, multivariate analysis, notation, high-school students.

## §1. Introducción

El estudio de los números racionales figura en el currículo de la escuela secundaria argentina, como contenido transversal desde primero a quinto año. En la escuela primaria se estudia esencialmente el aspecto operativo de los mismos, mientras que en la escolaridad secundaria este trabajo está orientado a vincular las distintas representaciones del número racional, profundizándose en el orden de los números y el concepto de densidad. Sin embargo, varias investigaciones han mostrado que los alumnos experimentan dificultades al aprender y utilizar conceptos relacionados con números racionales (Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983; Tirosh, Fischbein, Graeber, & Wilson, 1999; Merenluoto, 2003; Stafylidou & Vosniadou, 2004; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004; Steinle & Pierce, 2006; Vamvakoussi & Vosniadou, 2007; Widjaja, Stacey, & Steinle, 2008).

Nos interesa en particular la dificultad que se manifiesta en el traspaso inadecuado de las propiedades de los números naturales a los racionales, que frecuentemente lleva al estudiante a utilizarlas en situaciones donde ya no son apropiadas (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). En palabras de (Tirosh et al., 1999), frecuentemente los alumnos atribuyen erróneamente a los números racionales propiedades de las operaciones con números naturales o números enteros, pues los alumnos no tienen la misma experiencia cotidiana usando números racionales que con el uso de los números naturales.

En particular, vemos que las dificultades de los alumnos para aceptar la densidad de los números racionales puede deberse en parte a la traslación de la propiedad de los números naturales, que dice que a cada número $n$ le corresponde un único sucesor inmediato $n + 1$, al conjunto de números racionales (Merenluoto, 2003).

Entre los artículos mencionados, resaltamos a (Widjaja et al., 2008) donde clasificaron las concepciones erróneas acerca de la densidad de los números racionales en tres categorías: la primera dificultad debida a la asociación de los números decimales con los números enteros (dificultad al hallar números decimales entre dos dados). La segunda refiere a la comparación de fracciones o números decimales de la misma clase: mostrando una tendencia a trabajar solo con decimales con la misma cantidad de dígitos en la parte decimal o con fracciones con iguales denominadores; y la tercera dificultad es el uso de redondeo.

El conjunto de los números racionales es un conjunto ordenado y denso. El orden es dado en forma axiomática, mediante la definición de una relación denominada '$<$', que permite que dos números racionales siempre pueden ser comparados. Dicho orden posee la característica (contra-intuitiva) de que un intervalo acotado puede no tener primer elemento, lo que lo diferencia del orden de los números naturales.

La densidad es otra propiedad que diferencia a los números racionales de los enteros: dados dos números racionales distintos (supongamos $a < b$) hay al menos un número racional $q$ tal que $a < q < b$. Esto implica que entre dos números racionales hay infinitos números racionales.

Esta propiedad contra-intuitiva ha llevado a paradojas, desde los griegos clásicos, como la denominada "paradoja de Zenón". Aquiles, el más veloz de los griegos, persigue a una tortuga que se arrastra alejándose de él. Zenón argumenta que el héroe no puede alcanzar al animal pues, en el instante de la partida, Aquiles se encuentra a una cierta distancia del animal, inmediatamente franqueará un segundo instante en el que esta distancia se habrá hecho dos veces menor que la primera, luego alcanzará un tercer instante en el que la distancia considerada, reducida nuevamente a la mitad, sea el cuarto de la distancia inicial. Y luego un cuarto instante en el que esta distancia, de Aquiles a la tortuga, será el octavo de su valor inicial y siguiendo este proceso "ad infinitum" Aquiles nunca podrá alcanzar a la tortuga.

Otro aspecto notable que dificulta la comprensión de estas nociones, es el concepto de infinito, implícito en la densidad y en la notación decimal: en particular la notación decimal de los números racionales periódicos puede remitir a un proceso sin fin del algoritmo de la división. Sin embargo, una comprensión cabal de estas nociones involucra la idea de infinito actual. Estudios que indagan sobre concepciones del infinito matemático muestran que la aceptación del infinito actual es contraintuitiva, y requiere de contextos educativos que propicien la reflexión matemática a través de intervenciones de enseñanza especificas (Fischbein, Jehiam, & Cohen, 1994; Artigue, 1995; Moreno-Armella & Waldegg, 1995; Monaghan, 2001; Montoro, 2005; Juan, Montoro, & Scheuer, 2012).

Entre las concepciones que operan cuando los estudiantes trabajan conceptos que involucran la noción de infinito, encontramos que los más jóvenes o con menor estudio de matemática suelen mostrar inseguridad o resistencia frente a la posibilidad de la existencia de colecciones infinitas (Montoro, 2005; Juan et al., 2012). También, dos visiones finitistas muy arraigadas son: concebir el infinito como un número muy grande o extender la propiedad de los conjuntos finitos a los conjuntos infinitos (Waldegg, 1993; Monaghan, 2001; Juan et al., 2012; Montoro, Scheuer, & Pérez-Echeverría, 2016). Muy frecuentemente los jóvenes conciben al infinito en forma potencial (Fischbein, Tirosh, & Hess, 1979; Monaghan, 2001; Arrigo & D'Amore, 2004) y una minoría lo concibe como infinito actual (Moreno-Armella & Waldegg, 1995; Montoro, 2005).

Si bien se han realizado varias investigaciones didácticas acerca de la enseñanza de números racionales (Saiz, Gorostegui, & Vilotta, 2011; Nardoni, Camara, & Pochulu, 2014), no hemos podido encontrar aún estudios sobre el aprendizaje de números racionales en el sistema de educación argentino. Este trabajo proporciona datos originales acerca del tema en la región, relacionándolas con investigaciones realizadas en el resto del mundo.

El objetivo de este trabajo es estudiar la comprensión del número racional en estudiantes de escuela secundaria, en particular, la comprensión de la densidad y del orden de números racionales y su relación con distintas representaciones externas convencionales, a partir de la información obtenida de las respuestas a un cuestionario.

## §2. Metodología

**Participantes.** El cuestionario fue aplicado a 132 estudiantes de escuela secundaria de una escuela pública de la ciudad de San Carlos de Bariloche. El mismo fue respondido por estudiantes de dos cursos de primer año (47 alumnos), dos cursos de tercero (44 alumnos) y dos cursos de quinto (41 alumnos). Las edades de los estudiantes se encuentran entre 12 y 18 años.

**Instrumento de indagación.** En la elaboración del cuestionario nos centramos en forma exclusiva en tareas sobre racionales positivos. Fue respondido de forma escrita e individual, en menos de ochenta minutos. Los estudiantes podían optar por usar calculadoras. Este estudio se basó en la resolución de cuatro tareas, de las cuales dos eran de respuestas abiertas (Tarea 1 y 4) y dos de respuestas cerradas (Tarea 2 y 3), que presentaremos a continuación.

*Tarea 1: Posiblemente has escuchado que* $\frac{1}{2}$ *y* $0,25$ *son números racionales. ¿Cómo explicarías con tus palabras en qué consiste esa condición de ser "racionales"?*

En esta tarea los estudiantes son invitados a explicar con sus propias palabras lo que es un número racional. Es esperable que la mayoría pueda proporcionar una respuesta, dado que han trabajado con estos números desde cuarto grado en la escuela primaria, aunque posiblemente bajo el nombre de fracciones o decimales. Se espera que los estudiantes comenten sobre las características principales de la definición de número racional, por ejemplo, podrían decir que es un número decimal que satisface una propiedad específica.

*Tarea 2: ¿Podrías nombrar un número entre los siguientes pares?,*

$$0 \ y \ 2, \qquad \frac{1}{5} \ y \ \frac{1}{4}, \qquad \frac{3}{8} \ y \ \frac{4}{8}, \qquad 3{,}14 \ y \ 3{,}15, \qquad 0,899 \ y \ 0,90, \qquad \frac{1}{4} \ y \ 1{,}4.$$

*Elige una de las siguientes opciones para cada una:* ***Sí*** *-* ***No hay*** *-* ***No sé****. Si la respuesta es afirmativa escribe un número que se encuentre entre ambos.*

*¿Cuantos números hay entre cada uno de los pares anteriores? Elige una de las siguientes opciones para cada uno:* ***Ninguno*** *-* ***Sólo uno*** *-* ***Unos Pocos*** *-* ***Muchísimos*** *-* ***Infinitos*** *-* ***No sé****.*

*Tarea 3: Indica el número mayor entre cada par de números a continuación, o indica que son iguales*

$$1{,}23 \; y \; 0{,}76, \quad 0{,}989 \; y \; 1{,}02, \quad 0{,}4 \; y \; 0{,}326, \quad 3{,}72 \; y \; 3{,}073, \quad 8{,}24573 \; y \; 8{,}245,$$

$$1{,}7501 \; y \; 1{,}75011, \quad 6{,}3 \; y \; 6{,}03, \quad 1{,}99 \; y \; 1{,}89999, \quad 2 \; y \; 1{,}9999..., \quad 0{,}5 \; y \; 0{,}50,$$

$$\frac{3}{8} \; y \; \frac{5}{8}, \quad \frac{2}{4} \; y \; \frac{2}{5}, \quad \frac{4}{10} \; y \; \frac{1}{2}, \quad \frac{4}{6} \; y \; \frac{6}{4}, \quad \frac{99}{100} \; y \; \frac{999}{1000}, \quad \frac{1}{4} \; y \; 0{,}25, \quad 0{,}3 \; y \; \frac{1}{3},$$

$$0{,}535 \; y \; \frac{2}{7}, \quad 0{,}333... \; y \; \frac{1}{3}.$$

Ambas tareas presentan numerosos incisos de tipo operacional. Las mismas están relacionadas preliminar y principalmente con dos conceptos: la densidad y el orden de números racionales. En cuanto a la densidad, en la Tarea 2 en particular, no se ve involucrada la comprensión completa de la misma, pues solo se pregunta si entre dos elementos dados se puede encontrar un elemento intermedio, es una tarea preliminar introducida para un posterior abordaje al concepto de densidad en rigor. En ambas tareas se expresan los elementos a comparar tanto en notación decimal como fraccionaria, intercalando una variada gama de dificultades (Steinle & Stacey, 1998), entre ellas:

- el número más chico tiene mayor cantidad de decimales,
- números cuya expresión decimal contiene un 0 en la posición de los décimos o cuyas expresiones decimales además contienen números naturales consecutivos,
- expresiones en donde la parte entera es la misma pero la decimal difiere en mantisa,
- los números a comparar se encuentran expresados en notación fraccionara con el mismo numerador/denominador, siendo los denominadores (resp. numeradores) números naturales consecutivos,
- dos números racionales expresados con distinta notación (decimal y fraccionaria).

Es esperable que los estudiantes utilicen distintos tipos de estrategia para responder, por ejemplo redondeo o truncamiento o extrapolación de propiedades de los números enteros al conjunto de los racionales. También que se desempeñen de distinta manera para distintos tipos de notación.

*Tarea 4: Carlos y Martina están jugando a decir números racionales entre 1 y 2, y gana el que encuentra el número más cercano al 2. Si Carlos es el primero en jugar, ¿podrá decir algún número que le asegure ganar? ¿por qué?*

El objetivo de esta tarea fue indagar de manera lúdica las ideas de los estudiantes acerca de la propiedad de densidad, a través de una actividad iterativa potencialmente infinita. Se puso esta tarea al final del cuestionario dado que en las anteriores se actualizaron las nociones de orden (Tarea 3) y densidad (Tarea 2) necesarias para la comprensión de esta última. Aquí se motiva la reflexión sobre la no existencia de "el siguiente" (o "el anterior") de un número en el conjunto de números propuestos. Es decir, en esta tarea se indaga sobre el concepto de densidad con mayor profundidad, pues los estudiantes se ven invitados a pensar en todos los (infinitos) posibles racionales, menores que 2, que puedan proporcionar una estrategia ganadora. Es esperable que algunos estudiantes utilicen en su respuesta distintos tipos de entendimiento del juego, los cuales podemos separar en dos grandes grupos; uno finitista, que trabajará con una cantidad finita de decimales y operará como con los naturales, y otro que abordará a los racionales desde un punto de vista infinitista.

**Análisis de las respuestas.** El análisis se realizó en dos etapas. En una primera etapa se analizaron y clasificaron las respuestas de los encuestados en cada una de las tareas. Asimismo se desglosaron los resultados por nivel de escolaridad, a fin de observar la variabilidad de las concepciones características sobre el número racional entre estudiantes con distinto grado de escolaridad. En la segunda etapa y con el objetivo de vincular las respuestas de los estudiantes entre sí y evidenciar asociaciones entre las modalidades de respuesta de todas las tareas en simultáneo y conocer qué estudiantes responden qué, se aplicó un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples[1] (AFCM) (Benzécri, 1973). Luego se realizó una Clasificación Jerárquica Ascendente (CJA) (Ward, 1963) agrupando a estudiantes con similares modos de respuestas a las cuatro tareas globalmente, obteniendo así información cualitativa "cruzada" de todas las tareas. Para más detalles de estos métodos multivariados ver (Crivisqui, 1993; Baccalá & Montoro, 2008), entre otros.

Entre las cuatro tareas analizadas se advierten dos tareas de respuestas abiertas (la uno y la cuatro) y otras dos tareas de respuestas cerradas (la dos y la tres). En

[1]Este método está especialmente diseñado para describir, visualizar y sintetizar grandes cantidades de datos obtenidos sobre un conjunto de individuos.

consecuencia la metodología utilizada para categorizar las respuestas fue distinta para cada par de tareas mencionado.

**Categorización de las respuestas de las Tareas 1 y 4.** Observando en forma directa las respuestas literales, que en su totalidad eran muy cortas (por ejemplo: "`son las fracciones`") se realizó una primera clasificación, teniendo en cuenta los términos que figuraban en ellas (decimales, fracciones, no enteros, etc). Las respuestas se clasificaron en forma independiente por cada uno de los autores y luego se consensuaron las categorías resultantes.

**Categorización de las respuestas de las Tarea 2 y 3.** Se trata de tareas con varios ítems de opción de respuesta cerrada y mutuamente excluyentes. Se asoció a cada estudiante la opción de respuesta elegida, luego con el fin de obtener relaciones entre las respuestas a los distintos ítems para cada estudiante y observar asociaciones entre estudiantes que responden globalmente la tarea en forma similar, se aplicó un AFCM. De este análisis se obtuvo una clasificación de las respuestas de los estudiantes. Una vez determinadas las clases, se procedió al análisis cualitativo de las mismas, identificando las características comunes de las respuestas de los individuos, interpretándolas en términos de concepciones de los estudiantes y pudiendo así acordar una etiqueta representativa de las mismas.

Para validar todas las categorizaciones antes mencionadas se realizó una prueba inter-juez de la totalidad de la clasificación de las respuestas, obteniéndose un acuerdo mayor al noventa y cinco por ciento. Los jueces fueron dos docentes universitarios de matemática.

**Análisis global de todo el cuestionario.** Con el propósito de evidenciar asociaciones entre las modalidades de respuesta de todas las tareas en simultáneo y conocer qué estudiantes responden qué, se aplicó un AFCM a la tabla de estudiantes descriptos por sus modos de respuesta y el curso al cual pertenecían. Se tomaron como variables activas para la formación de los ejes factoriales cuatro variables; cada una de ellas relacionada con una de las cuatro tareas que constituyen el cuestionario, y cuyas modalidades fueron las clases que se construyeron previamente en el análisis tarea por tarea. La variable "curso al que pertenecen los alumnos" se consideró como ilustrativa.

Luego, considerando a los participantes descriptos por sus coordenadas en los ejes principales del AFCM (es decir, factores de variabilidad de los modos de respuestas encontrados) se efectuó una CJA. De esta manera se agruparon estudiantes que poseen asociaciones similares entre los modos de respuestas a las cuatro tareas, es decir, en el modo de respuesta a todo el cuestionario. Finalmente, se interpretó a las clases resultantes en términos de concepciones de los estudiantes sobre los números racionales.

En la primera presentación, tarea a tarea, se han conservado las clases que agrupan respuestas del tipo *No sabe / No contesta* dado que, si bien podría pensarse que no aportan mucha información en esa primera instancia, consideramos que sí aportan información en este último análisis global, pues muchos estudiantes contestaron parcialmente el cuestionario respondiendo *no sé* o no contestando sólo alguna de las tareas. Por ejemplo, algunos estudiantes contestan satisfactoriamente a tres de las cuatro tareas, pero no contestan a una de ellas, por lo que nos proporciona información de relevancia en términos generales. No se han considerado en el análisis aquellos que no respondieron ninguna tarea.

## §3. Resultados y discusión

De aquí en más, todos los números en las tablas representan un porcentaje.

**3.1. Categorización de las respuestas a la Tarea 1.** En la siguiente tabla se presentan los datos de la clasificación construida para la Tarea 1 y que resultará en 7 categorías de respuesta:

El 44,5 % de los alumnos opta por no contestar a esta pregunta, y aproximadamente un 23 % (Clases 1.3 y 1.4) considera que los enteros no son racionales, mientras que un 20 % (Clases 1.5, 1.6 y 1.7) contestan acercándose a una definición, centrada en la notación (sea decimal o como fracción). La clase menos numerosa es la de los estudiantes que dicen que los racionales son los números que pueden escribirse como fracción, siendo en su mayoría estudiantes de quinto año.

Con respecto a la Clase 1.2 que presenta respuestas confusas a la descripción de número racional, podemos ver que está constituida principalmente por las respuestas de los estudiantes más jóvenes (18 % de alumnos de primer año). Por otra parte, los estudiantes de primer año, consolidan una gran parte de las clases que conciben a los racionales como la parte de un entero o que no son enteros. Es notable como estos estudiantes conciben a los racionales objetos construidos a partir de los enteros, vía una acción, ya sea racionar o fraccionar. Puede verse una pequeña minoría (2 %) de los estudiantes de primer año, que dice que (los racionales) son los que pueden escribirse como fracción, o con coma y como fracción (otro 2 %).

Puede observarse que en quinto año las tres últimas clases (pueden escribirse con coma, como fracción o ambas cosas) son las más numerosas. Con respecto a los alumnos de tercer año se puede ver una mayoría (66 %) que opta por no contestar o brindar poca información. Los pocos que contestan están distribuidos en todas las clases.

Observamos que, por un lado, en las Clases 1.3 y 1.4 puede verse que hay una operación que se realiza a los enteros para crear estos nuevos números u objetos, mientras que por otro lado en las clases 1.5, 1.6 y 1.7 se pone el foco en que

| **Clase** | Ejemplo de respuesta | Porcentaje de Alumnos | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $1^{ro}$ | $3^{ro}$ | $5^{to}$ | Total |
| 1.1- *No Sabe / No Contesta* | | 40 | 66 | 27 | 44,5 |
| 1.2- *Confusión - aspecto irrelevante* | `Para mí es que se relacionan` | 18 | 9 | 12 | 13 |
| 1.3- Los racionales son *la parte (ración o fracción) de un entero* | `Son los números que se pueden racionar en partes, por ejemplo` $\frac{1}{2}$ `es la mitad de 1` | 19 | 12 | 7 | 13 |
| 1.4- Los racionales son los que *están entre dos enteros o no son enteros* | `Racionales son los que están entre dos enteros` | 15 | 7 | 7 | 10 |
| 1.5- Los racionales son los que *pueden escribirse con coma, o con decimales* | `Racionales son todos los números que contienen decimales. Sirven para decir números más exactos` | 4 | 2 | 18 | 7,5 |
| 1.6- Los racionales son los que *pueden escribirse como fracción* | `Todos los números que son resultados de una razón o se expresan en forma de fracción` | 2 | 0 | 9 | 4 |
| 1.7- Los racionales son los que *pueden escribirse con coma y como fracción* | `Racionales cubren todos los números, números con coma y fracciones` | 2 | 4 | 20 | 8 |

TABLA 1. Caracterización, ejemplos literales de respuesta, porcentaje de estudiantes de las categorías de respuestas a la Tarea 1

estos números se representan o escriben de alguna forma particular, es decir, se relacionan con una representación externa.

**3.2. Categorización de las respuestas a la Tarea 2.** En esta tarea se pregunta si entre dos racionales dados se pueden encontrar números intermedios. Como dijimos, para esta tarea, se realizó una Clasificación de las respuestas obtenidas a partir del Análisis Factorial de Correspondencias Múltiple (AFCM) de los 132 estudiantes descriptos por sus respuestas a las dos preguntas de la tarea.

Se definieron doce variables correspondientes con cada uno de los seis pares de números propuestos, considerándolos para cada una de las dos preguntas, constituyéndose siete modalidades para la primera pregunta y seis para la segunda.

- Para la primera pregunta: ¿Podrías nombrar un número entre los siguientes pares?, las modalidades fueron: (**No Sabe / No Contesta - Sí (sin ejemplo) - Sí (con**

**ejemplo correcto en notación decimal) - Sí (con ejemplo incorrecto en notación decimal) - Sí (con ejemplo correcto en notación fraccionaria) - Sí (con ejemplo incorrecto en notación fraccionaria) - No hay**

- Para la segunda pregunta: ¿Cuántos números hay entre cada uno de los pares anteriores?, las modalidades fueron: **Ninguno** - **Sólo uno** - **Unos Pocos** - **Muchísimos** - **Infinitos** - **No Sabe / No Contesta**).

A continuación daremos una breve descripción de las clases resultantes de la CJA:

- ***Ajenidad (No sabe / No contesta)***: Esta clase esta formada por $25$ estudiantes, mayormente de tercer año. Son estudiantes que suelen no contestar o contestar que *no saben* en la mayoría de los pares de números.
- ***Discretista***: Esta clase es la más numerosa y está formada por $48$ estudiantes que optan por decir que hay *unos pocos* o *ningún* número entre los propuestos. La gran mayoría son alumnos de primer año, aunque también hay alumnos de tercero y de quinto. En particular, dicen que solo hay un número (el $1$) entre $0$ y $2$. Cuando se compara $3,14$ y $3,15$ dicen que no hay ningún otro número entre ellos. Interpretamos que trasladan la discretitud de los naturales a los racionales.
- **Densidad-*Finitista***: Esta clase está formada por $30$ estudiantes, en su mayoría de tercero y quinto año. En general, estos estudiantes, expresan que sí hay algún número entre dos dados, dando a entender que poseen cierta noción de la propiedad de densidad de los números racionales (expresados de manera decimal o fraccionaria). Poseen una noción finitista frente a cuántos números se pueden encontrar entre dos dados, pues optan por la respuesta *unos pocos* o *muchísimos* números entre los dados.
- **Densidad-*Infinitista y Pro-decimal***: Esta clase está formada por $29$ estudiantes y la mayoría es de quinto año. Suelen contestar correctamente un gran número de ítems de la primer pregunta de la Tarea 2, haciendo un uso correcto de la notación, usando preferentemente la notación decimal. Generalmente eligen la opción que expresa que hay infinitos números entre los propuestos.

| **Clase** | Porcentaje de Alumnos | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $1^{ro}$ | $3^{ro}$ | $5^{to}$ | Total |
| 2.1- *Ajenidad (No sabe / No constesta)* | 19,5 | 23 | 15 | 19 |
| 2.2- *Discretista* | 68 | 30 | 7 | 36 |
| 2.3- Densidad-*Finitista* | 8,5 | 27 | 34 | 23 |
| 2.4- Densidad-*Infinitista y Pro-decimal* | 4 | 20 | 44 | 22 |

TABLA 2. Caracterización y porcentaje de estudiantes de las categorías de Tarea 2

Observamos un gradiente en la profundidad de la comprensión de la densidad de los números racionales, partiendo de una visión de estos números como discretos, pasando por concebir una densidad finitista (en el sentido de que aceptan que entre los números dados hay algún número, sin embargo expresan que hay una cantidad finita de ellos), para terminar en una comprensión infinitista de la densidad. En los primeros años vimos que prepondera en los alumnos una idea de los números racionales como discretos, el 68 % de los estudiantes de primer año está en la clase Discretista. Al igual que en la Tarea 1 observamos que muchos de los estudiantes más jóvenes extrapolan propiedades conocidas de los números naturales o enteros a los racionales.

En una etapa intermedia se encuentra la clase Densidad-Finitista. Esta clase está conformada en mayor parte por alumnos de tercero y quinto año. Hacemos notar que en las respuestas de esta clase, la notación no fue determinante en cuanto la elección de si hay muchos o pocos números entre los dados.

Por último encontramos la clase Densidad-Infinitista y Pro-decimal conformada mayormente por estudiantes de quinto año. Estos estudiantes contestan de manera uniforme que entre todos los pares de números propuestos es posible encontrar infinitos números y optan por escribir sus ejemplos utilizando la notación decimal. También se encuentra el 20 % de los estudiantes de tercer año en esta clase y muy pocos de primero. Cabe remarcar que algunos alumnos de primer año se encuentran en la clase Densidad-Infinitista y Pro-decimal y que algunos alumnos de quinto están en la clase Discretista.

De lo expuesto podemos inferir una relación entre el nivel de escolarización y la clase a la que pertenecen los estudiantes.

**3.3. Categorización de las respuestas a la Tarea 3.** En esta tarea se solicita se comparen pares de racionales. La misma se relaciona principalmente con el orden de los números racionales. Daremos una breve descripción de la Clasificación obtenida a partir del Análisis Factorial de Correspondencias Múltiple (AFCM) de los estudiantes descriptos por sus respuestas a la Tarea 3. Se definieron 19 variables, una para cada par de números a comparar, cada una con 3 modalidades: **No sabe / No contesta**, **Correcto** e **Incorrecto**.

Se obtuvo una clasificación en cuatro clases que describiremos a continuación:

- ***No sabe / No constesta***: Está conformada por 18 estudiantes, mayormente de tercer año, que en general no contestan o responden *no sé* a la mayoría de las 19 comparaciones.
- ***Incorrecto - Comparación de Mantisa***: Esta clase está compuesta por 26 estudiantes, principalmente de primer y tercer año. Estos estudiantes se caracterizan por responder incorrectamente algunos incisos, principalmente cuando comparan $0,4$ con $0,326$, $6,3$ con $6,03$, ó $0,333...$ con $\frac{1}{3}$ entre otros, y suelen contestar

correctamente al comparar $\frac{99}{100}$ con $\frac{999}{1000}$ y $1,999...$ con $2$. Una característica notable de este grupo es que contestan que es mayor el número cuya mantisa tiene más decimales, por ejemplo $0,326$ mayor que $0,4$.

- ***Incorrecto - Truncamiento o Redondeo***: Compuesta por 37 estudiantes que en general determinan el número mayor entre los dados teniendo en cuenta sólo la primera cifra decimal (por ejemplo dicen que $1,7501$ es igual a $1,75011$) y parecen confundirse en los casos donde figura la notación decimal junto con la fraccionaria. Se evidencian operaciones de redondeo o truncamiento para responder a la tarea.
- ***Correcto - Fracción y decimal***: Se compone por 51 estudiantes. El 73 % de los estudiantes de quinto año se encuentra en esta clase, y su característica principal es que responden correctamente cuál de los números es mayor, especialmente en las parejas en las que al menos uno de ellos se encuentra expresado con notación fraccionaria.

| **Clase** | Porcentaje de Alumnos | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $1^{ro}$ | $3^{ro}$ | $5^{to}$ | Total |
| 3.1- *No sabe / No contesta* | 13 | 18 | 10 | 14 |
| 3.2- *Incorrecto - Comparación de Mantisa* | 36 | 20 | 0 | 20 |
| 3.3- *Incorrecto - Truncamiento o Redondeo* | 32 | 34 | 17 | 28 |
| 3.4- *Correcto - Fracción y decimal* | 19 | 28 | 73 | 38 |

TABLA 3. Caracterización y porcentaje de estudiantes de las categorías de la Tarea 3

Nuevamente, como en la tarea anterior, se evidencia una asociación del grado de escolarización con las clases expuestas, según una mayor profundidad en la comprensión. Los estudiantes de primer año se encuentran distribuidos en todas las clases, la mayoría de estos estudiantes realiza la tarea en forma incorrecta utilizando tanto la estrategia de comparación de longitud de mantisa, como la de truncamiento y redondeo; una minoría llega a una realización certera de la tarea. Ningún estudiante de quinto año realiza la tarea en forma incorrecta utilizando la comparación de la longitud de la mantisa y una mayoría realiza una correcta resolución de la tarea. Los estudiantes de tercer año se encuentran distribuidos en todas las clases, y se puede observar que, a diferencia con los de primer año, un mayor número de los estudiantes contesta correctamente y las estrategias de truncamiento o redondeo son las que prevalecen, entre los que contestan incorrectamente.

En esta tarea podemos ver algunas de las dificultades ya mencionadas por Widjaja et al. (2008), en particular muchos alumnos de los primeros años utilizan principalmente, como herramienta operativa, la comparación de la longitud de la mantisa.

La estrategia de redondeo, también mencionada por los mismos autores, puede tener su raíz en la discretización de los decimales y en este estudio es una estrategia preponderante en los alumnos de tercer año. Ambas estrategias utilizadas para el abordaje de esta tarea, vinculan el conocimiento previo ya consolidado de los números enteros, y la dificultad de concebir infinitos decimales.

**3.4. Categorización de las respuestas a la Tarea 4.** En esta tarea se indaga, de manera lúdica, las ideas de los estudiantes acerca de la propiedad de densidad, apuntando a una comprensión de este concepto más profunda que en la Tarea 2. En la siguiente tabla se presentan los datos de la clasificación construida para la Tarea 4 y que resultó en 6 categorías de respuesta:

| **Clase** | Ejemplo | Porcentaje de Alumnos | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $1^{ro}$ | $3^{ro}$ | $5^{to}$ | Total |
| *4.1- No sabe / No contesta* | `No sé` | 21,25 | 31,8 | 26,8 | 26,5 |
| *4.2- Aspectos irrelevantes* | `No porque no tiene que ver una cosa con la otra` | 6,5 | 2,5 | 7,4 | 5,3 |
| *4.3- Sí y algún ejemplo arbitrario* | `El número puede ser 1,50` | 17 | 11,4 | 2,5 | 10,6 |
| *4.4- Sí, 1,9; 1,99; 1,999; etc. (con una cantidad finita de 9)* | `Sí se puede asegurar ganar porque Carlos puede decir 1,9 que es el número más cercano al 2` | 27,5 | 31,8 | 9,6 | 23,5 |
| *4.5- Sí, 1,999...* | `1,999... porque antes del 2 viene él y no hay otro después que ese` | 23,5 | 18 | 17 | 19,7 |
| *4.6- No, porque hay infinitos números* | `No, entre 1 y 2 hay infinitos números` | 4,25 | 4,5 | 36,7 | 14,4 |

TABLA 4. Caracterización, ejemplos literales de respuesta, porcentaje de estudiantes de las categorías de respuestas a la Tarea 4

Aproximadamente el 26 % de los encuestados no sabe o no contesta. En la clase 4.2, se encuentran los estudiantes cuyas respuestas son inconsistentes o no se adaptan a la consigna. En la Clase 4.3, encontramos a los alumnos que responden que podrían encontrar un número mayor en este intervalo abierto dando como respuesta un número cualquiera del intervalo. Un 43 % de los estudiantes dio como estrategia ganadora una respuesta utilizando nueves en las cifras decimales: un 23,5 % con finitos nueves (clase 4.4) y un 19,7 % con infinitos nueves (clase 4.5). Los estudiantes que proponen un número ganador con una cantidad finita de nueves son mayormente de primer y tercer año. Cerca de un 14 % de la población, mayormente de quinto año, responde que no podría nombrarse un número que fuera el mayor (clase 4.6). Estos alumnos dicen, en general, que es imposible nombrar un número que les asegure ganar porque hay infinitos números entre 1 y 2, o que a un elemento de dicho intervalo siempre se le puede agregar un decimal.

Podemos observar una asociación de las clases con el nivel de escolarización. Mientras que los estudiantes de primer y de tercer año brindan una interpretación estrictamente finitista de la tarea (clase 4.3 y 4.4), los estudiantes de quinto año constituyen la mayoría de los que dan respuestas infinitistas (clase 4.6). La clase 4.5 se encuentra constituida por estudiantes de los tres niveles en porcentajes cercanos al 20 % de la población, aunque mayormente se encuentran alumnos de primer año. En esta clase en particular se puede ver cómo la idea de infinitos decimales se presenta como una alternativa ya que la idea de un infinito potencial daría una ventaja sobre el rival (siempre podría poner un nueve más).

## §4. Análisis global y asociaciones de las respuestas a las cuatro tareas

Recordemos que para la siguiente clasificación se realizó un AFCM asociando a cada estudiante la clase que le correspondió en cada una de las tareas con las correspondientes modalidades, ver tablas 1, 2, 3 y 4. Es decir, se consideraron cuatro variables, una para cada tarea, como muestra el diagrama descriptivo presente en la Figura 1).

Se realizó una CJA luego de realizar el AFCM, obteniendo seis clases que interpretamos en términos de concepciones de los estudiantes. A continuación describiremos brevemente las clases obtenidas.

1 **- Me siento inseguro, no sé, ni idea**: Está formada por 22 estudiantes (17 % del total) mayormente de tercer año. Modalidades de respuesta asociadas en orden de relevancia: 3.1, 1.1 y 2.1. Los estudiantes de esta clase suelen no contestar o contestar no sé al momento de comparar números racionales (3.1); no contestar acerca de la descripción de número racional (1.1) y no constestar o responder no sé respecto a si se puede encontrar un número entre dos racionales (2.1). Es decir, se caracterizan por la duda o contestar con inseguridad en general.

2 **- Me resulta difícil la densidad**: Esta clase está formada por 14 estudiantes (10 % del total). Modalidades de respuesta asociadas en orden de relevancia: 4.1 y 4.2.

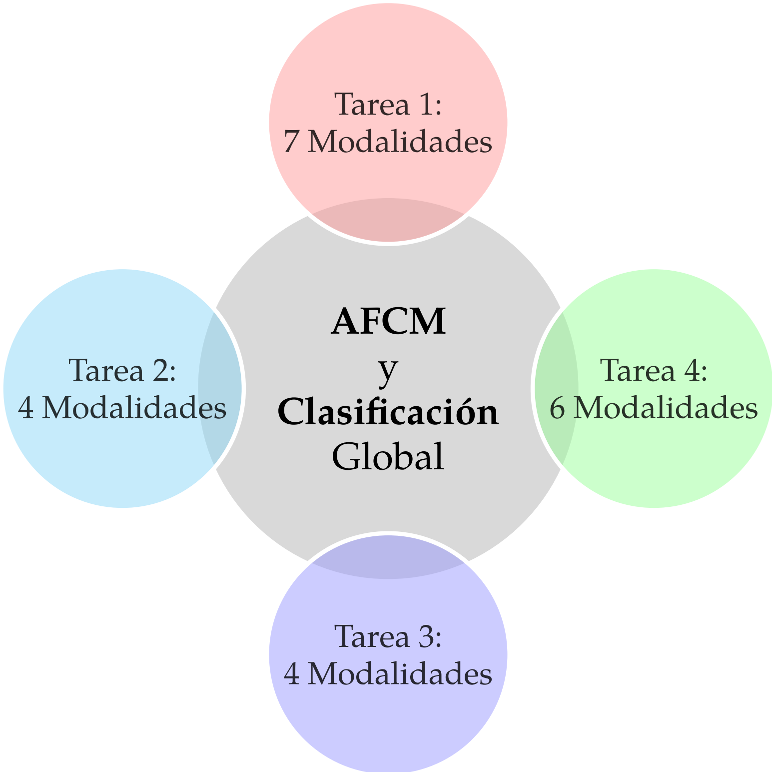



FIGURA 1. Diagrama de la metodología del análisis global

Los estudiantes de esta clase se caracterizan por no contestar o dar una respuesta confusa a la tarea 4. Como ya se introdujo anteriormente, esta tarea es la que demanda un mayor esfuerzo cognitivo hacia la comprensión de la densidad de los números racionales. Por lo que podemos interpretar que en esta clase se agrupan quienes contestan de manera dispersa a lo largo de todo el cuestionario y tienen como característica común que se les dificulta mucho "resolver" la tarea que aborda directamente la densidad.

**3 - Uso las propiedades que ya conozco de los números enteros (discretista)**: Está formada por 32 estudiantes (25 % del total), donde más de la mitad de los estudiantes pertenecen a primer año. Modalidades de respuesta asociadas en orden de relevancia: 2.3, 3.2 y 4.4. Los estudiantes de esta clase suelen responder en forma discretista, trasladando propiedades de los naturales a los racionales (2.3); responden incorrectamente al comparar números, pues dicen que es mayor el número en el cual la mantisa tiene mayor longitud (3.2) y responden que pueden ganar el juego proponiendo un ejemplo del tipo 1,99 (con una finita cantidad de nueves) (4.4). Los estudiantes de esta clase tienden a responder, por ejemplo, que no hay números entre dos dados o solo es posible encontrar unos pocos. Al comparar pares de números racionales dicen, por ejemplo, que 0,50 es mayor que 0,5 o que 0,376 es mayor que el 0,4. En las tres tareas están empleando en los números racionales propiedades válidas en el conjunto de números naturales.

**4 - Identifico a los racionales con los decimales (finitistas)**: En esta clase se encuentran 20 estudiantes (15 % del total). Modalidades de respuesta asociadas en orden de relevancia: 3.3, 2.3, 1.5; 1.1 y 4.1. Los estudiantes de esta clase se caracterizan por tener en cuenta solo la primera cifra decimal de los números para compararlos y utilizar métodos de truncamiento o redondeo para responder en la comparación de números racionales (3.3); respecto a si hay un número racional entre dos dados se encuentran en la clase finitista, es decir, afirman que hay finitos números entre dos dados (2.3). Respecto a la descripción de los racionales o bien no contestan o responden que son aquellos que pueden escribirse con coma (1.5 y 1.1). Citando a un representante de esta clase, podemos notar que, al comparar dos números decimales distintos puede distinguir cuál de los números es mayor: 3,72 es mayor que 3,073 o 6,3 es mayor que 6,03, pero aparece confusión si los números son iguales o si alguno de ellos está expresado en notación fraccionaria.

**5 - Me acerco a entender la densidad y el orden, pienso potencialmente en infinitos decimales**: Está formada por 30 estudiantes (23 % del total). Está conformada uniformemente por estudiantes de primero, tercero y quinto año. Modalidades de respuesta asociadas en orden de relevancia: 4.5, 2.4, 3.4 y 4.6. En cuanto a la propiedad de densidad encontramos que los estudiantes de esta clase tienen una visión infinitista en dos versiones: los que responden que se puede ganar con el $1,999...$ y los estudiantes que dicen que no se podría pues hay infinitos números racionales entre dos dados (4.5 y 4.6). Estos estudiantes poseen una visión de los racionales como infinito-potencialmente densos y prefieren la notación decimal (2.4); podemos inferir que comprenden el orden de estos números (3.4) y comparan correctamente los números racionales.

**6 - Entiendo la densidad y el orden, pero los racionales solo son relevantes hasta los décimos (pensando en magnitudes)**: Está formada por 14 estudiantes (10 % del total), siendo en su mayoría estudiantes de quinto año. Modalidades de respuesta asociadas en orden de relevancia: 1.7, 4.6, 3.4, 1.6 y 2.3. En esta clase se encuentran tanto los estudiantes que describen a los números racionales como los que pueden escribirse con coma y como fracción, como los que expresan que son los que pueden escribirse como fracción (1.7 y 1.6). En cuanto a la comprensión de la densidad la respuesta característica de esta clase es que no puede encontrarse un elemento ganador inmediatamente anterior al supremo, pues hay infinitos racionales en este intervalo abierto (4.6). Podemos inferir que comprenden el orden de los racionales ya que comparan correctamente los pares de números propuestos (3.4). Algunos estudiantes de esta clase consideran que en algunos casos hay un número intermedio entre los propuestos y en otros no (2.3).

| **Clase** | Porcentaje de Alumnos | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $1^{ro}$ | $3^{ro}$ | $5^{to}$ | Total |
| 1- *Me siento inseguro, no sé, ni idea* | 17 | 23 | 10 | 17 |
| 2- *Me resulta difícil la densidad* | 8 | 12 | 12 | 10 |
| 3- *Uso las propiedades que ya conozco de los números enteros (discretista)* | 43 | 23 | 5 | 25 |
| 4- *Identifico a los racionales con los decimales (finitistas)* | 8 | 20 | 17 | 15 |
| 5- *Me acerco a entender la densidad y el orden; pienso potencialmente en infinitos decimales* | 22 | 18 | 29 | 23 |
| 6- *Entiendo la densidad y el orden, pero los racionales solo son relevantes hasta los décimos (pensando en magnitudes)* | 2 | 4 | 27 | 10 |

Con respecto a la asociación con los años de escolaridad podemos observar que el porcentaje de estudiantes en las clases *Me siento inseguro, no sé, ni idea* es el mayor en tercer año y el menor en quinto.

Los estudiantes de primer año mayormente se encuentran en la clase *Uso las propiedades que ya conozco de los números enteros (discretista)*, aunque hay un porcentaje considerable en la clase *Me acerco a entender la densidad y el orden, pienso potencialmente en infinitos decimales*. Puede apreciarse también que un porcentaje considerable de alumnos de tercero y quinto pertenecen a esta última clase.

La mayor dispersión de estudiantes en las distintas clases se da entre los estudiantes de tercer año, quienes también demuestran mayor inseguridad y confusión. Por otra parte, entre los alumnos de quinto año prepondera la aceptación del infinito y una mayor comprensión de la densidad, grandes porcentajes de ellos están en las dos últimas clases.

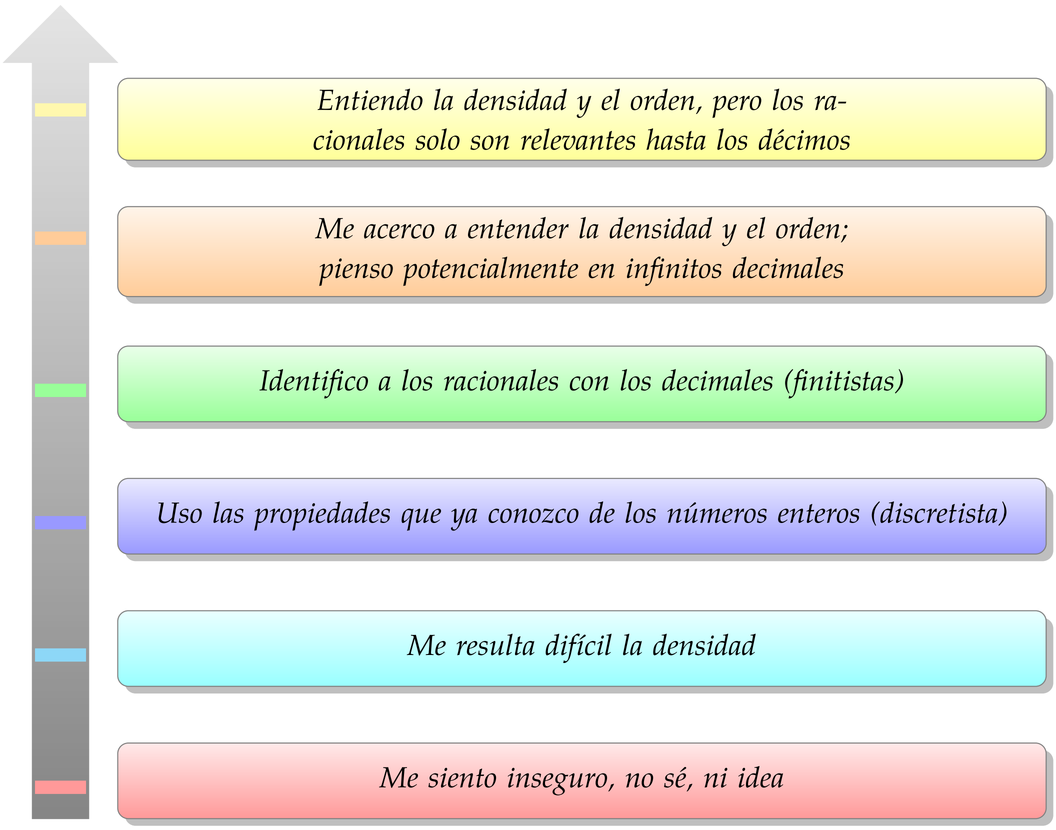
Un comentario aparte merece la clase *Me resulta difícil la densidad*. Esta clase agrupa a estudiantes cuyas respuestas se caracterizan por responder en forma confusa o insegura la tarea vinculada al concepto de densidad en relación al infinito (Tarea 4), es decir, en su forma más profunda, y como ya se anticipó, esta tarea demanda un esfuerzo cognitivo mayor.

Dentro de las preguntas de todo el cuestionario, los estudiantes respondieron en menor cantidad las Tareas 1 y 4, por lo que las consideramos como las tareas "más difíciles". Esto puede deberse a que en ambas actividades se les pide a los alumnos que desarrollen sus respuestas (que las expliquen o definan un concepto o idea). Sin embargo, fueron las preguntas que más aportaron en cuanto a riqueza en clases o modalidades. En particular, se pudo observar que la Tarea 4 fue determinante en cuanto al análisis global de nuestro cuestionario ya que diferenció, por ejemplo, entre las clases quinta y sexta, conformadas por estudiantes cuyas respuestas al cuestionario podrían considerarse satisfactorias o correctas.

## §5. Conclusiones y comentarios finales

En este trabajo se utilizaron herramientas estadísticas para analizar información cualitativa de todo un cuestionario sobre concepciones de los números racionales de estudiantes de la escuela media. Se tuvo como objetivo final analizar las asociaciones entre las respuestas a todas las tareas y así visualizar las relaciones globales entre estas, plausibles de ser interpretadas como concepciones de los estudiantes.

Encontramos un gradiente de profundidad en las concepciones de los estudiantes respecto de los números racionales, mostrando la diversidad de ideas que pueden operar en un grupo de estudiantes, que se ilustra en el siguiente diagrama con la información proveniente del análisis recién expuesto.




En cuanto a las concepciones de los estudiantes, este gradiente se expresa desde una ajenidad respecto al tema, presente fundamentalmente en la clase 1 (*Me* *siento inseguro, no se, ni idea*), le sigue una fase intermedia (tercera y cuarta clase, *Uso las propiedades que ya conozco de los números enteros (discretista)* e *Identifico a los racionales con los decimales (finitistas)*), asociadas principalmente con operar los racionales como si fueran enteros y relacionarlos con objetos ya conocidos como son los números naturales, o con una versión truncada de los racionales como son los números decimales. Se encuentra como diferencia cognitiva entre estas dos clases el manejo de la coma decimal y por ello la cuarta clase se encuentra más arriba en nuestro gradiente.

En este gradiente conceptual, a la clase 2 (*Me resulta difícil la densidad*) la ubicamos transversalmente a las clases 1, 3 y 4. Separada de las clases más avanzadas por la descripción expuesta en la sección anterior.

Finalmente, en el escalón más alto de este gradiente (quinta y sexta clase, *Me acerco a entender la densidad y el orden; pienso potencialmente en infinitos decimales* y *Entiendo la densidad y el orden, pero los racionales solo son relevantes hasta los décimos*) se encuentra la comprensión de los racionales más cercana al respectivo concepto matemático y un buen manejo general de las propiedades de orden y densidad. Sin embargo, se separan dos concepciones distintas relacionadas con la Tarea 4 y la dificultad de comprender el infinito. Entre las dificultades que se pueden distinguir, podemos ver que los integrantes de la clase 5 tienen dificultades en interpretar que los infinitos decimales de 1,99... proporcionan una representación distinta del 2. Por otro lado, en la clase 6 se ve cierta dificultad operativa ligada con la interpretación de número como una magnitud o resultado numérico, es decir, el número representa algo cuya precisión es relativa y es solamente relevante hasta cierta cifra decimal; siguiendo esta línea de pensamiento se podría decir que, por ejemplo, 1,7501 es igual a 1,75011. Además, Mientras que en la clase 5 se encuentran alumnos de todos los años de escolaridad, en la clase 6 se encuentran casi exclusivamente alumnos de quinto año.

Entre las dificultades más evidentes se puede observar con frecuencia que se trasladan las propiedades de los números enteros en cuanto al orden, lo que concuerda con los resultados de (Behr et al., 1983). Por otra parte, los estudiantes más jóvenes presentan una visión finitista, mediando en su concepción de los números (Widjaja et al., 2008). Es en los estudiantes de mayor edad y escolaridad en los cuales está presente una visión infinitista respecto de estas cuestiones.

Las asociaciones entre las respuestas a las distintas tareas nos brindan un complejo panorama de la estructura cognitiva de los estudiantes, mostrando una diversidad de ideas naturalizadas sobre un tema que han trabajado en casi toda su escolaridad como es el número racional. Dados nuestros resultados, observamos que es importante indagar sobre las ideas de los estudiantes y la coherencia (o no) de éstas en un mismo estudiante, pues pueden convivir ideas contradictorias en estos conceptos, por ejemplo, la densidad se presenta como lábil y conectada por momentos con la idea del infinito y en otras instancias conectada con una concepción discreta. Todo esto nos lleva a concluir que estos conceptos son complejos cognitiva y epistemológicamente. Consideramos que estos aspectos deberían ser considerados por la enseñanza, de manera tal que prevea entre sus metas que en los últimos años de secundaria se realice un trabajo específico sobre estas complejas nociones, y así facilitar el pasaje de una matemática escolar a una matemática más avanzada.

## Referencias


Arrigo, G., & D'Amore, B. (2004). Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. *Educación Matemática*, *16 (2)*, 5-19.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios de cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*, 97-140.

Baccalá, N., & Montoro, V. (2008). *Introducción al análisis multivariado* (Vol. 51). Centro Regional Universitario Bariloche: Universidad Nacional del Comahue.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. *In R. Lesh and M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, 91-125.

Benzécri, J. (1973). *L'analyse des données. tomo 1: La taxinomie. tomo 2: L' analyse des correspondances* (second ed.). Dunod, Paris.

Crivisqui, E. (1993). *Análisis factorial de correspondencias. un instrumento de investigación en ciencias sociales*. Asunción: Edición del Laboratorio de Informática Social. Universidad Católica de Asunción.

Fischbein, E., Jehiam, R., & Cohen, D. (1994). The irrational numbers and the corresponding epistemological obstacles. *Proceedings XVIII PME*(2), 352-359.

Fischbein, E., Tirosh, D., & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *10*, 3-40.

Juan, M., Montoro, V., & Scheuer, N. (2012). Colecciones infinitas: Ideas de estudiantes de escuelas secundarias. *Educación matemática*, *24*(2), 61-90.

Merenluoto, K. (2003). Abstracting the density of numbers on the number line a quasi - experimental study. *In N. A. Pateman, B. J. Dougherty and J. Zilliox (Eds.), Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA*, *3*, 285-292.

Monaghan, J. (2001). Young people's ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics*(48), 239-258.

Montoro, V. (2005). Al infinito y más acá: concepciones de estudiantes universitarios. *Infancia y aprendizaje*, *28*(4), 409-427.

Montoro, V., Scheuer, N., & Pérez-Echeverría, M. P. (2016). ¿cuán abundantes son los conjuntos de números? estudiantes comparando infinitos. *Educación Matemática*, *28*, 145-174.

Moreno-Armella, L., & Waldegg, G. (1995). Variación y representación: del número al continuo. *Revista de Educación Matemática*, *7*, 12-28.

Nardoni, M., Camara, V., & Pochulu, M. (2014). Evaluando la comprensión de los números racionales en estudiantes que culminan la escuela secundaria. *revista YUPANA*, *14*(8), 67-82.

Saiz, I., Gorostegui, E., & Vilotta, D. (2011). La matemática necesaria para la enseñanza de los racionales en secundario. *revista YUPANA*, *11*(6), 11-20.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, *14*, 503-518.

Steinle, V., & Pierce, R. (2006). Incomplete or incorrect understanding of decimals: an important deficit for student nurses. *In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká and N. Stehlíková (Eds.), Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *30*(5), 161-168.

Steinle, V., & Stacey, K. (1998). The incidence of misconceptions of decimal notation amongst students in grades 5 to 10. in clive kanes, merrilyn goos, elizabeth warren. (eds). *Teaching Mathematics in New Times, MERGA 21*, *2*, 548-555.

Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A. O., & Wilson, J. W. (1999). Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers. *Retrieved May 05, 2005 from http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html.*.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, *14*(5), 453-467.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2007). How many numbers are there in an interval? presuppositions, synthetic models and the effect of the number line. *In S. Vosniadou, A. Baltas, and X. Vamvakoussi (Eds.), Reframing the conceptual change approach in learning and instruction*, 267-283.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? aspects of secondary school students? understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and instruction*, *28*, 181-209.

Waldegg, G. (1993). La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruction. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, *5*, 19-36.

Ward, J. (1963). Hierarchical grouping to optimize an objective function. *Journal American Statistical Association*, *58*, 236-244.

Widjaja, W., Stacey, K., & Steinle, V. (2008). Misconceptions about density of decimals: Insights from pre-service teachers' work. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, *31*(2), 117-131.

Maximiliano Palacios Amaya
*Departamento de Matemática, Centro Regional Universitario Bariloche - Universidad Nacional del Comahue*
(✉) *palmaxiss@gmail.com*

Verónica Bianchi
*Departamento de Matemática, Centro Regional Universitario Bariloche - Universidad Nacional del Comahue*
(✉) *bianchi.vero@gmail.com*

Virginia Montoro
*Departamento de Matemática, Centro Regional Universitario Bariloche - Universidad Nacional del Comahue*
(✉) *vmontoro@gmail.com*

Recibido: *28 de agosto de 2018*.
Aceptado: *5 de noviembre de 2018*.
Publicado en línea: *21 de diciembre de 2018*.